arXiv:2601.03060v1 [math.AP] 6 Jan 2026

涉及混合局部-非局部算子的指数临界 Choquard 方程基态解的存在性与集中

ShaoxiongChen Min Yang Zhipeng Yang*

云南省现代分析数学及其应用重点实验室，中国昆明；云南师范大学数学系，中国昆明

摘要

我们研究涉及局部与非局部混合算子的 Choquard 方程

$$-\varepsilon^2\Delta u+\varepsilon^{2s}(-\Delta)^s u+V(x)u=\varepsilon^{\mu-2}\left(\frac{1}{|x|^\mu}*F(u)\right)f(u)\quad \text{in } \mathbb{R}^2,$$

其中 $\varepsilon>0$, $s\in(0,1)$, $0<\mu<2$, f 具有 Trudinger–Moser临界指数增长，且 $F(t)=\int_0^t f(\tau)\,d\tau$。通过变分方法，并结合 Trudinger–Moser 不等式以及针对临界增长和非局部相互作用项的紧性论证，我们证明了基态解的存在性，并描述了当 $\varepsilon\to 0^+$ 时的集中行为。

关键词：Choquard 方程；混合局部-非局部算子；变分方法。

MSC2020：35R11, 35B40, 35J20。

1 引言与主要结果

本文研究混合局部-非局部 Choquard 方程正基态解的存在性与集中：

$$-\varepsilon^2\Delta u+\varepsilon^{2s}(-\Delta)^s u+V(x)u=\varepsilon^{\mu-2}\left(\frac{1}{|x|^\mu}*F(u)\right)f(u)\quad \text{in } \mathbb{R}^2, \tag{1.1}$$

其中 $\varepsilon>0$, $s\in(0,1)$, $0<\mu<2$, $V:\ \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 为连续的，$f:\ \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 为连续函数，并且

$$F(t)=\int_0^t f(\tau)\,d\tau.$$

这里 Δ 表示拉普拉斯算子，而 $(-\Delta)^s$ 是分数阶拉普拉斯算子，其定义（相差一个正常数归一化因子）为

$$(-\Delta)^s u(x)=\mathrm{P.V.}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{2+2s}}\,dy,$$

其中，P.V. 表示柯西主值。

(1.1)中的算子结合了二阶局部扩散和阶数为 $2s$的非局部扩散。引入未缩放的混合算子

$$\mathcal{L}=-\Delta+(-\Delta)^s,$$

以及其半经典缩放

$$\mathcal{L}_\varepsilon u=-\varepsilon^2\Delta u+\varepsilon^{2s}(-\Delta)^s u.$$

*通讯作者：yangzhipeng326@163.com

本文旨在研究二维 Choquard 方程的半经典基态，其中混合算子与临界指数非线性和非局部卷积项相互作用。

近年来，涉及局部与非局部混合算子的方程日益受到关注。这类模型源于不同的应用背景，并推动了偏微分方程理论中新工具的发展；例如，参见 [7, 8, 22, 39] 及其中的参考文献。在有界区域上，Li 等人 [32]研究了由如下形式的混合算子驱动的椭圆问题

$$\begin{cases} -\Delta u + (-\Delta)^s u = \mu g(x,u) + b(x), & x \in \Omega, \\ u \geq 0, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases}$$

其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 有界。采用所发展的非光滑变分方法，他们在关于 g 和 b的适当假设下得到了存在性结果。Biagi 等人 [6]为混合阶椭圆算子建立了一个通用框架，涵盖存在性、最大值原理以及内部与边界正则性；[31]还推导出了其他正则性性质。在整个空间中，Dipierro 等人 [23] 研究了次临界问题

$$-\Delta u + (-\Delta)^s u + u = u^{r-1} \quad \text{in } \mathbb{R}^N, \qquad u > 0 \text{ in } \mathbb{R}^N, \qquad u \in H^1(\mathbb{R}^N),$$

其中 $r \in (1, 2^*)$，且 $2^* = \frac{2N}{N-2}$对于 $N \geq 3$。他们证明了存在性，随后刻画了幂次衰减和径向对称性等定性性质。受动物觅食等应用的部分启发，针对具有非奇异核的混合模型也有相关结果；参见 [18, 24]。

与此同时，Choquard 型方程也得到了深入研究。这类方程源于 Hartree–Fock 理论，并应用于非线性光学和种群动力学等领域。在半经典情形下，Gao 等人 [26]证明了分数阶 Schr¨odinger–Choquard 方程的正基态的存在性与集中性

$$\varepsilon^{2s}(-\Delta)^s u + V(x)u = \big(I_\alpha * |u|^p\big)|u|^{p-2}u \quad \text{in } \mathbb{R}^N,$$

而 Ambrosio [4] 研究了分数阶 Choquard 方程的存在性、多重性和集中现象。对于局部 Choquard 情形，Yang 和 Ding [41] 考虑了

$$-\varepsilon^2 \Delta u + V(x)u = \left(\frac{1}{|x|^\mu} * u^p\right) u^{p-1} \quad \text{in } \mathbb{R}^3,$$

在 $0 < \mu < 3$ 和 $\frac{6-\mu}{3} < p < 6 - \mu$条件下，并在关于 V的适当假设下，通过山路定理获得了小 ε 时的解。

涉及混合算子的 Choquard 方程直到最近才开始得到系统研究。Anthal [5] 研究了有界区域上具有 Hardy– Littlewood–Sobolev 临界指数的混合算子 Choquard 问题，

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = \left(\int_\Omega \frac{|u(y)|^{2_\mu^*}}{|x-y|^\mu}\, dy\right) |u|^{2_\mu^* - 2}u + \lambda u^p & \text{in } \Omega, \\ u \equiv 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \backslash \Omega, \qquad u \geq 0 \quad \text{in } \Omega, \end{cases}$$

其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 具有 $C^{1,1}$ 边界，$n \geq 3$、$0 < \mu < n$、$p \in [1, 2^* - 1)$，$2_\mu^* = \frac{2n-\mu}{n-2}$ 和 $2^* = \frac{2n}{n-2}$。通过变分方法，作者建立了混合 Hardy–Littlewood–Sobolev 不等式，并证明其最佳常数与经典最佳常数一致，但无法取到。借助精细能量估计和 Pohozaev 恒等式，该研究根据参数 λ 的取值范围，给出了存在性与非存在性结果。Kirane [30] 研究了由混合局部–非局部算子驱动的半线性热方程的质量衰减行为，

$$\begin{cases} \partial_t u + t^\beta \mathcal{L}u = -h(t)u^p, \\ \mathcal{L} = -\Delta + (-\Delta)^{\alpha/2}, \qquad \alpha \in (0,2), \end{cases}$$

并确定了区分不同渐近状态的临界指数。Giacomoni [28] 研究了涉及混合算子的 Choquard 方程的归一化解，并满足 L^2-约束，

$$\begin{cases} \mathcal{L}u + u = \mu\left(I_\alpha * |u|^p\right)|u|^{p-2}u \quad \text{in } \mathbb{R}^n, \\ \|u\|_2^2 = \tau, \end{cases}$$

其中 $\mathcal{L} = -\Delta + \lambda(-\Delta)^s$， $s \in (0,\ 1)$ 且 $\lambda > 0$，并在适当的参数范围内获得了归一化解与基态之间的存在性、正则性和等价性结果。Constantin [16]研究了一个涉及局部–非局部混合非线性算子的双重退化抛物方程

$$\mathcal{A}_\mu u = -\Delta_p u + \mu(-\Delta)_q^s u,$$

并在非线性项满足适当条件时，建立了弱-温和解的存在性、唯一性和定性行为结果，包括稳定化、熄灭以及有限时爆破。

更广泛地说，目前关于混合算子的研究主要集中于内部正则性和最大值原理（例如参见 [10, 12, 17]）、边界 Harnack 原理 [15], 边界正则性和超定问题 [11], 解的定性性质 [9], 存在性与渐近行为（例如参见 [38, 36, 27, 21, 20]），以及形状优化问题 [7, 29]。

受这些进展的启发，本文研究一个涉及混合算子和临界指数增长的二维 Choquard 方程。核心问题是，当局部与非局部扩散同时存在时，方程 (1.1) 的基态解是否存在并在 $\varepsilon \to 0$ 时集中。主要困难来自二维中的临界 Trudinger–Moser 情形、非局部卷积项，以及 $\mathbb{R}^2$ 中由平移产生的紧性缺失。

为了寻找正解，我们始终假设 $f(t) = 0$ 对于 $t \le 0$。此外，我们假设非线性项 f 满足：

(f_1) $f(t) = o\big(t^{\frac{2-\mu}{2}}\big)$ as $t \to 0$;

(f_2) $f(t)$ 在 $+\infty$ 处具有 Trudinger–Moser 意义下的临界指数增长：

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{\mathrm{e}^{\alpha t^2}} = \begin{cases} 0, & \forall\, \alpha > 4\pi, \\ +\infty, & \forall\, \alpha < 4\pi; \end{cases}$$

(f_3) 存在 $\theta > 1$ 使得

$$f(t)\,t \ge \theta F(t) \ge 0 \quad \text{for all } t > 0;$$

(f_4) 映射 $t \mapsto f(t)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是非递减的；

(f_5)

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{t f(t) F(t)}{\mathrm{e}^{8\pi t^2}} \ge \beta, \quad \text{with } \beta > \frac{(2-\mu)(3-\mu)(4-\mu)^2(1+C_s)}{16\pi^2\rho^{4-\mu}}\,\mathrm{e}^{\frac{4-\mu}{4}(a+C_s)\rho^2};$$

(f_6) 存在常数 $M_0 > 0$ 和 $t_0 > 0$ 使得

$$F(t) \le M_0 |f(t)| \quad \text{for all } t \ge t_0.$$

这里， a、 C_s 和 ρ 是正数，将在后续的变分构造中确定。对于势 $V \in C(\mathbb{R}^2)$，我们假设

(V) $0 < V_0 = \inf\limits_{x\in\mathbb{R}^2} V(x) < V_\infty = \liminf\limits_{|x|\to+\infty} V(x) < +\infty.$

这类条件最早由 Rabinowitz 提出 [37]，并被广泛用于恢复紧性以及描述在 V的全局极小值附近的集中。

在这些假设下，我们得到以下结果。

定理 1.1. 假设 (f_1)–(f_6) 和 (V) 成立。那么存在 $\varepsilon_0 > 0$ 使得，对于每个$\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$，问题 (1.1) 至少存在一个正基态解 u_ε。此外，若 $\eta_\varepsilon \in \mathbb{R}^2$ 是 u_ε的全局最大值点，则

$$\lim_{\varepsilon\to 0} V(\eta_\varepsilon) = V_0.$$

本文其余部分安排如下。第 2 节介绍变分框架并汇集主要分析工具。第 3 节推导极小极大值的定量估计。第 4 节研究具有常势 V_0的自治问题，并证明基态解的存在性。第 5 节处理奇异扰动问题，并证明当 $\varepsilon > 0$ 较小时基态解的存在性。最后，第 6 节分析当 $\varepsilon \to 0$时的集中行为，证明平移序列的紧性，并确定集中点位于集合 $M = \{x \in \mathbb{R}^2 : V(x) = V_0\}$附近。

记号。全文中我们使用以下记号。

- $B_R(x)$表示以 $x \in \mathbb{R}^2$为中心、半径为 $R > 0$ 的开球。
- 符号 C 和 C_i $(i \in \mathbb{N}^+)$表示正的常数，其值可能随行而变化。
- 箭头“$\to$”和“$\rightharpoonup$”分别表示强收敛和弱收敛。
- $o_n(1)$表示当 $n \to \infty$时趋于0的量。
- 对于 $r \geq 1$， $\|u\|_r = \left(\int_{\mathbb{R}^2} |u|^r \, dx\right)^{1/r}$ 是 u 在 $L^r(\mathbb{R}^2)$中的范数。
- $\|u\|_\infty$ =本质上确界 $|u(x)|$ 是 u 在 $L^\infty(\mathbb{R}^2)$中的范数。$_{x\in\mathbb{R}^2}$

2 预备结果

在本节中，我们始终假设势 V 和非线性项 f 满足假设（V）和（f_1）–（f_6）。索оболев空间 $H^1(\mathbb{R}^2)$定义为

$$H^1(\mathbb{R}^2) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^2) : \nabla u \in L^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)\},$$

其中， ∇u 表示 u的弱梯度。赋予范数

$$\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^2)} = \left(\int_{\mathbb{R}^2} \left(|u|^2 + |\nabla u|^2\right) dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

$H^1(\mathbb{R}^2)$是一个希尔伯特空间。

对于 $s \in (0,1)$，分数阶索оболев空间 $H^s(\mathbb{R}^2)$定义为

$$H^s(\mathbb{R}^2) = \left\{u \in L^2(\mathbb{R}^2) : \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{2+2s}} \, dx \, dy < \infty\right\},$$

赋予范数

$$\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^2)} = \left(\int_{\mathbb{R}^2} |u|^2 \, dx + \frac{C(n,s)}{2} \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{2+2s}} \, dx \, dy\right)^{\frac{1}{2}},$$

以及 Gagliardo 半范数

$$[u]_s = \left(\frac{C(n,s)}{2} \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{2+2s}} \, dx \, dy\right)^{\frac{1}{2}}.$$

此外，对于 $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$，分数阶拉普拉斯算子按照本文采用的归一化方式可写为

$$(-\Delta)^s u(x) = \mathrm{P.V.} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{2+2s}} \, dy = -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)}{|y|^{2+2s}} \, dy,$$

例如，参见 [19]。特别地，对于 u， $v \in H^s(\mathbb{R}^2)$ 有如下恒等式

$$\int_{\mathbb{R}^2} (-\Delta)^s u \, v \, dx = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \frac{(u(x) - u(y))(v(x) - v(y))}{|x - y|^{2+2s}} \, dx \, dy.$$

以下引理可见于 [5]。

引理 2.1. 设 $0 < s < 1$。则 $H^1(\mathbb{R}^2)$ 连续嵌入到 $H^s(\mathbb{R}^2)$中，即存在常数 $C_s > 0$，使得对于每个 $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$,

$$\frac{1}{2}[u]_s^2 \le C_s \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^2)}^2 = C_s\big(\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2\big).$$

(1.1) 中局部项和非局部项的存在，自然促使我们考虑空间

$$W_\varepsilon = \Big\{u \in H^1(\mathbb{R}^2) : \int_{\mathbb{R}^2} V(\varepsilon x)\, u^2(x)\, dx < \infty\Big\},$$

其内积为

$$(u,v)_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^2} \nabla u \cdot \nabla v\, dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \frac{(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{2+2s}}\, dx\, dy + \int_{\mathbb{R}^2} V(\varepsilon x)\, u(x)v(x)\, dx,$$

相应范数 $\|u\|_\varepsilon = (u,u)_\varepsilon^{1/2}$ 为，即

$$\|u\|_\varepsilon^2 = \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u|^2\, dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{2+2s}}\, dx\, dy + \int_{\mathbb{R}^2} V(\varepsilon x)\, u^2(x)\, dx.$$

由引理 2.1 及假设 (V) 可知，范数 $\|\cdot\|_\varepsilon$ 在 W_ε 上等价于

$$\|u\|_{\varepsilon,0}^2 = \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u|^2\, dx + \int_{\mathbb{R}^2} V(\varepsilon x)\, u^2(x)\, dx.$$

特别地，由于 $V(\varepsilon x) \ge V_0 > 0$，有

$$\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^2)} \le C\, \|u\|_\varepsilon \qquad \text{for all } u \in W_\varepsilon.$$

在 ($x \mapsto \varepsilon x$ 1.1) 中作变量替换，得到等价问题

$$-\Delta u + (-\Delta)^s u + V(\varepsilon x)u = \left(\frac{1}{|x|^\mu} * F(u)\right) f(u) \quad \text{in } \mathbb{R}^2. \tag{2.1}$$

若 u 是（2.1）的解，则 $v(x) = u(x/\varepsilon)$ 是（1.1）的解。

问题（2.1）具有变分结构：其弱解对应于泛函的临界点

$$\mathcal{J}_\varepsilon(u) = \frac{1}{2}\|u\|_\varepsilon^2 - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{1}{|x|^\mu} * F(u)\right) F(u)\, dx,$$

其中 $F(t) = \int_0^t f(\tau)\, d\tau$。此外，$\mathcal{J}_\varepsilon \in C^1(W_\varepsilon, \mathbb{R})$。我们将相应的 Nehari 流形定义为

$$\mathcal{N}_\varepsilon = \big\{u \in W_\varepsilon \setminus \{0\} : \mathcal{G}(u) = 0\big\},$$

其中

$$\mathcal{G}(u) = \langle \mathcal{J}_\varepsilon'(u), u\rangle = \|u\|_\varepsilon^2 - \int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{1}{|x|^\mu} * F(u)\right) f(u)\, u\, dx.$$

Trudinger–Moser 不等式的第一个版本于 $\mathbb{R}^2$ 由 Cao 建立，参见 [13]；另见 [1,14, 25] 及其中的参考文献。该不等式可表述如下。

命题 2.2. 若 $\alpha > 0$ 且 $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$，则

$$\int_{\mathbb{R}^2} \big(\mathrm{e}^{\alpha u^2} - 1\big)\, dx < \infty.$$

此外 若 $\alpha < 4\pi$ 和 $\|u\|_2 \le M < \infty$，则存在常数 $C_1 = C_1(M,\alpha) > 0$ 使得

$$\sup_{\|\nabla u\|_2 \le 1,\ \|u\|_2 \le M} \int_{\mathbb{R}^2} \big(\mathrm{e}^{\alpha u^2} - 1\big)\, dx \le C_1.$$

引理 2.3. *[33]* 设 $t, r > 1$ 和 $0 < \mu < N$ 满足条件

$$\frac{1}{t} + \frac{\mu}{N} + \frac{1}{r} = 2.$$

若 $\varphi \in L^t(\mathbb{R}^N)$ 且 $\psi \in L^r(\mathbb{R}^N)$，则存在常数 $C(t, N, \mu, r) > 0$，其与 φ 和 ψ，使得

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{|x|^\mu} * \varphi \right)(x)\psi(x)\,dx \le C(t, N, \mu, r)\,\|\varphi\|_t\,\|\psi\|_r.$$

特别地，当 $N = 2$ 且 $t = r = \frac{4}{4-\mu}$ 时，有

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{1}{|x|^\mu} * F(u) \right) F(u)\,dx \le C_\mu\,\|F(u)\|^2_{\frac{4}{4-\mu}},$$

其中 $C_\mu > 0$ 仅取决于 μ。

引理 2.4. *[34]* 对于 $\varphi, \psi \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$，若下列积分有限，则有

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{1}{|x|^\mu} * \varphi \right)(x)\psi(x)\,dx \le \left(\int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{1}{|x|^\mu} * \varphi \right)(x)\varphi(x)\,dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{1}{|x|^\mu} * \psi \right)(x)\psi(x)\,dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

引理 2.5. 设 $u \in W_\varepsilon$, $k > 0$, $q > 0$，并假设

$$\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^2)} \le M \quad \textit{and} \quad \frac{4}{4-\mu}\,k\,M^2 < 4\pi.$$

则存在常数 $C = C(k, M, q) > 0$ 使得

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left(\left(\mathrm{e}^{ku^2} - 1\right)|u|^q\right)^{\frac{4}{4-\mu}} dx \le C\,\|u\|_\varepsilon^{\frac{4q}{4-\mu}}.$$

证明. 设 $p = \frac{4}{4-\mu}$，取 $r > 1$ 并令 $r' = \frac{r}{r-1}$，使得

$$\frac{pqr'}{1} \ge 2 \quad \text{and} \quad r\,p\,k\,M^2 < 4\pi.$$

利用 $(\mathrm{e}^\tau - 1)^p \le \mathrm{e}^{p\tau} - 1$ 和 $(\mathrm{e}^\tau - 1)^r \le \mathrm{e}^{r\tau} - 1$ 对 $\tau \ge 0$，Hölder 不等式及命题 2.2，可得

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} \left(\left(\mathrm{e}^{ku^2} - 1\right)|u|^q\right)^p dx &\le \int_{\mathbb{R}^2} \left(\mathrm{e}^{pku^2} - 1\right)|u|^{pq}\,dx \\ &\le \left(\int_{\mathbb{R}^2} \left(\mathrm{e}^{pku^2} - 1\right)^r dx \right)^{\frac{1}{r}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |u|^{pqr'}\,dx \right)^{\frac{1}{r'}}.\end{aligned}$$

将 $u = Av$ 写为 $A = \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^2)} \le M$ 和 $\|v\|_{H^1(\mathbb{R}^2)} = 1$。则

$$\left(\mathrm{e}^{pku^2} - 1\right)^r \le \mathrm{e}^{rpkA^2v^2} - 1,$$

且由 r 的选取可知，参数 $rpkM^2$ 严格小于 4π。因此命题 2.2 给出

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left(\mathrm{e}^{rpkA^2v^2} - 1\right) dx \le \sup_{\|\nabla v\|_2 \le 1,\ \|v\|_2 \le 1} \int_{\mathbb{R}^2} \left(\mathrm{e}^{rpkM^2v^2} - 1\right) dx \le C(k, M, r)$$

对于某个与 u 无关的常数 $C(k, M, r) > 0$。

另一方面，由于 $pqr' \ge 2$ 和 $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$，连续嵌入 $H^1(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^m(\mathbb{R}^2)$ 对所有 $m \ge 2$ 成立，因此

$$\left(\int_{\mathbb{R}^2} |u|^{pqr'}\,dx \right)^{\frac{1}{r'}} \le C\,\|u\|^{pq}_{H^1(\mathbb{R}^2)}.$$

结合最后两个估计，并在 W_ε 上使用 $\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^2)} \le C\,\|u\|_\varepsilon$，我们得出

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left(\left(\mathrm{e}^{ku^2} - 1\right)|u|^q\right)^p dx \le C(k, M, q)\,\|u\|^{pq}_\varepsilon.$$

证明至此完成。 □

引理 2.6。 对于任意 $\varepsilon > 0$, 泛函 $\mathcal{J}_\varepsilon$ 满足:

(i) 存在 $\rho > 0$ 和 $\alpha_1 > 0$, 使得 $\mathcal{J}_\varepsilon(u) \geq \alpha_1$ 对所有满足 $\|u\|_\varepsilon = \rho$的 $u \in W_\varepsilon$ 均成立。

(ii) 存在 $e \in W_\varepsilon$, 满足 $\|e\|_\varepsilon > \rho$, 使得 $\mathcal{J}_\varepsilon(e) < 0$。

证明。 (i) 由 (f_1)–(f_2), 存在 $q > 1$ 和 $k > 0$, 使得对每个 $\eta > 0$, 都存在满足下式的 $C_\eta > 0$

$$|F(t)| \leq \eta\,|t|^{\frac{4-\mu}{2}} + C_\eta\,|t|^q\big(\mathrm{e}^{kt^2} - 1\big) \quad \text{for all } t \in \mathbb{R}. \tag{2.2}$$

利用 引理 2.3 及 $N = 2$ 和 $t = r = \frac{4}{4-\mu}$, 可得

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{1}{|x|^\mu} * F(u)\right) F(u)\,dx \leq C_\mu\,\|F(u)\|^2_{\frac{4}{4-\mu}}.$$

取定 $\eta > 0$。 由 (2.2) 和 $(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$ 对 $a,\ b \geq 0,\ p \geq 1$, 可推得

$$\begin{aligned}\|F(u)\|^2_{\frac{4}{4-\mu}} &\leq C\left(\int_{\mathbb{R}^2}\Big(\eta\,|u|^{\frac{4-\mu}{2}} + C_\eta\,|u|^q\big(\mathrm{e}^{ku^2} - 1\big)\Big)^{\frac{4}{4-\mu}}\,dx\right)^{\frac{4-\mu}{2}} \\ &\leq C_1\,\|u\|_2^{4-\mu} + C_2\left(\int_{\mathbb{R}^2}\big(|u|^q\big(\mathrm{e}^{ku^2} - 1\big)\big)^{\frac{4}{4-\mu}}\,dx\right)^{\frac{4-\mu}{2}}.\end{aligned}$$

令 $C_H > 0$ 满足 $\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^2)} \leq C_H\|u\|_\varepsilon$ 对所有 $u \in W_\varepsilon$均成立。取足够小的 $\rho > 0$, 使得每当 $\|u\|_\varepsilon = \rho$时, 均有

$$\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^2)} \leq M \quad \text{with} \quad M = C_H\rho \quad \text{and} \quad \frac{4}{4-\mu}\,k\,M^2 < 4\pi,$$

从而引理 2.5 适用。利用 $\|u\|_2 \leq V_0^{-\frac{1}{2}}\|u\|_\varepsilon$ 和引理 2.5, 对于 $\|u\|_\varepsilon = \rho$ 我们得到

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{1}{|x|^\mu} * F(u)\right) F(u)\,dx \leq C_3\,\|u\|_\varepsilon^{4-\mu} + C_4\,\|u\|_\varepsilon^{2q}.$$

因此, 对于 $\|u\|_\varepsilon = \rho$,

$$\mathcal{J}_\varepsilon(u) \geq \frac{1}{2}\rho^2 - \frac{C_3}{2}\rho^{4-\mu} - \frac{C_4}{2}\rho^{2q}.$$

由于 $4 - \mu > 2$ 和 $2q > 2$, 若有必要, 取更小的 ρ, 我们得到

$$\mathcal{J}_\varepsilon(u) \geq \alpha_1 > 0,$$

从而得到 (i)。

(ii) 设 $u_0 \in W_\varepsilon$ 满足 $u_0 \geq 0$ 和 $u_0 \neq 0$。 令

$$\Psi(u) = \int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{1}{|x|^\mu} * F(u)\right) F(u)\,dx.$$

对于 $t > 0$, 定义

$$A(t) = \Psi\left(\frac{tu_0}{\|u_0\|_\varepsilon}\right).$$

T当 $A(t) \geq 0$ 适用于 $t > 0$ 时。此外, 利用卷积形式的对称性, 可以计算 s

$$A'(t) = \frac{2}{\|u_0\|_\varepsilon}\int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{1}{|x|^\mu} * F\left(\frac{tu_0}{\|u_0\|_\varepsilon}\right)\right) f\left(\frac{tu_0}{\|u_0\|_\varepsilon}\right) u_0\,dx.$$

改写为,

$$\begin{aligned}A'(t) &= \frac{2}{t}\int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{1}{|x|^\mu} * F\left(\frac{tu_0}{\|u_0\|_\varepsilon}\right)\right) f\left(\frac{tu_0}{\|u_0\|_\varepsilon}\right)\frac{tu_0}{\|u_0\|_\varepsilon}\,dx \\ &\geq \frac{2\theta}{t}\int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{1}{|x|^\mu} * F\left(\frac{tu_0}{\|u_0\|_\varepsilon}\right)\right) F\left(\frac{tu_0}{\|u_0\|_\varepsilon}\right)\,dx = \frac{2\theta}{t}\,A(t),\end{aligned}$$

其中我们使用了（f_3）。因此对于 $t>0$,

$$\frac{A'(t)}{A(t)} \geq \frac{2\theta}{t} \quad \text{whenever } A(t)>0.$$

从 1 积分到 $\sigma>1$，得到

$$A(\sigma) \geq A(1)\,\sigma^{2\theta} \quad \text{for all } \sigma \geq 1.$$

取 $\sigma = t\|u_0\|_\varepsilon$，其中 $t \geq \frac{1}{\|u_0\|_\varepsilon}$，得到

$$\Psi(tu_0) = A\big(t\|u_0\|_\varepsilon\big) \geq \Psi\Big(\frac{u_0}{\|u_0\|_\varepsilon}\Big)\,\|u_0\|_\varepsilon^{2\theta}\,t^{2\theta}.$$

因此,

$$\mathcal{J}_\varepsilon(tu_0) \leq \frac{t^2}{2}\,\|u_0\|_\varepsilon^2 - \frac{1}{2}\Psi\Big(\frac{u_0}{\|u_0\|_\varepsilon}\Big)\,\|u_0\|_\varepsilon^{2\theta}\,t^{2\theta}.$$

由于 $\theta>1$, 右端趋于 $-\infty$，当 $t\to+\infty$ 时。因此，我们可以选取足够大的 $t_0>0$，令 $e=t_0u_0$, 使得 $\|e\|_\varepsilon>\rho$ 且 $\mathcal{J}_\varepsilon(e)<0$。这就证明了 (ii)。 □

结合引理 2.6 与山路定理，我们得到一个 (PS) 序列 $\{u_n\}\subset W_\varepsilon$ 使得

$$\mathcal{J}_\varepsilon(u_n)\to c_\varepsilon \quad \text{and} \quad \mathcal{J}'_\varepsilon(u_n)\to 0 \ \text{ in } W_\varepsilon^*,$$

其中极小极大值由下式给出

$$c_\varepsilon = \inf_{g\in\Gamma}\sup_{t\in[0,1]}\mathcal{J}_\varepsilon(g(t)) > 0,$$

and

$$\Gamma = \big\{g\in C([0,1],W_\varepsilon) : g(0)=0,\ \mathcal{J}_\varepsilon(g(1))<0\big\}.$$

引理 2.7。 假设对所有 $t\leq 0$都有 $f(t)=0$。对于每个满足 $u^+\not\equiv 0$ 的 $u\in W_\varepsilon\setminus\{0\}$，存在唯一的 $t(u)>0$，使得 $t(u)u\in\mathcal{N}_\varepsilon$。此外，

$$\mathcal{J}_\varepsilon(t(u)u) = \max_{t\geq 0}\mathcal{J}_\varepsilon(tu).$$

证明。 固定满足 $u^+\not\equiv 0$ 的 $u\in W_\varepsilon\setminus\{0\}$，并定义 $h\colon[0,\infty)\to\mathbb{R}$ 为

$$h(t) = \mathcal{J}_\varepsilon(tu), \qquad t\geq 0.$$

由（f_1）和引理 2.3，可知当 $t>0$ 充分小时，对所有 $t>0$ 都有 $h(t)>0$。由（f_3）以及引理 2.6(ii)中的论证，可知当 $t\to+\infty$时， $h(t)\to-\infty$。因此， h 在某个 $t(u)>0$处取得全局最大值，并且在该点有 $h'(t(u))=0$。由于

$$h'(t) = \big\langle \mathcal{J}'_\varepsilon(tu), u\big\rangle,$$

我们得到

$$\big\langle \mathcal{J}'_\varepsilon(t(u)u), u\big\rangle = 0.$$

由于 $t(u)>0$,

$$\big\langle \mathcal{J}'_\varepsilon(t(u)u), t(u)u\big\rangle = t(u)\,\big\langle \mathcal{J}'_\varepsilon(t(u)u), u\big\rangle = 0,$$

也就是说， $t(u)u\in\mathcal{N}_\varepsilon$。由 $t(u)$ 的极大性可得

$$\mathcal{J}_\varepsilon(t(u)u) = \max_{t\geq 0}\mathcal{J}_\varepsilon(tu).$$

N现在我们证明唯一性。由于对于 $t\leq 0$， $f(t)=0$，我们有对于 $t\leq 0$， $F(t)=0$，因此

$$F(tu) = F(tu^+), \qquad f(tu) = f(tu^+) \quad \text{a.e. in } \mathbb{R}^2,\ \forall t\geq 0.$$

Writ在对称双重积分形式中， $h'(t)=0$，我们有 $h'(t)=0$ 等价于

$$\|u\|_\varepsilon^2=\iint_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2}\left(\frac{F(tu^+(y))}{t\,u^+(y)}\right)f(tu^+(x))\,\frac{u^+(x)\,u^+(y)}{|x-y|^\mu}\,dx\,dy, \tag{2.3}$$

w这里我们令 $\frac{F(tu^+(y))}{t\,u^+(y)}=0$ 当 $u^+(y)=0$。将（2.3）的右端记为 $R(t)$。

利用（f_3），存在 $\theta>1$，使得对所有 $t>0$都有 $tf(t)\geq\theta F(t)\geq 0$。因此，对每个 $a>0$，函数

$$t\mapsto\frac{F(ta)}{ta}$$

在 $(0,\infty)$ 上非递减，并且在满足 $F(ta)>0$的任一区间上严格递增。此外，由（f_4），对每个 $b\geq 0$，函数 $t\mapsto f(tb)$ 在 $(0,\infty)$ 上非递减。因此，对几乎处处的 (x,y)，（2.3）中的被积函数关于 t非递减，从而 $R(t)$ 在 $(0,\infty)$ 上非递减。

反设存在 $0<t_1<t_2$，使得 $h'(t_1)=h'(t_2)=0$。于是 $R(t_1)=R(t_2)=\|u\|_\varepsilon^2>0$。特别地，集合

$$E:=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2:\ u^+(x)u^+(y)>0,\ f(t_1u^+(x))>0,\ F(t_1u^+(y))>0\right\}$$

具有正测度，否则方程（2.3）中的被积函数几乎处处为零，且 $R(t_1)=0$，这就导致矛盾。对于每个 $(x,y)\in E$，有 $u^+(y)>0$且 $F(t_1u^+(y))>0$，因此

$$\frac{F(t_2u^+(y))}{t_2u^+(y)}>\frac{F(t_1u^+(y))}{t_1u^+(y)}.$$

此外，$f(tu^+(x))$是非递减的，且 $f(t_1u^+(x))$ 在 E 上满足 >0，因此

$$f(t_2u^+(x))\geq f(t_1u^+(x))>0.$$

由此可知，方程（2.3）中的被积函数在 t_2 处严格大于在 t_1 处于 E上的值。对 $\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2$积分可得 $R(t_2)>R(t_1)$，这与 $R(t_2)=R(t_1)$ 矛盾。因此，方程 $h'(t)=0$ 至多有一个解 $t>0$，且相应的 $t(u)$ 唯一。

□

接下来，我们定义这些数

$$c_\varepsilon^*=\inf_{u\in\mathcal{N}_\varepsilon}\mathcal{J}_\varepsilon(u),\qquad c_\varepsilon^{**}=\inf_{u\in W_\varepsilon\setminus\{0\}}\max_{t\geq 0}\mathcal{J}_\varepsilon(tu).$$

引理 2.8。对于任意固定的 $\varepsilon>0$，有

$$c_\varepsilon=c_\varepsilon^*=c_\varepsilon^{**}.$$

证明。首先，由引理 2.7 可知，对每个 $u\in W_\varepsilon\setminus\{0\}$，有 $t(u)u\in\mathcal{N}_\varepsilon$ 且

$$\max_{t\geq 0}\mathcal{J}_\varepsilon(tu)=\mathcal{J}_\varepsilon(t(u)u).$$

因此

$$c_\varepsilon^{**}=\inf_{u\in W_\varepsilon\setminus\{0\}}\mathcal{J}_\varepsilon(t(u)u)\geq\inf_{w\in\mathcal{N}_\varepsilon}\mathcal{J}_\varepsilon(w)=c_\varepsilon^*.$$

反过来，对于任意 $w\in\mathcal{N}_\varepsilon$，再次利用引理 2.7，我们有 $\max_{t\geq 0}\mathcal{J}_\varepsilon(tu)=\mathcal{J}_\varepsilon(w)$，因此

$$c_\varepsilon^{**}\leq\max_{t\geq 0}\mathcal{J}_\varepsilon(tu)=\mathcal{J}_\varepsilon(w)\leq c_\varepsilon^*$$

因此 $c_\varepsilon^{**}=c_\varepsilon^*$。

为了与 c_ε 比较，令 $g\in\Gamma$。由于 $\mathcal{G}(g(0))=0$ 且 $\mathcal{J}_\varepsilon(g(1))<0$，可得

$$\Psi(g(1))>\|g(1)\|_\varepsilon^2.$$

利用（f_3），我们得到

$$\int_{\mathbb{R}^2}\left(\frac{1}{|x|^\mu}*F(g(1))\right)f(g(1))g(1)\,dx\geq\theta\,\Psi(g(1)),$$

因此

$$\mathcal{G}(g(1)) \le \|g(1)\|_\varepsilon^2 - \theta\,\Psi(g(1)) < (1-\theta)\|g(1)\|_\varepsilon^2 < 0.$$

与引理 2.6(i) 类似，存在 $g(\sigma)$，使得 >0 充分小，从而 $\mathcal{G}(g(\sigma))>0$。由$\mathcal{G}\circ g$的连续性，存在 $t_0\in(0,1)$，使得 $g(t_0)$。$\in\mathcal{N}_\varepsilon$于是

$$\sup_{t\in[0,1]} \mathcal{J}_\varepsilon(g(t)) \ge \mathcal{J}_\varepsilon(g(t_0)) \ge c_\varepsilon^*.$$

对 $g\in\Gamma$ 取下确界，得到 $c_\varepsilon \ge c_\varepsilon^*$。

另一方面，固定 $u\in W_\varepsilon\setminus\{0\}$，并令 $t(u)>0$ 由引理 2.7 给出。由于当 $t\to+\infty$ 时，$\mathcal{J}_\varepsilon(tu)\to-\infty$，我们可以选取 $T(u)>t(u)$，使得 $\mathcal{J}_\varepsilon(T(u)u)<0$。定义 $g_u(t)=t\,T(u)u$。于是 $g_u\in\Gamma$ 并且

$$\sup_{t\in[0,1]} \mathcal{J}_\varepsilon(g_u(t)) = \max_{s\in[0,T(u)]} \mathcal{J}_\varepsilon(su) = \mathcal{J}_\varepsilon(t(u)u) = \max_{s\ge0} \mathcal{J}_\varepsilon(su).$$

对 $u\neq0$ 取下确界，得到

$$c_\varepsilon \le \inf_{u\in W_\varepsilon\setminus\{0\}} \max_{s\ge0} \mathcal{J}_\varepsilon(su) = c_\varepsilon^{**}.$$

因此 $c_\varepsilon = c_\varepsilon^* = c_\varepsilon^{**}$。 □

3 极小极大值的估计

本节介绍一个自治极限问题及其变分结构，用于将极小极大值 c_ε 与半经典情形下的参考值进行比较。

设 $a>0$ 为一个常数。我们考虑自治 Choquard 问题

$$\begin{cases} -\Delta u + (-\Delta)^s u + a\,u = \left(\dfrac{1}{|x|^\mu} * F(u)\right) f(u) & \text{in } \mathbb{R}^2,\\ u\in H^1(\mathbb{R}^2),\quad u>0 & \text{in } \mathbb{R}^2. \end{cases} \tag{3.1}$$

由于 $H^1(\mathbb{R}^2)$ 连续嵌入到 $H^s(\mathbb{R}^2)$ 中，Gagliardo 项对每个 $u\in H^1(\mathbb{R}^2)$ 都是有限的，而自然的能量空间为 $W_a = H^1(\mathbb{R}^2)$，并赋予范数

$$\|u\|_a^2 = \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u|^2\,dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{2+2s}}\,dx\,dy + \int_{\mathbb{R}^2} a\,u^2\,dx.$$

与（3.1）相联系的变分泛函为

$$\mathcal{I}_a(u) = \frac{1}{2}\|u\|_a^2 - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\left(\frac{1}{|x|^\mu} * F(u)\right)F(u)\,dx,$$

其中 $F(t)=\int_0^t f(\tau)\,d\tau$。于是 $\mathcal{I}_a\in C^1(W_a,\ \mathbb{R})$，其导数满足

$$\langle \mathcal{I}_a'(u), u\rangle = \|u\|_a^2 - \int_{\mathbb{R}^2}\left(\frac{1}{|x|^\mu} * F(u)\right) f(u)\,u\,dx.$$

我们定义与 $\mathcal{I}_a$ 相关的 Nehari 流形为

$$\mathcal{N}_a = \big\{u\in W_a\setminus\{0\} : \langle \mathcal{I}_a'(u), u\rangle = 0\big\},$$

相应的水平定义为

$$c_a = \inf_{u\in\mathcal{N}_a} \mathcal{I}_a(u). \tag{3.2}$$

c_a 和 $\mathcal{N}_a$ 的基本性质与 c_ε 和 $\mathcal{N}_\varepsilon$的基本性质类似。

引理 3.1. 假设 (V) 和 (f_1)–(f_6) 成立。那么水平 c_a 满足

$$c_a < \frac{4-\mu}{8}\big(1+C_s\big). \tag{3.3}$$

证明. 设 $\rho > 0$ 为 (f_5) 中出现的常数。我们引入以下支撑于 $\bar{w}_n$中的 $B_\rho(0)$（参见 [2]）：

$$\bar{w}_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \begin{cases} \sqrt{\log n}, & 0 \le |x| \le \dfrac{\rho}{n}, \\ \dfrac{\log(\rho/|x|)}{\sqrt{\log n}}, & \dfrac{\rho}{n} \le |x| \le \rho, \\ 0, & |x| \ge \rho. \end{cases}$$

直接计算可得

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \bar{w}_n|^2 \, dx = \int_{\rho/n}^{\rho} \frac{1}{r \log n} \, dr = 1$$

并利用极坐标,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} |\bar{w}_n|^2 \, dx &= \int_0^{\rho/n} r \log n \, dr + \int_{\rho/n}^{\rho} \frac{r \, \log^2(\rho/r)}{\log n} \, dr \\ &= \rho^2 \left(\frac{1}{4 \log n} - \frac{1}{4n^2 \log n} - \frac{1}{2n^2} \right). \end{aligned}$$

设

$$\delta_n = \rho^2 \left(\frac{1}{4 \log n} - \frac{1}{4n^2 \log n} - \frac{1}{2n^2} \right).$$

由引理 2.1 和 $\|\cdot\|_a$的定义可得

$$\begin{aligned} \|\bar{w}_n\|_a^2 &= \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \bar{w}_n|^2 \, dx + \int_{\mathbb{R}^2} a \, \bar{w}_n^2 \, dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|\bar{w}_n(x) - \bar{w}_n(y)|^2}{|x-y|^{2+2s}} \, dx \, dy \\ &\le 1 + a \, \delta_n + C_s \big(1 + \delta_n\big) \\ &= 1 + C_s + \big(a + C_s\big) \delta_n. \end{aligned}$$

定义

$$w_n(x) = \frac{\bar{w}_n(x)}{\sqrt{1 + C_s + (a + C_s)\delta_n}}.$$

Then

$$\|w_n\|_a^2 \le 1. \tag{3.4}$$

为了证明（3.3），只需证明存在 n使得

$$\max_{t \ge 0} \mathcal{I}_a(t w_n) < \frac{4 - \mu}{8} \big(1 + C_s\big). \tag{3.5}$$

Argu通过反证法，假设（3.5）不成立。那么，对于任意 n，存在 $t_n > 0$ 使得 at

$$\max_{t \ge 0} \mathcal{I}_a(t w_n) = \mathcal{I}_a(t_n w_n) \ge \frac{4 - \mu}{8} \big(1 + C_s\big), \tag{3.6}$$

且 t_n 满足

$$\frac{d}{dt} \mathcal{I}_a(t w_n) \Big|_{t = t_n} = 0.$$

计算导数，我们得到

$$t_n^2 \|w_n\|_a^2 = \int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{1}{|x|^\mu} * F(t_n w_n) \right) f(t_n w_n) \, t_n w_n \, dx. \tag{3.7}$$

由（3.6）以及 Choquard 项非负这一事实可得

$$\frac{1}{2} t_n^2 \|w_n\|_a^2 \ge \frac{4 - \mu}{8} \big(1 + C_s\big),$$

因此，由（3.4），

$$t_n^2 \ge \frac{4 - \mu}{4} \big(1 + C_s\big). \tag{3.8}$$

N接下来我们使用（f_5）。根据（f_5）中 β 的定义，对于每个 $\varepsilon>0$，存在 $t_\varepsilon>0$ 使得

$$tf(t)\,F(t)\geq(\beta-\varepsilon)\,\mathrm{e}^{8\pi t^2}\quad\text{for all } t\geq t_\varepsilon. \tag{3.9}$$

在 $B_{\rho/n}$ 函数 w_n 上为常数，且等于

$$w_n=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sqrt{\log n}}{\sqrt{1+C_s+(a+C_s)\delta_n}}.$$

结合 这一结果与 (3.8) 以及 $\delta_n\to 0$，可得 $t_nw_n\to+\infty$ 在 $B_{\rho/n}$ 上成立，因为 $n\to\infty$，因此 $t_nw_n\geq t_\varepsilon$ 因此，对于 n 较大。

利用 (3.7)、(3.9)，并将卷积中的两个积分都限制在 $B_{\rho/n}$，可得

$$\begin{aligned}
t_n^2&\geq t_n^2\|w_n\|_a^2\\
&=\int_{\mathbb{R}^2}\left(\frac{1}{|x|^\mu}*F(t_nw_n)\right)f(t_nw_n)\,t_nw_n\,dx\\
&\geq\int_{B_{\rho/n}}\left(\int_{B_{\rho/n}}\frac{F(t_nw_n)}{|x-y|^\mu}\,dy\right)f(t_nw_n)\,t_nw_n\,dx\\
&=t_nw_nf(t_nw_n)F(t_nw_n)\int_{B_{\rho/n}}\int_{B_{\rho/n}}\frac{1}{|x-y|^\mu}\,dx\,dy\\
&\geq(\beta-\varepsilon)\,\mathrm{e}^{8\pi(t_nw_n)^2}\int_{B_{\rho/n}}\int_{B_{\rho/n}}\frac{1}{|x-y|^\mu}\,dx\,dy.
\end{aligned}$$

令 $R=\rho/n$。对于 $x\in B_R(0)$，有 $B_{R-|x|}(0)\subset B_R(x)$，因此

$$\begin{aligned}
\int_{B_R}\int_{B_R}\frac{1}{|x-y|^\mu}\,dx\,dy&=\int_{B_R}dx\int_{B_R(x)}\frac{1}{|z|^\mu}\,dz\\
&\geq\int_{B_R}dx\int_{B_{R-|x|}}\frac{1}{|z|^\mu}\,dz\\
&=\frac{2\pi}{2-\mu}\int_{B_R}\big(R-|x|\big)^{2-\mu}\,dx\\
&=\frac{4\pi^2}{2-\mu}\int_0^R(R-r)^{2-\mu}r\,dr\\
&=\frac{4\pi^2}{(2-\mu)(3-\mu)(4-\mu)}\,R^{4-\mu}.
\end{aligned}$$

令

$$D_\mu=\frac{4\pi^2}{(2-\mu)(3-\mu)(4-\mu)},$$

我们得到

$$\int_{B_{\rho/n}}\int_{B_{\rho/n}}\frac{1}{|x-y|^\mu}\,dx\,dy\geq D_\mu\left(\frac{\rho}{n}\right)^{4-\mu}.$$

此外，

$$8\pi(t_nw_n)^2=8\pi t_n^2\frac{\log n}{2\pi\big(1+C_s+(a+C_s)\delta_n\big)}=\frac{4t_n^2\log n}{1+C_s+(a+C_s)\delta_n}.$$

因此

$$t_n^2\geq(\beta-\varepsilon)D_\mu\rho^{4-\mu}\exp\left(\log n\left[\frac{4t_n^2}{1+C_s+(a+C_s)\delta_n}-(4-\mu)\right]\right).$$

这意味着 t_n 有界。因此，存在常数 $C_1>0$ 使得

$$\log n\left[\frac{4t_n^2}{1+C_s+(a+C_s)\delta_n}-(4-\mu)\right]\leq C_1$$

对所有 n，可得

$$t_n^2\leq\frac{4-\mu}{4}\Big(1+C_s+(a+C_s)\delta_n\Big)+\frac{C_2}{\log n} \tag{3.10}$$

对于某个常数 $C_2 > 0$。结合（3.8）和（3.10），可得

$$t_n^2 = \frac{4-\mu}{4}\big(1 + C_s\big) + o(1) \quad \text{as } n \to \infty. \tag{3.11}$$

现在我们进一步改进 t_n^2 的下界。令

$$A_n = \{x \in B_\rho : t_n w_n(x) \geq t_\varepsilon\}, \qquad B_n = B_\rho \setminus A_n.$$

由于 w_n 的支集包含于 B_ρ，由（3.7）可得

$$\begin{aligned} t_n^2 &\geq t_n^2 \|w_n\|_a^2 \\ &= \int_{B_\rho} \left(\frac{1}{|x|^\mu} * F(t_n w_n)\right) f(t_n w_n)\, t_n w_n \, dx \\ &= \int_{A_n} \left(\frac{1}{|x|^\mu} * F(t_n w_n)\right) f(t_n w_n)\, t_n w_n \, dx \\ &\quad + \int_{B_n} \left(\frac{1}{|x|^\mu} * F(t_n w_n)\right) f(t_n w_n)\, t_n w_n \, dx. \end{aligned}$$

我们断言，来自 B_n 的贡献当 $n \to \infty$时趋于 0。事实上，由引理 2.3 以及 $p = \frac{4}{4-\mu}$ 和 H¨older 不等式，存在 $C_{\mathrm{HLS}} > 0$ 使得

$$\int_{B_n} \left(\frac{1}{|x|^\mu} * F(t_n w_n)\right) f(t_n w_n)\, t_n w_n \, dx \leq C_{\mathrm{HLS}} \, \|F(t_n w_n)\|_p \, \|\chi_{B_n} t_n w_n f(t_n w_n)\|_p.$$

由（3.10）和（3.4），数列 $\{t_n w_n\}$ 在 $H^1(\mathbb{R}^2)$ 中有界。利用（2.2）、命题 2.2 和 Sobolev 嵌入 $H^1(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^m(\mathbb{R}^2)$，其中 $m \geq 2$ 如引理 2.5所述，我们推得 $\|F(t_n w_n)\|_p \leq C$。

此外，$w_n(x) \to 0$ 几乎处处成立，且 $\{t_n\}$ 有界，因此 $t_n w_n(x) \to 0$ 几乎处处成立。在B_n 上有 $|t_n w_n| \leq t_\varepsilon$，故 $\chi_{B_n} t_n w_n f(t_n w_n) \to 0$ 在 B_ρ 中几乎处处成立，并且它在 $L^p(B_\rho)$中由一个常数函数控制。控制收敛定理表明

$$\|\chi_{B_n} t_n w_n f(t_n w_n)\|_p \to 0,$$

因此， B_n 上的积分收敛于 0。

因此

$$t_n^2 \geq \int_{A_n} \left(\frac{1}{|x|^\mu} * F(t_n w_n)\right) f(t_n w_n)\, t_n w_n \, dx + o(1).$$

在 A_n 上有 $t_n w_n \geq t_\varepsilon$，因此由（3.9），

$$t_n w_n f(t_n w_n) F(t_n w_n) \geq (\beta - \varepsilon)\, \mathrm{e}^{8\pi (t_n w_n)^2}.$$

因此，

$$\begin{aligned} t_n^2 &\geq \int_{B_{\rho/n}} \left(\int_{B_{\rho/n}} \frac{F(t_n w_n)}{|x-y|^\mu} \, dy\right) f(t_n w_n)\, t_n w_n \, dx + o(1) \\ &= t_n w_n f(t_n w_n) F(t_n w_n) \int_{B_{\rho/n}} \int_{B_{\rho/n}} \frac{1}{|x-y|^\mu} \, dx \, dy + o(1) \\ &\geq (\beta - \varepsilon)\, \mathrm{e}^{8\pi (t_n w_n)^2} \int_{B_{\rho/n}} \int_{B_{\rho/n}} \frac{1}{|x-y|^\mu} \, dx \, dy + o(1). \end{aligned}$$

U再次使用二重积分的估计以及 w_n 在 $B_{\rho/n}$ 上的表达式，我们得到

$$t_n^2 \geq (\beta - \varepsilon) D_\mu \rho^{4-\mu} \exp\left(\log n \left[\frac{4t_n^2}{1 + C_s + (a + C_s)\delta_n} - (4-\mu)\right]\right) + o(1).$$

由（3.8），

$$\frac{4t_n^2}{1 + C_s + (a + C_s)\delta_n} - (4-\mu) \geq (4-\mu)\left[\frac{1 + C_s}{1 + C_s + (a + C_s)\delta_n} - 1\right] = -(4-\mu)\frac{(a + C_s)\delta_n}{1 + C_s + (a + C_s)\delta_n},$$

并且由于 $1+C_s+(a+C_s)\delta_n \geq 1$，我们得到

$$\frac{4t_n^2}{1+C_s+(a+C_s)\delta_n} - (4-\mu) \geq -(4-\mu)(a+C_s)\delta_n.$$

因此，

$$t_n^2 \geq (\beta-\varepsilon)D_\mu \rho^{4-\mu} \exp\big(-(4-\mu)(a+C_s)\,\delta_n \log n\big) + o(1).$$

由于 $\delta_n \log n = \frac{\rho^2}{4} + o(1)$，结合（3.11），并令 $n \to \infty$ 可得

$$\frac{4-\mu}{4}\big(1+C_s\big) \geq (\beta-\varepsilon)D_\mu \rho^{4-\mu} \mathrm{e}^{-\frac{4-\mu}{4}(a+C_s)\rho^2}.$$

由于 $\varepsilon > 0$ 是任意的，

$$\beta \leq \frac{(2-\mu)(3-\mu)(4-\mu)^2(1+C_s)}{16\pi^2\rho^{4-\mu}} \mathrm{e}^{\frac{4-\mu}{4}(a+C_s)\rho^2},$$

这与假设（f_5）矛盾。因此，对某个 3.5，式（ n）成立，特别地

$$c_a \leq \max_{t\geq 0} \mathcal{I}_a(tw_n) < \frac{4-\mu}{8}\big(1+C_s\big),$$

这证明了（3.3）。 □

4 自治问题的基态解

引理 4.1。 假设满足(f_1)–(f_4) 以及(f_6) 。设 $u_n \rightharpoonup u$ 属于 $H^1(\mathbb{R}^2)$，且 $u_n \geq 0$ 几乎处处成立于 $\mathbb{R}^2$，并假设

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{1}{|x|^\mu} * F(u_n)\right) f(u_n)u_n\,dx \leq K_0 \tag{4.1}$$

对某个常数 $K_0 > 0$ 及所有 n均成立。那么，对每个 $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$，我们有

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{1}{|x|^\mu} * F(u_n)\right) f(u_n)\phi\,dx = \int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{1}{|x|^\mu} * F(u)\right) f(u)\phi\,dx. \tag{4.2}$$

证明。 由于 $u_n \rightharpoonup u$ 属于 $H^1(\mathbb{R}^2)$，取一个子序列后， $u_n \to u$ 几乎处处成立于 $\mathbb{R}^2$，且 $u \geq 0$ 几乎处处成立。由 (f_3)，我们有$F(t) \geq 0$和 $f(t)t \geq 0$，对 $t \geq 0$成立。记

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{1}{|x|^\mu} * F(u_n)\right) f(u_n)u_n\,dx = \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \frac{F(u_n(y))\,f(u_n(x))u_n(x)}{|x-y|^\mu}\,dy\,dx,$$

对 $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ 应用法图引理和 (4.1)，可得

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{1}{|x|^\mu} * F(u)\right) f(u)u\,dx \leq K_0. \tag{4.3}$$

令 $\Omega = \operatorname{supp}\phi$，并固定 $\varepsilon > 0$。设

$$M_\varepsilon = \frac{2K_0\|\phi\|_\infty}{\varepsilon}.$$

那么，对每个 n,

$$\begin{aligned}\int_{\{u_n \geq M_\varepsilon\}} \left(\frac{1}{|x|^\mu} * F(u_n)\right) |f(u_n)\phi|\,dx &\leq \frac{\|\phi\|_\infty}{M_\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{1}{|x|^\mu} * F(u_n)\right) f(u_n)u_n\,dx \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2K_0} \int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{1}{|x|^\mu} * F(u_n)\right) f(u_n)u_n\,dx \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2},\end{aligned} \tag{4.4}$$

同理，利用（4.3），

$$\int_{\{u \geq M_\varepsilon\}} \left(\frac{1}{|x|^\mu} * F(u)\right) |f(u)\phi|\,dx \leq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.5}$$

因此，来自这些集合的（4.2）中的贡献

$$\{u_n \geq M_\varepsilon\} \cup \{u \geq M_\varepsilon\}$$

对所有 n，均有 ε 界。

定义

$$g_n = f(u_n)\,\phi\,\chi_{\{u_n \leq M_\varepsilon\}}, \qquad g = f(u)\,\phi\,\chi_{\{u \leq M_\varepsilon\}}.$$

由 f 和 $u_n \to u$ 几乎处处的连续性可知，$g_n \to g$ 在 Ω 中几乎处处成立，并且

$$|g_n| \leq \|\phi\|_\infty \max_{0 \leq t \leq M_\varepsilon} |f(t)|\,\chi_\Omega,$$

so

$$g_n \to g \quad \text{in } L^{\frac{4}{4-\mu}}(\mathbb{R}^2). \tag{4.6}$$

接下来，我们控制卷积中大值所作的贡献。由 (f_6) 可知，存在 $M_0 > 0$ 和 $t_0 > 0$，使得

$$F(t) \leq M_0 f(t) \quad \text{for all } t \geq t_0.$$

取足够大的 $K_\varepsilon > \max\{t_0, M_\varepsilon\}$，使得

$$C_\mu^{\frac{1}{2}}\,\|\phi\|_\infty\,|\Omega|^{\frac{4-\mu}{4}} \left(\max_{0 \leq t \leq M_\varepsilon} |f(t)|\right) \left(\frac{M_0 K_0}{K_\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon, \tag{4.7}$$

其中 C_μ 是引理 2.3中的常数。

Set

$$F_n^{\text{tail}} = F(u_n)\,\chi_{\{u_n \geq K_\varepsilon\}}.$$

利用引理 2.4 及 $f = F_n^{\text{tail}}$和 $h = |g_n|$，再利用引理 2.3，我们得到

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{1}{|x|^\mu} * F_n^{\text{tail}}\right) |g_n|\,dx &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{1}{|x|^\mu} * F_n^{\text{tail}}\right) F_n^{\text{tail}}\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{1}{|x|^\mu} * |g_n|\right) |g_n|\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{1}{|x|^\mu} * F_n^{\text{tail}}\right) F_n^{\text{tail}}\,dx\right)^{\frac{1}{2}} C_\mu^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |g_n|^{\frac{4}{4-\mu}}\,dx\right)^{\frac{4-\mu}{4}}. \end{aligned} \tag{4.8}$$

此外，由于 $F \geq 0$ 且核为正，

$$\left(\frac{1}{|x|^\mu} * F_n^{\text{tail}}\right) \leq \left(\frac{1}{|x|^\mu} * F(u_n)\right),$$

因此

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{1}{|x|^\mu} * F_n^{\text{tail}}\right) F_n^{\text{tail}}\,dx \leq \int_{\{u_n \geq K_\varepsilon\}} \left(\frac{1}{|x|^\mu} * F(u_n)\right) F(u_n)\,dx.$$

在 $\{u_n \geq K_\varepsilon\}$ 上，利用（f_6）和 $u_n \geq K_\varepsilon$，我们有

$$F(u_n) \leq M_0 f(u_n) \leq \frac{M_0}{K_\varepsilon} f(u_n) u_n,$$

因此，由（4.1），

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{1}{|x|^\mu} * F_n^{\text{tail}}\right) F_n^{\text{tail}}\,dx \leq \frac{M_0}{K_\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{1}{|x|^\mu} * F(u_n)\right) f(u_n) u_n\,dx \leq \frac{M_0 K_0}{K_\varepsilon}.$$

将其与（4.8）和（4.7）结合，并利用该界

$$\left(\int_{\mathbb{R}^2} |g_n|^{\frac{4}{4-\mu}}\,dx\right)^{\frac{4-\mu}{4}} \leq \|\phi\|_\infty\,|\Omega|^{\frac{4-\mu}{4}} \left(\max_{0 \leq t \leq M_\varepsilon} |f(t)|\right),$$

我们对所有 n 均可得，

$$\left|\int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{1}{|x|^\mu} * F(u_n)\right) g_n\,dx - \int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{1}{|x|^\mu} * \left(F(u_n)\chi_{\{u_n \leq K_\varepsilon\}}\right)\right) g_n\,dx\right| \leq \varepsilon. \tag{4.9}$$

同理，令 $F_{\text{尾部}} = F(u)\chi_{\{u\geq K_\varepsilon\}}$ 并在相同的论证中使用 (4.3)，我们还可得 e

$$\left|\int_{\mathbb{R}^2}\left(\frac{1}{|x|^\mu} * F(u)\right) g\,dx - \int_{\mathbb{R}^2}\left(\frac{1}{|x|^\mu} * \left(F(u)\chi_{\{u\leq K_\varepsilon\}}\right)\right) g\,dx\right| \leq \varepsilon. \tag{4.10}$$

现在令

$$F_n^{\mathrm{tr}} = F(u_n)\,\chi_{\{u_n\leq K_\varepsilon\}}, \qquad F^{\mathrm{tr}} = F(u)\,\chi_{\{u\leq K_\varepsilon\}}.$$

对于 $0 \leq t \leq K_\varepsilon$，定义 $H(t) = F(t)\,t^{-\frac{4-\mu}{2}}$，其中 $t > 0$ 且 $H(0) = 0$。由 (f_1) 可得，当 $t \to 0^+$ 时，$H(t) \to 0$，因此 H 在 $[0, K_\varepsilon]$ 上有界，并且存在 $C_\varepsilon > 0$ 使得

$$F(t) \leq C_\varepsilon\, t^{\frac{4-\mu}{2}} \quad \text{for all } t \in [0, K_\varepsilon]. \tag{4.11}$$

特别地，

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left|F_n^{\mathrm{tr}}\right|^{\frac{4}{4-\mu}} dx \leq C_\varepsilon \int_{\mathbb{R}^2} |u_n|^2\,dx,$$

因此 $\{F_n^{\mathrm{tr}}\}$ 在 $L^{\frac{4}{4-\mu}}(\mathbb{R}^2)$ 中有界。

定义

$$\zeta_n(x) = \left(\frac{1}{|x|^\mu} * F_n^{\mathrm{tr}}\right)(x), \qquad \zeta(x) = \left(\frac{1}{|x|^\mu} * F^{\mathrm{tr}}\right)(x).$$

固定 $x \in \Omega$ 和 $R > 1$。由于 $\mu < 2$ 且 $|F_n^{\mathrm{tr}}| \leq \max_{0\leq t\leq K_\varepsilon} |F(t)|$，函数 $|x-y|^{-\mu}$ 在 $B_R(x)$ 上可积，由控制收敛定理可得

$$\int_{B_R(x)} \frac{|F_n^{\mathrm{tr}}(y) - F^{\mathrm{tr}}(y)|}{|x-y|^\mu}\,dy \to 0 \quad \text{as } n \to \infty.$$

对于补集 $\mathbb{R}^2 \setminus B_R(x)$，令 $p = \frac{4}{4-\mu}$ 和 $p' = \frac{4}{\mu}$。由 Hölder 不等式以及 $\{F_{\mathrm{tr}_n}\}$ 在 $L^p(\mathbb{R}^2)$ 中的有界性，

$$\int_{\mathbb{R}^2\setminus B_R(x)} \frac{|F_n^{\mathrm{tr}}(y)|}{|x-y|^\mu}\,dy \leq \|F_n^{\mathrm{tr}}\|_p \left(\int_{|x-y|>R} \frac{1}{|x-y|^{\mu p'}}\,dy\right)^{\frac{1}{p'}} \leq C\,R^{-\frac{\mu}{2}},$$

将 F_n^{tr} 替换为 F_{tr} 后，同样的估计仍成立。先令 $n \to \infty$，再令 $R \to \infty$，即可得到

$$\zeta_n(x) \to \zeta(x) \quad \text{for every } x \in \Omega.$$

此外，将 $R = 1$ 代入上述分解可得，对所有 $x \in \Omega$ 及所有 n，均有 $|\zeta_n(x)| \leq C$，其中 C 与 n 无关。

由于 $u_n \to u$ 在 Ω 中几乎处处成立，我们有 $g_n(x) \to g(x)$，对几乎处处的 $x \in \Omega$ 及 $|g_n| \leq C\,\chi_\Omega$ 成立。因此，由控制收敛定理，

$$\int_{\mathbb{R}^2} \zeta_n(x)\,g_n(x)\,dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^2} \zeta(x)\,g(x)\,dx. \tag{4.12}$$

最后，我们将其拆分为

$$\int_{\mathbb{R}^2}\left(\frac{1}{|x|^\mu} * F(u_n)\right) f(u_n)\phi\,dx = \int_{\{u_n\geq M_\varepsilon\}}\left(\frac{1}{|x|^\mu} * F(u_n)\right) f(u_n)\phi\,dx + \int_{\mathbb{R}^2}\left(\frac{1}{|x|^\mu} * F(u_n)\right) g_n\,dx,$$

类似地，$u_\circ$ 利用 (4.4)、(4.5)、(4.9)、(4.10) 和 (4.12)，并回想 $\varepsilon > 0$ 是任意的，我们得出

$$\int_{\mathbb{R}^2}\left(\frac{1}{|x|^\mu} * F(u_n)\right) f(u_n)\phi\,dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^2}\left(\frac{1}{|x|^\mu} * F(u)\right) f(u)\phi\,dx,$$

即（4.2）。 □

引理 4.2。假设（f_1）–（f_4）以及（f_6）成立。设 $\{u_n\}$ 是关于 $\mathcal{I}_a$ 的一个（PS）$_{c_a}$ 序列，满足

$$c_a < \frac{4-\mu}{8}(1 + C_s).$$

则有以下结论：

(i) $\{u_n\}$ 在 W_a中有界，且经过一个子序列， $u_n \rightharpoonup u$ 对某个 $u \in W_a$成立；

(ii) $u \geq 0$ 属于 $\mathbb{R}^2$;

(iii) $\mathcal{I}'_a(u) = 0$.

证明。 我们采用约定：对 $t \leq 0$， $f(t) = 0$，因此对 $t \leq 0$， $F(t) = 0$。由于 $\{u_n\}$是一个（PS）$_{c_a}$序列，我们有

$$\mathcal{I}_a(u_n) \to c_a \quad \text{and} \quad \|\mathcal{I}'_a(u_n)\|_{W_a^*} \to 0.$$

根据 $\mathcal{I}_a$的定义，

$$\mathcal{I}_a(u_n) = \frac{1}{2}\|u_n\|_a^2 - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\left(\frac{1}{|x|^\mu} * F(u_n)\right)F(u_n)\,dx,$$
$$\langle \mathcal{I}'_a(u_n), u_n\rangle = \|u_n\|_a^2 - \int_{\mathbb{R}^2}\left(\frac{1}{|x|^\mu} * F(u_n)\right)f(u_n)u_n\,dx.$$

(i) 由（f_3），对 $t \geq 0$有 $f(t)t \geq \theta F(t)$，其中 $\theta > 1$，因此

$$\frac{1}{2\theta}f(t)t - \frac{1}{2}F(t) \geq 0 \quad \text{for all } t \in \mathbb{R}.$$

利用这一点以及核的非负性，我们计算得

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_a(u_n) - \frac{1}{2\theta}\langle \mathcal{I}'_a(u_n), u_n\rangle &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\theta}\right)\|u_n\|_a^2 + \int_{\mathbb{R}^2}\left(\frac{1}{|x|^\mu} * F(u_n)\right)\left(\frac{1}{2\theta}f(u_n)u_n - \frac{1}{2}F(u_n)\right)dx\\ &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\theta}\right)\|u_n\|_a^2.\end{aligned}$$

因此

$$c_a + o_n(1) \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\theta}\right)\|u_n\|_a^2.$$

这意味着 $\{\|u_n\|_a\}$有界。因此，取一个子序列，

$$u_n \rightharpoonup u \text{ in } W_a, \quad u_n \to u \text{ in } L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2) \text{ for all } p \in [1,\infty), \quad u_n \to u \text{ a.e. in } \mathbb{R}^2.$$

(ii) 令 $u_n^- = \max\{-u_n, 0\}$ 且 $u_n^+ = \max\{u_n, 0\}$。根据约定 $f(t) = 0$ for $t \leq 0$，我们有

$$f(u_n)u_n^- = 0 \quad \text{a.e. in } \mathbb{R}^2.$$

将 $\varphi = u_n^-$ 代入 $\langle \mathcal{I}'_a(u_n)\ \varphi\rangle$，得到

$$\langle \mathcal{I}'_a(u_n), u_n^-\rangle = \int_{\mathbb{R}^2}\nabla u_n \cdot \nabla u_n^-\,dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{(u_n(x) - u_n(y))(u_n^-(x) - u_n^-(y))}{|x-y|^{2+2s}}\,dx\,dy + \int_{\mathbb{R}^2} a\,u_n u_n^-\,dx.$$

令 $r^- = \max\{-r, 0\}$，我们使用逐点不等式

$$(r-s)(r^- - s^-) \leq -(r^- - s^-)^2 \quad \text{for all } r, s \in \mathbb{R},$$

由此可得

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{(u_n(x) - u_n(y))(u_n^-(x) - u_n^-(y))}{|x-y|^{2+2s}}\,dx\,dy \leq -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{|u_n^-(x) - u_n^-(y)|^2}{|x-y|^{2+2s}}\,dx\,dy.$$

此外，

$$\int_{\mathbb{R}^2}\nabla u_n \cdot \nabla u_n^-\,dx = -\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla u_n^-|^2\,dx, \qquad \int_{\mathbb{R}^2} a\,u_n u_n^-\,dx = -\int_{\mathbb{R}^2} a\,(u_n^-)^2\,dx.$$

因此

$$\langle \mathcal{I}'_a(u_n), u_n^-\rangle \leq -\|u_n^-\|_a^2.$$

由于 $\|\mathcal{I}_a'(u_n)\|_{W_a^*} \to 0$,

$$\left|\left\langle \mathcal{I}_a'(u_n), u_n^- \right\rangle\right| \le \|\mathcal{I}_a'(u_n)\|_{W_a^*} \|u_n^-\|_a,$$

因此 $\|u_n^-\|_a \to 0$。特别地，$u_n^+ = u_n + u_n^- \rightharpoonup u$ 属于 W_a，且 $u \ge 0$ 在 $\mathbb{R}^2$上几乎处处成立。
(iii) 我们证明 u 是 $\mathcal{I}_a$的临界点。由于对于 $t \le 0$， $F(t) = 0$ 且 $f(t) = 0$，我们有

$$F(u_n) = \begin{cases} F(u_n^+), & u_n > 0, \\ 0, & u_n \le 0; \end{cases} \qquad f(u_n) = \begin{cases} f(u_n^+), & u_n > 0, \\ 0, & u_n \le 0; \end{cases}$$

因此，用 u_n^+ 替换 u_n 不会改变 $\mathcal{I}_a$ 和 $\mathcal{I}_a'$ 中的非线性项。此外，

$$\|u_n - u_n^+\|_a = \|u_n^-\|_a \to 0,$$

由此得到

$$\mathcal{I}_a(u_n^+) - \mathcal{I}_a(u_n) \to 0, \qquad \|\mathcal{I}_a'(u_n^+) - \mathcal{I}_a'(u_n)\|_{W_a^*} \to 0.$$

因此 $\{u_n^+\}$ 仍然是一个 $(PS)_{c_a}$ 序列。用 u_n^+ 替换 u_n 后，我们可以假设对所有 n， $u_n \ge 0$ 均成立。对于任意 $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$，我们有

$$\begin{aligned} \left\langle \mathcal{I}_a'(u_n), \varphi \right\rangle = &\int_{\mathbb{R}^2} \nabla u_n \cdot \nabla \varphi \, dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(u_n(x) - u_n(y))(\varphi(x) - \varphi(y))}{|x-y|^{2+2s}} \, dx \, dy + \int_{\mathbb{R}^2} a \, u_n \varphi \, dx \\ &- \int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{1}{|x|^\mu} * F(u_n) \right) f(u_n) \varphi \, dx \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

前三项由 W_a 中的弱收敛性而收敛。接下来只需证明

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{1}{|x|^\mu} * F(u_n) \right) f(u_n) \varphi \, dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{1}{|x|^\mu} * F(u) \right) f(u) \varphi \, dx \tag{4.13}$$

对于所有 $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$,
由于 $\|\mathcal{I}_a'(u_n)\|_{W_a^*} \to 0$，我们有

$$\left|\left\langle \mathcal{I}_a'(u_n), u_n \right\rangle\right| \le \|\mathcal{I}_a'(u_n)\|_{W_a^*} \|u_n\|_a,$$

so

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{1}{|x|^\mu} * F(u_n) \right) f(u_n) u_n \, dx = \|u_n\|_a^2 - \left\langle \mathcal{I}_a'(u_n), u_n \right\rangle.$$

利用 $\|u_n\|_a$ 的有界性，存在 $C > 0$ 使得

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{1}{|x|^\mu} * F(u_n) \right) f(u_n) u_n \, dx \le C \tag{4.14}$$

对所有 n。因此 $\{u_n\}$ 满足引理 4.1的假设，并且（4.13）得证。对$\langle \mathcal{I}_a'(u_n) \ \varphi \rangle$ 取极限可得 $\langle \mathcal{I}_a'(u) \ \varphi \rangle = 0$ 对所有 $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ 成立，并由 $C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ 在 W_a 中的稠密性，我们得到$\mathcal{I}_a'(u) = 0$ 在 W_a^*中成立。 □

现在我们证明自治问题（3.1）的存在性结果。

定理 4.3。 假设 (f_1)–(f_6) 成立。那么，对任意 $a > 0$，问题 （3.1）都存在一个正基态解。

证明。 仿照引理 2.6的论证可知， $\mathcal{I}_a$ 具有山路几何。因此，存在一个 $(PS)_{c_a}$ 序列 $\{u_n\} \subset W_a$ 使得

$$\mathcal{I}_a(u_n) \to c_a, \qquad \mathcal{I}_a'(u_n) \to 0 \text{ in } W_a^*,$$

其中 $c_a > 0$ 是山路水平。此外，根据引理 3.1，

$$c_a < \frac{4-\mu}{8}(1 + C_s).$$

应用引理 4.2，取一个子序列后，我们有

$$u_n \rightharpoonup u \geq 0 \text{ in } W_a, \qquad \mathcal{I}_a'(u) = 0,$$

并且，在用 u_n^+ 替换 u_n 后，我们可以假设对所有 n， $u_n \geq 0$ 。

步骤 1 我们证明 $\{u_n\}$ 不会以 Lions 意义下的方式消失。反设存在某个 $r > 0$，使得

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}^2} \int_{B_r(y)} |u_n|^2 \, dx = 0. \tag{4.15}$$

那么，由 Lions 浓缩紧性引理（见 [40]），可得

$$u_n \to 0 \quad \text{in } L^p(\mathbb{R}^2), \quad 2 < p < \infty.$$

我们断言

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{1}{|x|^\mu} * F(u_n) \right) F(u_n) \, dx \longrightarrow 0 \quad \text{as } n \to \infty. \tag{4.16}$$

由（f_3）和（4.14），我们有

$$\theta \int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{1}{|x|^\mu} * F(u_n) \right) F(u_n) \, dx \leq \int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{1}{|x|^\mu} * F(u_n) \right) f(u_n) u_n \, dx \leq C \tag{4.17}$$

其中某个 $C > 0$ 与 n 无关。

固定 $\varepsilon > 0$。由 (f_6)，存在 $M_0 > 0$ 和 $t_0 > 0$ 使得

$$F(t) \leq M_0 f(t) \quad \text{for } t \geq t_0.$$

取 $M_\varepsilon >$ 最大值$\{t_0, M_0 C/\varepsilon\}$。利用 ($f_6$) 和 (4.17)，可得

$$\int_{\{u_n \geq M_\varepsilon\}} \left(\frac{1}{|x|^\mu} * F(u_n) \right) F(u_n) \, dx \leq \varepsilon. \tag{4.18}$$

接下来，u 使用 (f_1) 以及 f 和 F 在 0 处的连续性，对于相同的 $\varepsilon > 0$ ，我们可以选取 $N_\varepsilon \in$(0, 1)，使得

$$|F(t)| \leq \varepsilon |t|^{\frac{4-\mu}{2}} \quad \text{and} \quad |f(t)t| \leq \varepsilon |t|^{\frac{4-\mu}{2}} \qquad \text{for } |t| \leq N_\varepsilon.$$

于是，由 (f_3)、引理 2.3–2.4，以及 (4.17)，

$$\begin{aligned}
&\int_{\{u_n \leq N_\varepsilon\}} \left(\frac{1}{|x|^\mu} * F(u_n) \right) F(u_n) \, dx \\
&\leq \frac{1}{\theta} \int_{\{u_n \leq N_\varepsilon\}} \left(\frac{1}{|x|^\mu} * F(u_n) \right) f(u_n) u_n \, dx \\
&\leq \frac{\varepsilon}{\theta} \int_{\{u_n \leq N_\varepsilon\}} \left(\frac{1}{|x|^\mu} * F(u_n) \right) u_n^{\frac{4-\mu}{2}} \, dx \\
&\leq \frac{\varepsilon}{\theta} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{1}{|x|^\mu} * F(u_n) \right) F(u_n) \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{1}{|x|^\mu} * u_n^{\frac{4-\mu}{2}} \right) u_n^{\frac{4-\mu}{2}} \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C\, \varepsilon,
\end{aligned} \tag{4.19}$$

其中 $C > 0$ 与 n无关。

在中间集合 $\{N_\varepsilon \leq u_n \leq M_\varepsilon\}$上，由于 F 是连续的，存在 $C_\varepsilon > 0$ 使得$|F(t)| \leq C_\varepsilon$对于 $t \in [N_\varepsilon, M_\varepsilon]$。因此，利用引理 2.3 其中 $p = \frac{4}{4-\mu}$，

$$\begin{aligned}
\int_{\{N_\varepsilon \leq u_n \leq M_\varepsilon\}} \left(\frac{1}{|x|^\mu} * F(u_n) \right) F(u_n) \, dx &\leq C_\mu \, \|F(u_n)\|_{\frac{4}{4-\mu}} \, \|F(u_n)\chi_{\{N_\varepsilon \leq u_n \leq M_\varepsilon\}}\|_{\frac{4}{4-\mu}} \\
&\leq C \, |\{u_n \geq N_\varepsilon\}|^{\frac{4-\mu}{4}} \longrightarrow 0,
\end{aligned} \tag{4.20}$$

其中我们使用了$|\{u_n \geq N_\varepsilon\}| \leq N_\varepsilon^{-4} \|u_n\|_4^4 \to 0$ 因为 $u_n \to 0$ 在 L^4（$\mathbb{R}^2$）。结合（4.18）、（4.19）和（4.20），并利用 $\varepsilon > 0$的任意性，我们得到（4.16）。

由于 $\{u_n\}$ 是一个（PS）$_{c_a}$ 序列，由（4.16）可得

$$c_a = \lim_{n\to\infty} \mathcal{I}_a(u_n) = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \|u_n\|_a^2. \tag{4.21}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n\|_a^2 = 2c_a < \frac{4-\mu}{4}(1+C_s).$$

因此，存在 $\delta \in (0,1)$ 和 $n_0 \in \mathbb{N}$，使得

$$\|u_n\|_a^2 \le \frac{4-\mu}{4}(1+C_s)(1-\delta), \qquad n \ge n_0. \tag{4.22}$$

利用 Hardy–Littlewood–Sobolev不等式和 (f_3)，我们有

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{1}{|x|^\mu} * F(u_n)\right) f(u_n)u_n\,dx \le C\,\|F(u_n)\|_{\frac{4}{4-\mu}} \|f(u_n)u_n\|_{\frac{4}{4-\mu}}, \qquad \|F(u_n)\|_{\frac{4}{4-\mu}} \le \|f(u_n)u_n\|_{\frac{4}{4-\mu}}.$$

由引理 2.3 和 (4.16)，$\|F(u_n)\|_{\frac{4}{4-\mu}} \to 0$。此外，由 (f_1)–(f_2) 以及一致有界性 (4.22)，仿照引理 2.5 可验证 $\{\|f(u_n)u_n\|_{\frac{4}{4-\mu}}\}$ 有界。因此

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{1}{|x|^\mu} * F(u_n)\right) f(u_n)u_n\,dx \longrightarrow 0.$$

另一方面，

$$\langle \mathcal{I}_a'(u_n), u_n\rangle = \|u_n\|_a^2 - \int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{1}{|x|^\mu} * F(u_n)\right) f(u_n)u_n\,dx \longrightarrow 0,$$

因此 $\|u_n\|_a \to 0$。结合 (4.16) 可得 $\mathcal{I}_a(u_n) \to 0$，故 $c_a = 0$，这与假设矛盾。因此，消失不可能发生，并且存在 $r>0$，$\eta_0 > 0$ 以及一个序列 $\{y_n\} \subset \mathbb{R}^2$，使得

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{B_r(y_n)} u_n^2\,dx \ge \eta_0 > 0.$$

步骤 2定义

$$v_n(x) = u_n(x+y_n) \ge 0.$$

由于 $\mathcal{I}_a$ 是平移不变的，$\{v_n\}$ 又是一个 $(PS)_{c_a}$ 序列。取一个子序列，

$$v_n \rightharpoonup v \ge 0 \ \text{ in } W_a, \qquad \mathcal{I}_a'(v) = 0,$$

且 $v_n \to v$ 属于 $L^2(B_r(0))$。因此

$$\int_{B_r(0)} v^2\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_{B_r(0)} v_n^2\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_{B_r(y_n)} u_n^2\,dx \ge \eta_0 > 0,$$

所以 $v \neq 0$。

由于 $\mathcal{I}_a'(v) = 0$ 且 $v \neq 0$，我们有 $v \in \mathcal{N}_a$，因此

$$c_a \le \mathcal{I}_a(v).$$

另一方面，取一个子序列，

$$f(v_n)v_n - F(v_n) \to f(v)v - F(v) \quad \text{for a.e. } x \in \mathbb{R}^2.$$

由于 $f(t)t - F(t) \ge 0$ 根据 (f_3) 对于 $t \ge 0$ 成立，法图引理给出

$$\begin{aligned} c_a &= \lim_{n\to\infty} \Big(\mathcal{I}_a(v_n) - \frac{1}{2}\langle \mathcal{I}_a'(v_n), v_n\rangle\Big) \\ &= \frac{1}{2} \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{1}{|x|^\mu} * F(v_n)\right) \big(f(v_n)v_n - F(v_n)\big)\,dx \\ &\ge \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{1}{|x|^\mu} * F(v)\right) \big(f(v)v - F(v)\big)\,dx \\ &= \mathcal{I}_a(v) - \frac{1}{2}\langle \mathcal{I}_a'(v), v\rangle = \mathcal{I}_a(v). \end{aligned}$$

因此 $\mathcal{I}_a(v) = c_a$ 且 v 是 (3.1) 的基态解。

步骤 3 我们已经知道 $v \geq 0$ 以及 $v \neq 0$。根据混合局部–非局部算子的强最大值原理（例如，参见 [22] 及其中的参考文献），我们得出

$$v > 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^2.$$

证明至此完成。 □

5 奇异扰动问题的基态解

引理 5.1. 假设(V) 和(f_1)–(f_3) 成立。那么存在一个常数 $\alpha > 0$，与ε无关，使得

$$\|u\|_\varepsilon \geq \alpha, \qquad \forall\, u \in \mathcal{N}_\varepsilon.$$

证明。 我们采用标准约定，即对于 $t \leq 0$， $f(t) = 0$，因此对于 $t \leq 0$， $F(t) = 0$。结合（f_1）与（f_2），对于任意 $\eta > 0$，存在 $q > 1$、 $k > 0$ 和 $C_\eta > 0$，使得

$$|f(s)| \leq \eta |s|^{\frac{2-\mu}{2}} + C_\eta |s|^{q-1}\big(\mathrm{e}^{k4\pi s^2} - 1\big), \qquad \forall s \in \mathbb{R}.$$

令 $p = \frac{4}{4-\mu}$。根据引理 2.3 以及（f_3），

$$\int_{\mathbb{R}^2} \Big(\frac{1}{|x|^\mu} * F(u)\Big) f(u)u\,dx \leq C_0 \|F(u)\|_p \|f(u)u\|_p \leq C_1 \|f(u)u\|_p^2.$$

利用上述关于 $f(u)u$ 和 $(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$ 的估计，可得

$$\int_{\mathbb{R}^2} \Big(\frac{1}{|x|^\mu} * F(u)\Big) f(u)u\,dx \leq C_2 \left(\eta \int_{\mathbb{R}^2} |u|^2\,dx + C_\eta \int_{\mathbb{R}^2} |u|^{\frac{4q}{4-\mu}} \big(\mathrm{e}^{\frac{4k}{4-\mu}4\pi u^2} - 1\big)\,dx\right)^{\frac{4-\mu}{2}}. \tag{5.1}$$

我们估计 (5.1) 中的第二个积分。令 $A = \frac{4q}{4-\mu} > 2$ 且 $B = \frac{4k}{4-\mu}4\pi$。由 Hölder 不等式，

$$\int_{\mathbb{R}^2} |u|^A \big(\mathrm{e}^{Bu^2} - 1\big)\,dx \leq \|u\|_{2A}^A \left(\int_{\mathbb{R}^2} \big(\mathrm{e}^{2Bu^2} - 1\big)\,dx\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{5.2}$$

由 $\mathbb{R}^2$ 上的 Sobolev 嵌入， $\|u\|_{2A} \leq C\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^2)} \leq C\|u\|_\varepsilon$。令 $v = u/\|u\|_\varepsilon$ 则 $\|\nabla v\|_2 \leq 1$，并且由于 $V(\varepsilon x) \geq V_0 > 0$,

$$\|v\|_2^2 \leq \frac{1}{V_0} \int_{\mathbb{R}^2} V(\varepsilon x) v^2\,dx \leq \frac{1}{V_0}.$$

现在我们区分两种情形。

情形 1. 若

$$\|u\|_\varepsilon^2 < \frac{4-\mu}{8k},$$

则将命题 2.2 应用于 v (其中 $M = 1/\sqrt{V_0}$) 可得

$$\int_{\mathbb{R}^2} \big(\mathrm{e}^{2Bu^2} - 1\big)\,dx = \int_{\mathbb{R}^2} \Big(\mathrm{e}^{(2B\|u\|_\varepsilon^2)v^2} - 1\Big)\,dx \leq C_3,$$

其中 $C_3 > 0$ 与 u 和 ε无关。因此，在（5.2）条件下

$$\int_{\mathbb{R}^2} |u|^A \big(\mathrm{e}^{Bu^2} - 1\big)\,dx \leq C_4 \|u\|_\varepsilon^A.$$

将此估计代入（5.1），并利用 $\|u\|_2 \leq V_0^{-1/2}\|u\|_\varepsilon$，可得

$$\int_{\mathbb{R}^2} \Big(\frac{1}{|x|^\mu} * F(u)\Big) f(u)u\,dx \leq \eta C_5 \|u\|_\varepsilon^{4-\mu} + C_5 C_\eta \|u\|_\varepsilon^{2q}, \tag{5.3}$$

其中某个常数 $C_5 > 0$ 与 ε无关。

由于 $u \in \mathcal{N}_\varepsilon$,

$$\|u\|_\varepsilon^2 = \int_{\mathbb{R}^2} \Big(\frac{1}{|x|^\mu} * F(u)\Big) f(u)u\,dx.$$

结合5.3）可得

$$\|u\|_\varepsilon^2 \le \eta C_5 \|u\|_\varepsilon^{4-\mu} + C_5 C_\eta \|u\|_\varepsilon^{2q}.$$

令 $t = \|u\|_\varepsilon > 0$。两边除以 t^2，得到

$$1 \le \eta C_5 t^{2-\mu} + C_5 C_\eta t^{2q-2}.$$

由于 $2-\mu > 0$ 和 $2q-2 > 0$，右端在 $t \to 0^+$ 时趋于 0。因此，存在与 ε 无关的 $\alpha_1 \in \in (0,1)$，使得当 $t \in \in (0, \alpha_1]$ 时，上述不等式不成立。因此，$\|u\|_\varepsilon \ge \alpha_1$ 属于情形 1。

情形 2. 如果

$$\|u\|_\varepsilon^2 \ge \frac{4-\mu}{8k},$$

then

$$\|u\|_\varepsilon \ge \sqrt{\frac{4-\mu}{8k}} =: \alpha_0.$$

最后，令

$$\alpha := \min\{\alpha_0, \alpha_1\} > 0,$$

我们得出，对于所有 $u \in \mathcal{N}_\varepsilon$，都有 $\|u\|_\varepsilon \ge \alpha$，其中 α 与 ε 无关。

□

引理 5.2。假设 (V) 和 (f_1)–(f_6) 成立，并令 c_ε 为与下式相关的山路水平$\mathcal{J}_\varepsilon$（见引理2.8）。则

$$\lim_{\varepsilon \to 0} c_\varepsilon = c_{V_0},$$

其中 c_{V_0} 是由 (3.2) 定义的极小极大值，其中 $a \equiv V_0$。因此，由引理 3.1，存在 $\varepsilon_0 > 0$使得

$$c_\varepsilon < \frac{4-\mu}{8}\big(1 + C_s\big), \qquad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0).$$

此外，有 $c_{V_0} < c_{V_\infty}$，因此

$$\lim_{\varepsilon \to 0} c_\varepsilon = c_{V_0} < c_{V_\infty}.$$

证明。令 $w \in W_{V_0}$ 为方程 (3.1) 的一个正基态，且 $a \equiv V_0$，因此

$$w \in \mathcal{N}_{V_0}, \qquad \mathcal{I}_{V_0}(w) = c_{V_0}.$$

固定 $\delta > 0$ 并选择 $\varphi_\delta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$、$\varphi_\delta \ge 0$，使得

$$\|\varphi_\delta - w\|_{W_{V_0}} < \delta.$$

由引理 2.7 可知，对于 $\mathcal{I}_{V_0}$，存在唯一的 $t_\delta > 0$ 使得 $t_\delta \varphi_\delta \in \mathcal{N}_{V_0}$。令

$$w_\delta = t_\delta \varphi_\delta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2) \cap \mathcal{N}_{V_0}.$$

如有必要，进一步缩小 δ，我们可以假设

$$\mathcal{I}_{V_0}(w_\delta) < c_{V_0} + \delta.$$

设 $x_0 \in \mathbb{R}^2$ 满足 $V(x_0) = V_0$。任取序列 $\varepsilon_n \to 0$，并定义平移测试函数

$$w_n(x) = w_\delta\Big(x - \frac{x_0}{\varepsilon_n}\Big).$$

于是，$w_n \in W_{\varepsilon_n}$ 和 $\{w_n\}$ 在 W_{ε_n}中有界。此外，由于局部项、分数阶项和 Choquard 项具有平移不变性，

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla w_n|^2\,dx = \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla w_\delta|^2\,dx, \qquad \iint_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2} \frac{|w_n(x)-w_n(y)|^2}{|x-y|^{2+2s}}\,dx\,dy = \iint_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2} \frac{|w_\delta(x)-w_\delta(y)|^2}{|x-y|^{2+2s}}\,dx\,dy,$$

and

$$\int_{\mathbb{R}^2}\Big(\frac{1}{|x|^\mu}*F(w_n)\Big)F(w_n)\,dx=\int_{\mathbb{R}^2}\Big(\frac{1}{|x|^\mu}*F(w_\delta)\Big)F(w_\delta)\,dx.$$

对于势项，通过变量替换 $z=x-\frac{x_0}{\varepsilon_n}$，

$$\int_{\mathbb{R}^2}V(\varepsilon_n x)w_n^2\,dx=\int_{\mathbb{R}^2}V(x_0+\varepsilon_n z)\,w_\delta^2(z)\,dz\longrightarrow V_0\int_{\mathbb{R}^2}w_\delta^2\,dz,$$

由于 w_δ 具有紧支集且 V 连续。

对每个 n，由应用于 2.7 的引理 $\mathcal{J}_{\varepsilon_n}$，存在唯一的 $t_n>0$ 使得

$$t_n w_n\in\mathcal{N}_{\varepsilon_n}.$$

我们证明 $\{t_n\}$ 有界且远离 0。由引理 5.1，存在 $\alpha>0$与 ε 无关，使得

$$\|u\|_\varepsilon\geq\alpha\qquad\forall\,u\in\mathcal{N}_\varepsilon.$$

因此，对所有 n都有 $\|t_nw_n\|_{\varepsilon_n}\geq\alpha$。由于 $\sup_n\|w_n\|_{\varepsilon_n}<\infty$，可推出对某个与 n无关的 c_1，有 $t_n\geq c_1>0$。

反设 $t_n\to+\infty$。由于 $w_\delta\geq0$ 且 $w_\delta\neq0$，存在一个可测集 $E\subset\mathbb{R}^2$，满足 $|E|>0$，以及一个常数 $m>0$，使得

$$w_\delta(x)\geq m\quad\text{for a.e. }x\in E.$$

我们在 E上有 $w_n(x+\frac{x_0}{\varepsilon_n})=w_\delta(x)$，因此在 E上有 $t_nw_n(x+\frac{x_0}{\varepsilon_n})=t_nw_\delta(x)\geq t_nm$。

固定 $\sigma\in(0,\beta)$。由 (f_5)，存在 $T_\sigma>0$，使得

$$tf(t)F(t)\geq(\beta-\sigma)\,e^{8\pi t^2}\qquad\text{for all }t\geq T_\sigma.$$

那么，当 $n>N, t_nm>T_\sigma$ 时，存在 N，我们有

$$(t_nw_n)\,f(t_nw_n)\,F(t_nw_n)\geq(\beta-\sigma)\,e^{8\pi(t_nw_n)^2}\geq(\beta-\sigma)\,e^{8\pi t_n^2m^2}.$$

由于 $t_nw_n\in\mathcal{N}_{\varepsilon_n}$,

$$t_n^2\|w_n\|_{\varepsilon_n}^2=\int_{\mathbb{R}^2}\Big(\frac{1}{|x|^\mu}*F(t_nw_n)\Big)f(t_nw_n)\,t_nw_n\,dx.$$

设 $F=E+\frac{x_0}{\varepsilon_n}$, $D=\sup\{|x-y|:\ x,y\in F\}<\infty$并且 $|F|>0$。对于 $x\in F$,

$$\Big(\frac{1}{|x|^\mu}*F(t_nw_n)\Big)(x)\geq\int_F\frac{F(t_nw_n(y+\frac{x_0}{\varepsilon_n}))}{|x-y|^\mu}\,dy\geq\frac{1}{D^\mu}\int_F F(t_nw_n(y+\frac{x_0}{\varepsilon_n}))\,dy.$$

因此,

$$t_n^2\|w_n\|_{\varepsilon_n}^2\geq\frac{1}{D^\mu}\Big(\int_F F(t_nw_n)\,dx\Big)\Big(\int_F f(t_nw_n)\,t_nw_n\,dx\Big).$$

由柯西-施瓦茨不等式,

$$\Big(\int_F F(t_nw_n)\,dx\Big)\Big(\int_F f(t_nw_n)\,t_nw_n\,dx\Big)\geq\Big(\int_F\sqrt{F(t_nw_n)\,f(t_nw_n)\,t_nw_n}\,dx\Big)^2.$$

当 E 且 n 充分大时,

$$\sqrt{F(t_nw_n)\,f(t_nw_n)\,t_nw_n}\geq\sqrt{\beta-\sigma}\,e^{4\pi(t_nw_n)^2}\geq\sqrt{\beta-\sigma}\,e^{4\pi m^2t_n^2}.$$

因此

$$t_n^2\|w_n\|_{\varepsilon_n}^2\geq\frac{\beta-\sigma}{D^\mu}|F|^2e^{8\pi m^2t_n^2}=\frac{\beta-\sigma}{D^\mu}|E|^2e^{8\pi m^2t_n^2},$$

这与 $\|w_n\|_{\varepsilon_n}$ 的有界性以及左端至多按 t_n^2 的速度增长这一事实相矛盾。因此，$\{t_n\}$ 有上界。于是，取一个子序列,

$$t_n\to t_0>0.$$

现在我们证明 $t_0 = 1$。由 $\langle \mathcal{J}'_{\varepsilon_n}(t_n w_n)\ t_n w_n\rangle = 0$ 可得

$$t_n^2 \|w_n\|^2_{\varepsilon_n} = \int_{\mathbb{R}^2} \Big(\frac{1}{|x|^\mu} * F(t_n w_n)\Big) f(t_n w_n)\, t_n w_n\, dx.$$

定义 $\tilde{w}_n(x) = w_\delta(x)$，并注意到 $t_n w_n(x) = t_n \tilde{w}_n\big(x - \frac{x_0}{\varepsilon_n}\big)$。由 Choquard 型的平移不变性，右端等于

$$\int_{\mathbb{R}^2} \Big(\frac{1}{|x|^\mu} * F(t_n w_\delta)\Big) f(t_n w_\delta)\, t_n w_\delta\, dx.$$

由于 $w_\delta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ 且 $t_n \to t_0$，我们有逐点收敛 $t_n w_\delta \to t_0 w_\delta$ 以及一致有界性$|t_n w_\delta| \le C$。由 F的连续性以及 $f(\cdot)\cdot$，可得，当 $p = \frac{4}{4-\mu}$ 时，

$$F(t_n w_\delta) \to F(t_0 w_\delta) \quad \text{in } L^p(\mathbb{R}^2), \qquad f(t_n w_\delta)\, t_n w_\delta \to f(t_0 w_\delta)\, t_0 w_\delta \quad \text{in } L^p(\mathbb{R}^2).$$

于是引理 2.3 推出

$$\int_{\mathbb{R}^2} \Big(\frac{1}{|x|^\mu} * F(t_n w_\delta)\Big) f(t_n w_\delta)\, t_n w_\delta\, dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^2} \Big(\frac{1}{|x|^\mu} * F(t_0 w_\delta)\Big) f(t_0 w_\delta)\, t_0 w_\delta\, dx.$$

此外，由 $\|w_n\|^2_{\varepsilon_n}$ 收敛到 $\|w_\delta\|^2_{V_0}$，我们可以在 Nehari 恒等式中取极限，得到

$$\langle \mathcal{I}'_{V_0}(t_0 w_\delta), t_0 w_\delta\rangle = 0,$$

因此 $t_0 w_\delta \in \mathcal{N}_{V_0}$。由于 $w_\delta \in \mathcal{N}_{V_0}$ 且根据引理 2.7，Nehari 缩放是唯一的，因此我们得出 $t_0 = 1$，从而 $t_n \to 1$。

利用 $t_n w_n \in \mathcal{N}_{\varepsilon_n}$ 和 c_{ε_n}的定义，

$$c_{\varepsilon_n} \le \mathcal{J}_{\varepsilon_n}(t_n w_n).$$

根据上述收敛性和 $t_n \to 1$，我们得到

$$\mathcal{J}_{\varepsilon_n}(t_n w_n) = \mathcal{I}_{V_0}(t_n w_\delta) + \frac{t_n^2}{2}\int_{\mathbb{R}^2} \big(V(x_0 + \varepsilon_n x) - V_0\big) w_\delta^2\, dx \longrightarrow \mathcal{I}_{V_0}(w_\delta).$$

因此，

$$\limsup_{n\to\infty} c_{\varepsilon_n} \le \mathcal{I}_{V_0}(w_\delta) \le c_{V_0} + \delta.$$

令 $\delta \to 0$，得到

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} c_\varepsilon \le c_{V_0}.$$

另一方面，由于对所有 $x \in \mathbb{R}^2$，$V(\varepsilon x) \ge V_0$，因此我们有

$$\mathcal{J}_\varepsilon(u) \ge \mathcal{I}_{V_0}(u) \qquad \forall\, u \in W_\varepsilon,$$

这意味着

$$c_\varepsilon \ge c_{V_0}, \qquad \forall\, \varepsilon > 0.$$

因此，$\lim_{\varepsilon\to 0} c_\varepsilon = c_{V_0}$。

由引理 3.1 结合 $a \equiv V_0$，我们得到

$$c_{V_0} < \frac{4-\mu}{8}(1 + C_s),$$

因此，对所有足够小的 ε，都有 $c_\varepsilon < \frac{4-\mu}{8}(1 + C_s)$。

最后，为了比较 c_{V_0} 和 c_{V_∞}，注意若 $a_1 < a_2$，则 $c_{a_1} < c_{a_2}$。事实上，对于任意 $u \in \mathcal{N}_{a_2}$，都有

$$\langle \mathcal{I}'_{a_1}(u), u\rangle = \langle \mathcal{I}'_{a_2}(u), u\rangle - (a_2 - a_1)\|u\|_2^2 = -(a_2 - a_1)\|u\|_2^2 < 0,$$

因此，存在唯一的 $t(u) \in (0,1)$，使得 $t(u)u \in \mathcal{N}_{a_1}$。于是 $\mathcal{I}_{a_1}(t(u)u) < \mathcal{I}_{a_2}(u)$，对 $u \in \mathcal{N}_{a_2}$ 取下确界可得 $c_{a_1} < c_{a_2}$。由于 $V_0 < V_\infty$，可知 $c_{V_0} < c_{V_\infty}$，因此

$$\lim_{\varepsilon\to 0} c_\varepsilon = c_{V_0} < c_{V_\infty}.$$

□

引理 5.3。 假设 (V) 和 (f_1)–(f_6) 成立。设 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$，并设 $\{u_n\}$ 是$\mathcal{J}_\varepsilon$的 $(PS)_{c_\varepsilon}$ 序列，即

$$\mathcal{J}_\varepsilon(u_n) \to c_\varepsilon, \qquad \mathcal{J}'_\varepsilon(u_n) \to 0 \quad in\ W_\varepsilon^{-1} \quad as\ n \to \infty.$$

那么 $\mathcal{J}_\varepsilon$ 满足$(PS)_{c_\varepsilon}$ 条件：存在 $u_\varepsilon \in W_\varepsilon$ 使得

$$u_n \to u_\varepsilon \quad strongly\ in\ W_\varepsilon.$$

证明。由引理5.2可得

$$c_\varepsilon < \frac{4-\mu}{8}(1 + C_s) \quad \text{for all } \varepsilon \in (0, \varepsilon_0).$$

仿照引理4.2， $\{u_n\}$ 在 W_ε中有界。因此，取一个子序列后，存在 $u_\varepsilon \in W_\varepsilon$使得

$$u_n \rightharpoonup u_\varepsilon \quad \text{in } W_\varepsilon, \qquad u_n \to u_\varepsilon \quad \text{in } L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)\ (p \geq 1), \qquad u_n(x) \to u_\varepsilon(x) \text{ a.e. in } \mathbb{R}^2,$$

并且 $\mathcal{J}'_\varepsilon(u_\varepsilon) = 0$。此外，由引理4.2 我们可以假设 $u_n \geq 0$ 对所有 n均成立。

我们断言 $u_\varepsilon \neq 0$。反设 $u_\varepsilon = 0$。假设对于某个 $r > 0$ ，

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}^2} \int_{B_r(y)} |u_n|^2\, dx = 0.$$

那么，Lions 引理意味着 $u_n \to 0$ 在 $L^p(\mathbb{R}^2)$ 中对每个 $p \in (2, \infty)$ 都成立。利用 (f_1)–(f_2)，并按照引理2.5中的方法应用 Trudinger–Moser 控制，可得

$$\|F(u_n)\|_{\frac{4}{4-\mu}} \to 0, \qquad \|f(u_n)u_n\|_{\frac{4}{4-\mu}} \to 0.$$

根据引理2.3，

$$\int_{\mathbb{R}^2} \Big(\frac{1}{|x|^\mu} * F(u_n)\Big) F(u_n)\, dx \to 0, \qquad \int_{\mathbb{R}^2} \Big(\frac{1}{|x|^\mu} * F(u_n)\Big) f(u_n)u_n\, dx \to 0.$$

由于 $\langle \mathcal{J}'_\varepsilon(u_n)\ u_n\rangle = o_n(1)$，可得

$$\|u_n\|_\varepsilon^2 = \int_{\mathbb{R}^2} \Big(\frac{1}{|x|^\mu} * F(u_n)\Big) f(u_n)u_n\, dx + o_n(1) \to 0,$$

因此 $\mathcal{J}_\varepsilon(u_n) \to 0$，这与 $c_\varepsilon > 0$ 矛盾。所以消失不会发生。

因此，根据 Lions 引理，存在 $r > 0$、 $\delta > 0$ 和 $\{y_n\} \subset \mathbb{R}^2$ ，使得

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{B_r(y_n)} |u_n|^2\, dx \geq \delta.$$

由于 $u_n \to 0$ 属于 $L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$，我们有 $|y_n| \to \infty$。定义 $\tilde{u}_n(x) := u_n(x + y_n)$。那么

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{B_r(0)} |\tilde{u}_n|^2\, dx \geq \delta,$$

并且，经过选取子序列后，

$$\tilde{u}_n \rightharpoonup \tilde{u} \text{ in } H^1(\mathbb{R}^2), \qquad \tilde{u}_n \to \tilde{u} \text{ in } L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)\ (p \geq 1), \qquad \tilde{u}_n(x) \to \tilde{u}(x) \text{ a.e.},$$

其中 $\tilde{u} \neq 0$ 和 $\tilde{u} \geq 0$。选取 $\zeta > 0$ 和一个可测集 $E \subset \mathbb{R}^2$，满足 $|E| > 0$，使得 $\tilde{u} \geq \zeta$ 几乎处处在E上成立。选取 $M > 0$，使得 $E_M := \{x \in E :\ \zeta \leq \tilde{u}(x) \leq M\}$ 具有正测度，并选取一个有界可测子集 $\Omega \subset E_M$，满足 $|\Omega| > 0$。

对于每个 n，由引理 2.7 应用于 $\mathcal{I}_{V_\infty}$，存在唯一的 $t_n > 0$ 使得

$$t_n u_n \in \mathcal{N}_{V_\infty}, \qquad \big\langle \mathcal{I}'_{V_\infty}(t_n u_n), t_n u_n \big\rangle = 0.$$

仿照引理 5.2，利用（f_3），可证明 $\{t_n\}$ 有界且远离 0；因此，取一个子序列，

$$t_n \to t_0 > 0.$$

将关于 $\mathcal{I}_{V_\infty}(t_n u_n)$ 的 Nehari 恒等式与恒等式 $\langle \mathcal{J}'_\varepsilon(u_n)\ u_n\rangle = o_n(1)$ 相减，得到

$$\int_{\mathbb{R}^2} (V_\infty - V(\varepsilon x)) u_n^2\, dx + o_n(1) = \iint_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2} \frac{F(t_n\tilde{u}_n(y)) f(t_n\tilde{u}_n(x)) t_n\tilde{u}_n(x) - t_n^2 F(\tilde{u}_n(y)) f(\tilde{u}_n(x))\tilde{u}_n(x)}{t_n^2|x-y|^\mu}\, dx\, dy. \tag{5.4}$$

固定 $\eta > 0$。由 (V) 可知，存在 $R > 0$ 使得

$$V(\varepsilon x) \geq V_\infty - \eta, \text{ for any } |x| \geq R.$$

利用 $u_n \to 0$ 属于 $L^2(B_R(0))$ 这一事实，我们得出

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^2} (V_\infty - V(\varepsilon x))\, |u_n|^2\ \mathrm{d}x \\ &\leq \int_{B_R(0)} (V_\infty - V_0)\, |u_n|^2\ \mathrm{d}x + \eta \int_{B_R^c(0)} |u_n|^2\ \mathrm{d}x \\ &\leq \eta C + o_n(1) \end{aligned} \tag{5.5}$$

其中 $C = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|_2^2$。

我们断言 $t_0 = 1$。首先假设 $t_0 > 1$。则当 n 足够大时，$t_n > 1$。对于 $a > 0$，定义$H(a) = F(a)/a$。由 (f_3)，我们有 $af(a) - F(a) \geq (\theta-1)F(a) \geq 0$，因此 $H'(a) \geq 0$，且 H 在 $(0,\infty)$ 上非递减。再利用 (f_4)，对于 $t > 1$ 和 $a, b > 0$，有 $F(ta) \geq tF(a)$ 且 $f(tb) \geq f(b)$，因此

$$F(ta) f(tb)\, tb - t^2 F(a) f(b)\, b \geq 0.$$

因此，当 n 足够大时，被积函数

$$G_n(x,y) = \frac{F(t_n\tilde{u}_n(y)) f(t_n\tilde{u}_n(x)) t_n\tilde{u}_n(x) - t_n^2 F(\tilde{u}_n(y)) f(\tilde{u}_n(x))\tilde{u}_n(x)}{t_n^2|x-y|^\mu}$$

在 $\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2$ 上非负。此外，对于几乎处处的 $(x,y) \in \Omega\times\Omega$，由于 $\tilde{u}(x)\ \tilde{u}(y) \in [\zeta, M]$，$F, f$ 和 $t_n \to t_0 > 1$ 的连续性可推出

$$G_n(x,y) \to G(x,y) := \frac{F(t_0\tilde{u}(y)) f(t_0\tilde{u}(x)) t_0\tilde{u}(x) - t_0^2 F(\tilde{u}(y)) f(\tilde{u}(x))\tilde{u}(x)}{t_0^2|x-y|^\mu},$$

并且 $G(x,y) > 0$ 对几乎处处的 $(x,y) \in \Omega\times\Omega$ 成立。由于 $\mu < 2$ 且 Ω 有界，$G \in L^1(\Omega\times\Omega)$。由法图引理，

$$\liminf_{n\to\infty} \iint_{\Omega\times\Omega} G_n\, dx\, dy \geq \iint_{\Omega\times\Omega} G\, dx\, dy > 0.$$

另一方面，由于 $G_n \geq 0$ 且 (5.4)、(5.5) 成立，

$$0 < \iint_{\Omega\times\Omega} G\, dx\, dy \leq \eta C,$$

由于 η 的任意性，这就产生了矛盾。因此，$t_0 > 1$ 不可能。

接下来，假设 $t_0 < 1$。那么，当 n 足够大时，$t_n < 1$ 成立。由 (f_4)，对所有 $a, b > 0$ 以及 $t \in (0,1)$，

$$F(ta) \leq tF(a), \qquad f(tb)\, tb \leq tf(b)\, b,$$

因此

$$F(ta)\big(f(tb)\, tb - F(tb)\big) \leq t^2 F(a)\big(f(b)\, b - F(b)\big).$$

利用

$$\mathcal{I}_{V_\infty}(v) - \frac{1}{2}\langle \mathcal{I}'_{V_\infty}(v), v\rangle = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} \Big(\frac{1}{|x|^\mu} * F(v)\Big)\big(f(v)v - F(v)\big)\, dx,$$

以及 $\langle \mathcal{I}'_{V_\infty}(t_n u_n)\ t_n u_n\rangle = 0$，当 n 足够大时，我们得到

$$\mathcal{I}_{V_\infty}(t_n u_n) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\Big(\frac{1}{|x|^\mu} * F(t_n u_n)\Big)\big(f(t_n u_n)\, t_n u_n - F(t_n u_n)\big)\,dx \le \mathcal{J}_\varepsilon(u_n) - \frac{1}{2}\langle \mathcal{J}'_\varepsilon(u_n), u_n\rangle + o_n(1).$$

令 $n\to\infty$ 可得 $c_{V_\infty} \le c_\varepsilon$，这与引理 5.2矛盾。因此 $t_0 < 1$ 不可能成立，我们得出$t_0 = 1$。

利用 $t_n \to 1$、$\mathcal{J}_\varepsilon$ 的 C^1 正则性以及 $\mathcal{J}'_\varepsilon(u_n) \to 0$，我们有

$$\mathcal{J}_\varepsilon(t_n u_n) = \mathcal{J}_\varepsilon(u_n) + o_n(1) = c_\varepsilon + o_n(1).$$

此外，

$$\mathcal{I}_{V_\infty}(t_n u_n) = \mathcal{J}_\varepsilon(t_n u_n) + \frac{t_n^2}{2}\int_{\mathbb{R}^2}(V_\infty - V(\varepsilon x))u_n^2\,dx \le c_\varepsilon + \eta C + o_n(1),$$

其中用到了 (5.5)。由于 $\mathcal{I}_{V_\infty}(t_n u_n) \ge c_{V_\infty}$ 且 η的任意性，令 $n\to\infty$ 可得 $c_{V_\infty} \le c_\varepsilon$，再次得到矛盾。这表明我们的假设 $u_\varepsilon = 0$ 是错误的，因此 $u_\varepsilon \ne 0$。

最后，我们证明 $u_n \to u_\varepsilon$ 在 W_ε 中强收敛。由于 $u_\varepsilon \ne 0$ 和 $\mathcal{J}'_\varepsilon(u_\varepsilon) = 0$，我们有 $u_\varepsilon \in \mathcal{N}_\varepsilon$，因此

$$\mathcal{J}_\varepsilon(u_\varepsilon) \ge c_\varepsilon.$$

另一方面，由 (f_3),

$$\mathcal{J}_\varepsilon(u) - \frac{1}{2\theta}\langle \mathcal{J}'_\varepsilon(u), u\rangle = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\theta}\right)\|u\|_\varepsilon^2 + \int_{\mathbb{R}^2}\Big(\frac{1}{|x|^\mu} * F(u)\Big)\left(\frac{1}{2\theta}f(u)u - \frac{1}{2}F(u)\right)dx,$$

and 积分项非负。因此，利用弱下半连续性和法图引 a,

$$\mathcal{J}_\varepsilon(u_\varepsilon) = \mathcal{J}_\varepsilon(u_\varepsilon) - \frac{1}{2\theta}\langle \mathcal{J}'_\varepsilon(u_\varepsilon), u_\varepsilon\rangle \le \liminf_{n\to\infty}\left(\mathcal{J}_\varepsilon(u_n) - \frac{1}{2\theta}\langle \mathcal{J}'_\varepsilon(u_n), u_n\rangle\right) = \lim_{n\to\infty}\mathcal{J}_\varepsilon(u_n) = c_\varepsilon.$$

因此 $\mathcal{J}_\varepsilon(u_\varepsilon) = c_\varepsilon$。

Set

$$A_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\theta}\right)\|u_n\|_\varepsilon^2, \qquad B_n = \int_{\mathbb{R}^2}\Big(\frac{1}{|x|^\mu} * F(u_n)\Big)\left(\frac{1}{2\theta}f(u_n)u_n - \frac{1}{2}F(u_n)\right)dx,$$

a并定义 A，B，将 u_n 替换为 u_ε 即可得到类似的定义。于是 $A_n \ge 0$, $B_n \ge 0$, $A \ge 0$, $B \ge 0$，且 d

$$A_n + B_n = \mathcal{J}_\varepsilon(u_n) - \frac{1}{2\theta}\langle \mathcal{J}'_\varepsilon(u_n), u_n\rangle = c_\varepsilon + o_n(1), \qquad A + B = \mathcal{J}_\varepsilon(u_\varepsilon) = c_\varepsilon.$$

此外，弱下半连续性给出 lim inf $_{n\to\infty}$ $A_n \ge A$，而法图引理给出 lim inf $_{n\to\infty}$ $B_n \ge B$。因此

$$c_\varepsilon = \liminf_{n\to\infty}(A_n + B_n) \ge \liminf_{n\to\infty}A_n + \liminf_{n\to\infty}B_n \ge A + B = c_\varepsilon,$$

所以所有不等式均为等式，特别是 lim $A_n = A$。因此$_{n\to\infty}$

$$\|u_n\|_\varepsilon \to \|u_\varepsilon\|_\varepsilon.$$

由于 $u_n \rightharpoonup u_\varepsilon$ 属于希尔伯特空间 W_ε，这意味着

$$u_n \to u_\varepsilon \quad \text{strongly in } W_\varepsilon.$$

□

推论 5.4. 当 $\varepsilon > 0$ 充分小时，极小极大值 c_ε 可在某个 $u_\varepsilon \in W_\varepsilon$处取得。因此，问题 (2.1) 存在一个正的最小能量解 u_ε，对所有 $\varepsilon > 0$ 充分小的情形均成立。

Proof. 固定 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$。由引理 2.8 可知，存在一个 $(PS)_{c_\varepsilon}$ 序列 $\{u_n\} \subset W_\varepsilon$，对于 $\mathcal{J}_\varepsilon$ 使得 t

$$\mathcal{J}_\varepsilon(u_n) \to c_\varepsilon, \qquad \mathcal{J}'_\varepsilon(u_n) \to 0 \quad \text{in } W_\varepsilon^{-1}.$$

根据引理 5.3，经过选取一个子序列，存在 $u_\varepsilon \in W_\varepsilon$ 使得

$$u_n \to u_\varepsilon \quad \text{strongly in } W_\varepsilon.$$

特别地，

$$\mathcal{J}_\varepsilon(u_\varepsilon) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{J}_\varepsilon(u_n) = c_\varepsilon, \qquad \mathcal{J}'_\varepsilon(u_\varepsilon) = 0,$$

因此， c_ε 由临界点 u_ε取得。

我们可以假设对所有 n， $u_n \geq 0$ 成立。事实上，令 $u_n^- = \max\{-u_n, 0\}$，并采用约定 $f(t) = 0 \text{ for } t \leq 0$。取 u_n^- 作为测试函数代入 $\langle \mathcal{J}'_\varepsilon(u_n), \cdot \rangle$，并按照标准符号估计的论证可得 $\|u_n^-\|_\varepsilon \to 0$。因此，$\{u_n^+\}$ 仍是一个$(PS)_{c_\varepsilon}$序列，且 $u_n^+ \to u_\varepsilon$ 在 W_ε中，这意味着 $u_\varepsilon \geq 0$ 几乎处处成立于 $\mathbb{R}^2$。

由于 $\mathcal{J}_\varepsilon(u_\varepsilon) = c_\varepsilon > 0$，我们有 $u_\varepsilon \neq 0$。因此 u_ε 是方程(2.1)的一个非平凡非负弱解。根据混合局部–非局部算子的强最大值原理（例如，参见 [22] 及其中的参考文献），可知

$$u_\varepsilon > 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^2.$$

最后，设 $w \in W_\varepsilon$ 是 $\mathcal{J}_\varepsilon$ 的任意一个非平凡临界点。则 $w \in \mathcal{N}_\varepsilon$，并且由 (f_3)–(f_5) 可知，存在 $T > 1$ 使得 $\mathcal{J}_\varepsilon(Tw) < 0$。因此，路径 $\gamma(t) = tTw$ 属于 Γ_ε，且

$$c_\varepsilon \leq \max_{t\in[0,1]} \mathcal{J}_\varepsilon(\gamma(t)) = \max_{s\in[0,T]} \mathcal{J}_\varepsilon(sw) = \mathcal{J}_\varepsilon(w),$$

其中，最后一个等式由 $\langle \mathcal{J}'_\varepsilon(w)\ w \rangle = 0$ 得出。因此， c_ε 是所有非平凡临界点中能量最小的，而 u_ε 是一个正的最小能量解。 □

6 集中现象

引理 6.1. 假设 (f_1) 和 (f_2) 成立。若 $h \in H^1(\mathbb{R}^2)$，则

$$\Big(\frac{1}{|x|^\mu} * F(h)\Big) \in L^\infty(\mathbb{R}^2).$$

证明. 我们将证明分为两部分：(i) 对某个 $p > \frac{2}{2-\mu}$，有 $F(h) \in L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^p(\mathbb{R}^2)$；(ii) 给出 L^∞ 的卷积估计。

步骤 1。固定 $\eta > 0$。由 (f_1) 和 (f_2)，存在 $q > 1$、 $k > 1$ 和 $C_\eta > 0$，使得

$$|f(t)| \leq \eta|t|^{\frac{2-\mu}{2}} + C_\eta|t|^{q-1}\big(e^{k4\pi t^2} - 1\big), \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

在 $[0, t]$ 上积分并利用 $F(t) = \int_0^t f(\tau)\, d\tau$，可得

$$|F(t)| \leq C\eta|t|^{\frac{4-\mu}{2}} + CC_\eta|t|^q\big(e^{k4\pi t^2} - 1\big), \qquad \forall t \in \mathbb{R},$$

其中某个常数 $C > 0$ 与 t 无关。因此，对任意 $p \geq 1$,

$$|F(h)|^p \leq C\Big(|h|^{\frac{p(4-\mu)}{2}} + |h|^{pq}\big(e^{k4\pi h^2} - 1\big)^p\Big).$$

利用初等不等式 $s^m \leq C_{m,\sigma}(e^{\sigma s^2} - 1)$（对 $s \geq 0$ 成立），其中 $\sigma > 0$ 足够小，可将多项式因子吸收到指数函数中。因此，存在 $\alpha_p > 0$ 和 $C_p > 0$，使得

$$|F(h(x))|^p \leq C_p\big(e^{\alpha_p h(x)^2} - 1\big) \quad \text{a.e. in } \mathbb{R}^2.$$

根据命题 2.2， $\int_{\mathbb{R}^2}(e^{\alpha_p h^2} - 1)\, dx < \infty$ 对每个 $\alpha_p > 0$ 因为 $h \in H^1(\mathbb{R}^2)$。因此 $F(h) \in L^p(\mathbb{R}^2)$ 对每个 $p \geq 1$。特别地， $F(h) \in L^1(\mathbb{R}^2)$，并且我们可以取 $p > \frac{2}{2-\mu}$。 ___

步骤 2。固定 $p \geq \frac{2}{2-\mu}$ 并令 $p' = \frac{p}{p-1}$。对任意 $x \in \mathbb{R}^2$，分解

$$\left|\left(\frac{1}{|x|^\mu} * F(h)\right)(x)\right| \leq \int_{|x-y|\leq 1} \frac{|F(h(y))|}{|x-y|^\mu}\,dy + \int_{|x-y|>1} \frac{|F(h(y))|}{|x-y|^\mu}\,dy =: I_1(x) + I_2(x).$$

对于 I_2，由于 $|x-y|^{-\mu} \leq 1$ 在 $\{|x-y|>1\}$上，我们有

$$I_2(x) \leq \int_{\mathbb{R}^2} |F(h(y))|\,dy = \|F(h)\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}.$$

对于 I_1，由 H¨older 不等式，

$$I_1(x) \leq \|F(h)\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \left(\int_{|z|\leq 1} |z|^{-\mu p'}\,dz\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

只要 $\mu p' < 2$，积分 $\int_{|z|\leq 1} |z|^{-\mu p'}\,dz$ 就是有限的，即

$$p' < \frac{2}{\mu} \quad \Longleftrightarrow \quad p > \frac{2}{2-\mu},$$

这恰好是我们对 p的选择。因此，对于常数 C，其与 x无关，有 $I_1(x) \leq C\|F(h)\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}$。结合对 I_1 和 I_2 的估计可得

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^2}\left|\left(\frac{1}{|x|^\mu} * F(h)\right)(x)\right| \leq C\|F(h)\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} + \|F(h)\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} < \infty.$$

因此 $\frac{1}{|x|^\mu} * F(h) \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$。 □

引理 6.2。设 $\varepsilon_n \to 0$，并令 $\{u_n\} \subset \mathcal{N}_{\varepsilon_n}$ 满足

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{J}_{\varepsilon_n}(u_n) = c_{V_0}.$$

于是存在一个序列 $\{\tilde{y}_n\} \subset \mathbb{R}^2$，使得平移序列

$$\tilde{u}_n(x) = u_n(x + \tilde{y}_n)$$

在 W_{V_0} 中有一个收敛子列。此外，取一个子序列后，

$$y_n = \varepsilon_n \tilde{y}_n \to y \in M.$$

证明。由于 $u_n \in \mathcal{N}_{\varepsilon_n}$，我们有

$$\langle \mathcal{J}'_{\varepsilon_n}(u_n), u_n\rangle = 0.$$

结合 $\mathcal{J}_{\varepsilon_n}(u_n) \to c_{V_0}$，仿照引理 4.2 可推出 $\{u_n\}$ 在 W_{ε_n}中有界。特别地，$\{u_n\}$ 在 $H^1(\mathbb{R}^2)$ 中有界。由 (V)，范数 $\|\cdot\|_{\varepsilon_n}$ 与 $\|\cdot\|_{V_0}$ 在n中一致等价，因此 $\{u_n\}$ 在 W_{V_0} 中也有界。

我们断言 $\{u_n\}$ 不消失。若其消失，则对每个 $p>2$，都有 $u_n \to 0$ 在 $L^p(\mathbb{R}^2)$ 中成立；利用 (f_1)、(f_2) 以及引理 2.3 可得 $\mathcal{J}_{\varepsilon_n}(u_n) \to 0$，这与 $c_{V_0} > 0$矛盾。因此存在$r>0$，$\delta > 0$ 以及一个序列 $\{\tilde{y}_n\} \subset \mathbb{R}^2$，使得

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{B_r(\tilde{y}_n)} |u_n|^2\,dx \geq \delta.$$

定义 $\tilde{u}_n(x) = u_n(x + \tilde{y}_n)$。那么，$\{\tilde{u}_n\}$ 在 W_{V_0} 中有界，且

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{B_r(0)} |\tilde{u}_n|^2\,dx \geq \delta.$$

取一个子序列，

$$\tilde{u}_n \rightharpoonup \tilde{u} \quad \text{in } W_{V_0}, \qquad \tilde{u}_n \to \tilde{u} \quad \text{in } L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2),\ p \geq 1, \qquad \tilde{u}_n(x) \to \tilde{u}(x) \text{ a.e. in } \mathbb{R}^2,$$

且 $B_r(0)$ 的下界给出 $\tilde{u} \neq 0$。

令 $y_n = \varepsilon_n \tilde{y}_n$。引入平移泛函

$$\widetilde{\mathcal{J}}_n(v) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla v|^2\,dx + \frac{1}{4}\iint_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2} \frac{|v(x)-v(y)|^2}{|x-y|^{2+2s}}\,dx\,dy + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} V(\varepsilon_n x + y_n)v^2\,dx - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\Big(\frac{1}{|x|^\mu} * F(v)\Big)F(v)\,dx.$$

变量替换表明

$$\widetilde{\mathcal{J}}_n(\tilde{u}_n) = \mathcal{J}_{\varepsilon_n}(u_n), \qquad \langle \widetilde{\mathcal{J}}_n'(\tilde{u}_n), \tilde{u}_n\rangle = 0.$$

设 $t_n > 0$ 为满足 $w_n = t_n\tilde{u}_n \in \mathcal{N}_{V_0}$的唯一数。则

$$c_{V_0} \le \mathcal{I}_{V_0}(w_n), \qquad \mathcal{I}_{V_0}(w_n) \le \widetilde{\mathcal{J}}_n(w_n).$$

~ ~此外，由于 $\tilde{u}_n$ 位于 $\mathcal{J}_n$的 Nehari 流形上，引理 2.7 表明 $t \mapsto \mathcal{J}_n(t\tilde{u}_n)$ 在 $t = 1$处取得最大值，因此

$$\widetilde{\mathcal{J}}_n(w_n) = \widetilde{\mathcal{J}}_n(t_n\tilde{u}_n) \le \widetilde{\mathcal{J}}_n(\tilde{u}_n) = \mathcal{J}_{\varepsilon_n}(u_n) = c_{V_0} + o(1).$$

因此，

$$c_{V_0} \le \mathcal{I}_{V_0}(w_n) \le c_{V_0} + o(1), \qquad \mathcal{I}_{V_0}(w_n) \to c_{V_0}.$$

存在 $\alpha > 0$，使得对所有 $u \in \mathcal{N}_{V_0}$都有 $\|u\|_{V_0} \ge \alpha$，因此 $\|w_n\|_{V_0} \ge \alpha$，且 $\{w_n\}$ 在 W_{V_0}中有界。由于 $\mathcal{I}_{V_0}(w_n) \to c_{V_0} = \inf_{\mathcal{N}_{V_0}} \mathcal{I}_{V_0}$ 且 $\{w_n\} \subset \mathcal{N}_{V_0}$，由 Ekeland 变分原理，将其应用于限制在 $\mathcal{N}_{V_0}$上的$\mathcal{I}_{V_0}$，可知存在 $\{v_n\} \subset \mathcal{N}_{V_0}$，使得

$$\mathcal{I}_{V_0}(v_n) \to c_{V_0}, \qquad \|v_n - w_n\|_{V_0} \to 0, \qquad \|(\mathcal{I}_{V_0}|_{\mathcal{N}_{V_0}})'(v_n)\|_{(W_{V_0})^{-1}} \to 0.$$

将 w_n 替换为 v_n（仍记为 w_n），我们可以假设

$$\mathcal{I}_{V_0}(w_n) \to c_{V_0}, \qquad \|(\mathcal{I}_{V_0}|_{\mathcal{N}_{V_0}})'(w_n)\|_{(W_{V_0})^{-1}} \to 0.$$

令 $G(u) = \langle \mathcal{I}_{V_0}'(u)\ u\rangle$。那么 $\mathcal{N}_{V_0} = \{u \neq 0 :\ G(u) = 0\}$。由拉格朗日乘数法，存在$\lambda_n \in \mathbb{R}$ 使得

$$\mathcal{I}_{V_0}'(w_n) = \lambda_n G'(w_n) + o(1) \quad \text{in } (W_{V_0})^{-1}.$$

以 w_n 为测试函数，并利用 $G(w_n) = 0$，可得

$$0 = \langle \mathcal{I}_{V_0}'(w_n), w_n\rangle = \lambda_n\langle G'(w_n), w_n\rangle + o(1).$$

此外，由于 $w_n \in \mathcal{N}_{V_0}$，映射 $t \mapsto \mathcal{I}_{V_0}(tw_n)$ 在 $t = 1$处取得唯一最大值，因此$\langle G'(w_n)\ w_n\rangle = h_{w_n}''(1) < 0$。于是 $\lambda_n \to 0$，进而

$$\mathcal{I}_{V_0}'(w_n) \to 0 \quad \text{in } (W_{V_0})^{-1}.$$

此外，t_n 有界且远离 0。事实上，由 $w_n = t_n\tilde{u}_n$以及 $\{w_n\}$，$\{\tilde{u}_n\}$的有界性可知其有界；而若 $t_n \to 0$，则 $w_n \to 0$ 属于 W_{V_0} 且 $\mathcal{I}_{V_0}(w_n) \to 0$，这与$\mathcal{I}_{V_0}(w_n) \to c_{V_0} > 0$矛盾。因此存在 $c_0 > 0$，使得对所有 n都有 $t_n \ge c_0$，从而

$$\int_{B_r(0)} |w_n|^2\,dx = t_n^2\int_{B_r(0)} |\tilde{u}_n|^2\,dx \ge c_0^2\delta.$$

使用与定理 4.3证明中相同的紧性论证，我们可以取一个子序列，使得

$$w_n \to w \quad \text{strongly in } W_{V_0},$$

对某个 $w \in W_{V_0}$，有 $w \neq 0$。由于 t_n 有界且远离 0，我们可以假设 $t_n \to t_0 > 0$，因此

$$\tilde{u}_n = \frac{w_n}{t_n} \to \frac{w}{t_0} \quad \text{strongly in } W_{V_0}.$$

这证明 $\{\tilde{u}_n\}$ 在 W_{V_0}中有一个收敛子列。

还需证明 $\{y_n\}$ 有界，且其极限属于 M。反设$|y_n| \to \infty$。固定 $\eta > 0$。由 (V)，存在 $R > 0$ 使得 $V(z) \geq V_\infty - \eta$ 对所有 $|z| \geq R$都成立。选取足够大的$R_0 > 0$，使得 $\int_{B^c_{R_0}(0)} w^2\,dx \leq \eta$。当 n 足够大时，$|y_n| \geq 2R$ 且 $\varepsilon_n R_0 \leq R$，因此对所有 $|x| \leq R_0$，都有 $|\varepsilon_n x + y_n| \geq R$。因此

$$\int_{\mathbb{R}^2} V(\varepsilon_n x + y_n) w_n^2\,dx \geq (V_\infty - \eta) \int_{B_{R_0}(0)} w_n^2\,dx + V_0 \int_{B^c_{R_0}(0)} w_n^2\,dx.$$

令 $n \to \infty$，并在 $L^2(\mathbb{R}^2)$ 中使用 $w_n \to w$，可得

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^2} V(\varepsilon_n x + y_n) w_n^2\,dx \geq V_\infty \int_{\mathbb{R}^2} w^2\,dx - C\eta,$$

其中常数 C 与 η 无关。由于 η 是任意的，

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^2} V(\varepsilon_n x + y_n) w_n^2\,dx \geq V_\infty \int_{\mathbb{R}^2} w^2\,dx.$$

因此，

$$\liminf_{n\to\infty} \widetilde{\mathcal{J}}_n(w_n) \geq \mathcal{I}_{V_\infty}(w) = \mathcal{I}_{V_0}(w) + \frac{1}{2}(V_\infty - V_0) \int_{\mathbb{R}^2} w^2\,dx > c_{V_0}.$$

另一方面，

$$\widetilde{\mathcal{J}}_n(w_n) \leq \widetilde{\mathcal{J}}_n(\tilde{u}_n) = \mathcal{J}_{\varepsilon_n}(u_n) \to c_{V_0},$$

这就产生了矛盾。因此，$\{y_n\}$ 有界。

不妨取一个子序列，使得 $y_n \to y \in \mathbb{R}^2$。若 $y \notin M$，则 $V(y) > V_0$。由于 $y_n \to y$ 且 $\varepsilon_n \to 0$，对于每个固定的 $R_0 > 0$，我们在 $B_{R_0}(0)$ 上有 $V(\varepsilon_n x + y_n) \to V(y)$ 一致成立。再次在 $L^2(\mathbb{R}^2)$ 中使用 $w_n \to w$，可得

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^2} V(\varepsilon_n x + y_n) w_n^2\,dx = V(y) \int_{\mathbb{R}^2} w^2\,dx,$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} \widetilde{\mathcal{J}}_n(w_n) = \mathcal{I}_{V(y)}(w) = \mathcal{I}_{V_0}(w) + \frac{1}{2}(V(y) - V_0) \int_{\mathbb{R}^2} w^2\,dx > c_{V_0},$$

这与 $\widetilde{\mathcal{J}}_n(w_n) \leq \mathcal{J}_{\varepsilon_n}(u_n) \to c_{V_0}$ 矛盾。因此 $V(y) = V_0$，即 $y \in M$。 □

令 $\varepsilon_n \to 0$，其中 $n \to +\infty$，并令 $v_n \in W_{\varepsilon_n}$ 为以下方程的正基态解

$$-\Delta u + (-\Delta)^s u + V(\varepsilon_n x) u = \Big(\frac{1}{|x|^\mu} * F(u)\Big) f(u) \quad \text{in } \mathbb{R}^2,$$

由推论 5.4给出。于是

$$\mathcal{J}_{\varepsilon_n}(v_n) = c_{\varepsilon_n} \quad \text{and} \quad \langle \mathcal{J}'_{\varepsilon_n}(v_n), v_n \rangle = 0,$$

也就是说，$v_n \in \mathcal{N}_{\varepsilon_n}$ 对每个 n。由引理 5.2 可知

$$\mathcal{J}_{\varepsilon_n}(v_n) = c_{\varepsilon_n} \longrightarrow c_{V_0} \quad \text{as } n \to +\infty.$$

因此，我们可以应用引理 6.2 并取 $u_n = v_n$，从而得到一个序列 $\{\tilde{y}_n\} \subset \mathbb{R}^2$ 使得

$$\tilde{v}_n(x) = v_n(x + \tilde{y}_n)$$

满足

$$-\Delta u + (-\Delta)^s u + V_n(x) u = \Big(\frac{1}{|x|^\mu} * F(u)\Big) f(u) \quad \text{in } \mathbb{R}^2,$$

其中

$$V_n(x) := V(\varepsilon_n x + \varepsilon_n \tilde{y}_n),$$

并且满足，取一个子序列后，

$$\tilde{v}_n \to \tilde{v} \quad \text{in } W_{V_0}, \qquad y_n := \varepsilon_n \tilde{y}_n \to y \in M.$$

Since $\tilde{v}_n \to \tilde{v}$ in W_{V_0}，特别地 $\tilde{v}_n \to \tilde{v}$ in $H^1(\mathbb{R}^2)$。我们可以提取一个子序列，使得

$$\|\tilde{v}_n - \tilde{v}\|_{H^1(\mathbb{R}^2)} \le 2^{-n} \quad \text{for all } n \in \mathbb{N}.$$

定义

$$h(x) = |\tilde{v}(x)| + \sum_{n=1}^{\infty} |\tilde{v}_n(x) - \tilde{v}(x)|.$$

那么 $h \in H^1(\mathbb{R}^2)$。此外，对任意 $n \in \mathbb{N}$,

$$|\tilde{v}_n(x)| \le h(x) \quad \text{for a.e. } x \in \mathbb{R}^2. \tag{6.1}$$

引理 6.3. 假设 (V) 和 (f_1)–(f_6) 成立。那么存在 $C > 0$ 使得

$$\|\tilde{v}_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \le C \quad \textit{for all } n \in \mathbb{N}^+.$$

此外，

$$\lim_{|x|\to+\infty} \tilde{v}_n(x) = 0 \quad \textit{uniformly in } n \in \mathbb{N}^+.$$

证明。令

$$W_n(x) = \Big(\frac{1}{|x|^\mu} * F(\tilde{v}_n)\Big)(x).$$

由于每个 $\tilde{v}_n \ge 0$ 且 F在 $[0,\infty)$ 上递增，因此由 (6.1) 可得 $0 \le F(\tilde{v}_n) \le F(h)$ 在 $\mathbb{R}^2$上几乎处处成立。因此

$$0 \le W_n(x) \le W(x), \qquad W(x) := \Big(\frac{1}{|x|^\mu} * F(h)\Big)(x).$$

由引理 6.1， $W \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$，因此 $\{W_n\}$ 在 $L^\infty(\mathbb{R}^2)$ 中有界。

按照 [35], 固定 $R > 0$ 并令 $0 < r \le \min\{1, R/2\}$，并取 $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ 使得

$$\eta(x) = 0 \text{ if } |x| \le R - r, \qquad \eta(x) = 1 \text{ if } |x| \ge R, \qquad |\nabla\eta| \le \frac{2}{r}.$$

对于 $l > 0$, 令

$$\tilde{v}_{n,l}(x) = \begin{cases} \tilde{v}_n(x), & \tilde{v}_n(x) \le l, \\ l, & \tilde{v}_n(x) \ge l, \end{cases}$$

并对于 $\gamma > 1$ 定义

$$z_{n,l}(x) = \eta(x)^2\, \tilde{v}_{n,l}(x)^{2(\gamma-1)}\, \tilde{v}_n(x), \qquad w_{n,l}(x) = \eta(x)\, \tilde{v}_{n,l}(x)^{\gamma-1}\, \tilde{v}_n(x).$$

我们在莫泽迭代方案中使用标准截断不等式（例如，参见 [35, 3]）：存在一个与 n 无关的 $C > 0$，l，γ，使得对所有 x，$y \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\gamma^2}\big(w_{n,l}(x) - w_{n,l}(y)\big)^2 \\ &\le \big(\tilde{v}_n(x) - \tilde{v}_n(y)\big)\big(z_{n,l}(x) - z_{n,l}(y)\big) + C\,\big(\eta(x) - \eta(y)\big)^2\big(\tilde{v}_n(x)^2 \tilde{v}_{n,l}(x)^{2(\gamma-1)} + \tilde{v}_n(y)^2 \tilde{v}_{n,l}(y)^{2(\gamma-1)}\big). \end{aligned} \tag{6.2}$$

将 $z_{n,l}$ 作为测试函数代入 $\tilde{v}_n$ 所满足的方程中，可得

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^2} \nabla\tilde{v}_n \nabla z_{n,l}\, dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \frac{\big(\tilde{v}_n(x) - \tilde{v}_n(y)\big)\big(z_{n,l}(x) - z_{n,l}(y)\big)}{|x-y|^{2+2s}}\, dx\, dy \\ &\qquad + \int_{\mathbb{R}^2} V_n(x)\, \tilde{v}_n z_{n,l}\, dx = \int_{\mathbb{R}^2} W_n(x)\, f(\tilde{v}_n)\, z_{n,l}\, dx. \end{aligned} \tag{6.3}$$

由（6.2），两边除以 $|x-y|^{2+2s}$ 并积分，可得

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \frac{\big(\tilde{v}_n(x) - \tilde{v}_n(y)\big)\big(z_{n,l}(x) - z_{n,l}(y)\big)}{|x-y|^{2+2s}}\, dx\, dy \ge \frac{1}{\gamma^2}[w_{n,l}]_s^2 - C\,\mathcal{E}_{n,l},$$

其中

$$\mathcal{E}_{n,l}=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{\big(\eta(x)-\eta(y)\big)^2}{|x-y|^{2+2s}}\big(\tilde{v}_n(x)^2\tilde{v}_{n,l}(x)^{2(\gamma-1)}+\tilde{v}_n(y)^2\tilde{v}_{n,l}(y)^{2(\gamma-1)}\big)\,dx\,dy.$$

利用 $|\eta(x)-\eta(y)|\le\|\nabla\eta\|_\infty|x-y|$ 和 $r\le 1$，由标准估计可得

$$\mathcal{E}_{n,l}\le C\,\|\nabla\eta\|_\infty^2\int_{\mathbb{R}^2}\tilde{v}_n^2\tilde{v}_{n,l}^{2(\gamma-1)}\,dx\le C\int_{\mathbb{R}^2}\tilde{v}_n^2\tilde{v}_{n,l}^{2(\gamma-1)}|\nabla\eta|^2\,dx,$$

C 与 n 无关，l，γ。

再利用 $V_n\ge V_0$，由式（6.3）可推得

$$\int_{\mathbb{R}^2}\nabla\tilde{v}_n\nabla z_{n,l}\,dx+\frac{1}{\gamma^2}[w_{n,l}]_s^2+V_0\int_{\mathbb{R}^2}\tilde{v}_n z_{n,l}\,dx\le\int_{\mathbb{R}^2}W_n(x)\,f(\tilde{v}_n)\,z_{n,l}\,dx+C\int_{\mathbb{R}^2}\tilde{v}_n^2\tilde{v}_{n,l}^{2(\gamma-1)}|\nabla\eta|^2\,dx.\tag{6.4}$$

展开 $\nabla z_{n,\,l}$，舍去非正的截断项，并应用杨氏不等式，可得

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^2}\eta^2\tilde{v}_{n,l}^{2(\gamma-1)}|\nabla\tilde{v}_n|^2\,dx+\frac{1}{\gamma^2}[w_{n,l}]_s^2+V_0\int_{\mathbb{R}^2}\eta^2\tilde{v}_{n,l}^{2(\gamma-1)}\tilde{v}_n^2\,dx\\&\le C\int_{\mathbb{R}^2}\eta^2\tilde{v}_{n,l}^{2(\gamma-1)}\tilde{v}_n\,|f(\tilde{v}_n)|\,\tilde{v}_n\,dx+C\int_{\mathbb{R}^2}\tilde{v}_n^2\tilde{v}_{n,l}^{2(\gamma-1)}|\nabla\eta|^2\,dx.\end{aligned}\tag{6.5}$$

现在估计非线性项。由于 $W_n\le\|W\|_\infty$，仿照引理 5.1 中由（f_1）–（f_2）进行的论证，对任意 $\varepsilon>0$，存在 $q>2$，$k>1$ 和 $C_\varepsilon>0$ 使得

$$|f(t)t|\le\varepsilon t^2+C_\varepsilon|t|^q\big(e^{k4\pi t^2}-1\big)\quad\text{for all } t\in\mathbb{R}.$$

因此，

$$\begin{aligned}|W_n(x)f(\tilde{v}_n)\tilde{v}_n|&\le\|W\|_\infty|f(\tilde{v}_n)\tilde{v}_n|\\&\le\varepsilon\tilde{v}_n^2+C_\varepsilon|\tilde{v}_n|^q\big(e^{k4\pi\tilde{v}_n^2}-1\big)\le\varepsilon\tilde{v}_n^2+C_\varepsilon|\tilde{v}_n|^q\big(e^{k4\pi h^2}-1\big).\end{aligned}\tag{6.6}$$

将（6.6）代入（6.5），取 $\varepsilon>0$ 充分小，并将 $\tilde{v}_n^2$ 项吸收到左端，可得

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^2}\eta^2\tilde{v}_{n,l}^{2(\gamma-1)}|\nabla\tilde{v}_n|^2\,dx+\frac{1}{\gamma^2}[w_{n,l}]_s^2+V_0\int_{\mathbb{R}^2}\eta^2\tilde{v}_{n,l}^{2(\gamma-1)}\tilde{v}_n^2\,dx\\&\le C\int_{\mathbb{R}^2}\eta^2\tilde{v}_{n,l}^{2(\gamma-1)}|\tilde{v}_n|^q\big(e^{k4\pi h^2}-1\big)\,dx+C\int_{\mathbb{R}^2}\tilde{v}_n^2\tilde{v}_{n,l}^{2(\gamma-1)}|\nabla\eta|^2\,dx.\end{aligned}\tag{6.7}$$

利用 Sobolev 嵌入 $H^s(\mathbb{R}^2)\subset L^p(\mathbb{R}^2)$（$p\in[2,2_s^*]$），可得

$$\frac{1}{\gamma^2}[w_{n,l}]_s^2+V_0\int_{\mathbb{R}^2}w_{n,l}^2\,dx\ge\frac{C}{\gamma^2}\,\|w_{n,l}\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}^2,\tag{6.8}$$

对于某个与 n无关的 $C>0$，l。

由初等不等式 $(e^A-1)^m\le C_m(e^{mA}-1)$ 对于 $A\ge 0$ 以及任意 $m>1$，命题2.2给出，对于任意 $m>1$,

$$\int_{\mathbb{R}^2}\big(e^{k4\pi h^2}-1\big)^m\,dx<\infty.$$

固定这样的 m，并令 $t=\sqrt{m}>1$。取 $q>\frac{2t}{t-1}$并令

$$\gamma=\frac{q(t-1)}{2t}>1.$$

然后将 [3] 中的迭代论证调整后应用于（6.7），令 $l\to\infty$后可得,

$$\|\tilde{v}_n\|_{L^\infty(|x|\ge R)}\le C\,\|\tilde{v}_n\|_{L^p(|x|\ge R/2)}.\tag{6.9}$$

以 $x_0\in B_R(0)$ 为中心的局部版本（带截断函数）给出

$$\|\tilde{v}_n\|_{L^\infty(|x-x_0|\le\rho')}\le C\,\|\tilde{v}_n\|_{L^p(|x-x_0|\le 2\rho')}.\tag{6.10}$$

利用（6.9）、（6.10）以及覆盖论证，我们推得

$$\|\tilde{v}_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \le C \quad \text{for all } n \in \mathbb{N}^+,$$

其中 C 与 n无关。

最后，由于 $\tilde{v}_n \to \tilde{v}$ 属于 W_{V_0}，我们有 $\tilde{v}_n \to \tilde{v}$ 属于 $L^p(\mathbb{R}^2)$，其中某个 $p > 2$。固定 $\delta > 0$。选取 $R > 0$使得

$$\int_{|x|\ge R/2} |\tilde{v}(x)|^p \, dx < \delta,$$

并且

$$\int_{|x|\ge R/2} |\tilde{v}_n(x)|^p \, dx < \delta \quad \text{for } n = 1, 2, \dots, N,$$

其中某个固定的 N。此外，对于所有 $n \ge N$，

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\tilde{v}_n - \tilde{v}|^p \, dx < \delta,$$

因此

$$\int_{|x|\ge R/2} |\tilde{v}_n(x)|^p \, dx \le C\delta \quad \text{for all } n \in \mathbb{N}^+.$$

利用（6.9），我们得到

$$\sup_{n\in\mathbb{N}^+} \|\tilde{v}_n\|_{L^\infty(|x|\ge R)} \le C \sup_{n\in\mathbb{N}^+} \|\tilde{v}_n\|_{L^p(|x|\ge R/2)} \le C'\delta.$$

由于 $\delta > 0$ 是任意的，

$$\lim_{|x|\to+\infty} \tilde{v}_n(x) = 0 \quad \text{uniformly in } n \in \mathbb{N}^+,$$

且证明完毕。 □

引理 6.4。 存在 $\delta_0 > 0$ 使得

$$\|\tilde{v}_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \ge \delta_0 \quad \textit{for all } n \in \mathbb{N}^+.$$

证明。 回顾

$$0 < \delta \le \int_{B_r(\tilde{y}_n)} |v_n|^2 \, dx$$

对于某个 r， $\delta > 0$，通过变量替换 $x \mapsto x + \tilde{y}_n$ 我们得到

$$0 < \delta \le \int_{B_r(0)} |\tilde{v}_n|^2 \, dx \le |B_r| \, \|\tilde{v}_n\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}.$$

Set

$$\delta_0 = \sqrt{\frac{\delta}{|B_r|}} > 0.$$

Then

$$\|\tilde{v}_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \ge \delta_0$$

对于所有 $n \in \mathbb{N}^+$。 □

极大点集中。 根据 $\tilde{v}_n$所满足方程的标准正则性，我们有 $\tilde{v}_n \in C(\mathbb{R}^2)$，对每个 n都成立。由于 $\tilde{v}_n(x) \to 0$ 当 $|x| \to \infty$ 时在 n 中一致成立（引理 6.3），每个 $\tilde{v}_n$ 都在 $\mathbb{R}^2$中取得最大值。令 $b_n \in \mathbb{R}^2$ 满足

$$\tilde{v}_n(b_n) = \|\tilde{v}_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}.$$

由引理 6.4 可知存在 $\delta_0 > 0$ 使得

$$\|\tilde{v}_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \ge \delta_0 \quad \text{for all } n \in \mathbb{N}^+.$$

利用引理 6.3中的一致衰减，我们可以选定 $R>0$ 使得

$$\sup_{n\in\mathbb{N}^+}\sup_{|x|\geq R}|\tilde{v}_n(x)|<\frac{\delta_0}{2}.$$

因此，对于每个 n， $b_n\in B_R(0)$，且序列 (b_n) 在 $\mathbb{R}^2$ 中有界。

回忆一下， v_n 是基态解，并且

$$\tilde{v}_n(x)=v_n(x+\tilde{y}_n).$$

因此， v_n 的全局最大值在

$$z_n=b_n+\tilde{y}_n.$$

此外，

$$\varepsilon_n z_n=\varepsilon_n b_n+\varepsilon_n\tilde{y}_n=\varepsilon_n b_n+y_n.$$

由于 (b_n) 有界， $\varepsilon_n b_n\to 0$。由引理 6.2， $y_n=\varepsilon_n\tilde{y}_n\to y\in M$。因此

$$\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n z_n=y\in M.$$

由于 V 连续，因此

$$\lim_{n\to\infty}V(\varepsilon_n z_n)=V(y)=V_0.$$

若 u_ε 是问题（2.1）的正解，则缩放函数

$$w_\varepsilon(x)=u_\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

是（1.1）的正解。分别用 z_ε 和 η_ε 表示 u_ε 和 w_ε的全局最大值点。变量替换可得

$$\eta_\varepsilon=\varepsilon z_\varepsilon.$$

因此，

$$\lim_{\varepsilon\to 0}V(\eta_\varepsilon)=\lim_{n\to\infty}V(\varepsilon_n z_n)=V_0.$$

致谢

Z. Yang获国家自然科学基金（12301145、12261107、12561020）和云南省基础研究项目（202301AU070144、202401AU070123）资助。

数据可用性：由于本研究未创建或分析任何新数据，因此本文不适用数据共享。

利益冲突声明：作者声明不存在利益冲突。

参考文献

[1] S. Adachi 和 K. Tanaka。{style id='2'>R^N 中的 Trudinger 型不等式及其最佳指数。《美国数学会会刊》，128(7):2051–2057, 2000.

[2] C. O. Alves、D. Cassani、C. Tarsi 和 M. Yang。 $\mathbb{R}^2$ 中临界非局部薛定谔方程基态解的存在性与集中。微分方程杂志，261(3):1933–1972, 2016.

[3] C. O. Alves 和 G. M. Figueiredo。关于 $\mathbb{R}^N$ 中一类具有临界指数增长的拟线性问题的正解的多重性与集中。微分方程杂志，246(3):1288–1311, 2009.

[4] V. Ambrosio. 通过惩罚法研究分数阶 Choquard 方程的多重性与集中结果。*Potential Analysis*, 50(1)：55–82，2019年。

[5] G. C. Anthal、J. Giacomoni 和 K. Sreenadh。涉及局部与非局部混合算子的 Choquard 型方程。《数学分析及其应用杂志》，527(2)：论文编号 127440，27，2023年。[6] S. Biagi、S. Dipierro、E. Valdinoci 和 E. Vecchi。混合局部与非局部椭圆算子：正则性与最大值原理。《偏微分方程通讯》，47(3)：585–629，2022年。[7] S. Biagi、S. Dipierro、E. Valdinoci 和 E. Vecchi。混合局部与非局部算子的 Faber-Krahn 不等式。《数学分析杂志》，150(2)：405–448，2023年。[8] S. Biagi、D. Mugnai 和 E. Vecchi。混合局部与非局部算子的 Brezis-Oswald 方法。《当代数学通讯》，26(2)：论文编号 2250057，28，2024年。[9] S. Biagi、E. Vecchi、S. Dipierro 和 E. Valdinoci。涉及局部与非局部混合算子的半线性椭圆方程。《爱丁堡皇家学会会刊 A 辑》，151(5)：1611–1641，2021年。[10] A. Biswas 和 M. Modasiya。混合局部-非局部算子：最大值原理、特征值问题及其应用。《数学分析杂志》，156(1)：47–81，2025年。[11] A. Biswas、M. Modasiya 和 A. Sen。混合局部-非局部算子的边界正则性及其应用。《纯粹与应用数学年刊》，202(2)：679–710，2023年。[12] X. Cabr´e、S. Dipierro 和 E. Valdinoci。积分微分方程的 Bernstein 技巧。《理性力学与分析档案》，243(3)：1597–1652，2022年。[13] D. Cao。在 N 维实数空间中具有临界指数的半线性椭圆方程的非平凡解。《偏微分方程通讯》，17(3-4)：407–435，1992年。[14] D. Cassani、F. Sani 和 C. Tarsi。在 N 维实数空间中的等价 Moser 型不等式与零质量情形。《泛函分析杂志》，267(11)：4236–4263，2014年。[15] Z. Chen、P. Kim、R. Song 和 Z. Vondraˇcek。在分数阶索оболев空间中的边界 Harnack 原理。《美国数学会汇刊》，364(8)：4169–4205，2012年。[16] L. Constantin 和 C. M. Cuesta Romero。涉及混合局部-非局部算子与对流项的双重非线性抛物方程。《数学分析及其应用杂志》，556(1，第 3 部分)：论文编号 130219，2026年。[17] C. De Filippis 和 G. Mingione。混合局部与非局部问题中的梯度正则性。《数学年刊》，388(1)：261–328，2024年。[18] L. M. Del Pezzo、R. Ferreira 和 J. D. Rossi。局部与非局部 -Laplacian 的组合特征值。《分数阶微积分与应用分析》，22(5)：1414–1436，2019年。[19] E. Di Nezza、G. Palatucci 和 E. Valdinoci。分数阶 Sobolev 空间漫游者指南。《数学科学通报》，136(5)：521–573，2012年。[20] S. Dipierro、E. Proietti Lippi 和 E. Valdinoci。带 Neumann 边界条件的混合算子线性理论。《渐近分析》，128(4)：571–594，2022年。[21] S. Dipierro、E. Proietti Lippi 和 E. Valdinoci。带 Neumann 边界条件的（非）局部逻辑斯谛方程。《亨利·庞加莱分析非线性研究所年刊》，40(5)：1093–1166，2023年。[22] S. Dipierro、E. Proietti Lippi 和 E. Valdinoci。关于抛物型混合局部/非局部算子的若干最大值原理。《美国数学会会刊》，152(9)：3923–3939，2024年。[23] S. Dipierro、X. Su、E. Valdinoci 和 J. Zhang。混合阶非线性 Schr¨odinger 方程正解的定性性质。《离散与连续动力系统》，45(6)：1948–2000，2025年。[24] S. Dipierro 和 E. Valdinoci。混合局部/非局部扩散的生态位描述：一个演化方程，以及由布朗运动与 L´evy 过程叠加产生的新 Neumann 条件。《物理学 A 辑》，575：论文编号 126052，20，2021年。

[25] J. M. do ´O. 关于 R^N 中具有临界增长范围非线性的 N-拉普拉斯算子的半线性狄利克雷问题。Differential Integral Equations, 9(5):967–979, 1996。[26] Z. Gao、X. Tang 和 S. Chen。关于一类分数阶 Schr¨odinger-Choquard 方程的正基态解的存在性与集中行为。Z. Angew. Math. Phys., 69(5):Paper No. 122, 21, 2018。[27] P. Garain 和 A. Ukhlov。具有极值的局部与非局部混合的索博列夫不等式及相关的拟线性奇异椭圆问题。Nonlinear Anal., 223:Paper No. 113022, 35, 2022。[28] J. Giacomoni、N. Nidhi 和 K. Sreenadh。涉及局部与非局部混合算子的 Choquard 方程的归一化解。NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl., 32(6):Paper No. 127, 38, 2025。[29] D. Goel 和 K. Sreenadh。关于局部与非局部p-拉普拉斯算子组合的第二特征值。Proc. Amer. Math. Soc., 147(10):4315–4327, 2019。[30] M. Kirane、A. Fino 和 A. Ayoub。具有混合局部-非局部算子的半线性热方程的质量衰减。《分数阶微积分与应用分析》, 28(4):1756–1776, 2025。[31] C. LaMao、S. Huang、Q. Tian 和 C. Huang。涉及混合局部-非局部算子的椭圆方程解的正则性结果。AIMS Math., 7(3):4199–4210, 2022。[32] X. Li、S. Huang、M. Wu 和 C. Huang。具有混合局部-非局部算子的椭圆方程解的存在性。AIMS Math., 7(7):13313–13324, 2022。[33] E.H. Lieb 和 M. Loss。《分析》, 数学研究生教程第 14 卷。美国数学会，普罗维登斯，RI，第二版，2001。[34] L. Mattner。通过导数的完全单调性研究积分的严格定性。《美国数学会汇刊》, 349(8):3321–3342, 1997。[35] J. Moser。关于椭圆微分方程正则性问题的德乔治定理的新证明。Comm. Pure Appl. Math., 13:457–468, 1960。[36] D. Mugnai 和 E. Proietti Lippi。关于具有 (α,β)-Neumann 边界条件的混合局部-非局部算子。Rend. Circ. Mat. Palermo (2), 71(3):1035–1048, 2022。[37] P. H. Rabinowitz。关于一类非线性 Schr¨odinger 方程。Z. Angew. Math. Phys., 43(2):270–291, 1992。[38] A. M. Salort 和 E. Vecchi。关于混合局部-非局部 H´énon 方程。Differential Integral Equations, 35(11-12):795–818, 2022。[39] X. Su、E. Valdinoci、Y. Wei 和 J. Zhang。混合局部与非局部椭圆方程的多重解。Math. Z., 308(3):Paper No. 40, 37, 2024。[40] M. Willem。极小极大定理，非线性微分方程及其应用进展第 24 卷。Birkh¨auser Boston, Inc., Boston, MA, 1996。[41] M. Yang 和 Y. Ding。带有非局部部分的奇异摄动 Schr¨odinger 方程解的存在性。Commun. Pure Appl. Anal., 12(2):771–783, 2013。