arXiv:2601.03078v1 [math.AP] 6 Jan 2026

平面上退化椭圆方程的平均梯度局部化

Thibault Lacombe*

2026年1月7日

摘要

我们研究如下可能高度退化的椭圆方程的利普希茨解：$\operatorname{div} G(\nabla u) = 0$ in $B_1 \subset \mathbb{R}^2$，其中向量场 $G\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 连续且严格单调。我们证明，u 要么在 0 处为 C^1，要么任意放大极限 $v(x) = \lim \frac{u(\delta x)-u(0)}{\delta}$ 沿序列 $\delta \to 0$都满足 $\nabla v \in \overline{\mathcal{D} \cap \mathcal{S}}$ a.e.。这里，$\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{S}$ 可粗略理解为椭圆性分别从下方和上方退化的集合，即 ∇G 和$(\nabla G)^{-1}$ 的对称部分具有一个零特征值。这强烈支持了如下预期：对于任何在 $\mathcal{D}\cap\mathcal{S}$上消失的连续 H，$H(\nabla u)$具有连续性。与以往类似的结果不同，我们不对 G 的结构作任何假设，只要求其连续且严格单调。

1 引言

1.1 主要结果

本文聚焦于非线性方程 Lipschitz 解 $u : B_1 \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 的正则性

$$\operatorname{div}(G(\nabla u)) = 0, \tag{1}$$

*图卢兹数学研究所，UMR 5219，图卢兹大学，法国国家科学研究中心，图卢兹第三大学数学研究所，31062 图卢兹 Cedex 9，法国。thibault.lacombe@math.univ-toulouse.fr

其中 G: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 是严格单调场，即

$$\langle G(\xi) - G(\zeta), \xi - \zeta \rangle > 0 \quad \forall \xi \neq \zeta \in \mathbb{R}^2.$$

如 [8], 所示，方程（1）的Lipschitz 解属于 $C^1(B_1)$ 的一个充分条件，粗略地说，是点集 $\xi \in \mathbb{R}^2$ 有限，其中通常的椭圆性条件

$$\lambda|\zeta|^2 \leq \langle \nabla G(\xi)\zeta, \zeta \rangle \leq \Lambda|\zeta|^2 \quad \zeta \in \mathbb{R}^2 \tag{2}$$

在下方（$\lambda = 0$）和上方（$\Lambda = +\infty$）均不成立两者 。本文研究当该集合任意时， u 的正则性和可能出现的奇异性；因此，该方程可能高度退化。

为便于说明，可以先将 G 看作一个 C^1 严格凸函数 F 的梯度： $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$。在此情形下，方程（1）对应于能量的极小化子的欧拉-拉格朗日方程

$$\int_{B_1} F(\nabla u), \tag{3}$$

对于该能量，在一致椭圆情形下，正则性问题已得到充分理解，其内容由不等式（2）所刻画；这始于 Morrey 在二维情形中的工作，随后 De-Giorgi、Nash、Moser 将其推广到任意维数。本文研究点集 $\mathcal{D} \cap \mathcal{S}$ 中满足以下条件的点 $\xi \in \mathbb{R}^2$： $D^2F(\xi)$ 的一个特征值等于 0，而另一个等于 $+\infty$；我们不对该集合的结构施加任何形式的条件。正如 [5], 的引言中所指出的，有证据表明，当 F 为严格凸时，无论集合 $\mathcal{D} \cap \mathcal{S}$ 的结构如何，(3) 的 Lipschitz 极小化子实际上都是 C^1 。当 $\mathcal{D} \cap \mathcal{S}$ 为空或 $\mathcal{D}$ 有限时，该问题已在 [5] 中得到解决；当 $\mathcal{D} \cap \mathcal{S}$ 有限时，也已在 [8] 中得到解决；但对于一般的严格凸函数 F，问题仍然悬而未决，这在一定程度上促成了本文的研究。

有趣的是，这个猜想无法推广到具有一般严格单调场 G （该场可能不是梯度）的方程 (1)。在这种情况下，Lispchitz 解可能不具备 C^1，如 [8, 定理 15]所示。在进一步讨论之前，我们先为 G 给出 $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{S}$ 的严格定义： $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

连续、严格单调。它们定义如下：

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(G) &= \bigcap_{\lambda>0} \operatorname{clos}\left\{\xi \in \mathbb{R}^2 : \liminf_{|\zeta|\to 0} \frac{\langle G(\xi+\zeta)-G(\xi),\zeta\rangle}{|\zeta|^2} \le \lambda\right\} \\ \mathcal{S}(G) &= \bigcap_{\Lambda>0} \operatorname{clos}\left\{\xi \in \mathbb{R}^2 : \liminf_{|\zeta|\to 0} \frac{\langle G(\xi+\zeta)-G(\xi),\zeta\rangle}{|G(\xi+\zeta)-G(\xi)|^2} \le \frac{1}{\Lambda}\right\},\end{aligned} \tag{4}$$

其中，clos(A) 表示集合 $A \subset \mathbb{R}^2$ 的闭包；关于这些定义的更详细讨论，请参见 [8] 的引言。回到例子 [8, 定理 1.5], ，其中一个特别引人注目的特点是，Lipschitz（但非C^1）解的梯度几乎处处满足 $\nabla u \in \mathcal{D} \cap \mathcal{S}$。这自然引出了一个问题：dist($\nabla u, \mathcal{D} \cap \mathcal{S}$) 的正则性如何，其中 dist 表示标准距离函数。我们的主要结果表明，它处处近似连续。

定理 1.1。设 $G: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 严格单调且连续，并设$u: B_1 \to \mathbb{R}$是方程 (1) 的一个 *Lipschitz* 解。那么，对于任意 $x \in B_1$，要么$x \mapsto \operatorname{dist}(\nabla u(x)\ \mathcal{D} \cap \mathcal{S})$ 在 x 处连续，要么成立

$$\frac{1}{|B_\delta|}\int_{B_\delta(x)} \operatorname{dist}(\nabla u(y), \mathcal{D}\cap\mathcal{S})dy \to 0 \ \ as\ \delta \to 0.$$

若 $x \in B_1$ 满足 dist($\nabla u(x)\ D \cap S$) > 0，那么根据定理 1.1，我们知道在 x 的一个邻域内，梯度 ∇u 取值于一个与 $\mathcal{D} \cap \mathcal{S}$ 不相交的开集，因此根据定理 1.1], u 在该邻域内是 C^1 的。因此，定理 1.1 的一个直接推论给出了 u 的放大极限的描述：

推论 1.2. 设 G: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 连续且严格单调。那么，对于方程 (1) 的任意 *Lipschitz* 解，以及 $x_0 \in B_1$：

- 要么存在线性放大极限且唯一，也就是说，存在 $p \in \mathbb{R}^2$ 使得：

$$\frac{u(x_0+\delta x)-u(x_0)}{\delta} \xrightarrow[\delta\to 0]{} \langle p, x\rangle$$

- 要么任意放大极限：

$$v(x) := \lim \frac{u(x_0+\delta x)-u(x_0)}{\delta}$$

沿着一个子列 $\delta \to 0$ 几乎处处满足 $\nabla v \in \mathcal{D} \cap \mathcal{S}$。

在对 $\mathcal{D}\cap\mathcal{S}$施加附加假设的情况下，可以尝试利用这一梯度局部化性质，进一步刻画可能的放大极限。这一思想在 [9]中得到应用，以证明部分 C^1 正则性结果。

从椭圆型偏微分方程标准理论的角度来看，合理的预期是函数 dist(∇u, $\mathcal{D}\cup\mathcal{S}$) 具有连续性，因为当 ∇u 取值于包含在 $\mathbb{R}^2\setminus(\mathcal{D}\cup\mathcal{S})$ 中的某个开集时，该方程是一致椭圆的。在二维中，[5] 的估计甚至可以保证 ∇u 具有连续性，只要它取值于包含在可能大得多的 $\mathbb{R}^2\setminus(\mathcal{D}\cap\mathcal{S})$ 中的某个开集；而在拓扑条件

$$\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{N}^{\epsilon}\left(\mathcal{D}\cap\mathcal{S}\right) \text{ is connected for small enough } \epsilon > 0, \tag{5}$$

其中，$\mathcal{N}^{\epsilon}(A)$ 表示集合 $A \subset \mathbb{R}^2$ 的开 ϵ-邻域。下文将讨论此前取得类似结论的其他几项工作，这些工作对 $\mathcal{D}\cap\mathcal{S}$ 施加了某些结构条件。我们的定理 1.1 完全移除了对 $\mathcal{D}\cap\mathcal{S}$ 的任何条件，但只能给出稍弱的近似连续性结论。

我们来介绍一些简单的例子，在这些例子中，定理 1.1 提供了新的信息。首先，它适用于关于完全 C^1 正则性的 [8, 定理 1.5]中的反例。其次，如果 G 是一个严格凸径向函数的梯度，$G = \nabla F$ 其中 $F(x) = \phi(|x|)$ 对某个凸增函数$\phi \in C^1([0,\infty))$成立，且满足 $\phi'(0) = 0$，并且进一步假设 ϕ 在除有限个半径 $0 < r_1 < \cdots < r_N$之外均C^2，那么，任意 Lipschitz 极小化函数 u 的

$$\int_{B_1} F(\nabla u)$$

要么在 C^1 处为 0，要么任意放大极限 $v(x) = $ 沿着一个序列 $\frac{u(\delta x)-u(0)}{\delta}$ $\lim\delta \to 0$ 都满足 $|\nabla v| \in \{r_j\}$ 几乎处处成立。

1.2 相关工作

与本工作最接近的结果见于 [5], ，实际上，我们的证明在很大程度上依赖于 [5]中已经确立的命题。在他们的文章中，De Silva 和 Savin 研究了

障碍问题框架下的一类极小化问题（3），其中 F 严格凸，且极小化子受梯度约束 $\nabla u \in N$限制，其中 $N \subset \mathbb{R}^2$是某个（闭）凸多边形，而集合 $\mathcal{D} \cap \mathcal{S}$ 可能包含该多边形的整个边界 ∂N。这使得极小化子即使在 B_1内也可能出现梯度不连续性，即便 F 在 N内部是光滑的。他们的证明详细描述了这类奇异性的行为。特别地，他们能够证明，在 ∇u 的任意不连续点 x_0 以及任意$\epsilon > 0$处，都存在 $\delta > 0$，使得 $\nabla u(B_\delta(x_0)) \subset \mathcal{N}^\epsilon(\partial N)$。因此，dist$(\nabla u,\ \mathcal{D} \cap \mathcal{S})$是连续的。

在我们的情形中，我们不假设 $\mathcal{D} \cap \mathcal{S}$构成某个凸集的边界。建立正则性不需要任何结构假设。值得注意的是，在他们的证明中，以及更广泛地说，在许多已知的此类结果中，关于“坏”集的凸性假设至关重要。

例如，我们提及 [12], ，其中作者研究了二维情形下的方程 div$(\nabla F(\nabla u)) = f$ ，其中 f 属于适当的L^p-空间，而 F 是一个在 B_1内处处为零的凸函数。一个典型例子是 $F := (|\cdot|^2 - 1)_+$。在此背景下，尽管 ∇F 并非严格单调，但 $F = 0$ 所在集合的凸性在他们的主要结果中起着关键作用。具体而言，他们证明，对于任意在 B_1上为零的连续函数 H， $H(\nabla u)$都是连续的。此结果后来在 [4]中被推广到高维，并推广到任意在一个严格凸集 E 上为零的函数 F 。回顾上文给出的例子，我们会发现这些定理都不适用于这里。要避免这类结构假设似乎颇具挑战，尤其是因为这些证明的核心依赖于存在一个非负凸函数 Φ，它在不存在椭圆性的集合上为零。关键在于， $\Phi(\nabla u)$是该方程的一个次解，这是由 Φ 的凸性所致；又因为 Φ在坏集上为 0，因此可以调整非退化椭圆理论工具，以获得 $\Phi(\nabla u)$的正则性。在我们的框架中，这样的函数 Φ一般并不存在，这是主要困难之一。

然而，在放宽凸性要求时，也有一些结果可用。例如，当较大集合 $\mathcal{D} \cup \mathcal{S}$ 包含在某个二维平面内，且其连通分支的任意小邻域都是单连通的时， [10], Lledos 在高维情形下得到了类似的结论，讨论的是到 ∇u $\mathcal{D} \cup \mathcal{S}$ 的距离（而非此处的 $\mathcal{D} \cap \mathcal{S}$ ）。这一条件需要与 (5) 相比较；在 (5) 中，是唯一已知 $x \mapsto$ dist$(\nabla u(x)\ \mathcal{D} \cap \mathcal{S})$ 连续性的情形。为了理解为什么难以去除此条件，从而使距离映射处处连续，我们.....

可参见 [11, 第 5], 节或 [8, 注释 2.7]。

我们来总结本文与现有结果之间的区别：

- 当 G 严格单调时，我们对“坏”集 $\mathcal{D} \cap \mathcal{S}$ 不施加任何条件。特别是，我们不需要任何凸性类假设，也不要求 $\mathcal{D} \cap \mathcal{S}$ 的邻域是单连通的。

- 当 G 严格单调时，我们证明了 dist($\nabla u, \mathcal{D} \cap \mathcal{S}$) 的正则性，而不只是 dist($\nabla u, \mathcal{D}$)（如 [12], [4]中所示）或 dist($\nabla u, \mathcal{D} \cup \mathcal{S}$)（如 [10]中所示）。
- 我们的结果纯粹是二维的，只考虑零右端项，并且无法证明 $x \mapsto$ dist($\nabla u(x)$ $\mathcal{D} \cap \mathcal{S}$)处处连续。

1.3 策略

利用方程的平移不变性，我们将定理 1.1 化归为 $x = 0$ 的情形。我们分两种情况讨论：0 是否为 ∇u的勒贝格点。若0是勒贝格点，这意味着在某个尺度 ρ上， u 非常接近斜率为 p 的线性函数（见命题5.2）。根据 [5], 的一项结果，这意味着在尺度 $\rho/2$上，只要 $p \notin B_{2\eta}(q)$，像 $\nabla u(B_{\rho/2})$便不会与椭圆区域内包含的任何球 $B_\eta(q)$相交。关键在于找到这样的球；我们证明，由于 G的严格单调性，这样的球总是存在，见引理 3.1。此时，我们可以利用 [8] 中证明的局部化定理 2.1，推得对于 $r > 0$ ，存在 $\delta > 0$ 使得$\nabla u($ $B_{\delta\rho/2})$ $\subset B_r(p)$，若 p 远离坏集；或者 $\nabla u(B_{\delta\rho/2})$ $\subset \mathcal{N}^r(\mathcal{D} \cap \mathcal{S})$，若$p$ 位于坏集中。无论哪种情况，到 $\mathcal{D} \cap \mathcal{S}$ 的距离的振荡都很小，由此得到连续性。

如果 0 不是勒贝格点，论证基于 [12, 引理 5], ，该引理将二维圆盘中给定 H^1 函数的超水平集与环域中的狄利克雷能量联系起来。我们将这一性质与 [5], 给出的、远离 $\mathcal{D}$处的能量估计以及最大值原理结合起来，估计 ∇u 远离 $\mathcal{D}$的点集，并最终借助 [8]中已使用过的对偶性，估计其远离 $\mathcal{D} \cap \mathcal{S}$ 的点集。

1.4 计划

在第 2 节中，我们回顾 [8]的逼近过程和先验估计。在第 3 节中，我们证明关于集合 $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{S}$的一个拓扑结果。第 4 节致力于证明我们为证明定理 1.1 第一部分所需的局部化结果。在第 5 节中，我们证明 $x \mapsto$dist($\nabla u(x)$ $\mathcal{D} \cap \mathcal{S}$) 在 ∇u的任意勒贝格点 x 处的连续性。在第 6 节中，我们证明定理 1.1 的第二部分，该部分涉及 ∇u的非勒贝格点处的放大极限；这一节可以不读第 3、4、5 节。最后，我们在附录中给出第 [5]节所述引理的证明，以及 [8]先验估计的证明。

2 预备结果

2.1 基本定义与记号

以下是我们在分析中使用的严格单调连续场 G 的特征：

- 该单调模量 ω_G： $(0,\infty) \to (0,\infty)$，定义为

$$\omega_G(t) = \inf_{|\xi-\zeta|>t} \langle G(\xi) - G(\zeta), \xi - \zeta \rangle,$$

- 给定开集 $O_\lambda(G)$、 $V_\Lambda(G)$，如 [5]，中所示，定义为

$$O_\lambda(G) = \operatorname{int} \left\{ \xi \in \mathbb{R}^2 \colon \liminf_{|\zeta|\to 0} \frac{\langle G(\xi+\zeta) - G(\xi), \zeta \rangle}{|\zeta|^2} \geq \lambda \right\}, \quad (6)$$

$$V_\Lambda(G) = \operatorname{int} \left\{ \xi \in \mathbb{R}^2 \colon \liminf_{|\zeta|\to 0} \frac{\langle G(\xi+\zeta) - G(\xi), \zeta \rangle}{|G(\xi+\zeta) - G(\xi)|^2} \geq \frac{1}{\Lambda} \right\}, \quad (7)$$

对 $\lambda, \Lambda > 0$，其中 int A 表示 $A \subset \mathbb{R}^2$ 的拓扑内部。这些集合的相关性体现在以下等式中：

$$\mathcal{D} = \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{\lambda>0} O_\lambda \qquad \mathcal{S} = \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{\Lambda>0} V_\Lambda$$

在近似中，我们将处理强单调向量场G，也就是说，存在 $C > 0$ 使得

$$C\langle G(\xi) - G(\zeta), \xi - \zeta \rangle \geq |\xi - \zeta|^2 + |G(\xi) - G(\zeta)|^2 \quad (8)$$

2.2 光滑解的先验估计

下面的定理 2.1 称为光滑解的“局部化定理”。直观而言，它给出了一个尺度 δ： 如果已知光滑解 u 将 B_1 映射得到的像不与类型为 O_λ 或 V_Λ 的区域中的小球相交（见 (6)、(7)），那么在尺度 δ下， ∇u 必须定位于包含 O_λ（或 V_Λ）的连通分支中的某个椭圆区域内，或者 $\nabla u(B_\delta)$位于该连通分支之外。该定理是在 [5]的工作基础上于 [8]中得到的。参见 [8, 命题 2.1 和注 2.7]。由于这里的表述略有不同，我们在附录中给出证明。

在下文中，集合 A 的**开** r-邻域记作 $\mathcal{N}^r(A)$。

定理 2.1. 设 $G\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 光滑且强单调。假设存在 λ、Λ、$M > 0$ 以及一个开集 U，使得

$$\overline{B_{2M}} \subset V_\Lambda(G) \cup O_\lambda(G) \cup U.$$

设 u 是 B_1 中满足 $|\nabla u| \le M$ 的方程 散度$(G(\nabla u)) = 0$ 的任意光滑解。假设对于 $B_{2M}\backslash U$ 的某个连通分支 $\mathcal{C}$，存在一个球 $B_\rho(q) \subset \mathcal{C}$，使得

$$\nabla u(B_1) \cap B_\rho(q) = \emptyset$$

那么，对于上述开覆盖的任意勒贝格数 $\eta \in (0,\ \rho)$（任意满足 $|\xi| \le 2M$ 的球 $B_\eta(\xi)$ 必须包含于 $V_\Lambda(G)$、 $O_\lambda(G)$ 或 U 中），存在 $\delta > 0$，使得以下情形之一成立：

$$\nabla u(B_\delta) \subset B_\eta(p),\ \textit{for some } p \in \mathcal{C}$$

or

$$\nabla u(B_\delta) \subset \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{C},$$

其中 $\delta > 0$ 取决于

- 勒贝格数 η；
- 梯度界 M 和椭圆性常数 λ, Λ;
- 积分 $\int_{B_1} |\nabla u|^2\, dx$ 和 $\int_{B_1} |G（\nabla u）|^2\, dx$;

- 单调模量 ω_G 通过任意满足 $\omega_G(t)/t \geq c$ 的 $c > 0$，对所有 $t \in [\eta/4, M + \eta]$。

为了应用定理 2.1，我们需要找到一个满足条件 $\nabla u(B_1) \cap B_\rho(q) = \emptyset$ 的球 $B_\rho(q)$。下面的引理正是用于在已知 u 接近某个仿射函数时找到这样的球。这是 [5, 命题 6.2], 的断言 8.2；我们将在附录中概述其证明。

引理 2.2。设 G 光滑强单调，且 u 是满足散度$(G(\nabla u)) = 0$ 的光滑解，其利普希茨界为 M。设 p、$q \in \mathbb{R}^2$ 和 $\rho > 0$ 满足 $B_\rho(q) \subset O_\lambda \cap V_\Lambda$ 以及 $p \notin B_\rho(q)$。存在 $\epsilon := \epsilon(\rho, \lambda, \Lambda)$，使得对于任意满足以下条件的光滑解 u

$$|u(x) - l_p(x)| \leq \epsilon \text{ for all } x \in B_1$$

对于某个满足 $\nabla l_p = p$ 的仿射映射 l_p，则 $\nabla u(B_{1/2}) \cap B_{\rho/2}(q) = \emptyset$。

可在附录中查看证明，以了解对ρ、λ、Λ的显式依赖。

2.3 逼近

本节回顾将 div$(G(\nabla u))$ =0 的解逼近为光滑解 ∇u_ϵ 的过程。所有证明均可见于 [8]。读者首次阅读时可以跳过本节。

以下引理是构造逼近的第一步。它是在无穷远处对给定的场 G 进行修改，以便将逼近 u_ϵ 的 Lipschitz 范数控制为与 ϵ 无关。

引理 2.3。设 $G\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 是连续严格单调向量场，$\widetilde{\ }$ 且 $M > 0$。则存在 $G\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$，它是连续严格单调向量场，在 B_M 中等于 G，并且在 B_{4M} 外光滑，使得

$$\mathcal{D}(\widetilde{G}) \cap \mathcal{S}(\widetilde{G}) \subset \mathcal{D}(G) \cap \mathcal{S}(G) \cap \overline{B_M},$$

and

$$c \leq \nabla^s \widetilde{G}(\xi) \leq |\nabla \widetilde{G}(\xi)| \leq 4c \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^2 \setminus B_{4M},$$
$$|\widetilde{G}(\xi)| \leq L(1 + |\xi|) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^2,$$

对于某些依赖于 M 和$\|G\|_{L^\infty(B_{4M})}$ 的常数 L、$c > 0$。

~其次，我们通过对先前得到的场 G 进行平滑处理来构造近似解。椭圆型偏微分方程的标准理论保证，散度$(G_\epsilon(\nabla u_\epsilon)) = 0$ 的解是光滑的。

引理 2.4。令 G: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 一个连续严格单调向量场。假设存在 M、$L \geq 1$、$c > 0$，使得 G 在 $\mathbb{R}^2 \setminus B_{4M}$中光滑，并且

$$
\begin{aligned}
&c \leq \nabla^s G(\xi) \leq |\nabla G(\xi)| \leq 4c \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^2 \setminus B_{4M}, \\
&|G(\xi)| \leq L(1 + |\xi|) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^2.
\end{aligned}
$$

则存在一个由光滑且强单调（8）向量场组成的序列 G_ϵ，使得当 $\epsilon \to 0$ 时，$G_\epsilon \to G$ 局部一致收敛，并且

$$
\begin{aligned}
&\nabla^s G_\epsilon(\xi) \geq c \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^2 \setminus B_{5M}, \\
&|G_\epsilon(\xi)| \leq 2L(1 + |\xi|) \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^2, \\
&\omega_{G_\epsilon} \geq \omega_G, \\
&B_{2\epsilon}(\xi) \subset O_\lambda(G) \;\Rightarrow\; \xi \in O_\lambda(G_\epsilon), \\
&B_{2\epsilon}(\xi) \subset V_\Lambda(G) \;\Rightarrow\; \xi \in V_{\Lambda+\epsilon}(G_\epsilon),
\end{aligned}
$$

对所有 $\epsilon \in$ （0，1）均
成立。

最后，通过标准方法可得，u_ϵ 收敛于初始问题的解:

引理 2.5。设 G、G_ϵ: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 如引理 *2.4* 中所述，且 u 是在 B_1 中满足 $|\nabla u| \leq M$的散度 G（∇u）$= 0$ 的一个解。对于 $\epsilon \in$（0，1），令 u_ϵ 为边值问题的唯一光滑解

$$
\operatorname{div} G_\epsilon(\nabla u_\epsilon) = 0 \quad in\ B_1, \qquad u_\varepsilon = u \quad in\ \partial B_1.
$$

则有

$$
\sup_{\epsilon \in (0,1)} \|\nabla u_\epsilon\|_{L^\infty(K)} < \infty \qquad for\ all\ compact\ K \subset B_1,
$$

并且在 B_1 中局部一致收敛至 $u_\epsilon \to u$，且在 $W^{1,\,2}(B_1)$ 中强收敛。

3 $\mathcal{D}$ 与 $\mathcal{S}$的拓扑结构

本节汇集了关于集合 $\mathcal{D}$, $\mathcal{S}$ 的两个结果。这些结果用于应用引理 2.2。

引理 3.1. 设 $G\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 严格单调且连续。那么，$\mathcal{D} \setminus \mathcal{S}$ 的内部为空。

证明。 假设对某个 $r > 0$, $B_r(p) \subset \mathcal{D} \setminus \mathcal{S}$。由于

$$\mathcal{S} = \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{\Lambda>0} V_\Lambda(G),$$

存在 $\Lambda_0 > 0$，使得 $B_r(p) \subset \mathcal{D} \cap V_{\Lambda_0}(G)$。由此可知， G 在 $B_r(p)$ 中是 Λ_0 利普希茨函数（见 [8, 引理 A.3]），因此我们可以应用面积公式，例如参见 [3, 定理 1.3] （雅可比行列式由严格单调性可知非负），得到

$$|G(B_r(p))| \le \int_{B_r(p)} \det \nabla G.$$

利用包含关系 $B_r(p) \subset \mathcal{D}$，我们推得在 G 可微的每一点， ∇G 都有一个特征值等于 0；因此，由于 G在 $B_r(p)$中也是利普希茨函数，$\det \nabla G = 0$ 在 $B_r(p)$中几乎处处为零。由此，我们推得 $|G(B_r(p))| = 0$。然而，由于G 是单射（因为严格单调）且连续，域不变定理（见 [2]）保证 G 是开映射。这就产生了矛盾。 □

接下来，我们证明关于 $\mathcal{S} \setminus \mathcal{D}$ 的反向结论。

引理 3.2. 设 $G\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 严格单调且连续，则 $\mathcal{S} \setminus \mathcal{D}$ 的内部为空。

证明。 我们回顾一下，我们关注的是方程 (1) 的 Lipschitz 解，因此，只需证明对于所有 $M > 0$, $(\mathcal{S} \setminus \mathcal{D}) \cap B_M$ 的内部为空。这就是为什么在证明中，我们可以在任意大的紧子集之外任意修改 G，使其不影响 $\mathbb{R}^2$。

我们记 i 表示角度为 $\pi/2$的逆时针旋转。根据[8, 命题 4.1] ，可以在一个足够大的球 B_M之外修改 G，以确保 G 是一个同胚（参见 [8, 命题 4.1 第 1,2]点）。因此，该场

$$G^* : \xi \in \mathbb{R}^2 \mapsto iG^{-1}(-i\xi)$$

定义良好、连续且严格单调（参见 [8, 命题 4.1 第 3]点）。利用 [8, 命题 4.1 第 4] 点，我们得到

$$iG(\mathcal{S}(G)) = \mathcal{D}(G^*)$$

并且类似地：

$$iG(\mathcal{D}(G)) = \mathcal{S}(G^*).$$

由于 G^* 严格单调，我们应用引理 3.1，推得集合 $iG(\mathcal{S}(G)) \setminus iG(\mathcal{D}(G))$ 的空内部。由于 G 是一个同胚，我们得到 $\mathcal{S}(G) \setminus \mathcal{D}(G)$ 的空内部。

□

推论 3.3. 设 $G\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 连续且严格单调。对于任意非空开集 $U \subset \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{D} \cap \mathcal{S}$，存在 $\lambda, \Lambda, \eta > 0$ 和 $q \in U$，使得 $B_\eta(q) \subset U \cap O_\lambda \cap V_\Lambda$

证明. 固定陈述中的 U。首先，我们证明存在 $\lambda > 0$使得 $U \cap O_\lambda \neq \emptyset$。事实上，假设对于任意 $\lambda > 0$都有 $U \cap O_\lambda = \emptyset$，那么，$U \subset \mathcal{D}$。然而，由于 $U \subset \mathbb{R}^2 \setminus (\mathcal{D} \cap \mathcal{S})$，我们不能有 $U \cap \mathcal{S} \neq \emptyset$，否则会有一点同时属于 U和 $\mathcal{D} \cap \mathcal{S}$。因此，在 U的内部取一个球 B_r，可得 $B_r \subset \mathcal{D} \setminus \mathcal{S}$，这与引理 3.1 矛盾。最后，固定这样一个 $\lambda > 0$，并假设对于任意 $\Lambda > 0$都有 $U \cap O_\lambda \cap V_\Lambda = \emptyset$。于是，$U \cap O_\lambda \subset \mathcal{S}$，且由于 $U \cap O_\lambda$ 是非空开集，我们推得 $\mathcal{S} \setminus \mathcal{D}$ 有非空内部，这与引理 3.2 矛盾。因此，存在 $\Lambda > 0$ 使得 $U \cap O_\lambda \cap V_\Lambda \neq \emptyset$；由于这三个集合都是开集，证明完成。

□

4 局部化结果

本节回顾 [5] 的扁平性结果。我们借助 [5, 命题 6.2 和 6.3]，利用定理 2.1 得到一个新的定位性质。

命题 4.1. 设 G光滑、强单调，且 u 为 散度$(G(\nabla u)) = 0$ 的光滑解。假设存在 $0 < \lambda < \Lambda < \infty$，$\rho, M > 0$,$q \in \mathbb{R}^2$ 以及一个开集 U，使得：

$$\overline{B_{2M}} \subset O_\lambda(G) \cup V_\Lambda(G) \cup U, \tag{9}$$
$$B_\rho(q) \subset (O_\lambda(G) \cap V_\Lambda(G)) \setminus \bar{U}. \tag{10}$$

那么，对于任意 $r > 0$，存在依赖于 $\epsilon, \delta > 0$ 的：

- 覆盖 $\eta \in (0, \min(\rho/4, r/2))$ 的勒贝格数 (9)（任意球$B_\eta(\xi)$ 都包含于 O_λ, V_Λ 或 U 中）
- 这些量 λ, Λ, $\|G(\nabla u)\|_{L^2(B_1)}$, $\|\nabla u\|_{L^2(B_1)}$

- 单调性模数 ω_G 通过任意 $c > 0$使得 $c \geq$ 下确界$_{(\eta/4, M+\eta)}\ \omega_G(t)\ t$ ——

使得如果

$$|u(x) - l_{p_0}(x)| \leq \epsilon, \quad \forall x \in B_1 \tag{11}$$

对于某个仿射映射 l_{p_0}，其满足 $\nabla l_{p_0} = p_0 \notin B_\rho(q)$，则以下情况之一成立

$$\nabla u(B_\delta) \subset B_r(p_0) \tag{12}$$

or

$$\nabla u(B_\delta) \subset V \tag{13}$$

其中， V 是包含 q 的 $B_{2M} \setminus U$ 的连通分支的补集。 ——

证明。 证明与 [5], 中相同，但使用了不同的定位定理。我们用 $\mathcal{C}$ 表示包含 q 的 $B_{2M} \setminus U$ 的连通分支。应用引理 2.2，我们可以选取足够小的 $\epsilon := \epsilon(\rho, \lambda, \Lambda)$，使得 (11) 推出 $\nabla u(B_{1/2}) \cap B_{\rho/2}(q) = \emptyset$。我们取覆盖 (9) 的一个勒贝格数 η，满足 $0 < \eta \leq \min(\rho/4, r/2)$，并应用定理 2.1，得到 $\delta > 0$，使得以下两种情况之一成立:

$$\nabla u(B_{\delta/2}) \subset B_\eta(p) \text{ for some } p \in \mathcal{C} \text{ or } \nabla u(B_{\delta/2}) \subset \overline{B_{2M}} \setminus \mathcal{C}. \tag{14}$$

我们根据 p_0 的位置来区分这两种情况。

- 情形 1： $B_r(p_0) \subset \mathcal{C}$.

注意，在满足 $|x|^2 \geq 4\epsilon$ 的区域中，由于平坦性假设 (11)，我们有 $\frac{1}{2}|x|^2 + u(x) - p_0 \cdot x \geq \epsilon$。不失一般性，我们可以假设 $u(0) = 0$，因此映射 $x \mapsto \frac{1}{2}|x|^2 + u(x) - p_0 \cdot x$ 在 $x_0 \in B_{2\sqrt{\epsilon}}(0)$ 处取得最小值。此时，必有 $\nabla u(x_0) = p_0 - x_0$，由此我们推得

$$\nabla u(B_{2\sqrt{\epsilon}}(0)) \cap B_{2\sqrt{\epsilon}}(p_0) \neq \emptyset. \tag{15}$$

最终降低 ϵ，我们还有 $2\sqrt{\epsilon} \leq \frac{\delta}{2} < r$，因此，由于包含关系$B_r(p_0) \subset \mathcal{C}$，(14) 中的第二种情况不可能成立。因此，对于某个 $p \in \mathcal{C}$，$\nabla u(B_{\delta/2}) \subset B_\eta(p)$。此外，由 (14) 和 (15) 可得 $|p - p_0| \leq \eta + 2\sqrt{\epsilon} \leq 2\eta$，从而证明 $\nabla u(B_{\delta/2}) \subset B_{2r}(p_0)$。

- Case 2：$B_r(p_0) \subset \overline{B_{2M}} \setminus \mathcal{C}$.

我们采用与上面相同的论证，但这次 (15) 给出了 (14) 中的第二个包含关系。

□

5 ∇u 的勒贝格点处的连续性

本节证明主要结果的第一部分，即:

定理 5.1. 令 $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 连续且严格单调。设 $u : B_1 \to \mathbb{R}$ 是一个 M-利普希茨解，满足 (1)。假设 0 是 ∇u 的一个勒贝格点。那么，$x \mapsto \mathrm{dist}(\nabla u(x)\ \mathcal{D} \cap \mathcal{S})$ 在 0 处连续。

为证明此定理，我们结合第 2 节第 2.3 节中定义的逼近过程与第 4 节的局部化结果。为此，我们需要检验，在某个尺度下，u 与仿射映射 ϵ接近。下面的引理正是为此目的而使用的。证明是标准的，可参见 [6, 定理 6。5]

引理 5.2。设 $u : B_1 \to \mathbb{R}$ 是一个 M-利普希茨映射，并假设0 是 ∇u的一个勒贝格点。那么，对于任意 $\epsilon > 0$，存在 $\rho > 0$ 使得

$$|u(x) - \langle p, x\rangle - u(0)| \leq \epsilon\rho \ for\ all\ x \in B_\rho(0)$$

其中极限$\lim_{\delta \to 0} \frac{1}{|B_\delta|} \int_{B_\delta} |\nabla u\ (y)\ - p| dy = 0$。

我们现在可以证明定理 5.1。

定理 *5.1* 的证明。 首先，我们假设 $\mathcal{D} \cap \mathcal{S} \cap B_M \neq \emptyset$，否则，$u \in C^1$ 根据 [8, 主定理] ，结论显然成立。

令 p_0 使得

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{1}{|B_\delta|} \int_{B_\delta} |\nabla u(y) - p_0| dy = 0.$$

思路是根据向量 $\nabla u(0)$ 的位置应用命题 4.1。根据引理 2.3，将 G 替换为 G不会改变方程，因此我们可以假设

$$\mathcal{D}(G) \cap \mathcal{S}(G) \subset \overline{B}_M.$$

由引理 2.4 可知，存在一个由光滑、强单调向量场组成的序列 G_ϵ ，使得 $\omega_{G_\epsilon} \geq \omega_G$ ，并且对所有 $0 < \lambda < \Lambda < +\infty$ ：

$$B_{2\epsilon}(\xi) \subset O_\lambda(G) \Rightarrow \xi \in O_\lambda(G_\epsilon) \tag{16}$$

and

$$B_{2\epsilon}(\xi) \subset V_\Lambda(G) \Rightarrow V_{\Lambda+\epsilon}(G_\epsilon). \tag{17}$$

应用引理 2.5，可得到一个由方程 $\operatorname{div}(G_\epsilon(\nabla u_\epsilon)) = 0$ 的光滑解组成的序列 u_ϵ ，它满足 $|\nabla u_\epsilon| \leq M$ 于 $B_{1/2}$ ，其中某个 $M \geq M$ ，并且在 B_1 中局部一致收敛到 u 。重缩放至 B_1后，我们假设 $|\nabla u_\epsilon| \leq M$ 于 B_1。固定一个序列 $\epsilon(m) \to 0$ ，并记作 $G_m = G_{\epsilon(m)}$、$u_m = u_{\epsilon(m)}$。对于 $r > 0$，我们验证存在一个与 m 无关的 $\delta > 0$ ，使得

$$\operatorname{diam}(\operatorname{dist}(\nabla u_m(B_\delta)) \leq r.$$

我们区分 p_0 是否属于 $\mathcal{D} \cap \mathcal{S}$。

情形 1. $p_0 \notin \mathcal{D} \cap \mathcal{S}$.
由于 $p_0 \notin \mathcal{D} \cap \mathcal{S}$，最终降低 r，我们假设

$$B_r(p_0) \cap \mathcal{N}^r(\mathcal{D}(G) \cap \mathcal{S}(G)) = \emptyset. \tag{18}$$

设 $\mathcal{C}$ 为包含 $B_r(p_0)$ 的 $B_{2\tilde{M}} \setminus \mathcal{N}^r(\mathcal{D} \cap \overline{\mathcal{S}})$ 的连通分支。根据推论 3.3，存在 $0 < \lambda_0 < \Lambda_0 < \infty$ 和一个球

$$B_\rho(q) \subset O_{\lambda_0}(G) \cap V_{\Lambda_0}(G) \cap \mathcal{C}. \tag{19}$$

将 ρ 替换为 $\rho/2$，并最终改变点 q 的定位，我们可以假设 $p_0 \notin B_\rho(q)$。现在，由于 $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{S}$ 分别是 $\bigcup_{\lambda>0} O_\lambda(G)$ 和 $\bigcup_{\Lambda>0} V_\Lambda(G)$ 的补集，存在 $\infty > \Lambda_1 > \lambda_1 > 0$ 使得

$$\overline{B_{2\tilde{M}}} \setminus \mathcal{N}^r(\mathcal{D} \cap \mathcal{S}) \subset O_{\lambda_1}(G) \cup V_{\Lambda_1}(G). \tag{20}$$

令 $\lambda =$ 为 $\min(\lambda_0, \lambda_1)$，并令 $\Lambda =$ 为 $\max(\Lambda_0, \Lambda_1)$。由这些集合的单调性、(19) 和 (20)，我们有：

$$\begin{aligned}
&\overline{B_{2\tilde{M}}} \subset O_\lambda(G) \cup V_\Lambda(G) \cup \mathcal{N}^r(\mathcal{D} \cap \mathcal{S}),\\
&B_\rho(q) \subset O_\lambda(G) \cap V_\Lambda(G) \setminus \overline{(\mathcal{N}^r(\mathcal{D} \cap \mathcal{S}))},\\
&p_0 \notin B_\rho(q).
\end{aligned}$$

我们将 $\mathcal{C}_m$ 记作

$$\overline{B}_{2\tilde{M}} \setminus (\mathcal{N}^r(\mathcal{D} \cap (\mathcal{S})) \cap (O_\lambda(G_m) \cup V_{2\Lambda}(G_m))$$

包含 $B_\rho(q)$ 的连通分支。

由 (16) 和 (17)，我们推得对于所有充分大的 m：

$$\overline{B_{2\tilde{M}}} \subset V_{2\Lambda}(G_m) \cup O_\lambda(G_m) \cup \mathcal{N}^r(\mathcal{D} \cap \mathcal{S}), \tag{21}$$

$$B_\rho(q) \subset O_\lambda(G_m) \cap V_{2\Lambda}(G_m) \setminus \overline{(\mathcal{N}^r(\mathcal{D} \cap \mathcal{S}))}, \tag{22}$$

$$p_0 \notin B_\rho(q)。 \tag{23}$$

由于 G_m 光滑且强单调，u_m 是相应方程的光滑解，并且根据 (21)、(22)、(23)，我们可以应用命题 4.1 的重缩放版本：存在 $\epsilon > 0$，使得如果对于某个 $t > 0$，我们有

$$\sup_{x \in B_t} |u_m(x) - l_{p_0}(x)| \le \epsilon t \quad l_{p_0} \text{ affine with } \nabla l_{p_0} = p_0$$

于是，$\nabla u_m(B_{t\delta/2}) \subset B_r(p_0)$（命题 4.1 的第一种情况出现，是因为$B_r(p_0) \subset \mathcal{C}_m$）。这里，我们回顾一下，$\epsilon$，$\delta$ 取决于：

• 覆盖 (21) 的一个勒贝格数 $\eta \in (0, \min(\rho/4, r/2))$（任意球 $B_\eta(\xi)$ 都包含在 $O_\lambda(G_m)$ $V_{2\Lambda}(G_m)$ 或 $\mathcal{N}^r(\mathcal{D} \cap \mathcal{S})$ 中）。

• 量 λ、Λ、$\|G_m(\nabla u_m)\|_{L^2(B_1)}$ 以及 $\|\nabla u_m\|_{L^2(B_1)}$。

• 单调性模数 ω_{G_m} 通过任意满足 $c \geq \inf_{(\eta/4,\ \tilde{M}+\eta)} \omega_{G_m}(t)\ t$ 的 $c > 0$。

根据引理 2.4，我们有 $\omega_{G_m} \geq \omega_G$ 以及覆盖的任意勒贝格数

$$\overline{B_{2\tilde{M}}} \subset O_\lambda(G) \cup V_\Lambda(G) \cup \mathcal{N}^r(\mathcal{D} \cap \mathcal{S})$$

仍然是覆盖（21）的一个勒贝格数。此外，根据引理 2.5，我们可以对 $\|G_m(\nabla u_m)\|_{L^2(B_1)}$ 和 $\|\nabla u_m\|_{L^2(B_1)}$ 进行关于 m 的一致有界估计。这意味着我们可以选择关于 m 一致的 ϵ 和 δ。固定这样的 $\epsilon > 0$，并检验当 m 足够大时，u_m 接近一个仿射映射。

由于 0 是 ∇u 的一个勒贝格点，根据引理 5.2，对于任意 $\epsilon > 0$，存在 $t := t(\epsilon)$ 使得

$$\sup_{x \in B_t} |u(x) - \langle p_0, x\rangle - u(0)| \leq \frac{\epsilon}{2} t.$$

由于 u_m 在局部一致地收敛于 u（见引理 2.5），我们得到对所有充分大的 m：

$$\sup_{x \in B_t} |u_m(x) - \langle p_0, x\rangle - u_m(0)| \leq \epsilon t. \tag{24}$$

将命题 4.1 应用于（24），得到包含关系

$$\nabla u_m(B_{t\delta/2}) \subset B_r(p_0)$$

其中 δ 和 t 与 m无关。由于距离函数是 1-利普希茨的，我们推得

$$\operatorname{diam}(\operatorname{dist}(\nabla u_m(B_{t\delta/2}), \mathcal{D} \cap \mathcal{S})) \leq r$$

对所有充分大的 m 均成立。令 m 趋于无穷大，即得所需结果。

情形 2. $p_0 \in \mathcal{D} \cap \mathcal{S}$

我们首先引入如下量:

$K =$ $B_{2\tilde{M}} \setminus \mathcal{N}^r(\mathcal{D} \cap \mathcal{S})$ 的连通分支数量

并且我们验证了，对于任意 $r > 0$， K 是有限的。事实上，记 $\mathcal{C}_i$ 为不同的连通分支，则有

$$\mathcal{N}^{r/2}(\mathcal{C}_i) \cap \mathcal{N}^{r/2}(\mathcal{C}_j) = \emptyset \quad \forall i \neq j \in \{1, , , K\}.$$

由于

$$\bigcup_{i=1}^{K} \mathcal{N}^{r/2}(\mathcal{C}_i) \subset \mathcal{N}^{r/2}(\overline{B_{2\tilde{M}}})$$

由此可得

$$\pi K \frac{r^2}{4} \leq K \min_{i \in \{1,,,K\}} \{|\mathcal{N}^{r/2}(\mathcal{C}_i)|\} \leq \sum_{i=1}^{K} |\mathcal{N}^{r/2}(\mathcal{C}_i)|) \leq \pi(2\tilde{M} + r/2)^2$$

因此

$$K \leq \frac{4(2\tilde{M} + r/2)^2}{r^2} < \infty \quad \forall r > 0.$$

现在，我们固定 $r > 0$ ，并将 $\mathcal{C}$ 记为一个连通分支

$$B_{2\tilde{M}} \setminus \overline{\mathcal{N}^r(\mathcal{D} \cap \mathcal{S})}.$$

在这个连通分支中，我们应用推论 3.3，得到一个球 $B_\rho(q)$ 以及一些数 $0 < \lambda < \Lambda < \infty$ ，使得

$$B_\rho(q) \subset O_\lambda(G) \cap V_\Lambda(G) \cap \mathcal{C}$$

其中包含 $p_0 \notin B_\rho(q)$。与上文所述类似，我们将 C_m 记作其连通分支

$$\overline{B}_{2\tilde{M}} \setminus (\overline{\mathcal{N}^r(\mathcal{D} \cap \mathcal{S})} \cap (O_\lambda(G_m) \cup V_{2\Lambda}(G_m))$$

其中包含 $B_\rho(q)$。命题 4.1 给出 ϵ 和 δ，它们可以相对于 m 取一致的值，因此，若对于某个 $t>0$ 我们有：

$$\sup_{x\in B_t}|u_m(x)-l_{p_0}(x)|\le \epsilon t \quad l_{p_0}\text{ affine with }\nabla l_{p_0}=p_0$$

那么，$\nabla u_m(B_{t\delta/2}) \subset \overline{B_{2\tilde{M}}}\setminus \mathcal{C}_m$（第二种情况发生是因为 $B_r(p_0)$ 位于包含 $B_\rho(q)$ 的连通分支 $\mathcal{C}_m$ 之外）。因此，对于任意连通分支 $\mathcal{C}$

$$\overline{B_{2\tilde{M}}}\setminus\overline{\mathcal{N}^r(\mathcal{D}\cap\mathcal{S})}$$

并且由于 0 是 ∇u 的勒贝格点，存在与 m无关的 $t>0$ 和 $\delta>0$，使得

$$\nabla u_m(B_{t\delta/2})\subset \overline{B_{2\tilde{M}}}\setminus\mathcal{C}_m.$$

由于连通分支的数量有限（至多为 K，且与 m 无关），这意味着存在与 m 无关的 $\delta>0$，使得对于所有足够大的 m，

$$\nabla u_m(B_{\tilde{\delta}})\subset\overline{\mathcal{N}^r(\mathcal{D}\cap\mathcal{S})}$$

令 $m\to\infty$，即可得出结论。

□

注 5.3。该定理恰好表明，只要 0 是 ∇u 的勒贝格点且 $\nabla u(0)\in \overline{B_M}\setminus(\mathcal{D}\cap\mathcal{S})$，那么 ∇u 在 0 的某个邻域内连续。当该点属于退化/奇异集时，我们无法在其周围局部化 $\nabla u(B_\delta)$，只能在坏集的某个邻域内进行局部化。

6 非正则点处的放大极限

定理 5.1 并不意味着映射 $x\mapsto \mathrm{dist}(\nabla u(x)\ \mathcal{D}\cap\mathcal{S})$ 在整个 B_1 上具有连续代表元。然而，鉴于局部化定理 2.1，我们预计，对于给定的非勒贝格点 x_0，像 $\nabla u(B_\delta(x_0))$ 应当接近 $\mathcal{D}\cap\mathcal{S}$。

在本节结束之前，我们假设 $u(0)=0$。给定 $\delta>0$，记 u_δ 为由 $u_\delta(\cdot)=\delta^{-1}u(\delta\cdot)$ 定义的重缩放。序列 $(u_\delta)_{\delta>0}$ 是

一个 Lipschitz映射序列，其 Lipschitz常数为 M，因此我们可以提取一个子列 $(u_{\delta_j})_{j\in\mathbb{N}}$，使得 $(\nabla u_{\delta_j})_{j\in\mathbb{N}}$生成一族 Young测度 $(\nu_x)_{x\in B_1}$，并具有如下性质：对于任意光滑函数H ：

$$\int_{B_1} H(\nabla u_{\delta_j}(x))dx \to \int_{B_1}\int_{B_M} H(y)d\nu_x(y)dx \quad \text{as } j\to\infty \tag{25}$$

例如，参见 [1, 定理3和注记 3]。我们的目标是证明：

命题 6.1。 设 u 是(1)的一个 ***Lipschitz*** 解，且 G 单调。假设 u在0的任何邻域内都不是 C^1 。那么，对于几乎每个 x 属于 B_1， ν_x 都支集于 $\mathcal{D}$中。

一个直接推论是：

推论6.2。 设 G 连续且严格单调，且 u 是(1)的一个解。那么，对于任意 $x_0\in B_1$，要么$\operatorname{dist}(\nabla u(x)\ \mathcal{D})$ 在x_0处连续，要么成立

$$\frac{1}{|B_\delta|}\int_{B_\delta(x_0)} \operatorname{dist}(\nabla u(y),\mathcal{D})dy \to 0 \ \ as\ \delta\to 0.$$

我们先介绍所用的记号，并证明一些初步引理，由此将得到命题 6.1 的证明。

对于 $\epsilon>0$，由 $B_{2M}\setminus\mathcal{N}^\epsilon(\mathcal{D})$的紧性，只需证明：对任意球 $B_\eta(\xi)\subset B_{2M}\setminus\mathcal{N}^\epsilon(\mathcal{D})$， ν_x 的支集位于 $B_\eta(\xi)$之外。直到最后，我们固定 $\epsilon>0$和一个球 $B_\eta(\xi)\subset B_{2M}\setminus\mathcal{N}^\epsilon(\mathcal{D})$。

我们定义 H 一个满足以下条件的光滑函数：

$$H(\zeta)=\begin{cases}0 & \text{if } \zeta\in\mathbb{R}^2\setminus B_\eta(\xi),\\ 1 & \text{if } \zeta\in B_{\eta/2}(\xi).\end{cases}$$

我们还要求

$$\{H\geq 5/8\}\subset B_{3\eta/4}(\xi) \tag{26}$$

and

$$\{H \leq 3/4\} \subset \mathbb{R}^2 \setminus B_{2\eta/3}(\xi). \tag{27}$$

注意，映射 H 满足：

$$\{\nabla H \neq 0\} \subset B_\eta(\xi) \subset O_\lambda(G) \tag{28}$$

其中 $\lambda = \lambda(\epsilon)$ 满足 $B_{2M} \setminus \mathcal{N}^{\epsilon/2}(\mathcal{D}) \subset O_\lambda$。回顾 $(u_m)_{m\geq 0}$ 是第 2 节中定义的逼近序列。根据引理 2.4], ，我们对序列 $H(\nabla u_m)$ 有一致的 $W^{1,\,2}$ 估计：

引理 6.3。存在 $m_0 \in \mathbb{N}$ 和 $C(\epsilon, H, G) > 0$，使得对于任意 $m \geq m_0$ ：

$$\int_{B_{1/2}} |\nabla \left(H(\nabla u_m)\right)|^2 dx \leq C.$$

证明。若 m_0 足够大（仅取决于 ϵ），由 (28) 及引理 2.4 可得

$$\{\nabla H \neq 0\} \subset O_\lambda(G) \subset O_{\lambda/2}(G_m)$$

对于由 (28) 给出的 $\lambda(\epsilon) > 0$，其与 m 无关。对集合 $\nabla u^{-1}(O_\lambda)$ 中的光滑解 u 使用 $W^{2,\,2}$ 估计（见引理 2.4]），我们有：

$$\begin{aligned}
\int_{B_{1/2}} |\nabla \left(H(\nabla u_m)\right)|^2 &\leq \int_{\nabla u_m^{-1}(O_{\lambda/2}(G_m)\cap B_{1/2}} |\nabla H(\nabla u_m)|^2 |\nabla^2 u_m|^2 dx \\
&\leq \|\nabla H\|_{L^\infty} \int_{\nabla u_m^{-1}(O_{\lambda/2}(G_m)\cap B_{1/2}} |\nabla^2 u_m|^2 dx \\
&\leq \|\nabla H\|_{L^\infty} \frac{c_0}{\lambda^2} \|G_m(\nabla u_m)\|^2_{L^2(B_1)} \\
&\leq C(\epsilon, H, G).
\end{aligned}$$

□

对于 $\delta > 0$，我们引入：

$$f(\delta) := \frac{|\{H(\nabla u) \geq 3/4\} \cap B_\delta|}{|B_\delta|} = \frac{|\{H(\nabla u_\delta) \geq 3/4\} \cap B_1|}{|B_1|}.$$

下面这个结果至关重要，可见于 [12,引理 5],：

引理 6.4. 设 $v \in W^{1,2}(B_1) \cap L^\infty(B_1)$ 且 $M \geq v \geq 0$。假设存在 $\nu > 0$，使得 $|\{v \geq \frac{3M}{4}\} \cap B_1| \geq \nu |B_1|$。那么，以下两种情况之一成立：

- 或者

$$\int_{B_1 \setminus B_{\sqrt{\nu/2}}} |\nabla v|^2 \geq M^2 \frac{\nu}{512\pi^2}$$

- *Or, there exists* $s \in (\sqrt{\nu/2}, 1)$ *such that* $v \geq \frac{5M}{8}$ *on* ∂B_s.

接下来，我们证明关于第 2 节中的序列 $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ 的以下引理：

引理 6.5. 对于任意 $\frac{1}{2} \geq \delta > 0$，存在 $m := m(\delta)$，使得对于任意$m \geq m(\delta)$：

$$\frac{|\{H(\nabla u_m) \geq 3/4\} \cap B_\delta|}{|B_\delta|} \geq \frac{f(\delta)}{2}.$$

证明。这可由序列 $(H(\nabla u_m))_{m\in\mathbb{N}}$ 的一致 $W^{1,2}$ 界推出：根据引理 6.3，序列 $(H(\nabla u_m))_{m\geq m_0}$ 在$W^{1,2}(B_{1/2})$ 中有界。因此，经过选取子列后，序列 $(H(\nabla u_m))_{m\in\mathbb{N}}$ 在 $L^2(B_{1/2})$ 中强收敛于 $H(\nabla u)$，结论随即得证。 □

作为前述结果的推论，我们得到：

命题 6.6. 假设 u 在 *0* 的任何邻域内都不是 C^1。那么，对于任意序列 $\delta_j \to 0$，存在一个子列 $\delta_{j_i} \to 0$，使得 $f(\delta_{j_i}) \to 0$ 当 $i \to \infty$ 时。

证明。固定这样一个序列 δ_j。不妨假设 $f(\delta_j) > 0$ 对所有 $j \in \mathbb{N}$ 都成立（若对于某个 $\delta_0 > 0$，有 $f(\delta_0) = 0$，则对所有 $\delta \leq \delta_0$，都有 $f(\delta) = 0$）。我们定义子列 δ_{j_i} 如下：

$\delta_{j_0} = \max\{\delta_j$ 使得 $\delta_j \leq 1/2\}$ 且 $j_{i+1} = \min\{j > j_i |\ \delta_j < \delta_{j_i}\sqrt{f(\delta_{j_i})/4}\}$.

注意，该子列满足 $\delta_{j_i} \leq 1/2$，对任意 $i \geq 0$ 均成立。

我们断言，对所有 $i \geq 0$，存在 $m(i)$，使得对所有 $m \geq m(i)$，均有：

$$\int_{B_{\delta_{j_i}} \setminus B_{\delta_{j_{i+1}}}} |\nabla (H(\nabla u_m))|^2 dx \geq \frac{f(\delta_{j_i})}{\pi^2 1024}.$$

固定 $i \geq 0$。由引理 6.5，存在 $m_0(i)$，使得对所有 $m \geq m_0(i)$，都有：

$$\frac{|\{H(\nabla u_m) \geq 3/4\} \cap B_{\delta_{j_i}}|}{|B_{\delta_{j_i}}|} \geq \frac{f(\delta_{j_i})}{2}.$$

对于 $m \geq m_0(i)$，我们将引理 6.4（缩放至 $B_{\delta_{j_i}}$）应用于非负函数 $H(\nabla u_m) \in W^{1,2} \cap L^\infty$（其中 $W^{1,2}$ 且 L^∞ 的界与m无关）。因此：

- 或者

$$\int_{B_{\delta_{j_i}} \setminus B_{\delta_{j_{i+1}}}} |\nabla (H(\nabla u_m))|^2 \geq \frac{f(\delta_{j_i})}{\pi^2 1024}.$$

- 或者，存在半径 $s \in (\delta_{j_{i+1}}, \delta_{j_i})$，使得 $H(\nabla u_m)$ 在 ∂B_s 上 $\geq \frac{5}{8}$。

现在，如果第二种情况对 $m \geq 0$ 成立，这意味着：

$$\nabla u_m(\partial B_s) \subset B_{3\eta/4}(\xi)$$

由（26）可知。应用 Hartman-Niremberg 最大值原理（见[7]）（这是 $\det(\nabla^2 u_m) \leq 0$ 在 B_1 中成立的推论）：

$$\partial \nabla u_m(B_s) \subset \nabla u_m(\partial B_s)$$

我们推导出

$$\nabla u_m(B_s) \subset B_{3\eta/4}(\xi) \subset O_\lambda(G)$$

因此，

$$\nabla u_m(B_{\delta_{j_{i+1}}}) \subset O_\lambda(G).$$

如果这种情况对无穷多个 m 都成立，我们就可以构造一个具有此性质的子序列，从而得到包含关系 $\nabla u(B_{\delta_{j_{i+1}}}) \subset O_\lambda(G)$。这不可能，因为根据 [8, 定理 1，3], 这意味着 $u \in C^1(B_{\delta_{j_{i+1}}/2})$。因此，第二种情况不可能出现无穷多次。所以，存在 $m(i) \geq m_0(i)$，使得对所有 $m \geq m(i)$：

$$\int_{B_{\delta_{j_i}} \setminus B_{\delta_{j_{i+1}}}} |\nabla \left(H(\nabla u_m)\right)|^2 \geq \frac{f(\delta_{j_i})}{\pi^2 1024}.$$

为完成证明，我们使用序列$H(\nabla u_m)$的一致 $W^{1,2}$ 界：固定 $I \in \mathbb{N}$，并令 $m \geq \max\{m(i)\ i \in (0, \ldots, I)\}$。由 (28) 可知，$\nabla H$ 在 $\mathcal{D}$ 的某个邻域内为零，因此我们可以利用引理 6.3 估计：

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi^2 1024} \sum_{i=0}^{I} f(\delta_{j_i}) &\leq \int_{B_{\delta_{j_0}} \setminus B_{\delta_{j_I}}} |\nabla(H(\nabla u_m))|^2 dx \\ &\leq C.\end{aligned}$$

这里我们用到了 $B_{\delta_{j_0}} \subset B_{1/2}$。这意味着左侧的级数收敛，结论随即得出。

□

下面证明命题 6.1。

命题 *6.1* 的证明。固定 $\epsilon > 0$，并证明 ν_x 的支集位于 $B_{2\eta/3}(\xi)$之外。由于 u 在 0 的任意邻域内都不是 C^1，我们应用命题 6.6 推得：对于任意 $\delta_j \to 0$，均可提取一个子列$\tilde{}(\delta_{j_i})_{i\in\mathbb{N}}$，使得当 $i \to \infty$时，$f(\delta_{j_i}) \to 0$。定义一个光滑映射 $H : B_1 \to \mathbb{R}$ 如下：

$$\tilde{H} = 0 \text{ on } \{H < 3/4\}$$

$\tilde{}$ $\tilde{}$满足 $H \geq 0$ 且 $\sup_{x\in\mathbb{R}^2} |H| \leq 1$。

我们估计：

$$\begin{aligned}\int_{B_1} \tilde{H}(\nabla u_{\delta_{j_i}}(x))dx &\leq \left|\{\tilde{H}(\nabla u_{\delta_{j_i}}) > 0\} \cap B_1\right| \\ &\leq \left|\{H(\nabla u_{\delta_{j_i}}) \geq 3/4\} \cap B_1\right| \\ &\leq |B_1| f(\delta_{j_i}) \to 0 \text{ as } i \to \infty.\end{aligned}$$

因此，由（25）可推得

$$\int_{B_1}\int_{B_M}\tilde{H}(y)d\nu_x(y)dx=0$$

因此，对于几乎处处的 x in B_1， ν_x 的支集包含于

$$\{\tilde{H}=0\}\subset\{H\leq 3/4\}\subset\left(\mathbb{R}^2\setminus B_{2\eta/3}(\xi)\right).$$

由于这对任意球 $B_\eta(\xi)\subset B_{2M}\setminus\mathcal{N}^\epsilon(\mathcal{D})$ 都成立，证明完毕。 □

在任意一点 $x\in B_1$，若 $u\in C^1$ in x的一个邻域内，则有

$$\frac{1}{|B_\delta|}\int_{B_\delta(x)}|\nabla u(y)-\nabla u(x)|dy\to 0 \text{ as } \delta\to 0$$

也就是说， x 是 ∇u的勒贝格点。命题 6.1 的一个推论是 :

推论 6.7。 假设 $x\in B_1$ 不是 ∇u的勒贝格点。则:

$$\frac{1}{|B_\delta|}\int_{B_\delta(x)}\operatorname{dist}(\nabla u(y),\mathcal{D})dy\to 0 \ as\ \delta\to 0.$$

注记 6.8。 我们将使用 [8], 中给出的对偶论证，推导出将 $\mathcal{D}$ 替换为 $\mathcal{S}$后同样成立。这也解释了为什么我们在定理 5.1 中陈述的是 0 为 ∇u 的勒贝格点，而不是 0 为 u 的可微点： ∇u 的勒贝格点是 $G(\nabla u)=i\nabla v$的勒贝格点，反之则由 G的性质成立（见下文）。显然不能直接看出， u 在某一点的可微性会推出对偶映射 v的可微性。

回顾一下， i 是旋转角度为 $\pi/2$的逆时针旋转。根据 [8,命题 4.1], , 对于 (1) 的任意 Lipschitz 解，都存在一个严格单调向量场 G^* 和一个映射 $v:B_1\to\mathbb{R}$，使得 $-i\nabla v=G(\nabla u)$，且 v 满足散度$(G^*(\nabla v))=0$。 G 与 G^* 的退化/奇异集之间的关系为

$$(iG)(\mathcal{S}(G))=\mathcal{D}(G^*)$$

我们可以利用推论 6.7 得到，前提是 x 不是 $\nabla v=iG(\nabla u)$ 的勒贝格点:

$$\begin{aligned}\frac{1}{|B_\delta|}\int_{B_\delta(x)}\operatorname{dist}(\nabla v(y),\mathcal{D}(G^*))dy &= \frac{1}{|B_\delta|}\int_{B_\delta(x)}\operatorname{dist}(iG(\nabla u)(y),\mathcal{D}(G^*))dy\\ &= \frac{1}{|B_\delta|}\int_{B_\delta(x)}\operatorname{dist}(iG(\nabla u)(y),iG(\mathcal{S}(G)))dy\\ &\to 0 \text{ as } \delta\to 0,\end{aligned}$$

由 iG 的单射性和连续性可知:

$$\frac{1}{|B_\delta|}\int_{B_\delta(x)}\operatorname{dist}(\nabla u(y),\mathcal{S}(G))dy\to 0 \text{ as } \delta\to 0.$$

这些计算表明，在严格单调场的情形下，我们可以将 $\mathcal{D}$ 替换为 $\mathcal{S}$。

∇u 的勒贝格点与 $iG(\nabla u)$的勒贝格点之间存在自然的对应关系:

引理 6.9。 $x\in B_1$ 是 ∇u 的勒贝格点，当且仅当 x 是 iG（∇u）的勒贝格点。

证明。 这直接源于 G 是一个同胚这一事实。

□

利用这一对应关系，我们给出推论 6.7 的一个更强版本，它恰好就是定理 1.1。

定理 6.10。 设 $G:\ \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 连续且严格单调，并设 u 是一个 *Lipschitz* 解，满足散度$(G(\nabla u))\ =0$。那么，对任意 $x\in B_1$，要么$y\mapsto\operatorname{dist}(\nabla u(y)\ \mathcal{D}\cap\mathcal{S})$ 在 x 处连续，要么有:

$$\frac{1}{|B_\delta|}\int_{B_\delta(x)}\operatorname{dist}(\nabla u(y),\mathcal{D}\cap\mathcal{S})dy\to 0\ as\ \delta\to 0.$$

证明。 根据定理 5.1，若 $\xi\mapsto$ dist$(\nabla u(\xi)\ \mathcal{D}\cap\mathcal{S})$ 在 x 处不连续，则 x 不是 ∇u 的勒贝格点。因此，根据引理 6.9， x 不是 $iG(\nabla u)$ 的勒贝格点。应用推论 6.7，我们得到

$$\frac{1}{|B_\delta|}\int_{B_\delta(x)}\operatorname{dist}(\nabla u(y),\mathcal{D})dy\to 0 \text{ as } \delta\to 0,$$
$$\frac{1}{|B_\delta|}\int_{B_\delta(x)}\operatorname{dist}(\nabla u(y),\mathcal{S})dy\to 0 \text{ as } \delta\to 0$$

这意味着由序列 $(u_\delta)_{\delta>0}$ 生成的 Young测度支集包含于 $\mathcal{D}\cap\mathcal{S}$，结论由此得证。 □

7 附录

7.1 附录 A：引理 2.2 的证明

回顾引理 2.2:

引理 7.1。 设 G 光滑强单调，且 u是一个光滑解，满足 散度$(G(\nabla u)) = 0$。设 p、q 和 $\rho > 0$ 满足 $B_\rho(q) \subset O_\lambda \cap V_\Lambda$ 和$p_0 \notin B_\rho(q)$。那么，存在 $\epsilon := \epsilon(\lambda, \Lambda, \rho)$ 使得若

$$|u - \langle p_0, x\rangle| \leq \epsilon \ for\ all\ x \in B_1$$

那么， $\nabla u(B_{1/2}) \cap B_{\rho/2}(q) = \emptyset$。

注 7.2。 • 该引理针对特定情形 $l_p = \langle p, x\rangle$ 陈述。只需在此情形下证明即可：事实上，若 $l_p = \langle p, x\rangle + c$ 对某个常数 c成立，则定义 $\tilde{u} = u - c$。于是， $\tilde{u}$ 是同一方程的解，并满足引理中所述的平坦性假设。由于 $\nabla\tilde{u} = \nabla u$ ，结论得证。

- 正如证明中将会清楚的，只需包含关系

$$\tilde{B_\rho}\ q \subset ()O_\lambda \cap V_\Lambda$$ ，其中

$$\tilde{V}_\Lambda := \mathrm{int}\{\xi \in \mathbb{R}^2, \limsup_{\zeta\to 0} \frac{\langle G(\xi+\zeta) - G(\xi), \zeta\rangle}{|\zeta|^2} \leq \Lambda\}.$$

~文献 [8] 证明，对于任意连续的严格单调场 G，都有包含关系 $V_\Lambda \subset V_\Lambda$。

由于文献 [5] 中引理 2.2 的证明包含在命题 6.2],中，为方便读者，我们将其重新写出。该证明基于以下几何结果，该结果也可见于定理 5.3] ：

命题 7.3。 设 $u \in \mathcal{C}^\infty(B_1)$ 是 $a_{ij}(x)u_{ij} = 0$ 在 B_1 中的一个解，且$A(x) := a_{ij}(x)$ 正定。假设 u 不是线性的。那么，在每个开集 U中，都存在一点 x_U ，使得每个集合

$$\{u > l_U\}, \{u < l_U\}$$

其中

$$l_U : x \mapsto u(x_U) + \langle x - x_U, \nabla u(x_U) \rangle$$

在 B_1 中至少有两个不同的连通分支，它们与 x_U 的任意邻域相交。此外，这些连通分支在 B_1 中不具有紧支集。

这一结果仅适用于二维情形，它是最大值原理以及 $\nabla^2 u$ 具有异号特征值这一事实的推论。

下面给出引理 2.2 的证明：

引理 *2.2* 的证明。我们假设 u 不是线性的，否则结论显然成立。反设存在 $x_0 \in B_{1/2}$，使得$\nabla u(x_0) = p_1 \in B_{\rho/2}(q)$。由于 u 不是线性的，我们可以对 x_0 的任意邻域 U 应用命题 7.3。不失一般性，可假设 x_0 是命题 7.3 中的点 x_U（否则，取一个更小的邻域）。于是，我们得到每个集合

$$\{u(x) < l(x) := u(x_0) + p_1 \cdot (x - x_0)\},$$
$$\{u(x) > l(x) := u(x_0) + p_1 \cdot (x - x_0)\}$$

在 B_1 中至少有两个不同的连通分支，它们与 x_0 的任意邻域相交。

另一方面，平坦性假设给出

$$\{\langle x - x_0, p_0 - p_1 \rangle < -2\epsilon\} \subset \{u < l\}$$

and

$$\{\langle x - x_0, p_0 - p_1 \rangle > 2\epsilon\} \subset \{u > l\}.$$

这意味着集合 $\{u < l\}$ 在该条带内有一个连通分支

$$\{|\langle x - x_0, p_0 - p_1 \rangle| \leq 2\epsilon\}.$$

改变 x 和 p空间中的坐标，我们可以假设

$$p_1 = 0, \quad p_0 = \alpha e_2, \quad x_0 = e_1/4, \quad u(x_0) = 0, \text{ with } M \geq \alpha > \rho/2$$

˜因为 $p_0 \notin B_\rho(q)$，因此 $p_0 \notin B_{\rho/2}(p_1)$。回想一下 $B_\rho(q) \subset O_\lambda \cap V_\Lambda$，为简单起见，我们˜假设 $\lambda \leq 1/\Lambda$，因此我们有 $B_\rho(q) \subset O_\lambda \cap V_{1/\lambda}$。定义矩形

$$\overline{R} := \{|x_1| \leq 1/8, |x_2| \leq 1/8\}.$$

不失一般性，我们可以假设，$\{u < 0\}$ 在窄条带 $\{|\langle x, e_2\rangle| \leq 2\epsilon\}$ 中的连通分支从 x_0的左侧离开 B_1，并且位于水平线 $\{x_2 = -2\epsilon\}$下方。因此，_ $\{u < 0\}$ 在 R中有一个包含于条带 $\{|\langle x, \alpha e_2\rangle| \leq 2\epsilon\}$ 的连通分支，该分支与 $x_1 = \pm 1/8$ 都相交。我们令 U 为 $\{u < 0\}$ 在 R中的连通分支，且该一分支包含 $\{x_2 = -1/8\}$。

目标是构造偏微分方程的一个次解 w，使得 $\mathrm{tr}(\nabla G(\nabla w)D^2 w) > 0$，且沿 x_2 方向递增，并满足:_ $u - w > 0$ 在集合 $R \setminus U$ 的侧边上，且 $u - w < 0$ 在 $\partial U \cap \{x_1 = 0\}$中。若能做到这一点，根据最小值原理，这意味着 $u - w$ 的最小值在某一点 $z_0 \in \partial U \cap R$ 处取得。由于 w 沿 x_2 方向递增，我们可推出，对于直线 $z_0 + te_2$, $t > 0$上的 x，有 $u(x) > w(x) - w(z_0) > 0$。这与事实矛盾，因为这条直线必定与 $\{u < 0\}$的另一个连通分支相交。现在我们来构造这样的 w。思路是利用 $B_{\rho/2}(0)$ 包含于椭圆区域这一事实，并据此构造梯度较小的 w，从而得到一个次解。

选取 γ 和 k，定义函数

$$v = x_2 - 20x_1^2 \quad w := \gamma \exp(kv) - c$$

其中 c 使得 $w(-1/8) = 0$。我们有

$$\nabla^2 w = \gamma k \exp(kv) \left(\nabla^2 v + k \nabla v \otimes \nabla v\right).$$

对于任意 $k \geq 0$，我们可以将 γ 取小，使得 $\nabla w \in B_{\rho/2}$。由于 $B_{\rho/2}(0) \subset O_\lambda \cap \tilde{V}_{1/\lambda}$，记 $\nabla^2 w^\pm$ 为海森矩阵w的正部和负部，并利用不等式

$$\mathrm{tr}(\nabla^s G(\nabla w)\nabla^2 w) \geq \lambda |\nabla^2 w^+| - \frac{1}{\lambda}|\nabla^2 w^-|$$

我们可以验证，当 k 足够大且取决于 λ 时，函数 w 满足 $\mathrm{tr}(\nabla^s G(\nabla w)\nabla^2 w) > 0$。事实上，对于

$$k \geq \left(\frac{80 + \sqrt{6400 + 4000\lambda^2}}{10\lambda}\right)^2$$

我们计算:

$$\nabla^2 w = \gamma k \exp(kv) \begin{pmatrix} 1600kx_1^2 - 40 & -40kx_1 \\ -40kx_1 & k \end{pmatrix}.$$

我们寻求矩阵的负部/正部

$$A := \begin{pmatrix} 1600kx_1^2 - 40 & -40kx_1 \\ -40kx_1 & k \end{pmatrix} = A^+ + A^-.$$

我们有:

$$\lambda|A^+| + \frac{1}{\lambda}|A^-| = \frac{40k\lambda}{|A^-|} - \frac{1}{\lambda}|A^-|$$

由此得到 > 0，前提是 $|A^-| \leq \lambda\sqrt{40k}$。现在，我们利用 2×2 矩阵的特征多项式，得到

$$|A^-| = \frac{80k}{1600kx_1^2 - 40 + k + \sqrt{(1600kx_1^2 - 40 + k)^2 + 40k}}.$$

还需证明，对于上述的 k，实际上有

$$|A^-| \leq \lambda\sqrt{40k}.$$

对于这个 k，我们接着定义

$$\gamma := \frac{\rho}{4} \frac{\exp(-k)}{\sqrt{1601}k}$$

因此我们有 $\nabla w(B_1) \subset B_{\rho/2}(0)$，从而 w 是偏微分方程的次解，所以 $u - w$ 不可能在 $R \setminus U$的内部取得其最小值。

现在我们将 u 与 w进行比较，注意:

$$\alpha\langle e_2, x\rangle > \frac{\rho}{16} \quad \text{on } \{x_2 = 1/8, |x_1| \leq 1/8\}$$

对于这个 γ，我们有

$$w = \gamma \exp(k\left(1/8 - 20x_1^2\right)) - \gamma \exp(-k/8) < \rho/32 \quad \text{on } \{x_2 = 1/8, |x_1| \leq 1/8\}.$$

因此,

$$\alpha\langle e_2, x\rangle - w > \frac{\rho}{32} \quad \text{on } \{x_2 = 1/8, |x_1| \leq 1/8\}$$

我们对矩形的侧边进行同样的比较。当$\theta > 0$ 足够小时，有:

$$\alpha\langle e_2, x\rangle > -M\theta \quad \text{ on } \{x_1 = \pm 1/8, x_2 \geq -\theta\}$$

并且在 $\{x_1 = \pm 1/8, x_2 \geq -\theta\}$ 中有:

$$\begin{aligned} w &= \gamma\left(\exp(k(x_2 - 20x_1^2)) - \exp(-k/8)\right) \\ &\leq \gamma\left(\exp(-\frac{12k}{64}) - \exp(-k/8)\right) \\ &\leq -\gamma\exp(-k/8)\left(1 - \exp(\frac{-k}{16})\right) \\ &\leq -\frac{\gamma\exp(-k/8)}{2}. \end{aligned}$$

这意味着:

$$\begin{aligned} \alpha\langle e_2, x\rangle - w &> -M\theta + \frac{\gamma\exp(-k/8)}{2} \\ &> \frac{\gamma\exp(-k/8)}{4} \\ &> 0 \end{aligned}$$

对于 $\theta < \frac{\gamma}{\exp(-k/8)\,4M}$属于 $\{x_1 = \pm 1/8, x_2 \geq -\theta\}$。

现在设定 ϵ。令 $\epsilon := \frac{\gamma\rho}{\exp(-k/8)\,8M}$，并利用扁平性假设得到:

$$\begin{aligned} u - w &\geq \alpha\langle e_2, x\rangle - \epsilon - w \\ &\geq \frac{\gamma\exp(-k/8)}{4} - \frac{\gamma\rho\exp(-k/8)}{8M} \\ &> 0 \quad \text{ on } \{x_1 = \pm 1/8, x_2 \geq -2\epsilon/\rho\} \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} u - w &\geq \alpha\langle e_2, x\rangle - \epsilon - w \\ &\geq \frac{\rho}{32} - \frac{\gamma\rho\exp(-k/8)}{8M} \\ &> 0 \quad \text{ on } \{|x_1| \leq 1/8, x_2 = 1/8\}. \end{aligned}$$

然而， $u-w<0$ 在 $\{x_1=0\}\cap\partial U$上，因此 $u-w$ 的最小值在某点 $z_0\in\partial U\cap R$处取得。这意味着

$$u\geq w-w(z_0)\text{ in }\overline{R}\setminus U.$$

这就产生了矛盾，因为在直线 z_0+te_2 上，函数 w 是递增的，这意味着对于满足 $z_0+t_0e_2$ 的 t_0，若其属于 $\underline{R}$ 中 $\{u<0\}$ 的另一个连通分支，则有 $u(z_0+t_0e_2)>0$。

因此，对于

$$\epsilon=\frac{\rho^2\exp(-k)}{32Mk\sqrt{1601}}\exp(-k/8)\quad k=\left(\frac{80+\sqrt{6400+4000\lambda^2}}{10\lambda}\right)^2$$

我们就得到了所需结果。 □

7.2 附录 B：定理 2.1 的证明

证明基于两个局部化引理。第一个是在变分框架下得到的， [5], 第二个是在 [8] 中得到的。

引理 7.4. 设 u 是散度 $G(\nabla u)=0$ 在 B_1 中的一个解，并假设

$$\nabla u(B_1)\cap B_\rho(\xi_0)=\emptyset\quad and\quad B_{4\rho}(\xi_0)\subset O_\lambda(G)\,,$$

对于某些 λ、$\rho>0$ 和 $\xi_0\in\mathbb{R}^2$。于是我们有

$$either\ \nabla u(B_\delta)\subset B_{4\rho}(\xi_0),\quad or\ \nabla u(B_\delta)\cap B_{3\rho}(\xi_0)=\emptyset\,,$$

对于某些依赖于 λ、ρ 和 $\|G$ 的 $\delta>0$ $(\nabla u)\|_{L^2(B_1)}$。

引理 7.5。 设 u 是散度$(G(\nabla u))=0$ 在 B_1 中的一个解，并假设

$$\nabla u(B_1)\cap B_\rho(\xi_0)=\emptyset\quad and\quad B_{4\rho}(\xi_0)\subset V_\Lambda(G)\,,$$

对于某些 Λ、$\rho>0$ 和 $\xi_0\in\mathbb{R}^2$。于是我们有

$$either\ \nabla u(B_\delta)\subset B_{4\rho}(\xi_0),\quad or\ \nabla u(B_\delta)\cap B_{3\rho}(\xi_0)=\emptyset\,,$$

对于某个 $\delta>0$，其取决于 Λ、ρ、$\|\nabla u\|_{L^2(B_1)}$，以及任意满足$\omega_G(t)/t\geq c$ 的 $c>0$，其中 $t\in[\rho,\|\nabla u\|_\infty+3\rho]$。

定理 *2.1* 的证明。设 u 是一个在 B_1中满足 $|\nabla u| \le M$的光滑解，且散度 $G(\nabla u) = 0$ 。根据假设，我们有

$$\overline{B}_{2M} \subset V_\Lambda(G) \cup O_\lambda(G) \cup U\,,$$

并且我们固定这个开覆盖的一个勒贝格数 $\eta \in (0, \rho))$，使得任意一个以 $\xi \in B_{2M}$ 为中心、半径为 B_η的球 $B_\eta(\xi)$ 都包含在 $V_\Lambda(G)$、$O_\lambda(G)$ 或 U 中。令 $\epsilon = \eta/4$。球 B_{2M} 可以用有限个半径为 ϵ的球覆盖。去掉包含在 U 中的球后，我们得到一个覆盖

$$\overline{B}_{2M} \setminus U \subset \bigcup_{k=1}^{K} B_\epsilon^k,$$

其中 $K \le cM^2/\eta^2$ ， $c > 0$为某个普适常数，并且每个球 $B_{4\epsilon}^k$ 都满足

$$B_{4\epsilon}^k \subset V_\Lambda(G) \quad \text{or} \quad B_{4\epsilon}^k \subset O_\lambda(G).$$

根据假设，存在一个球 $B_\rho(q)$，它包含在 $\bigcup_{k=1}^K B_\epsilon^k$，的某个连通分支中，且满足 $\nabla u(B_1) \cap B_\rho(q) = \emptyset$。因此，存在 $k \in \{1, , , K\}$使得

$$\nabla u(B_1) \cap B_\epsilon^k = \emptyset$$

由于 $B_{4\epsilon}^k \subset V_\Lambda(G)$ 或 $B_{4\epsilon}^k \subset O_\lambda(G)$，我们可以应用引理 7.5 或引理 7.4，保证存在某个 $\delta > 0$ 使得

$$\text{either } \nabla u(B_\delta) \subset B_{4\epsilon}^k \quad \text{or } \nabla u(B_\delta) \cap B_{3\epsilon}^k = \emptyset.$$

若出现第一种情况，则由于 $4\epsilon = \eta$，证明即告完成。若出现第二种情况，则可推知，对于所有满足 $B_\epsilon^j \cap B_\epsilon^k \neq \emptyset$ 的相邻球 B_ϵ^j，都有 $\nabla u(B_\delta) \cap B_\epsilon^j = \emptyset$ 。然后，我们可以再次将引理 7.5 或引理 7.5 应用于缩放后的函数 $\delta^{-1}u(\delta\cdot)$ 以及这些相邻球 B_ϵ^j。

我们重复这一论证：如果在某一步达到第一种情形，证明即告完成。否则，经过有限次迭代，我们最终用每一步添加的相邻球覆盖了包含球 $B_\rho(q)$ 的连通分支 $\mathcal{C}$ of$B_{2M} \setminus U$ ，并由此推出 $\nabla u(B_{\delta'}) \subset B_{2M} \setminus \mathcal{C}$。这里，$\delta' = \delta^K$ 表示引理 7.5 和引理 7.4 中的 δ，而 K 表示迭代次数。证明完毕 □

参考文献

[1] Ball, J. M. Young测度基本定理的一个版本。载于偏微分方程与相变连续介质模型。*1988*年*1*月*18*日至*22*日在法国尼斯举行的 *NSF*-法国国家科学研究中心联合研讨会论文集。柏林等地：施普林格出版社，1989年，第207–215页。[2] Brouwer, L. E. J. 关于 n维区域的不变性。《数学年刊》72（1912），55–56。[3] Caffarelli, L. A.，以及 Cabré, X. 完全非线性椭圆方程，《学术讨论会出版物，美国数学学会》丛书第43卷。罗德岛州普罗维登斯：美国数学学会，1995年。[4] Colombo, M.，以及 Figalli, A. 高度退化椭圆方程的正则性结果。《纯粹与应用数学杂志》（第9辑）101，1（2014），94–117。[5] de Silva, D.，以及 Savin, O. 随机曲面中产生的凸泛函的极小化子。《杜克数学杂志》151，3（2010），487–532。[6] Evans, L. C.，以及 Gariepy, R. F. 测度论与函数的精细性质，第2版。《数学教材》。佛罗里达州博卡拉顿：CRC出版社，2025年。[7] Hartman, P.，以及 Nirenberg, L. 关于雅可比行列式不变号的球面像映射。《美国数学杂志》81（1959），901–920。[8] Lacombe, T.，以及 Lamy, X. 关于平面上退化椭圆方程的 c^1 正则性，2024年。[9] Lamy, X.，以及 Tione, R. 退化椭圆方程的双曲正则化效应。准备中。[10] Lledos, B. 退化和/或奇异椭圆问题中应力场的正则性。《布莱兹·帕斯卡数学年刊》31，1（2024），83–135。[11] Mooney, C. 希尔伯特第19问题再探。《意大利数学联合会通报》15，4（2022），483–501。[12] Santambrogio, F.，以及 Vespri, V. 高度退化椭圆方程在二维中的连续性。《非线性分析：理论、方法与应用》A辑，理论与方法73，12（2010），3832–3841。