¨超凯勒流的稳定性

KUAN-HUI LEE

Abstract. 本文讨论超凯勒 4-流形上曲面的 Donaldson 流的稳定性。在 [18], Wang 和 Tsai 证明了极小曲面平均曲率流的唯一性定理以及 C^1 动态稳定性定理。我们推广了他们的结果，并得到了类似的超凯勒流动态稳定性定理。

Department of Mathematics, McGill University, Montreal, Canada
E-mail address: kuan-hui.lee@mcgill.ca

arXiv:2601.03092v1 [math.DG] 6 Jan 2026

1. Introduction

平均曲率流是外蕴几何中的一种自然演化方程，并具有许多与内蕴几何中的 Hamilton里奇流相似的特征。平均曲率流及其变体在几何、拓扑学和广义相对论中有着引人注目的应用。在余维一情形，Huisken 得到了一些收敛结果 [12, 13]。对于高余维情形，分析变得更加困难。尽管已有一些收敛结果[21, 23, 22], ，但它们通常需要额外的几何结构才能推进研究。拉格朗日条件是一个尤其有趣的情形。在 [14], 中，研究表明拉格朗日条件在平均曲率流下保持不变，并且还得到了若干收敛结果 [15]。受平均曲率流的启发，本文研究一种不同类型的几何流，并将在下文中介绍。

1999年，Donaldson [5]利用矩映射和微分同胚构造了一些几何演化方程。特别是，在超Kähler四维流形的情形下，其中一个几何演化方程与平均曲率流相似。设 S为带有体积形式 ρ的黎曼曲面，$(M,\ g,\ I,\ J,\ K)$为带有三个Kähler形式$\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3$的超Kähler四维流形。超Kähler四维流形上的Donaldson 流（称为 H-流）定义为

$$\frac{\partial f}{\partial t} = If_\star(\xi_1) + Jf_\star(\xi_2) + Kf_\star(\xi_3), \quad f : S \to M \text{ is an immersion},$$

其中 ξ_i是关于 $f^\star{}_{(\omega_i)}\rho$, $i = 1,\ 2,\ 3$的 S上的哈密顿向量场。

Donaldson [5], Song和Weinkove [16] 发现，若定义$\lambda = \frac{d\mu}{\rho}$，其中 $d\mu$ 是诱导体积形式，则H-流可写为

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \lambda\nabla\lambda + \lambda^2 H,$$

其中 H 是平均曲率向量。此外，H–流可以视为超Kähler¨能量的梯度流

$$E(f) = \int_S \lambda^2\rho. \tag{1}$$

虽然 H-流与平均曲率流相似，但通常并不满足相同的长期存在条件。不过，我们确实有以下正则性结果:

定理1.1。设 f_t是 $[0,T)$上的 H-流的一个解，其中 $0 \le T \le \infty$。假设 λ和 $|\nabla^k\lambda|$在 $f_t(S)$ 上一致有界，对任意正整数 k 均成立。若存在常数 α_0 使得

$$\sup_{f_t(S)} |A|^2 \le \alpha_0 \quad \textit{for } t \in [0,T)\ .$$

那么存在 α_k 使得

$$\sup_{f_t(S)} |\overline{\nabla}^k A|^2 \le \alpha_k \quad \textit{for } t \in [0,T)\ .$$

此外，如果 $T < \infty$，那么

$$\lim_{t\to T} \sup_{f_t(S)} |A|^2 = \infty.$$

一般而言，为了获得长时间存在性，我们必须控制 $|\nabla^k\lambda|$ 的增长。作为一个特例，Song 和 Weinkove[16] 考虑微分形式 $\theta = \omega_2 + i\omega_3$ 以及空间

$$\mathcal{N} = \{f : S \to M |\ f \text{ is an immersion and } f^\star(\theta) = \rho\}.$$

他们指出,

定理 1.2. 设 f_t 是 $[0,T$ 上的 H-流的一个解)。若 $f_0 \in \mathcal{N}$，则 $f_t \in \mathcal{N}$。

他们将初始数据属于 $\mathcal{N}$ 的 H-流称为特殊的 H-流，它与拉格朗日平均曲率流相似。在这一特殊情形下，可以看出，如果第二基本形式的范数一致有界，那么 $|\nabla^k \lambda|$ 也一致有界。

回想一下，平均曲率流是体积泛函的梯度流。因此，自然会问：体积泛函的局部极小值在平均曲率流下是否稳定? Tsai 和 Wang 在一系列论文中 [18, 19, 20], 指出了极小子流形上的一个强稳定性条件，该条件蕴含唯一性和动力学稳定性。更准确地说，他们指出，体积泛函二次变分的雅可比算子为 $(\nabla^\perp)^*\nabla^\perp + \mathcal{R} - \mathcal{A}$，其中 $(\nabla^\perp)^*\nabla^\perp$ 是法丛上的博赫纳拉普拉斯算子， $\mathcal{R}$ 是由环境黎曼曲率的限制构造的算子，而 $\mathcal{A}$ 则由第二基本形式构造。若 $\mathcal{R} - \mathcal{A}$ 是正算子，则称极小子流形为强稳定。假设子流形Γ 在 C^1 意义下接近极小的强稳定曲面 Σ，那么 Γ 的平均曲率流将对所有时间存在，并平滑收敛到 Σ 。此外，他们发现，Atiyah-Hitchin 流形的零截面 [1] [2] 是强稳定的，因此得以应用他们的稳定性结论。

在我们的情形中，我们证明了特殊 H-流的动力学稳定性结果。首先，我们证明，具有常数 λ 的强稳定极小曲面是超凯勒能量（1）的临界点，且其二次变分为负。接着，我们注意到，超凯勒 4-流形中的任何复拉格朗日曲面都是特殊拉格朗日曲面，也是极小曲面。由此得到我们的主要定理:

定理 1.3. 设(M, g, I, J, K)为一个超凯勒 *4*-流形， $\Sigma \subset M$ 为关于 I, K 的紧致、定向、强稳定复拉格朗日曲面，即在 Σ 上有 $\omega_I + i\omega_K \equiv 0$，且 $\Gamma \subset M$ 为关于 K的拉格朗日曲面，并且与 Σ足够接近。考虑

$$\mathcal{N} = \{f : \Gamma \to M | f^\star(\omega_J) = \rho, f^\star(\omega_K) = 0 \ where \ \rho \ is \ a \ given \ volume \ form \ on \ \Gamma\},$$

特殊 H-流 $f_t(\Gamma) = \Gamma^t \in \mathcal{N}$ 在 $f_0(\Gamma) = \Gamma$ 存在于所有时间，并光滑地收敛到 Σ 。

举例来说，当 M 是球面的余切丛的全空间 T^*S^n （对于 $n > 1$）时，在 Stenzel 度量 [17], 下，零截面是强稳定的 [18]。因此，我们聚焦于四维情形，此时 Stenzal 度量称为 Eguchi-Hanson 度量 [6]。通过仔细计算曲率，我们发现 Eguchi-Hanson 度量的零截面不仅是强稳定的，还是一个复拉格朗日曲面。

推论 1.4。设 Γ 是相对于 K 的 *Eguchi-Hanson* 空间中的一个拉格朗日曲面，并且它与零截面 S^2足够接近 C^1 。那么，具有 $\Gamma^0 = \Gamma$ 的特殊 H 流 Γ^t 对所有时间均存在，并且光滑地收敛到 S^2 。

本文结构如下。第二节讨论 H–流的一些基本性质。第三节讨论强稳定曲面和 Eguchi-Hanson 度量。最后一节证明主要结果。

致谢： 本文写于作者就读国立台湾大学数学硕士期间。谨向我的导师 Mao-Pei Tsui、Chung-Jun Tsai 教授和 Mu-Tao Wang 教授致以诚挚谢意。他们的建议对本文起到了重要作用。

2. Hyperkähler Flow

2.1. 引言。设 S 是一个配有体积形式 ρ（辛形式）的黎曼曲面，且（M, g, I, J, K）是一个超凯勒 4 维流形。

定义 2.1。考虑一个浸入 $f\colon S \to M$，对于 $a = 1,2,3$，我们定义

- $N_a = \overline{f^*(\omega_a)\rho}$, 其中 $w_{\overline{a}}$ 是关于 I, J, K 的凯勒形式。
- ξ_a 是关于 N_a 的哈密顿向量场，即 $dN_a(\cdot) = \rho(\xi_a, \cdot)$。

Donaldson 流的超凯勒平均曲率流（简称 H-流）由下式给出

$$\frac{\partial f}{\partial t} = If_\star(\xi_1) + Jf_\star(\xi_2) + Kf_\star(\xi_3). \tag{2}$$

下文中，我们用 i, j, k 表示 1 和 2，用 α, β, γ 表示 3 和 4，用 A, B, C 表示 1、2、3、4。对于任意固定点$p \in S$，令 ∇ 和 $\overline{\nabla}$ 分别表示 g 和 $g = f^*(g)$的 Levi-Civita 联络。我们在 p 处选取正规坐标系 $\{x^1, x^2\}$，使得 $\rho(\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}) = \rho(\partial_1, \partial_2) > 0$。此外，我们在 $f(p)$处选取正规坐标系 $\{y^1, y^2, y^3, y^4\}$，使得 $\frac{\partial}{\partial y^i} = f_\star \partial_i$，即 p处的 $\frac{\partial f^A}{\partial x^i} = \delta_i^A$。之后，我们也将 $\frac{\partial}{\partial y^i}$ 记为 ∂_i。然后，我们可以将正规坐标扩展为局部标准正交基 $\{e_1, e_2\}$，其中 $Tf(S)$对应 $\{e_3, e_4\}$， $Nf(S)$对应。相对于此标准正交基，我们将第二基本形式 $A(\partial_i, \partial_j) = h_{\alpha ij} e_\alpha$ 记为

$$h_{\alpha ij} = \overline{g}(e_\alpha, \overline{\nabla}_{\partial_i} \partial_j),$$

且 p 处的平均曲率向量由 $H = H_\alpha e_\alpha$ 给出，其中 $H_\alpha = g^{ij} h_{\alpha ij}$。基于该坐标系，Song 和 Weinkove 重写了 H–流，其结果如下。

命题 2.2 ([16], 命题 2.1)。 在 S 上定义函数 λ 如下： $\lambda = \frac{d\mu}{\rho}$ ， 其中 $d\mu$ 是S上的诱导体积形式。 H-流可写为

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \lambda\nabla\lambda + \lambda^2 H, \tag{3}$$

其中， H是 f（S）的平均曲率向量， ∇是 S 上诱导度量 $g = f^\star$（g）的联络。因此，当 f（S）是极小曲面且 λ 为常数时， f 达到临界点。

由（3）可知， $If_\star(\xi_1) + Jf_\star(\xi_2) + Kf_\star(\xi_3)$可分解为 M中 $f(S)$的法向部分 $\lambda^2 H$ 和切向部分$\lambda\nabla\lambda$。由于此流与平均曲率流相似，我们也得到了短时存在性。（更多细节请参见 [16]和 [4] 。）

命题 2.3 （[16], 命题 2.2）。 给定任意光滑初始映射 $f_0 \in \mathcal{M}$，存在 $T > 0$ ，使得 $\frac{\partial f}{\partial t} = \lambda\nabla\lambda + \lambda^2 H$ 在 $t \in [0, T)$ 上存在唯一光滑解 $f_t \in \mathcal{M}$ 。

2.2. **超凯勒能量**。

定义 2.4 **.** 采用定义 2.1 中相同的记号，我们将超凯勒能量定义为

$$E(f) = \sum_{a=1}^{3} \|N_a\|^2_{L^2(S,\rho)} = \int_S \lambda^2 \rho,$$

其中 $\lambda = \frac{d\mu}{\rho}$。

在 [5], 中，Donaldson 证明了 H-流是超凯勒能量的梯度流。下文将计算超凯勒能量的一阶和二阶变分公式，以论证这一结果。

命题 2.5. 设 $T = df(\frac{\partial}{\partial t})$ 为紧支撑的变分场，则

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} E = \int_S -2\overline{g}(\lambda\nabla\lambda, T) - 2\lambda^2\overline{g}(T, H)\rho. \tag{4}$$

因此，双曲凯勒能量的梯度流就是 H-流。

证明。 在局部坐标中，双曲凯勒能量表示为

$$E = \int_{f_t(S)} \frac{\det\big(g(x,t)\big)}{\rho_{12}(x)} dx_1 \wedge dx_2, \quad \text{since } \lambda = \frac{\sqrt{\det(g(x,t))}}{\rho_{12}(x)}.$$

将其在 $t = 0$ 处的变分场 $T = df(\frac{\partial}{\partial t})$ 代入，可得

$$\overline{\nabla}_T\big(\frac{\det(g)}{\rho_{12}}\big) = \big[2\,\mathrm{div}(T^t) - 2\overline{g}(T, H)\big]\frac{\det(g)}{\rho_{12}}$$

and

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} \log(\det g) = 2\,\mathrm{div}(T^t) - 2\overline{g}(T, H).$$

因此,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} E &= \int_{f_0(S)} \lambda\big[2\,\mathrm{div}(T^t) - 2\overline{g}(T, H)\big] dA_0 \\
&= \int_{f_0(S)} 2\,\mathrm{div}(\lambda T^t) - 2\overline{g}(\nabla\lambda, T^t) - 2\lambda\overline{g}(T, H) dA_0 \\
&= \int_{f_0(S)} -2\overline{g}(\nabla\lambda, T^t) - 2\lambda\overline{g}(T, H) dA_0 \\
&= \int_S -2\overline{g}(\lambda\nabla\lambda, T) - 2\lambda^2\overline{g}(T, H)\rho.
\end{aligned}$$

□

命题 **命题 2.6.** 设 $T = df(\frac{\partial}{\partial t})$是垂直于 $f_0(S)$且具有紧支撑的变分场 rt

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=0} E \\
&= \int_S \lambda^2 \big[-2\sum_{i,j} \overline{g}(T, A_{ij})^2 + 2\overline{g}(\overline{R}(T,e_i)T,e_i) - 2\overline{g}(\overline{\nabla}_T T, H) + 2\sum_{i=1}^{2}\sum_{\alpha=3}^{4} \overline{g}(\overline{\nabla}_{e_i} T, e_\alpha)^2 + 4\overline{g}(T,H)^2 \big]\rho \\
&\quad - \int_S 2\lambda \overline{g}(\nabla\lambda, \overline{\nabla}_T T)\rho,
\end{aligned}$$

其中 $\overline{R}$ 表示环境流形 M的曲率。特别地，若 $f_0(S)$ 是能量临界点，即 $H \equiv 0$且 λ 为常数。那么，

$$\frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=0} E = \int_S \lambda^2 \Big[-2\sum_{i,j} \overline{g}(T, A_{ij})^2 + 2\overline{g}(\overline{R}(T,e_i)T,e_i) + 2\sum_{i=1}^{2}\sum_{\alpha=3}^{4} \overline{g}(\overline{\nabla}_{e_i} T, e_\alpha)^2 \Big]\rho. \tag{5}$$

证明。 首先，我们考虑两个变分向量 $T = df(\frac{\partial}{\partial t})$ 和 $S = df(\frac{\partial}{\partial s})$ —

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial s \partial t} \det\big(g(p,t,s)\big) &= \frac{\partial}{\partial s}\big(\det g g^{ij} \frac{\partial}{\partial t} g_{ij}\big) \\
&= (\frac{\partial}{\partial s} g^{ij})(\frac{\partial}{\partial t} g_{ij}) \det g + g^{ij} \det g (\frac{\partial^2}{\partial s \partial t} g_{ij}) + \det g (g^{ij} \frac{\partial}{\partial s} g_{ij})(g^{kl} \frac{\partial}{\partial t} g_{kl}).
\end{aligned}$$

在 $(p,0,0)$ 处， $g_{ij} = \delta_{ij}$。 因此

$$\frac{\partial^2}{\partial s \partial t}\Big|_{(0,0))} \det(g(p,t,s)) = (\frac{\partial}{\partial s} g^{ij})(\frac{\partial}{\partial t} g_{ij}) \det + \det g (\frac{\partial^2}{\partial s \partial t} g_{ii}) + \det g (\frac{\partial}{\partial s} g_{ij})(\frac{\partial}{\partial t} g_{kl}).$$

我们得到

$$\begin{aligned}
S g^{ij} &= -g^{ik} S g_{kl} g^{jl} = -g^{ik}(\overline{g}(\overline{\nabla}_{e_k} S, e_l) + \overline{g}(e_k, \overline{\nabla}_{e_l} S)) g^{jl} \\
&= -\overline{g}(\overline{\nabla}_{e_i} S, e_j) - \overline{g}(e_i, \overline{\nabla}_{e_j} S),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S\big(\overline{g}(\overline{\nabla}_{e_i} T, e_i)\big) &= \overline{g}(\overline{\nabla}_S \overline{\nabla}_{e_i} T, e_i) + \overline{g}(\overline{\nabla}_{e_i} T, \overline{\nabla}_{e_i} S) \\
&= \overline{g}\big(R^N(S,e_i)T, e_i\big) + \overline{g}(\overline{\nabla}_{e_i} \overline{\nabla}_S T, e_i) + \overline{g}(\overline{\nabla}_{e_i} T, \overline{\nabla}_{e_i} S),
\end{aligned}$$

and

$$\frac{1}{4} S g_{ii} T g_{kk} = \overline{g}(\overline{\nabla}_{e_i} S, e_i)\overline{g}(\overline{\nabla}_{e_k} T, e_k).$$

综上,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial s \partial t}\Big|_{(0,0)} \det\big(g(p,t,s)\big) &= -2(\overline{g}(\overline{\nabla}_{e_i} S, e_j) + \overline{g}(e_i, \overline{\nabla}_{e_j} S))\overline{g}(\overline{\nabla}_{e_i} T, e_j) + 2\overline{g}(\overline{R}(S,e_i)T,e_i) \\
&\quad + 2\overline{g}(\overline{\nabla}_{e_i} \overline{\nabla}_S T, e_i) + 2\overline{g}(\overline{\nabla}_{e_i} T, \overline{\nabla}_{e_i} S) + 4\overline{g}(\overline{\nabla}_{e_i} S, e_i)\overline{g}(\overline{\nabla}_{e_k} T, e_k).
\end{aligned}$$

取 $S = T$， 且 T 垂直于 f_0（S），

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Big|_{t=0} \det(g(p,t)) &= -2(\overline{g}(\overline{\nabla}_{e_i} T, e_j) + \overline{g}(e_i, \overline{\nabla}_{e_j} T))\overline{g}(\overline{\nabla}_{e_i} T, e_j) + 2\overline{g}(\overline{R}(T,e_i)T,e_i) \\
&\quad + 2\overline{g}(\overline{\nabla}_{e_i} \overline{\nabla}_T T, e_i) + 2\overline{g}(\overline{\nabla}_{e_i} T, \overline{\nabla}_{e_i} T) + 4\overline{g}(\overline{\nabla}_{e_i} T, e_i)\overline{g}(\overline{\nabla}_{e_k} T, e_k) \\
&= -4\sum_{i,j} \overline{g}(T, A_{ij})^2 + 2\overline{g}(\overline{R}(T,e_i)T,e_i) + 2\,\mathrm{div}(\overline{\nabla}_T T)^t - 2\overline{g}(\overline{\nabla}_T T, H) \\
&\quad + 2\sum_{i=1}^{2} |\overline{\nabla}_{e_i} T|^2 + 4\overline{g}(T,H)^2.
\end{aligned}$$

注意， e_3， e_4 是法向量，我们可以计算得出

$$\sum_{i=1}^{2} |\overline{\nabla}_{e_i} T|^2 = \sum_{i=1}^{2}[\sum_{j=1}^{2} \overline{g}(\overline{\nabla}_{e_i} T, e_j)^2 + \sum_{\alpha=3}^{4} \overline{g}(\overline{\nabla}_{e_i} T, e_\alpha)^2] = \overline{g}(T, A_{ij})^2 + \sum_{i=1}^{2}\sum_{\alpha=3}^{4} \overline{g}(\overline{\nabla}_{e_i} T, e_\alpha)^2.$$

我们的结果之后是斯托克斯定理。 □

2.3. **演化公式**。 为了讨论 H-流的一些性质，我们首先推导一些演化公式。回顾一下，S是一个黎曼曲面，其体积形式为 ρ，而(M, g, I, J, K)是一个超K¨ahler 4-流形。超K¨ahler流是一个浸入 $f : S \to M$，其演化方程为

$$\frac{\partial}{\partial t} f = \lambda \nabla \lambda + \lambda^2 H,$$

其中 H是 M中 $f(S)$ 的平均曲率向量， ∇是 S上诱导度量 $g = f^\star(g)$ 的联络。

命题 2.7 ([16],命题 2.3)。沿着 H-流，

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} g_{kl} &= \nabla_k \nabla_l (\lambda^2) - 2\lambda^2 H_\alpha h_{\alpha kl}, \\
\frac{\partial}{\partial t} d\mu &= \left(\Delta(\frac{\lambda^2}{2}) - \lambda^2 |H|^2 \right) d\mu, \\
\frac{\partial}{\partial t} (\lambda^2) &= \lambda^2 \left(\Delta(\lambda^2) - 2\lambda^2 |H|^2 \right).
\end{aligned}$$

由命题 2.7 可知， λ 沿流单调不增。接下来，我们推导第二基本形式的演化公式。

定理 2.8。 第二基本形式的演化方程为

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} h_{\alpha ij} = \lambda^2 \{ & \Delta h_{\alpha ij} - H_\beta h_{\beta il} h_{\alpha jl} + (\overline{\nabla}_k \overline{R})_{jki\alpha} + (\overline{\nabla}_j \overline{R})_{ikk\alpha} \\
& - h_{\alpha il} \overline{R}_{jkkl} - h_{\alpha jl} \overline{R}_{ikkl} + h_{\beta ji} \overline{R}_{\beta kk\alpha} + 2h_{\beta jk} \overline{R}_{ik\beta\alpha} + 2h_{\beta ik} \overline{R}_{jk\beta\alpha} - 2h_{\alpha kl} \overline{R}_{jkil} \\
& + h_{\beta ik} (h_{\beta lk} h_{\alpha lj} - h_{\beta lj} h_{\alpha lk}) + h_{\alpha mk} (h_{\gamma ji} h_{\gamma km} - h_{\gamma jm} h_{\gamma ik}) + h_{\alpha im} (h_{\gamma jk} h_{\gamma km} - h_{\gamma jm} h_{\gamma kk}) \} \\
& + \lambda \lambda_k \overline{g}(\overline{\nabla}_{e_k} e_\alpha, e_\beta) h_{\beta ij} + \lambda^2 \overline{g}(\overline{\nabla}_H e_\alpha, \overline{\nabla}_{e_j} e_i) + (\lambda_j \lambda_k + \lambda \lambda_{jk}) h_{\alpha ik} + (\lambda_i \lambda_k + \lambda \lambda_{ik}) h_{\alpha jk} + \lambda \lambda_k h_{\alpha ij,k} \\
& + 2(\lambda_i \lambda_j + \lambda \lambda_{ij}) H_\alpha + 2\lambda \lambda_i H_{\alpha,j} + 2\lambda \lambda_j H_{\alpha,i},
\end{aligned} \tag{6}$$

其中 $\lambda_k = e_k(\lambda)$、 $\lambda_{ik} = e_i e_k(\lambda)$ 和 $\overline{R}$ 表示 M的曲率。

证明。 我们计算

$$\frac{\partial}{\partial t} h_{\alpha ij} = \overline{g}(\overline{\nabla}_{\nabla(\frac{\lambda^2}{2}) + \lambda^2 H} e_\alpha, \overline{\nabla}_{e_j} e_i) + \overline{g}(e_\alpha, \overline{\nabla}_{\nabla(\frac{\lambda^2}{2}) + \lambda^2 H} \overline{\nabla}_{e_j} e_i).$$

第一项为

$$\begin{aligned}
\overline{g}(\overline{\nabla}_{\nabla(\frac{\lambda^2}{2}) + \lambda^2 H} e_\alpha, \overline{\nabla}_{e_j} e_i) &= \overline{g}(\overline{\nabla}_{\nabla(\frac{\lambda^2}{2})} e_\alpha, \overline{\nabla}_{e_j} e_i) + \overline{g}(\overline{\nabla}_{\lambda^2 H} e_\alpha, \overline{\nabla}_{e_j} e_i) \\
&= \lambda \lambda_k \overline{g}(\overline{\nabla}_{e_k} e_\alpha, e_\beta) h_{\beta ij} + \lambda^2 \overline{g}(\overline{\nabla}_H e_\alpha, \overline{\nabla}_{e_j} e_i),
\end{aligned}$$

第二项为

$$\begin{aligned}
\overline{g}(e_\alpha, \overline{\nabla}_{\nabla(\frac{\lambda^2}{2}) + \lambda^2 H} \overline{\nabla}_{e_j} e_i) &= \overline{g}(e_\alpha, \overline{\nabla}_{e_j} \overline{\nabla}_{\nabla(\frac{\lambda^2}{2}) + \lambda^2 H} e_i) + \overline{g}\big(\overline{R}(\nabla(\frac{\lambda^2}{2}) + \lambda^2 H, e_j) e_i, e_\alpha\big) \\
&= \overline{g}\big(e_\alpha, \overline{\nabla}_{e_j} \overline{\nabla}_{e_i} [\nabla(\frac{\lambda^2}{2}) + \lambda^2 H]\big) + \lambda \lambda_k \overline{R}_{kji\alpha} + \lambda^2 H_\beta \overline{R}_{\beta ji\alpha}.
\end{aligned}$$

Here

$$\begin{aligned}
\overline{g}(e_\alpha, \overline{\nabla}_{e_j} \overline{\nabla}_{e_i} \nabla(\frac{\lambda^2}{2})) &= (\lambda_j \lambda_k + \lambda \lambda_{jk}) h_{\alpha ik} + (\lambda_i \lambda_k + \lambda \lambda_{ik}) h_{\alpha jk} + \lambda \lambda_k \overline{g}(e_\alpha, \overline{\nabla}_{e_j} \overline{\nabla}_{e_i} e_k) \\
&= (\lambda_j \lambda_k + \lambda \lambda_{jk}) h_{\alpha ik} + (\lambda_i \lambda_k + \lambda \lambda_{ik}) h_{\alpha jk} + \lambda \lambda_k h_{\alpha ik,j},
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
\overline{g}(e_\alpha, \overline{\nabla}_{e_j} \overline{\nabla}_{e_i} (\lambda^2 H)) &= \overline{g}(e_\alpha, e_j e_i(\lambda^2) H + e_i(\lambda^2) \overline{\nabla}_{e_j} H + e_j(\lambda^2) \overline{\nabla}_{e_i} H + \lambda^2 \overline{\nabla}_{e_j} \overline{\nabla}_{e_i} H) \\
&= 2(\lambda_i \lambda_j + \lambda \lambda_{ij}) H_\alpha + 2\lambda \lambda_i H_{\alpha,j} + 2\lambda \lambda_j H_{\alpha,i} + \lambda^2 \overline{g}(e_\alpha, \overline{\nabla}_{e_j} \overline{\nabla}_{e_i} H).
\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}
\overline{g}(e_\alpha, \overline{\nabla}_{e_j} \overline{\nabla}_{e_i} H) &= \overline{g}(e_\alpha, \overline{\nabla}_{e_j} \overline{\nabla}^T_{e_i} H) + \overline{g}(e_\alpha, \overline{\nabla}_{e_j} \overline{\nabla}^N_{e_i} H) \\
&= -\overline{g}(\overline{\nabla}_{e_j} e_\alpha, \overline{\nabla}^T_{e_i} H) + H_{\alpha,ij} \\
&= h_{\alpha jl} \overline{g}(\overline{\nabla}_{e_i} H, e_l) + H_{\alpha,ij} \\
&= -h_{\alpha jl} \overline{g}(H, \overline{\nabla}_{e_i} e_l) + H_{\alpha,ij} \\
&= -H_\beta h_{\beta il} h_{\alpha jl} + H_{\alpha,ij},
\end{aligned}$$

我们得出

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}h_{\alpha ij} &= \lambda\lambda_k\overline{g}(\overline{\nabla}_{e_k}e_\alpha, e_\beta)h_{\beta ij} + \lambda^2\overline{g}(\overline{\nabla}_H e_\alpha, \overline{\nabla}_{e_j}e_i) + \lambda\lambda_k\overline{R}_{kji\alpha} + \lambda^2 H_\beta\overline{R}_{\beta ji\alpha}\\ &\quad + (\lambda_j\lambda_k + \lambda\lambda_{jk})h_{\alpha ik} + (\lambda_i\lambda_k + \lambda\lambda_{ik})h_{\alpha jk} + \lambda\lambda_k h_{\alpha ik,j}\\ &\quad + 2(\lambda_i\lambda_j + \lambda\lambda_{ij})H_\alpha + 2\lambda\lambda_i H_{\alpha,j} + 2\lambda\lambda_j H_{\alpha,i} + \lambda^2(H_{\alpha,ij} - H_\beta h_{\beta il}h_{\alpha jl}).\end{aligned}$$

利用第二基本形式的拉普拉斯算子 [12, 13],

$$\begin{aligned}\Delta h_{\alpha ij} &= H_{\alpha,ij} - (\overline{\nabla}_k\overline{R})_{jki\alpha} - (\overline{\nabla}_j\overline{R})_{ikk\alpha}\\ &\quad + h_{\alpha il}\overline{R}_{jkkl} + h_{\alpha jl}\overline{R}_{ikkl} - h_{\beta kk}\overline{R}_{j\beta i\alpha} - h_{\beta ji}\overline{R}_{\beta kk\alpha} - 2h_{\beta jk}\overline{R}_{ik\beta\alpha} - 2h_{\beta ik}\overline{R}_{jk\beta\alpha} + 2h_{\alpha kl}\overline{R}_{jkil}\\ &\quad - h_{\beta ik}(h_{\beta lk}h_{\alpha lj} - h_{\beta lj}h_{\alpha lk}) - h_{\alpha mk}(h_{\gamma ji}h_{\gamma km} - h_{\gamma jm}h_{\gamma ik}) - h_{\alpha im}(h_{\gamma jk}h_{\gamma km} - h_{\gamma jm}h_{\gamma kk})\end{aligned}$$

我们将 $H_{\alpha ij}$ 替换为 $\Delta h_{\alpha}{}^{ij}$。然后，利用Codazzi方程完成证明 $h_{\alpha ik,j} + R_{kji\alpha} = h_{\alpha ij,k}$. □

推论 2.9. 第二基本形式 $|A|^2 = g^{ik}g^{jl}h_{\alpha ij}h_{\alpha kl}$ 的范数演化为

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}|A|^2 &= \lambda^2\Big\{\Delta|A|^2 - 2|\nabla A|^2 + 2h_{\alpha ij}[(\overline{\nabla}_k\overline{R})_{jki\alpha} + (\overline{\nabla}_j\overline{R})_{ikk\alpha}]\\ &\quad + h_{\alpha ij}\big[-4h_{\alpha il}\overline{R}_{jkkl} + 8h_{\beta jk}\overline{R}_{ik\beta\alpha} + 2h_{\beta ji}\overline{R}_{\beta kk\alpha} - 4h_{\alpha kl}\overline{R}_{jkil}\big]\\ &\quad + 2\sum_{\alpha,\beta,i,l}(\sum_k h_{\alpha ik}h_{\beta kl} - h_{\alpha kl}h_{\beta ik}) + 2\sum_{i,j,k,l}(\sum_\alpha h_{\alpha ij}h_{\alpha kl})^2\Big\}\\ &\quad + 2h_{\alpha ij}\big[\lambda\lambda_k h_{\alpha ij,k} + 2(\lambda_i\lambda_j + \lambda\lambda_{ij})H_\alpha + 4\lambda\lambda_i H_{\alpha,j}\big].\end{aligned}$$

证明。 根据定义,

$$\frac{\partial}{\partial t}|A|^2 = 2(\frac{\partial}{\partial t}g^{ik})h_{\alpha ij}h_{\alpha kj} + 2(\frac{\partial}{\partial t}h_{\alpha ij})h_{\alpha ij}.$$

注意到

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}g^{ik} &= -g^{ij}(\frac{\partial}{\partial t}g_{jl})g^{kl} = -g^{ij}(\nabla_j\nabla_l(\lambda^2) - 2\lambda^2 H_\alpha h_{\alpha jl})g^{kl}\\ &= -2(\lambda_i\lambda_k + \lambda\lambda_{ik}) + 2\lambda^2 H_\alpha h_{\alpha ik}.\end{aligned}$$

第一部分为

$$2(\frac{\partial}{\partial t}g^{ik})h_{\alpha ij}h_{\alpha kj} = -4(\lambda_i\lambda_k + \lambda\lambda_{ik})h_{\alpha ij}h_{\alpha kj} + 4\lambda^2 H_\alpha h_{\alpha ik}h_{\alpha ij}h_{\alpha kj},$$

第二部分为

$$\begin{aligned}&2(\frac{\partial}{\partial t}h_{\alpha ij})h_{\alpha ij}\\ &= 2\lambda^2\Big\{h_{\alpha ij}\Delta h_{\alpha ij} - H_\beta h_{\beta il}h_{\alpha jl}h_{\alpha ij} + h_{\alpha ij}\big[(\overline{\nabla}_k\overline{R})_{jki\alpha} + (\overline{\nabla}_j\overline{R})_{ikk\alpha}\big]\\ &\quad - h_{\alpha ij}\big[2h_{\alpha il}\overline{R}_{jkkl} + h_{\beta ji}\overline{R}_{\beta kk\alpha} + 4h_{\beta jk}\overline{R}_{ik\beta\alpha} - 2h_{\alpha kl}\overline{R}_{jkil}\big]\\ &\quad + h_{\alpha ij}\big[h_{\beta ik}(h_{\beta lk}h_{\alpha lj} - h_{\beta lj}h_{\alpha lk}) + h_{\alpha mk}(h_{\gamma ji}h_{\gamma km} - h_{\gamma jm}h_{\gamma ik}) + h_{\alpha im}(h_{\gamma jk}h_{\gamma km} - h_{\gamma jm}h_{\gamma kk})\big]\Big\}\\ &\quad + 4h_{\alpha ij}(\lambda_j\lambda_k + \lambda\lambda_{jk})h_{\alpha ik} + 2h_{\alpha ij}\big[\lambda\lambda_k h_{\alpha ij,k} + 2(\lambda_i\lambda_j + \lambda\lambda_{ij})H_\alpha + 4\lambda\lambda_i H_{\alpha,j}\big],\end{aligned}$$

这里用到了 (6)。由于

$$\Delta|A|^2 = 2|\nabla A|^2 + 2h_{\alpha ij}\Delta h_{\alpha ij},$$

我们推导得出

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}|A|^2 &= \lambda^2\Big\{\Delta|A|^2 - 2|\nabla A|^2 + 2h_{\alpha ij}\big[(\overline{\nabla}_k\overline{R})_{jki\alpha} + (\overline{\nabla}_j\overline{R})_{ikk\alpha}\big]\\ &\quad + h_{\alpha ij}\big[-4h_{\alpha il}\overline{R}_{jkkl} + 8h_{\beta jk}\overline{R}_{ik\beta\alpha} + 2h_{\beta ji}\overline{R}_{\beta kk\alpha} - 4h_{\alpha kl}\overline{R}_{jkil}\big]\\ &\quad + 2h_{\alpha ij}\big[h_{\beta ik}(h_{\beta lk}h_{\alpha lj} - h_{\beta lj}h_{\alpha lk}) + h_{\alpha mk}(h_{\gamma ji}h_{\gamma km} - h_{\gamma jm}h_{\gamma ik})\\ &\quad + h_{\alpha im}h_{\gamma jk}h_{\gamma km}\big]\Big\} + 2h_{\alpha ij}\big[\lambda\lambda_k h_{\alpha ij,k} + 2(\lambda_i\lambda_j + \lambda\lambda_{ij})H_\alpha + 4\lambda\lambda_i H_{\alpha,j}\big].\end{aligned}$$

注意,

$$\begin{aligned}
&h_{\alpha ij}\big[h_{\beta ik}(h_{\beta lk}h_{\alpha lj}-h_{\beta lj}h_{\alpha lk})+h_{\alpha mk}(h_{\gamma ji}h_{\gamma km}-h_{\gamma jm}h_{\gamma ik})+h_{\alpha im}h_{\gamma jk}h_{\gamma km}\big]\\
&=2h_{\alpha ij}h_{\alpha il}h_{\beta jk}h_{\beta kl}-2h_{\alpha ij}h_{\alpha kl}h_{\beta jl}h_{\beta ik}+h_{\alpha ij}h_{\alpha kl}h_{\beta ij}h_{\beta kl}\\
&=\sum_{\alpha,\beta,i,l}(\sum_k h_{\alpha ik}h_{\beta kl}-h_{\alpha kl}h_{\beta ik})+\sum_{i,j,k,l}(\sum_\alpha h_{\alpha ij}h_{\alpha kl})^2,
\end{aligned}$$

于是我们完成了证明。 □

2.4. **特殊超 Kähler¨流**。 考虑 $I-$全纯 (2,0)-形式$\theta=\omega_2+i\omega_3$ 以及辛 − − ce

$$\mathcal{N}=\{f:S\to M\mid f \text{ is an immersion and } f^*(\theta)=\rho\}.$$

此条件表明，该浸入曲面关于 ω_3 是拉格朗日的，关于ω_2是辛的。在 [16], Song 和 Weinkove 证明了以下结果。
−

定理 2.10 ([16],定理 1)。 设 f_t是 H-流在 $0\le t\le T$上的一个解。若 $f_0\in\mathcal{N}$，则对于 $0\le t\le T$，有 $f_t\in\mathcal{N}$。因此，我们称初始点位于 $\mathcal{N}$ 的 $H-$流为特殊超*Kähler*¨流（特殊 $H-$流）。

定义函数 η_i 于 S 上如下:

$$\eta_i=\frac{f^\star\overline{\omega}_i}{d\mu},$$

其中 $i=1$，2，3。换言之， $f\in\mathcal{N}\iff\eta_2=\frac{1}{\lambda}$， ~~$\eta_3=0$~~。为简要说明命题 2.10 的证明，我来计算演化公式。

命题 2.11。 设 ω 为一个~~2~~-形式，且 $\eta=\frac{f^*\omega}{d\mu}$ 。~~那么~~， η 的演化满足

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\eta=&\lambda^2[\Delta\eta+\overline{\omega}((\overline{R}(e_1,e_k)e_k)^N,e_2)+\overline{\omega}(e_1,(\overline{R}(e_2,e_k)e_k)^N)+\eta|A|^2]\\
&+2\lambda[e_1(\lambda)\overline{\omega}(H,e_2)+e_2(\lambda)\overline{\omega}(e_1,H)]\\
&+\lambda e_i(\lambda)[\overline{\omega}(\overline{\nabla}_{e_1}e_i,e_2)+\overline{\omega}(e_1,\overline{\nabla}_{e_2}e_i)]-2\lambda^2\overline{\omega}_{34}(h_{3k1}h_{4k2}-h_{3k2}h_{4k1})\\
&+(\overline{\nabla}_{\lambda\nabla\lambda+\lambda^2H}\overline{\omega})(e_1,e_2)-\lambda^2\overline{\omega}_{12,kk}-2\lambda^2\overline{\omega}_{\alpha2,k}h_{\alpha k1}-2\lambda^2\overline{\omega}_{1\alpha,k}h_{\alpha k2},
\end{aligned}\tag{7}$$

其中， $\{e_1,e_2\}$是 $Tf(S)$的标准正交标架，而 $\{e_3,e_4\}$是 $(Tf(S))^\perp$的标准正交标架。

证明。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}f^\star\overline{\omega}(e_1,e_2)&=\big(\overline{\nabla}_{\lambda\nabla\lambda+\lambda^2H}\overline{\omega}\big)(e_1,e_2)+\overline{\omega}(\overline{\nabla}_{\lambda\nabla\lambda+\lambda^2H}e_1,e_2)+\overline{\omega}(e_1,\overline{\nabla}_{\lambda\nabla\lambda+\lambda^2H}e_2)\\
&=\big(\overline{\nabla}_{\lambda\nabla\lambda+\lambda^2H}\overline{\omega}\big)(e_1,e_2)+\overline{\omega}\big(\overline{\nabla}_{e_1}(\lambda\nabla\lambda+\lambda^2H),e_2\big)+\overline{\omega}\big(e_1,\overline{\nabla}_{e_2}(\lambda\nabla\lambda+\lambda^2H)\big).
\end{aligned}$$

首先，我们有

$$\begin{aligned}
\overline{\omega}\big(\overline{\nabla}_{e_1}(\lambda\nabla\lambda),e_2\big)&=\overline{\omega}\big(\overline{\nabla}_{e_1}\nabla(\frac{\lambda^2}{2}),e_2\big)=\overline{\omega}\big(\overline{\nabla}_{e_1}\nabla_{e_i}(\frac{\lambda^2}{2})e_i,e_2\big)+\overline{\omega}\big(\nabla_{e_i}(\frac{\lambda^2}{2})\overline{\nabla}_{e_1}e_i,e_2\big)\\
&=\nabla_{e_1}\nabla_{e_1}(\frac{\lambda^2}{2})\eta+\lambda e_i(\lambda)\overline{\omega}(\overline{\nabla}_{e_1}e_i,e_2),
\end{aligned}$$

and

$$\overline{\omega}\big(\overline{\nabla}_{e_1}(\lambda^2H)\ e_2\big)=2\lambda\overline{\omega}\big(e_1(\lambda)H,e_2\big)+\lambda^2\overline{\omega}(\overline{\nabla}_{e_1}H,e_2\big)=2\lambda\overline{\omega}(e_1(\lambda)H,e_2)+\lambda^2\overline{\omega}\big((\overline{\nabla}_{e_1}H)^N,e_2\big)-\lambda^2\eta\overline{g}\big(H,\overline{\nabla}_{e_1}e_1\big)$$

So,

$$\begin{aligned}
&\overline{\omega}(\overline{\nabla}_{e_1}(\lambda^2H),e_2)+\overline{\omega}(e_1,\overline{\nabla}_{e_2}(\lambda^2H))\\
&=2\lambda\big[e_1(\lambda)\overline{\omega}(H,e_2)+e_2(\lambda)\overline{\omega}(e_1,H)\big]+\lambda^2\big[\overline{\omega}((\overline{\nabla}_{e_1}H)^N,e_2)+\overline{\omega}(e_1,(\overline{\nabla}_{e_2}H)^N)\big]-\lambda^2\eta|H|^2.
\end{aligned}$$

回顾一下，2-形式（[22]）的拉普拉斯算子为

$$\begin{aligned}
\Delta\eta=&\overline{\omega}_{12,kk}+2\overline{\omega}_{\alpha2,k}h_{\alpha k1}+2\overline{\omega}_{1\alpha,k}h_{\alpha k2}+2\overline{\omega}_{34}(h_{3k1}h_{4k2}-h_{3k2}h_{4k1})-\eta|A|^2\\
&+\overline{R}_{k1k\alpha}\overline{\omega}_{\alpha2}+\overline{R}_{k2k\alpha}\overline{\omega}_{1\alpha}+H_{\alpha,1}\overline{\omega}_{\alpha2}+H_{\alpha,2}\overline{\omega}_{1\alpha}.
\end{aligned}\tag{8}$$

我们推导出

$$\begin{aligned}
&\overline{\omega}((\overline{\nabla}_{e_1}H)^N,e_2)+\overline{\omega}(e_1,(\overline{\nabla}_{e_2}H)^N)\\
&=\Delta\eta-\overline{R}_{k1k\alpha}\overline{\omega}_{\alpha2}-\overline{R}_{k2k\alpha}\overline{\omega}_{1\alpha}+\eta|A|^2-2\overline{\omega}_{34}(h_{3k1}h_{4k2}-h_{3k2}h_{4k1})-\overline{\omega}_{12,kk}-2\overline{\omega}_{\alpha2,k}h_{\alpha k1}-2\overline{\omega}_{1\alpha,k}h_{\alpha k2}.
\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}f^{\star}\overline{\omega}(e_1,e_2) &= \lambda^2\big[\Delta\eta - \overline{R}_{k1k\alpha}\overline{\omega}_{\alpha 2} - \overline{R}_{k2k\alpha}\overline{\omega}_{1\alpha} - \eta|H|^2 + \eta|A|^2\big]\\ &\quad + 2\lambda\big[e_1(\lambda)\overline{\omega}(H,e_2) + e_2(\lambda)\overline{\omega}(e_1,H)\big] + \Delta(\frac{\lambda^2}{2})\eta\\ &\quad + \lambda e_i(\lambda)\big[\overline{\omega}(\overline{\nabla}_{e_1}e_i,e_2) + \overline{\omega}(e_1,\overline{\nabla}_{e_2}e_i)\big] - 2\lambda^2\overline{\omega}_{34}(h_{3k1}h_{4k2} - h_{3k2}h_{4k1})\\ &\quad + (\overline{\nabla}_{\lambda\nabla\lambda+\lambda^2 H}\overline{\omega})(e_1,e_2) - \lambda^2\overline{\omega}_{12,kk} - 2\lambda^2\overline{\omega}_{\alpha 2,k}h_{\alpha k1} - 2\lambda^2\overline{\omega}_{1\alpha,k}h_{\alpha k2}.\end{aligned}$$

最后，我们知道

$$\frac{\partial}{\partial t}\eta = \frac{\frac{\partial}{\partial t}f^{\star}\overline{\omega}(e_1,e_2)}{d\mu} - \frac{f^{\star}\overline{\omega}}{(d\mu)^2}\frac{\partial}{\partial t}d\mu,$$

and

$$\frac{\partial}{\partial t}d\mu = \left(\Delta(\frac{\lambda^2}{2}) - \lambda^2|H|^2\right)d\mu.$$

证明完毕。 □

由命题 2.11，我们计算 $\frac{\partial}{\partial t}\eta_3$和 $\frac{\partial}{\partial t}(\eta_2 - \frac{1}{\lambda})$。利用最大值原理，我们得出这两项始终为零。因此，命题 2.10 得证。（更多细节见 [16] 。）

对于任意 $p \in S$，令 $\{x_1, x_2\}$为如前所述在 p处的正规坐标系，并取 $\nu_i = K\partial_i$, $i = 1,2$。由命题 2.10，

$$\overline{g}(\nu_i,\partial_j) = \overline{g}(K\partial_i,\partial_j) = \eta_3(\partial_i,\partial_j) = 0.$$

于是，我们得到 $T_{f(p)}M$ 的一个标准正交基 $\{\partial_1,\partial_2,\nu_1,\nu_2\}$，且第二基本形式定义为 $h_{ijk} = g(\nu_i,\nabla_{\partial_i}\partial_j)$。此外，我们推导出如下结论。

引理 2.12。在 p,

$$\overline{\omega}_1 = \begin{pmatrix} 0 & \eta_1 & 0 & -\sqrt{1-\eta_1^2}\\ -\eta_1 & 0 & \sqrt{1-\eta_1^2} & 0\\ 0 & -\sqrt{1-\eta_1^2} & 0 & -\eta_1\\ \sqrt{1-\eta_1^2} & 0 & \eta_1 & 0\end{pmatrix},$$

$$\overline{\omega}_2 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1-\eta_1^2} & 0 & \eta_1\\ -\sqrt{1-\eta_1^2} & 0 & -\eta_1 & 0\\ 0 & \eta_1 & 0 & -\sqrt{1-\eta_1^2}\\ -\eta_1 & 0 & \sqrt{1-\eta_1^2} & 0\end{pmatrix},$$

$$\overline{\omega}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\end{pmatrix}. \tag{9}$$

证明。 我们计算得

$$\begin{aligned}\overline{\omega}_1(\partial_i,\nu_j) &= \overline{g}(I\partial_i,K\partial_j) = -\overline{g}(J\partial_i,\partial_j) = -\overline{\omega}_2(\partial_i,\partial_j),\\ \overline{\omega}_1(\nu_i,\nu_j) &= \overline{g}(IK\partial_i,K\partial_j) = \overline{g}(I\partial_j,\partial_i) = \overline{\omega}_1(\partial_j,\partial_i).\end{aligned}$$

注意到 $\eta_1^2 = 1 - \frac{1}{\lambda^2} \Rightarrow \frac{1}{\lambda} = \pm\sqrt{1-\eta_1^2}$和 $\rho(\partial_1,\ \partial_2) = \eta_2(\partial_1,\ \partial_2) = \frac{1}{\lambda} > 0$，我们推得 $\frac{1}{\lambda} = \sqrt{1-\eta_1^2}$。

□

在这个坐标系下，我们观察到

$$\begin{aligned}\partial_k(\lambda) &= -\lambda^2[\overline{\omega}_2(\overline{\nabla}_{\partial_k}\partial_1,\partial_2) + \overline{\omega}_2(\partial_1,\overline{\nabla}_{\partial_k}\partial_2)] = -\lambda^2\eta_1(h_{1k1} + h_{2k2}) = -\lambda^2\eta_1 H_k,\\ \partial_j\eta_1 &= -\frac{1}{\lambda}H_j,\\ \partial_j\partial_k(\lambda) &= (2\lambda^3 - \lambda)H_jH_k - \lambda^2\eta_1 H_{k,j}.\end{aligned} \tag{10}$$

于是我们得到第二基本形式的简化演化公式。

推论 2.13. 使用上述坐标，特殊超凯勒流的第二基本形式演化公式为

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}h_{ijk} = \lambda^2\Big\{&\Delta h_{ijk} + (\overline{\nabla}_l\overline{R})_{jlk\bar{i}} + (\overline{\nabla}_j\overline{R})_{kll\bar{i}} + h_{ikl}\overline{R}_{jmml} + h_{ijl}\overline{R}_{kmml} + h_{ljk}\overline{R}_{lmmi}\\ &+ 2h_{ljm}\overline{R}_{kmli} + 2h_{lkm}\overline{R}_{jmli} + 2h_{iml}\overline{R}_{jmlk} + h_{mkr}(h_{mlr}h_{ilj} - h_{mlj}h_{ilr}) + h_{iml}(h_{rjk}h_{rlm} - h_{rjm}h_{rkl})\\ &+ h_{ikm}(h_{rjl}h_{rlm} - h_{rjm}H_r) - (H_m h_{mil}h_{jkl} + H_m h_{mkl}h_{ijl})\\ &- \lambda\eta_1(H_l h_{ijk,l} + h_{jkl}H_{l,i} + + h_{ijl}H_{l,k} + h_{ikl}H_{l,j} + 2H_k H_{i,j} + 2H_j H_{i,k} + 2H_i H_{k,j})\\ &+ (3\lambda^2 - 2)(H_i H_l h_{jkl} + H_k H_l h_{ijl} + H_j H_l h_{ikl} + 2H_i H_j H_k)\Big\}.\end{aligned}$$

推论 2.14。 第二基本形式的范数演化为

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}|A|^2 = \lambda^2\Big\{&\Delta|A|^2 - 2|\nabla A|^2 + 2h_{ijk}((\overline{\nabla}_l\overline{R})_{jlk\bar{i}} + (\overline{\nabla}_j\overline{R})_{kll\bar{i}}) + 6h_{ijk}h_{ikl}\overline{R}_{jmml} + 12h_{ijk}h_{ljm}\overline{R}_{kmli}\\ &+ 6h_{ijk}h_{mkr}h_{mlr}h_{ilj} - 4h_{ijk}h_{mkr}h_{mlj}h_{ilr} - 2\lambda\eta_1 H_l h_{ijk,l}\\ &- 12\lambda\eta_1 h_{ijk}H_k H_{i,j} + 4(3\lambda^2 - 2)h_{ijk}H_i H_j H_k\Big\}.\end{aligned} \tag{11}$$

使用该技术 Huisken 的技巧 [12],[13], 我们得出关于 H-流的长时间存在性的论证 .

引理 2.15。 设 f_t 是 $[0,T)$上的 H-流的一个解，其中 $0 \le T \le \infty$。假设 λ 和 $|\nabla^k\lambda|$ 在 $f_t(S)$ 上一致有界，其中任意正整数 k均成立。若存在一个常数 α_0 使得

$$\sup_{f_t(S)}|A|^2 \le \alpha_0 \quad for\ t \in [0,T)\ .$$

那么存在 α_k 使得

$$\sup_{f_t(S)}|\nabla^k A|^2 \le \alpha_k \quad for\ t \in [0,T)\ .$$

证明。 由于 $|\nabla^k\lambda|$ 有界，由（11）可得

$$\frac{\partial}{\partial t}|A|^2 \le \lambda^2\Delta|A|^2 + K_1|A|^4 + K_2$$

并且归纳地存在一个常数 $B(k)$ $C(k)$，它取决于界 C ，使得 t

$$\frac{\partial}{\partial t}|\nabla^k A|^2 \le \lambda^2\Delta|\nabla^k A|^2 + B(k)\sum_{a+b+c=k}|\nabla^a A||\nabla^b A||\nabla^c A||\nabla^k A| + C(k).$$

那么，剩余的 论证在平均曲率流的情形下完全相同（参见 [12] 和 [13]。） .

□

定理 2.16。 设 f_t 是 $[0,T)$上的 H-流的一个解。假设对于任意正整数 k， λ 和 $|\nabla^k\lambda|$ 在 $f_t(S)$上一致有界。如果 $T < \infty$，那么

$$\lim_{t\to T}\sup_{f_t(S)}|A|^2 = \infty.$$

证明。 假设该定理不成立，即

$$\lim_{t\to T}\sup_{f_t(S)}|A|^2 < \infty.$$

对于任意点 $p \in S$ 和 $0 \le t_1 < t_2 < T$

$$\begin{aligned}|f(p,t_2) - f(p,t_1)| &\le \int_{t_1}^{t_2}|\frac{\partial}{\partial t}f|dt = \int_{t_1}^{t_2}|\lambda\nabla\lambda + \lambda^2 H|dt\\ &\le C_0(t_2 - t_1).\end{aligned}$$

因此，对于 $t \to T$, $\{f_t(S)\}$ 收敛到唯一的连续极限 $f_T(S)$。此外，根据命题 2.15

$$\begin{aligned}|\nabla^k f(p,t_2) - \nabla^k f(p,t_1)| &\le \int_{t_1}^{t_2}|\nabla^k(\lambda\nabla\lambda + \lambda^2 H)|dt\\ &\le C_k(t_2 - t_1).\end{aligned}$$

这意味着，当 $t \to T$ 时， $f_t(S)$ 在 C^∞-拓扑下收敛到 $f_T(S)$。根据短时间存在性，我们知道存在一个解，使得 $t = T + \epsilon$ ，这与 T 是极大的假设矛盾。

□

对于特殊的 H-流情形，由于演化公式， λ 有界。根据 (10)， λ 导数的有界性可归结为第二基本形式的有界性。因此，

推论 2.17。 设 f_t 是 H-流在 $[0,T)$ 上的一个解。若 $T<\infty$，则

$$\lim_{t\to T}\sup_{f_t(S)}|A|^2=\infty.$$

3. Strongly Stable Submanifolds

3.1. 强稳定条件。 在本小节中，我们回顾强稳定条件的一些性质。大部分内容可参见 [18]。设 M 是 m 维子流形，嵌入 n 维流形 N 中，且 ∇ 是关于其黎曼度量 g 的列维-奇维塔联络，定义在 N 上。我们首先作如下定义。

- 偏里奇算子定义为 $\mathcal{R}(V)=\mathrm{tr}_M(R^N(\cdot,V)\cdot)^\perp$，其中 V 是法向量场。
- 算子 $\mathcal{A}:=\mathcal{S}^t\circ\mathcal{S}\colon TM^\perp\to TM^\perp$，其中 $\mathcal{S}^t$ 是形算子 $\mathcal{S}$ 的转置映射。

Rec面积泛函沿法向方向 V 的二次变分由 b 给出 y

$$\int_M|\nabla^\perp V|^2+g(\mathcal{R}(V),V)-\overline{g}(\mathcal{A}(V),V),$$

接下来给出以下定义。

定义 3.1. 若一个极小浸入子流形 M in N 满足

$$\int_M|\nabla^\perp V|^2+\overline{g}(\mathcal{R}(V),V)-\overline{g}(\mathcal{A}(V),V)\geq 0\quad \text{for any compactly support normal vector } V.$$

此外，如果 $\mathcal{R}-\mathcal{A}$ 是法丛上的逐点正算子，即存在 $c>0$ 使得 M 强稳定，

$$\sum_{\alpha,\beta,i}R^N_{i\alpha i\beta}V^\alpha V^\beta-\sum_{\alpha,\beta,i,j}h_{\alpha ij}h_{\beta ij}V^\alpha V^\beta\geq c\sum_\alpha(V^\alpha)^2, \tag{12}$$

对任意法向量 $V=V^\alpha e_\alpha$，

本文关注 N 为超凯勒 ¨ahler 四维流形的情形，这等价于卡拉比–丘四维流形。受 [18]，启发，我们寻找一些拉格朗日曲面作为强稳定曲面的例子。回顾一下，

定义 3.2. 卡拉比–丘流形 N 中的一个 n 维子流形 L 若满足 $\omega|_L\equiv 0$ 且 $\mathrm{Im}(\Omega)|_L\equiv 0$，则称为特殊拉格朗日子流形，其中 Ω 是处处不消失的全纯形式。

定义 3.3. 超凯勒流形– N 中的 $\frac{n}{2}$ 维子流形 L ，若相对于某个全纯辛形式是拉格朗日子流形，则称为复拉格朗日子流形。

在 [11, 10],Hitchin 证明了

定理 3.4. 复拉格朗 安子流形 L 是超凯勒流形 N 中的特殊拉格朗日子流形 .

Note 由于特殊拉格朗日子流形是极小的 [9], ，我们得出以下结论。

推论 3.5. 若 Rc^L 为正，则超凯勒 4-流形中的极小拉格朗日曲面 L 是强稳定的。特别地，若 Rc^L 为正，则超凯勒 4-流形中的复拉格朗日曲面 L 是强稳定的。

证明。假设 L是极小的，且，我们 极小且 $\omega_1\big|_L=0$，我们考虑标准正交基 $\{\partial_1,\partial_2,I\partial_1,I\partial_2\}$ 并计算
考虑标准正交基,

$$\begin{aligned}R^N(e_i,I(e_k),e_i,I(e_l))&=-R^N(I(e_i),I(e_k),I(e_i),I(e_l))\\&=-R^N(e_i,e_k,e_i,e_l)\\&=-R^L(e_i,e_k,e_i,e_l)-\langle A(e_i,e_i),A(e_k,e_l)\rangle+\langle A(e_i,e_l),A(e_k,e_i)\rangle,\end{aligned}$$

w这里我们使用了高斯方程以及 $\mathrm{Rc}^N\equiv 0$ 这一事实。因此，(12) 化为 t o

$$\mathrm{Rc}^L_{kl}V^kV^l.$$

□

3.2. **Eguchi-Hanson 空间**。 本节将明确找出一个超Kähler 4-流形中的强稳定曲面。Eguchi-Hanson 空间是定义在二维球面 T^*S^2 的余切丛上的一个非紧致、自对偶、渐近局部欧几里得（ALE）度量。该度量由物理学家 Eguchi 和 Hanson [6] 给出

$$g_{EH} = (1 - \frac{c}{r^4})^{-1}dr^2 + r^2((\sigma^1)^2 + (\sigma^2)^2) + r^2(1 - \frac{c}{r^4})(\sigma^3)^2, \quad r > \sqrt[4]{c}, \tag{13}$$

其中 c 是常数， σ^i 是 $SU(2)$ 上的左不变 1-形式，并满足 $d\sigma^i = 2\epsilon^i_{jk}\sigma^j \wedge \sigma^k$。

注记 3.6。 $r = \sqrt[4]{c}$ 是一个坐标奇点。令 $\cosh u = \frac{r^2}{\sqrt{c}}$，则

$$g_{EH} = \frac{\sqrt{c}}{4}\cosh u du^2 + \sqrt{c}\cosh u((\sigma^1)^2 + (\sigma^2)^2) + \sqrt{c}\sinh u \tanh u(\sigma^3)^2$$

由于 $r \to \sqrt[4]{c}$， $g_{EH} \to \sqrt{c}((\sigma^1)^2 + (\sigma^2)^2) = \sqrt[\sqrt{c}]{4}(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$，这是一个半径为 $\sqrt[\sqrt{c}]{4}$ 的标准球面 S^2。

下文中，我们使用嘉当标架移动法研究 Eguchi-Hanson 度量的超 Kähler 结构 ric. Let

$$\omega^0 = (1 - \frac{c}{r^4})^{-\frac{1}{2}}dr, \quad \omega^1 = r\sigma_1, \quad \omega^2 = r\sigma_2, \quad \omega^3 = (1 - \frac{c}{r^4})^{\frac{1}{2}}\sigma_3,$$

和 $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ 为其对偶标架。取 $A = 1 - \frac{c}{r^4}$，联络 1-形式如下。

$$\begin{aligned}
&\omega^0_1 = \frac{-A^{\frac{1}{2}}}{r}\omega^1, \quad \omega^0_2 = \frac{-A^{\frac{1}{2}}}{r}\omega^2, \quad \omega^0_3 = \frac{A^{\frac{1}{2}} - 2A^{\frac{-1}{2}}}{r}\omega^3, \\
&\omega^1_2 = \frac{2A^{\frac{-1}{2}} - A^{\frac{1}{2}}}{r}\omega^3, \quad \omega^1_3 = \frac{-A^{\frac{1}{2}}}{r}\omega^2, \quad \omega^2_3 = \frac{A^{\frac{1}{2}}}{r}\omega^1,
\end{aligned} \tag{14}$$

以及联络 2-形式 $R^j_i = d\omega^j_i - \omega^k_i \wedge \omega^j_k$ 为

$$\begin{aligned}
R^0_1 &= \frac{2A-2}{r^2}\omega^0 \wedge \omega^1 + \frac{2-2A}{r^2}\omega^2 \wedge \omega^3 = -R^2_3, \\
R^0_2 &= \frac{2A-2}{r^2}\omega^0 \wedge \omega^2 + \frac{2A-2}{r^2}\omega^1 \wedge \omega^3 = R^1_3, \\
R^0_3 &= \frac{4-4A}{r^2}\omega^0 \wedge \omega^3 + \frac{4A-4}{r^2}\omega^1 \wedge \omega^2 = -R^1_2.
\end{aligned} \tag{15}$$

注意，当 $A \to 0$ 时，若 $r \to \sqrt[4]{c}$，曲率有界，且该度量是里奇平坦的。我们相对于标架 $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ 定义 3 个复结构如下:

$$I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

One 可以验证 $I^2 = J^2 = K^2 = -Id$ 和 $IJ = K$。相应的 K¨ahler 形式为 re

$$\begin{aligned}
\omega_I &= \omega^0 \wedge \omega^3 + \omega^1 \wedge \omega^2, \\
\omega_J &= \omega^0 \wedge \omega^1 + \omega^2 \wedge \omega^3, \\
\omega_K &= \omega^0 \wedge \omega^2 - \omega^1 \wedge \omega^3.
\end{aligned}$$

在整个计算过程中，很容易看出 Eguchi-Hanson 度量是超K¨ahler 的。此外，零截面S^2 是 Eguchi-Hanson 空间中的复拉格朗日子流形。

命题 3.7. *Eguchi-Hanson* 空间的零截面 S^2 是一个全测地曲面，并且是强稳定的。证明。在零截面上，法向量为 e_0 和 e_3。我们计算第二基本形式。

$$h_{\alpha ij} = g_{EH}(e_\alpha, \nabla_{e_i}e_j) = g_{EH}(e_\alpha, \omega^k_i(e_j)e_k) = \omega^\alpha_i(e_j).$$

因此，唯一不为零的项是

$$h_{011} = \frac{-A^{\frac{1}{2}}}{r}, \quad h_{022} = \frac{-A^{\frac{1}{2}}}{r}, \quad h_{312} = \frac{A^{\frac{1}{2}}}{r}.$$

当 $r \to \sqrt[4]{c}$ 时，它们全都为零。此外，我们观察到

$$R_{0110} = R_{0220} = R_{1331} = R_{2332} = \frac{-2}{\sqrt{c}} < 0.$$

因此，(12) 表明零截面是强稳定的。

□

注 3.8. 在 [20], 中，作者还指出，Eguchi-Hanson 空间中的任何紧致极小子流形都必须包含于零截面中。

4. The stability of special Hyperkähler flow in strongly stable surface

在本节 中，我们将证明主要结果。首先，我们引入管状邻 d.

4.1. 管状邻域。

定理 4.1（管状邻域定理）。设 M 为黎曼流形， Σ 为紧致、定向的嵌入子流形。存在一个微分同胚，将法丛 $N\Sigma$ 中的一个开邻域映到 M 中 Σ 的一个开邻域。

在我们的情形中， M 是一个超凯勒 4 维流形， Σ 是一个紧致复拉格朗日曲面。给定任意 $p \in \Sigma$, 令 U_ϵ 表示 p 的管状邻域。对于任意 $q \in U_\epsilon \subseteq M$，存在唯一的 $p \in \Sigma$，使得 p 和 q 由 U_ϵ 中唯一的法测地线连接。通过沿法测地线对 $T\Sigma$ 进行平行移动，可以在 TM 中定义水平分布 $\mathcal{H}$ 及其正交补 $\mathcal{V}$，后者称为垂直分布。下文中，我们用 $\{x^1, x^2, y^1, y^2\}$ 表示局部坐标系，用 $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ 表示局部标架。更准确地说，

$$\mathcal{H} = \operatorname{span}\{e_1, e_2\}, \quad \mathcal{V} = \operatorname{span}\{e_3, e_4\}.$$

然后，我们可以沿法测地线平行移动 Σ 上的体积形式 Ω，从而在 U_ϵ上定义一个形式。更确切地说，

$$\Omega = \omega^1 \wedge \omega^2, \tag{16}$$

其中， $\{\omega^1, \omega^2, \omega^3, \omega^4\}$ 是 $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$的对偶标架。考虑满足 $\Omega(L) > 0$ 的 $L \subseteq T_qM$，我们可以将其视为从水平分布 $\mathcal{H}_q$ 到垂直分布 $\mathcal{V}_q$的图。根据奇异值分解，存在 $\mathcal{H}_q$ 的标准正交基 $\{e_1, e_2\}$以及 $\mathcal{V}_q$ 的标准正交基 $\{e_3, e_4\}$，使得

$$\tilde{e}_i = \cos\theta_i e_i + \sin\theta_i e_{i+2}, \quad \tilde{e}_\alpha = -\sin\theta_\alpha e_{\alpha-2} + \cos\theta_\alpha e_\alpha, \tag{17}$$

其中 $\theta_i \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\theta_\alpha = \theta_{\alpha-2}$。

备注 4.2。反过来，若令 $\{\tilde{\omega}^1, \tilde{\omega}^2, \tilde{\omega}^3, \tilde{\omega}^4\}$ 为 $\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3, \tilde{e}_4\}$ 的对偶标架，则

$$\begin{aligned} e_i &= \cos\theta_i \tilde{e}_i - \sin\theta_i \tilde{e}_{i+2}, \quad e_\alpha = \sin\theta_\alpha \tilde{e}_{\alpha-2} + \cos\theta_\alpha \tilde{e}_\alpha, \\ \omega_i &= \cos\theta_i \tilde{\omega}_i - \sin\theta_i \tilde{\omega}_{i+2}, \quad \omega_\alpha = \sin\theta_\alpha \tilde{\omega}_{\alpha-2} + \cos\theta_\alpha \tilde{\omega}_\alpha. \end{aligned}$$

接下来，我们检查复结构与这组基之间的关系。

引理 4.3. 设 Σ 为一个复拉格朗日子流形，且 $\omega_I + i\omega_K = 0$，则

- $Ie_1, Ie_2, Ke_1, Ke_2 \in$ 张成$\{e_3, e_4\}$。
- $Ie_3, Ie_4, Ke_3, Ke_4 \in$ 张成$\{e_1, e_2\}$。

证明。由于 Σ 是一个复拉格朗日子流形，在任意 $p \in \Sigma$

$$0 = \omega_K(e_1, e_2)|_p = \overline{g}(Ke_1, e_2)|_p.$$

对于任意 $q \in U_e$，都存在一个 $p \in \Sigma$，使得 p 与 q 由法测地线连接。由于我们通过平行移动定义标架，

$$\begin{aligned} &\overline{g}(Ke_1, e_2)|_p = \overline{g}(Ke_1, e_2)|_q = -\overline{g}(Ke_2, e_1)|_q = 0 \\ &\overline{g}(Ke_1, e_1)|_q = -\overline{g}(Ke_1, e_1)|_q = 0 \end{aligned}$$

另一方面，我们验证 t hat $Ke_3 \in \operatorname{span}\{e_1, e_2\}$。记 $Ke_1 = a_1e_3 + a_2e_4$ 和 $Ke_2 = b_1e_3 + b_2e_4$，我们计算 e

$$\begin{aligned} 0 &= \overline{g}(e_1, e_3) \\ &= -\overline{g}(a_1Ke_3 + a_2Ke_4, e_3) \\ &= -a_2\overline{g}(Ke_4, e_3). \end{aligned}$$

类似地，我们得到

$$\begin{aligned} 0 = a_1\overline{g}(Ke_3, e_4) &= b_1\overline{g}(Ke_3, e_4) \\ = a_2\overline{g}(Ke_4, e_3) &= -a_2\overline{g}(Ke_3, e_4) \\ = b_2\overline{g}(Ke_4, e_3) &= -b_2\overline{g}(Ke_3, e_4). \end{aligned}$$

由于 a_1, a_2, b_1, b_2 并非全都为零，因此可推出 $g(Ke_3, e_4) = 0$。其他情形类似。

□

在本小节末尾，我们回顾一些 [18] 中的估计，稍后将用到。设 U_ϵ 为 $p\in\Sigma$ 的管状邻域，其坐标系为 (x^1,x^2,y^3,y^4)，局部标架为 $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$，其对偶标架为 $\{\omega^1,\omega^2,\omega^3,\omega^4\}$。于是有

引理 4.4 ([18],引理 2.5)。

$$\begin{aligned}
&\overline{g}(\frac{\partial}{\partial x^i},e_j)|_{(x,y)}=\delta_{ij}-y^\alpha h_{\alpha ij}|_p+O(|x|^2+|y|^2),\\
&\overline{g}(\frac{\partial}{\partial y^\alpha},e_\beta)|_{(x,y)}=\delta_{\alpha\beta}+O(|x|^2+|y|^2),\\
&\overline{g}(\frac{\partial}{\partial x^i},e_\beta)|_{(x,y)}=O(|x|^2+|y|^2)\quad \overline{g}(\frac{\partial}{\partial y^\alpha},e_j)|_{(x,y)}=O(|x|^2+|y|^2).
\end{aligned}$$

总之，我们可以写成

$$\begin{aligned}
e_i&=\frac{\partial}{\partial x^i}+y^\alpha h_{\alpha ij}|_p\frac{\partial}{\partial x^j}+O(|x|^2+|y|^2),\\
e_\alpha&=\frac{\partial}{\partial y^\alpha}+O(|x|^2+|y|^2).
\end{aligned}$$

引理 4.5 ([18],命题 2 .6)。 对于联络 *1*-形式 $\omega_A^B=\langle\nabla_{e_C}e_A,\overline{e_B}\rangle\omega^C$，我们有以下展开式 .

$$\begin{aligned}
\omega_i^j(e_k)|_{(x,y)}&=\frac{1}{2}x^lR_{jikl}|_p+y^\alpha\overline{R}_{jik\alpha}|_p+O(|x|^2+|y|^2),\\
\omega_i^j(e_\beta)|_{(x,y)}&=\frac{1}{2}y^\alpha\overline{R}_{ji\beta\alpha}|_p+O(|x|^2+|y|^2),\\
\omega_i^\alpha(e_j)|_{(x,y)}&=h_{\alpha ij}|_p+x^kh_{\alpha ij,k}|_p+y^\beta(\overline{R}_{\alpha ij\beta}+h_{\alpha il}h_{\beta jl})|_p+O(|x|^2+|y|^2),\\
\omega_i^\alpha(e_\beta)|_{(x,y)}&=\frac{1}{2}y^\gamma\overline{R}_{\alpha i\beta\gamma}|_p+O(|x|^2+|y|^2),\\
\omega_\beta^\alpha(e_i)|_{(x,y)}&=\frac{1}{2}x^jR^\perp_{\alpha\beta ij}|_p+y^\gamma\overline{R}_{\alpha\beta i\gamma}+O(|x|^2+|y|^2),\\
\omega_\beta^\alpha(e_\gamma)|_{(x,y)}&=\frac{1}{2}y^\delta\overline{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}|_p+O(|x|^2+|y|^2),
\end{aligned}$$

其中 $\overline{R}$ 表示 M 上的曲率， R 是 Σ 上的曲率，而 $R^\perp$ 是法曲率。

4.2. 先前估计。 设 $\Gamma\subset U_\epsilon$ 为一个定向曲面。对于任意 $q\in\Gamma$，我们利用上一小节中的方法构造其切空间 $T_q\Gamma$ 的一组基 $\{\tilde{e}_1,\tilde{e}_2\}$。下面，我们定义一些将在主定理证明中用到的张量。

- $s=$最大值{正弦 θ_1，正弦 θ_2}。
- 记第二基本形式为

  $\mathrm{II}^\Gamma=\tilde{h}_{\alpha ij}\tilde{e}_\alpha\otimes\tilde{\omega}^i\otimes\tilde{\omega}^j$,$\mathrm{II}^\Sigma=h_{\alpha ij}e_\alpha\otimes\omega^i\otimes\omega^j=h_{\alpha ij}(\sin\ \theta_\alpha\tilde{e}_{\alpha-2}+\cos\ \theta_\alpha\tilde{e}_\alpha)\otimes(\cos\ \theta_i\tilde{\omega}^i-\sin\ \theta_i\tilde{\omega}^{i+2})\otimes(\cos\ \theta_j\tilde{\omega}^j-\sin\ \theta_j\tilde{\omega}^{j+2})$,

  then

  $$\langle\mathrm{II}^\Gamma,\mathrm{II}^\Sigma\rangle|_q=\sum_{\alpha,i,j}\cos\theta_i\cos\theta_j\cos\theta_\alpha\tilde{h}_{\alpha ij}h_{\alpha ij}.$$

- 定义张量

  $$S^\Sigma|_q=y^\beta(\overline{R}_{\alpha ij\beta}+h_{\alpha il}h_{\beta jl})|_p\omega^i\otimes\omega^j\otimes e_\alpha,$$

  其中， $p\in\Sigma$ 是唯一的点，使得存在一条连接 p 和 q的唯一法测地线。接下来，

  $$\langle\mathrm{II}^\Gamma,S^\Sigma\rangle|_q=\sum_{\alpha,\beta,i,j}\cos\theta_i\cos\theta_j\cos\theta_\alpha\tilde{h}_{\alpha ij}y^\beta(\overline{R}_{\alpha ij\beta}+h_{\alpha il}h_{\beta jl})|_p.$$

在证明主要结果之前，我们需要利用上述两个张量，在管状邻域 U_ϵ 中对 Ω 作出一些估计。以下估计的一般性结果可见 [18]。下文中，我们假设 $\Omega(T_q\Gamma)>\frac{1}{2}$。

引理 4.6。

$$\Big|\langle \mathrm{II}^\Gamma, \mathrm{II}^\Sigma\rangle|_q - \sum_{\alpha,i,j}\tilde{h}_{\alpha ij}h_{\alpha ij}\Big| \le cs^2|\mathrm{II}^\Gamma|,$$

$$\Big|\langle \mathrm{II}^\Gamma, S^\Sigma\rangle|_q - \sum_{\alpha,\beta,i,j}\tilde{h}_{\alpha ij}y^\beta(\overline{R}_{\alpha ij\beta}+h_{\alpha il}h_{\beta jl})\big|_p\Big| \le cs^2\sqrt{\psi}|\mathrm{II}^\Gamma|,$$

其中 $\psi=\sum_\alpha (y^\alpha)^2$ 是到 Σ 的距离的平方。

证明。只需估计

$$\begin{aligned}|1-\cos^2\theta_i\cos\theta_j| &= |1-\cos\theta_j+\sin^2\theta_i\cos\theta_j|\\ &\le |1-\sqrt{1-\sin^2\theta_j}|+s^2 \le \frac{3}{2}s^2.\end{aligned}$$

□

引理 4.7。

$$\Big|\sum_{\alpha=3,4}\sum_{k=1,2}\tilde{\Omega}_{\alpha 2,k}\tilde{h}_{\alpha k1}+\tilde{\Omega}_{1\alpha,k}\tilde{h}_{\alpha k2}-\langle \mathrm{II}^\Gamma,\mathrm{II}^\Sigma+S^\Sigma\rangle\big|_q(*\Omega)\Big| \le c(s^2+\psi)|\mathrm{II}^\Gamma|.$$

~ ~这里，$*\Omega=\Omega(\tilde{e}_1,\tilde{e}_2)$，$\Omega_{AB}=\Omega(\tilde{e}_A,\tilde{e}_B)$，$\Omega_{\alpha 2,k}=(\nabla_{\tilde{e}_k}\Omega)(\tilde{e}_\alpha,\tilde{e}_2)$。

证明。我们计算得

$$\overline{\nabla}_{\tilde{e}_k}\Omega=(\overline{\nabla}_{\tilde{e}_k}\omega_1)\wedge\omega_2+\omega_1\wedge(\overline{\nabla}_{\tilde{e}_k}\omega_2)=-\omega^1_\beta(\tilde{e}_k)\omega^\beta\wedge\omega^2-\omega^2_\beta(\tilde{e}_k)\omega^1\wedge\omega^\beta.$$

这里，

$$\begin{aligned}
&-\sum_{\alpha,\beta}\omega^1_\beta(\tilde{e}_k)(\omega^\beta\wedge\omega^2)(\tilde{e}_\alpha,\tilde{e}_2)\tilde{h}_{\alpha k1}=-\omega^1_3(\tilde{e}_k)\tilde{h}_{3k1}\cos\theta_1\cos\theta_2-\omega^1_4(\tilde{e}_k)\tilde{h}_{4k1}\\
&-\sum_{\alpha,\beta}\omega^2_\beta(\tilde{e}_k)(\omega^1\wedge\omega^\beta)(\tilde{e}_\alpha,\tilde{e}_2)\tilde{h}_{\alpha k1}=\omega^2_4(\tilde{e}_k)\tilde{h}_{3k1}\sin\theta_1\sin\theta_2\\
&-\sum_{\alpha,\beta}\omega^1_\beta(\tilde{e}_k)(\omega^\beta\wedge\omega^2)(\tilde{e}_1,\tilde{e}_\alpha)\tilde{h}_{\alpha k2}=\omega^1_3(\tilde{e}_k)\tilde{h}_{4k2}\sin\theta_1\sin\theta_2\\
&-\sum_{\alpha,\beta}\omega^2_\beta(\tilde{e}_k)(\omega^1\wedge\omega^\beta)(\tilde{e}_1,\tilde{e}_\alpha)\tilde{h}_{\alpha k2}=-\omega^2_3(\tilde{e}_k)\tilde{h}_{3k2}-\omega^2_4(\tilde{e}_k)\tilde{h}_{4k2}\cos\theta_1\cos\theta_2.
\end{aligned}$$

所有的 t 均由 s控制，且联络 1-形式有界。因此我们得到

$$\begin{aligned}&\Big|\sum_{\alpha=3,4}\sum_{k=1,2}\tilde{\Omega}_{\alpha 2,k}\tilde{h}_{\alpha k1}+\tilde{\Omega}_{1\alpha,k}\tilde{h}_{\alpha k2}\Big|\\ &\le\Big|\omega^3_1(\tilde{e}_k)\tilde{h}_{3k1}\cos\theta_1\cos\theta_2+\omega^4_1(\tilde{e}_k)\tilde{h}_{4k1}\cos^2\theta_2+\omega^3_2(\tilde{e}_k)\tilde{h}_{3k2}\cos^2\theta_1+\omega^4_2(\tilde{e}_k)\tilde{h}_{4k2}\cos\theta_1\cos\theta_2\Big|+c|\mathrm{II}^\Gamma|s^2.\end{aligned}$$

根据命题 4.5，管状邻域中的联络 1-形式满足

$$\begin{aligned}\omega^\alpha_i(\tilde{e}_k)|_q &= \cos\theta_k\omega^\alpha_i(e_k)+\sin\theta_k\omega^\alpha_i(e_{k+2})\\ &= \cos\theta_k\big[h_{\alpha ik}|_p+y^\beta(\overline{R}_{\alpha ik\beta}+h_{\alpha il}h_{\beta kl})|_p\big]+\sin\theta_k(\frac{1}{2}y^\gamma\overline{R}_{\alpha i(k+2)\gamma})+O(|y|^2)\end{aligned}$$

then

$$\Big|\omega^\alpha_i(\tilde{e}_k)-\cos\theta_k\big[h_{\alpha ik}|_p+y^\beta(\overline{R}_{\alpha ik\beta}+h_{\alpha il}h_{\beta kl})|_p\big]\Big|\le c(s^2+\psi).$$

因此，我们得到两项

(a)

$$\sum_{\alpha ik}h_{\alpha ki}\tilde{h}_{\alpha ki}\cos\theta_k\frac{\cos\theta_\alpha}{\cos\theta_i}(*\Omega),$$

(b)

$$\sum_{\alpha ik}\tilde{h}_{\alpha ki}\cos\theta_k\frac{\cos\theta_\alpha}{\cos\theta_i}y^\beta(\overline{R}_{\alpha ik\beta}+h_{\alpha il}h_{\beta kl})(*\Omega).$$

注意,

$$|\frac{1}{\cos\theta_i}-\cos\theta_i|=|\frac{\sin^2\theta_i}{\cos\theta_i}|\le 2s^2,$$

so

$$\Big|(a)-\langle \mathrm{II}^\Gamma,\mathrm{II}^\Sigma\rangle|_q(*\Omega)\Big|\le c|\mathrm{II}^\Gamma|s^2$$
$$\Big|(b)-\langle \mathrm{II}^\Gamma,S^\Sigma\rangle|_q(*\Omega)\Big|\le c|\mathrm{II}^\Gamma|\sqrt{\psi}s^2$$

□

引理 4.8。

$$\Big|(\nabla_{\tilde e_k}\Omega)(\tilde e_1,\tilde e_2)\Big|\le c(s^2+\psi)+cs$$

and

$$\big|\nabla(*\Omega)\big|^2\le cs^2|\mathrm{II}^\Gamma-\mathrm{II}^\Sigma|^2+c(s^2+\psi)^2.$$

证明。 首先，我们得到

$$\begin{aligned}(\nabla_{\tilde e_k}\Omega)(\tilde e_1,\tilde e_2)&=\omega_1^\beta(\tilde e_k)\omega^\beta\wedge\omega^2(\tilde e_1,\tilde e_2)+\omega_2^\beta(\tilde e_k)\omega^1\wedge\omega^\beta(\tilde e_1,\tilde e_2)\\&=\omega_1^3(\tilde e_k)\sin\theta_1\cos\theta_2+\omega_2^4(\tilde e_k)\cos\theta_1\sin\theta_2\\&=\sum_i\omega_i^{i+2}(\tilde e_k)\frac{\sin\theta_i}{\cos\theta_i}(*\Omega).\end{aligned}$$

由命题 4.5 可知

$$\begin{aligned}&\Big|(\nabla_{\tilde e_k}\Omega)(\tilde e_1,\tilde e_2)-\sum_i\cos\theta_k h_{(i+2)ik}\frac{\sin\theta_i}{\cos\theta_i}(*\Omega)-\sum_i\cos\theta_k y^\beta(\overline{R}_{(i+2)ik\beta}+h_{(i+2)il}h_{\beta kl})\frac{\sin\theta_i}{\cos\theta_i}(*\Omega)\Big|\le c(s^2+\psi)\\&\Longrightarrow\Big|(\nabla_{\tilde e_k}\Omega)(\tilde e_1,\tilde e_2)-\sum_i\cos\theta_k h_{(i+2)ik}\frac{\sin\theta_i}{\cos\theta_i}(*\Omega)\Big|\le c(s^2+\psi)\\&\Longrightarrow\Big|(\nabla_{\tilde e_k}\Omega)(\tilde e_1,\tilde e_2)-\sum_i\cos\theta_k\cos^2\theta_i h_{(i+2)ik}\frac{\sin\theta_i}{\cos\theta_i}(*\Omega)\Big|\le c(s^2+\psi)\end{aligned}$$

接下来,

$$\begin{aligned}\nabla(*\Omega)&=\tilde e_k(\Omega(\tilde e_1,\tilde e_2))\tilde\omega^k\\&=[\nabla_{\tilde e_k}\Omega)(\tilde e_1,\tilde e_2)+\Omega(\nabla_{\tilde e_k}\tilde e_1,\tilde e_2)+\Omega(\tilde e_1,\nabla_{\tilde e_k}\tilde e_2)]\tilde\omega^k\\&=[(\nabla_{\tilde e_k}\Omega)(\tilde e_1,\tilde e_2)+\tilde h_{\alpha k1}\Omega(\tilde e_\alpha,\tilde e_2)+\tilde h_{\alpha k2}\Omega(\tilde e_1,\tilde e_\alpha)]\tilde\omega^k.\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\tilde h_{\alpha k1}\Omega(\tilde e_\alpha,\tilde e_2)+\tilde h_{\alpha k2}\Omega(\tilde e_1,\tilde e_\alpha)&=-\tilde h_{3k1}\cos\theta_2\sin\theta_1-\tilde h_{4k2}\cos\theta_1\sin\theta_2\\&=-\sum_i(\frac{\sin\theta_i}{\cos\theta_i}\tilde h_{(i+2)ik})(*\Omega).\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}|\nabla(*\Omega)|^2&=|\tilde e_k(\Omega(\tilde e_1,\tilde e_2))|^2\\&\le|(\nabla_{\tilde e_k}\Omega)(\tilde e_1,\tilde e_2)-\cos\theta_k\cos^2\theta_i h_{(i+2)ik}\frac{\sin\theta_i}{\cos\theta_i}(*\Omega)|^2+(*\Omega)^2|\frac{\sin\theta_i}{\cos\theta_i}(\cos\theta_k\cos^2\theta_i h_{(i+2)ik}-\tilde h_{(i+2)ik})|^2\\&\le c(s^2+\psi)^2+cs^2(*\Omega)^2|\frac{\sin\theta_i}{\cos\theta_i}(\cos\theta_k\cos^2\theta_i h_{(i+2)ik}-\tilde h_{(i+2)ik})|^2\end{aligned}$$

我们注意到

$$|\mathrm{II}^\Gamma-\mathrm{II}^\Sigma|^2\ge\sum_{\alpha ij}|\tilde h_{\alpha ij}-\cos\theta_i\cos\theta_j\cos\theta_\alpha h_{\alpha ij}|^2$$

至此，证明完成。

□

引理 4.9。

$$\Big|(\nabla^2_{\tilde e_k,\tilde e_k}\Omega)(\tilde e_1,\tilde e_2)-(\tilde\Omega_{32}\overline{R}_{\tilde 1\tilde k\tilde k\tilde 3}+\tilde\Omega_{42}\overline{R}_{\tilde 1\tilde k\tilde k\tilde 4}+\tilde\Omega_{13}\overline{R}_{\tilde 2\tilde k\tilde k\tilde 3}+\tilde\Omega_{14}\overline{R}_{\tilde 2\tilde k\tilde k\tilde 4})+|\mathrm{II}^\Sigma+S^\Sigma|^2(*\Omega)\Big|\le c(s^2+\psi).$$

这里，$\overline{R}_{\tilde 1\tilde k\tilde k\tilde 3}=\overline{g}(\overline{R}(\tilde e_1,\tilde e_k)\tilde e_k,\tilde e_3)$。其他情况类似。

证明。

$$\nabla\Omega=\nabla\omega^1\wedge\omega^2+\omega^1\wedge\nabla\omega^2=(\omega_1^\alpha\otimes\omega^\alpha)\wedge\omega^2+\omega^1\wedge(\omega_2^\alpha\otimes\omega^\alpha)=\omega_1^\alpha\otimes(\omega^\alpha\wedge\omega^2)+\omega_2^\alpha\otimes(\omega^1\wedge\omega^\alpha)$$

then

$$\begin{aligned}\nabla^2\Omega=&-(\omega_1^\alpha\otimes\omega_1^\alpha+\omega_2^\alpha\otimes\omega_2^\alpha)\otimes\Omega+(\nabla\omega_1^\alpha+\omega_1^\beta\otimes\omega_\beta^\alpha+\omega_2^\alpha\otimes\omega_2^1)\otimes(\omega^\alpha\wedge\omega^2)\\&+(\nabla\omega_2^\alpha+\omega_2^\beta\otimes\omega_\beta^\alpha+\omega_1^\alpha\otimes\omega_1^2)\otimes(\omega^1\wedge\omega^\alpha)+2(\omega_1^3\otimes\omega_2^4-\omega_1^4\otimes\omega_2^3)\otimes(\omega^3\wedge\omega^4).\end{aligned}$$

我们估计

$$\begin{aligned}&\Big|\sum_{\alpha,i,k}(\omega_i^\alpha(\tilde e_k))^2-\sum_{\alpha,i,k}\cos^2\theta_k[h_{\alpha ik}+y^\beta(\overline{R}_{\alpha ik\beta}+h_{\alpha il}h_{\beta kl})]^2\Big|\le c(s^2+\psi)\\&\Longrightarrow\Big|\sum_{\alpha,i,k}(\omega_i^\alpha(\tilde e_k))^2-\sum_{\alpha,i,k}[h_{\alpha ik}+y^\beta(\overline{R}_{\alpha ik\beta}+h_{\alpha il}h_{\beta kl})]^2\Big|\le c(s^2+\psi)\\&\Longrightarrow\Big|\sum_{\alpha,i,k}(\omega_i^\alpha(\tilde e_k))^2-|\mathrm{II}^\Sigma+S^\Sigma|^2\Big|\le c(s^2+\psi).\end{aligned}\tag{18}$$

注意到

$$\nabla\omega_i^\alpha=d\omega_i^\alpha(e_A)\otimes\omega^A+\omega_i^\alpha(e_A)\nabla\omega^A.$$

通过直接计算，并利用命题 4.4 和命题 4.5，我们得到

$$\big|d\omega_i^\alpha(e_A)(\tilde e_k)\omega^A(\tilde e_k)-\cos^2\theta_k h_{\alpha ik,k}\big|\le c(s+\sqrt{\psi})$$

and

$$\big|\omega_i^\alpha(e_A)\nabla\omega^A(\tilde e_k,\tilde e_k)\big|\le c(s+\sqrt{\psi}).$$

因此

$$\big|(\nabla\omega_i^\alpha)(\tilde e_k,\tilde e_k)-\cos^2\theta_k h_{\alpha ik,k}\big|\le c(s+\sqrt{\psi}).$$

接下来可以看出,

$$\big|(\omega_1^\beta\otimes\omega_\beta^\alpha+\omega_2^\alpha\otimes\omega_2^1)(\tilde e_k,\tilde e_k)\big|\le c(s+\sqrt{\psi}).$$

于是,

$$\Big|(\nabla\omega_1^\alpha+\omega_1^\beta\otimes\omega_\beta^\alpha+\omega_2^\alpha\otimes\omega_2^1)(\tilde e_k,\tilde e_k)(\omega^\alpha\wedge\omega^2)(\tilde e_1,\tilde e_2)-h_{31k,k}\sin\theta_1\cos\theta_2\Big|\le c(s^2+\psi),$$

$$\Big|(\nabla\omega_2^\alpha+\omega_2^\beta\otimes\omega_\beta^\alpha+\omega_1^\alpha\otimes\omega_1^2)(\tilde e_k,\tilde e_k)(\omega^1\wedge\omega^\alpha)(\tilde e_1,\tilde e_2)-h_{42k,k}\sin\theta_2\cos\theta_1\Big|\le c(s^2+\psi).\tag{19}$$

结合（18）和（19），我们推得

$$\Big|\nabla^2_{\tilde e_k,\tilde e_k}\Omega(\tilde e_1,\tilde e_2)+|\mathrm{II}^\Sigma+S^\Sigma|^2(*\Omega)-\frac{\sin\theta_i}{\cos\theta_i}h_{(2+i)ik,k}(*\Omega)\Big|\le c(s^2+\psi).$$

最后，我们看到

$$\begin{aligned}\tilde\Omega_{32}\overline{R}_{\tilde 1\tilde k\tilde k\tilde 3}+\tilde\Omega_{42}\overline{R}_{\tilde 1\tilde k\tilde k\tilde 4}+\tilde\Omega_{13}\overline{R}_{\tilde 2\tilde k\tilde k\tilde 3}+\tilde\Omega_{14}\overline{R}_{\tilde 2\tilde k\tilde k\tilde 4}&=-\cos\theta_2\sin\theta_1\overline{R}_{\tilde 1\tilde k\tilde k\tilde 3}-\cos\theta_1\sin\theta_2\overline{R}_{\tilde 2\tilde k\tilde k\tilde 4}\\&=-\frac{\sin\theta_i}{\cos\theta_i}(*\Omega)\overline{R}_{\tilde i\tilde k\tilde k(\tilde{i+2})}\end{aligned}$$

Then

$$\big|\frac{\sin\theta_i}{\cos\theta_i}(*\Omega)\overline{R}_{\tilde i\tilde k\tilde k(\tilde{i+2})}-\frac{\sin\theta_i}{\cos\theta_i}(*\Omega)\overline{R}_{ikk(i+2)}\big|\le c(s^2+\psi).$$

由 Codzzi 方程 $R_{(2+\overline{i})kki} = -h_{(2+i)ik,\ k}$，我们得到

$$\begin{aligned}
&\Big|(\nabla^2_{\tilde{e}_k,\tilde{e}_k}\Omega)(\tilde{e}_1,\tilde{e}_2) - (\tilde{\Omega}_{32}\overline{R}_{\tilde{1}\tilde{k}\tilde{k}\tilde{3}} + \tilde{\Omega}_{42}\overline{R}_{\tilde{1}\tilde{k}\tilde{k}\tilde{4}} + \tilde{\Omega}_{13}\overline{R}_{\tilde{2}\tilde{k}\tilde{k}\tilde{3}} + \tilde{\Omega}_{14}\overline{R}_{\tilde{2}\tilde{k}\tilde{k}\tilde{4}}) + |\mathrm{II}^\Sigma + S^\Sigma|^2(*\Omega)\Big| \\
&= \Big|(\overline{\nabla}^2_{\tilde{e}_k,\tilde{e}_k}\Omega)(\tilde{e}_1,\tilde{e}_2) + \frac{\sin\theta_i}{\cos\theta_i}(*\Omega)\overline{R}_{\tilde{i}\tilde{k}\tilde{k}(\tilde{i+2})} + |\mathrm{II}^\Sigma + S^\Sigma|^2(*\Omega)\Big| \\
&\le \Big|(\overline{\nabla}^2_{\tilde{e}_k,\tilde{e}_k}\Omega)(\tilde{e}_1,\tilde{e}_2) - \frac{\sin\theta_i}{\cos\theta_i}(*\Omega)h_{(2+i)ik,k} + |\mathrm{II}^\Sigma + S^\Sigma|^2(*\Omega)\Big| + c(s^2+\psi) \\
&\le c(s^2+\psi).
\end{aligned}$$

□

4.3. C^0 **与** C^1 **估计**。本节开始证明特殊超凯勒流的稳定性。设 (M,g,∇,I,J,K) 为一个超凯勒 4-流形， $\Sigma\subset M$ 是一个关于I,K 的紧致、定向、强稳定复拉格朗日曲面，即在 Σ 上有 $\omega_I + i\omega_K \equiv 0$。设 $\Gamma\subset U_\epsilon$ 是一个拉格朗日曲面，且在以下意义下与 Σ 足够接近: C^1

$$\sup_{q\in\Gamma}\big(1-(*\Omega)+K\psi\big) < \kappa \quad \text{for some constant } 0<\kappa<<1 \text{ and } K>0. \tag{20}$$

考虑特殊超凯勒流 Γ^t，其中 $\Gamma^0=\Gamma$，并用 II^t 表示第二基本形式。首先，我们证明 Γ^t 始终位于管状邻域 U_ϵ 内。

引理 4.10。存在一个管状邻域 U_ϵ，使得对于任意 $q\in U_\epsilon$ 和任意定向的 2-平面 $L\subset T_qM$，都有

$$tr_L Hess(\psi) \ge c(s^2+\psi(q)) \quad \textit{for some } c>0. \tag{21}$$

证明。对于任意 $q\in U_\epsilon$，令 $p\in\Sigma$ 与 q 由一条法测地线相连。考虑到零截面的测地距离$\psi=\sum_\alpha (y^\alpha)^2$。于是，

$$\mathrm{Hess}(\psi)(e_A,e_B) = e_A(e_B(\psi)) - (\overline{\nabla}_{e_A}e_B)(\psi).$$

由命题 4.4 和命题 4.5，我们计算得

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hess}(\psi)(e_i,e_j) &= -2y^\alpha\omega^\alpha_j(e_i) = -2y^\alpha\Big[h_{\alpha ji}|_p + x^k h_{\alpha ji,k}|_p + y^\beta(\overline{R}_{\alpha ji\beta} + h_{\alpha jl}h_{\beta il})|_p + O(|x|^2+|y|^2)\Big], \\
\mathrm{Hess}(\psi)(e_\alpha,e_i) &= -2y^\beta\omega^\beta_i(e_\alpha) = -2y^\beta\Big[\frac{1}{2}y^\gamma\overline{R}_{\beta i\alpha\gamma}|_p + O(|x|^2+|y|^2)\Big], \\
\mathrm{Hess}(\psi)(e_\alpha,e_\beta) &= 2e_\alpha(y^\beta) - 2y^\gamma\omega^\gamma_\beta(e_\alpha) = 2\delta_{\alpha\beta} - 2y^\gamma\Big[\frac{1}{2}y^\delta\overline{R}_{\gamma\beta\alpha\delta}|_p + O(|x|^2+|y|^2)\Big].
\end{aligned}$$

注意， x^k 分量消失，

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}_L\mathrm{Hess}(\psi) &= \mathrm{Hess}(\psi)(\tilde{e_1},\tilde{e_1}) + \mathrm{Hess}(\psi)(\tilde{e_2},\tilde{e_2}) \\
&= \sum_i \cos^2\theta_i\mathrm{Hess}(\psi)(e_i,e_i) + 2\cos\theta_i\sin\theta_i\mathrm{Hess}(\psi)(e_i,e_{i+2}) + \sin^2\theta_i\mathrm{Hess}(\psi)(e_{i+2},e_{i+2}) \\
&= \sum_i -2\cos^2\theta_i y^\alpha y^\beta(\overline{R}_{\alpha ii\beta} + h_{\alpha il}h_{\beta il}) + 2\sin^2\theta_i + s(L)\cdot O(|y|^2) + O(|y|^3) \\
&\ge \sum_i 2c_0\cos^2\theta_i|y|^2 + 2\sin^2\theta_i - s^2 - c|y|^3 \\
&\ge (4c_0 - c|y|)|y|^2 + \sum_i(2-2c_0|y|^2)\sin^2\theta_i - s^2 \\
&\ge c'(s^2+\psi)
\end{aligned}$$

这里我们使用强稳定条件 (12)。

□

命题 4.11。存在 $\epsilon>0$，使得到极小强稳定曲面 Σ 的平方距离 ψ 满足

$$\frac{\partial}{\partial t}(\psi) \le \lambda^2(\Delta^{\Gamma_t}(\psi) - c_1(s^2+\psi)) + \langle\nabla(\frac{\lambda^2}{2}),\nabla\psi\rangle$$

对于管状邻域 U_ϵ 中的某个 $c_1>0$。因此，根据最大值原理， ψ 是非递增的。此外，存在 $c_2>0$，使得

$$\frac{\partial}{\partial t}(\psi) \le \lambda^2(\Delta^{\Gamma_t}(\psi) - c_1(s^2+\psi) + c_2 s^2\sqrt{\psi}|\mathrm{II}^t|). \tag{22}$$

证明。我们计算

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(\psi) &= \overline{\nabla}_{\lambda\nabla\lambda+\lambda^2 H}\psi = \overline{\nabla}_{\lambda\nabla\lambda}\psi + \overline{\nabla}_{\lambda^2 H}\psi \\ &= \lambda^2(\Delta^{f_t(S)}\psi - \mathrm{tr}_{f_t(S)}\mathrm{Hess}(\psi)) + \overline{\nabla}_{\lambda\nabla\lambda}\psi.\end{aligned}$$

根据命题 4.10，我们知道存在 $\epsilon > 0$ 和 $c_1 > 0$，使得

$$\mathrm{tr}_{f_t(S)}\mathrm{Hess}(\psi) \geq c_1(s^2 + \psi).$$

此外，

$$d\psi(\lambda\nabla\lambda) = 2\lambda y_\alpha \omega_\alpha(\nabla\lambda) = 2\lambda\big[y_3\tilde{e}_1(\lambda)\sin\theta_1 + y_4\tilde{e}_2(\lambda)\sin\theta_2\big].$$

于是，

$$\begin{aligned}\tilde{e}_i(\lambda) &= -\lambda^2(\omega_J(\overline{\nabla}_{\tilde{e}_i}\tilde{e}_1, \tilde{e}_2) + \omega_J(\tilde{e}_1, \overline{\nabla}_{\tilde{e}_i}\tilde{e}_2)) \\ &= -\lambda^2\big[\tilde{h}_{3i1}\omega_J(\tilde{e}_3, \tilde{e}_2) + \tilde{h}_{4i1}\omega_J(\tilde{e}_4, \tilde{e}_2) + \tilde{h}_{3i2}\omega_J(\tilde{e}_1, \tilde{e}_3) + \tilde{h}_{4i2}\omega_J(\tilde{e}_1, \tilde{e}_4)\big] \\ &= -\lambda^2\big[\tilde{h}_{3i1}(-\sin\theta_1\cos\theta_2\omega_J(e_1, e_2) + \cos\theta_1\sin\theta_2\omega_J(e_3, e_4))\big] \\ &\quad -\lambda^2\big[\tilde{h}_{4i2}(-\cos\theta_1\sin\theta_2\omega_J(e_1, e_2) + \sin\theta_1\cos\theta_2\omega_J(e_3, e_4))\big]. \qquad (23)\end{aligned}$$

因此，$|\tilde{e}_i(\lambda)| \leq cs|\mathrm{II}^t|$，证明完毕。

□

命题 4.12。设 (M, g, ∇, I, J, K) 是一个超凯勒 4 流形，$\Sigma \subset M$ 是关于 I, K 的紧致、定向、强稳定复拉格朗日曲面，即在 Σ 上有 $\omega_I + i\omega_K \equiv 0$。设 $\Gamma \subset U_\epsilon$ 是一个拉格朗日曲面，其

$$\sup_{q\in\Gamma}\big(1 - (*\Omega) + K\psi\big) < \kappa \quad \textit{for some constant } 0 < \kappa << 1 \textit{ and } K > 0. \qquad (24)$$

那么，特殊超凯勒流 Γ^t 的解（若存在）满足（*24*），其中 $\Gamma^0 = \Gamma$。

证明。令 $*\Omega = \Omega(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2)$。根据命题 2.11，我们得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(*\Omega) &= \lambda^2[\Delta(*\Omega) + *\Omega(|\mathrm{II}^t|^2) + (\tilde{\Omega}_{32}\overline{R}_{\tilde{1}\tilde{k}\tilde{3}} + \tilde{\Omega}_{42}\overline{R}_{\tilde{1}\tilde{k}\tilde{4}} + \tilde{\Omega}_{13}\overline{R}_{\tilde{2}\tilde{k}\tilde{3}} + \tilde{\Omega}_{14}\overline{R}_{\tilde{2}\tilde{k}\tilde{4}})] \\ &\quad + 2\lambda[\tilde{e}_1(\lambda)(\tilde{\Omega}_{32}\tilde{H}_3 + \tilde{\Omega}_{42}\tilde{H}_4) + \tilde{e}_2(\lambda)(\tilde{\Omega}_{13}\tilde{H}_3 + \tilde{\Omega}_{14}\tilde{H}_4)] \\ &\quad + \lambda\tilde{e}_i(\lambda)[\tilde{h}_{31i}\tilde{\Omega}_{32} + \tilde{h}_{41i}\tilde{\Omega}_{42} + \tilde{h}_{32i}\tilde{\Omega}_{13} + \tilde{h}_{42i}\tilde{\Omega}_{14}] - 2\lambda^2\tilde{\Omega}_{34}(\tilde{h}_{3k1}\tilde{h}_{4k2} - \tilde{h}_{3k2}\tilde{h}_{4k1}) \\ &\quad + (\overline{\nabla}_{\lambda\nabla\lambda}\tilde{\Omega})(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2) - \sum_{k=1,2}\lambda^2(\overline{\nabla}^2_{\tilde{e}_k,\tilde{e}_k}\overline{\Omega})(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2) - 2\sum_{\alpha=3,4}\lambda^2\tilde{\Omega}_{\alpha 2,k}\tilde{h}_{\alpha k1} - 2\sum_{k=1,2}\sum_{\alpha=3,4}\lambda^2\tilde{\Omega}_{1\alpha,k}\tilde{h}_{\alpha k2}, \qquad (25)\end{aligned}$$

其中 $\Omega_{AB} = \Omega(\tilde{e}_A, \tilde{e}_B)$，且 $h_{\overline{\alpha ij}} = g(\tilde{e}_\alpha, \nabla_{\tilde{e}_i}\tilde{e}_j)$。注意

$$\Omega(\tilde{e}_A, \tilde{e}_B) = \begin{pmatrix} 0 & \cos\theta_1\cos\theta_2 & 0 & -\cos\theta_1\sin\theta_2 \\ -\cos\theta_1\cos\theta_2 & 0 & \cos\theta_2\sin\theta_1 & 0 \\ 0 & -\cos\theta_2\sin\theta_1 & 0 & \sin\theta_1\sin\theta_2 \\ \cos\theta_1\sin\theta_2 & 0 & -\sin\theta_1\sin\theta_2 & 0 \end{pmatrix},$$

由（23）和命题 4.8 可得如下结果。

(a)

$$\Big|2\lambda[\tilde{e}_1(\lambda)(\tilde{\Omega}_{32}\tilde{H}_3 + \tilde{\Omega}_{42}\tilde{H}_4) + \tilde{e}_2(\lambda)(\tilde{\Omega}_{13}\tilde{H}_3 + \tilde{\Omega}_{14}\tilde{H}_4)]\Big| \leq c_1\lambda^2 s^2|\mathrm{II}^t|^2,$$

(b)

$$\Big|\lambda\tilde{e}_i(\lambda)[\tilde{h}_{31i}\tilde{\Omega}_{32} + \tilde{h}_{41i}\tilde{\Omega}_{42} + \tilde{h}_{32i}\tilde{\Omega}_{13} + \tilde{h}_{42i}\tilde{\Omega}_{14}]\Big| \leq c_2\lambda^2 s^2|\mathrm{II}^t|^2,$$

(c)

$$\Big|2\lambda^2\tilde{\Omega}_{34}(\tilde{h}_{3k1}\tilde{h}_{4k2} - \tilde{h}_{3k2}\tilde{h}_{4k1})\Big| \leq c_3\lambda^2 s^2|\mathrm{II}^t|^2,$$

(d)

$$\Big|(\overline{\nabla}_{\lambda\nabla\lambda}\tilde{\Omega})(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2)\Big| \leq c_4\lambda^2(s^2 + \psi)|\mathrm{II}^t|.$$

应用命题 4.8 和命题 4.9，我们得出

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(*\Omega) &\geq \lambda^2\Big[\Delta(*\Omega)+*\Omega(|\mathrm{II}^t|^2)-2\langle \mathrm{II}^t,\mathrm{II}^\Sigma+S^\Sigma\rangle(*\Omega)+|\mathrm{II}^\Sigma+S^\Sigma|^2(*\Omega)-c_5(s^2+\psi)(|\mathrm{II}^t|^2+|\mathrm{II}^t|+1)\Big]\\ &\geq \lambda^2\Big[\Delta(*\Omega)+(*\Omega)|\mathrm{II}^t-\mathrm{II}^\Sigma-S^\Sigma|^2-c_6(s^2+\psi)|\mathrm{II}^t|^2-c_6(s^2+\psi)\Big]. \qquad (26)\end{aligned}$$

由 C^0 估计式（22），我们有

$$\frac{\partial}{\partial t}(\psi)\leq \lambda^2\Big[\Delta(\psi)-c_7(s^2+\psi)+c_8 s(s^2+\psi)(|\mathrm{II}^t|^2+1)\Big].$$

于是，

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(*\Omega-K\psi)\geq \lambda^2\Big[&\Delta(*\Omega-K\psi)+(*\Omega)|\mathrm{II}^t-\mathrm{II}^\Sigma-S^\Sigma|^2\\ &+(Kc_8s-c_6)(s^2+\psi)|\mathrm{II}^t|^2+(Kc_7-c_6-Kc_8s)(s^2+\psi)\Big],\end{aligned}$$

其中， K 是一个稍后将确定的常数。现在，我们取 $\epsilon>0$ 使得 $\sup_{q\in\Gamma}(1-(*\Omega)+K\psi)<\kappa<\epsilon^2$，那么 $*\Omega>1-\epsilon^2$, $\psi<\epsilon^2$。此外，

$$\cos\theta_i\geq\cos\theta_1\cos\theta_2>1-\epsilon^2\Longrightarrow s\leq\sqrt{2}\epsilon.$$

我们可以选取满足 $Ks<\sqrt{\epsilon}$ 的 K，使得

$$Kc_8s-c_6<0\quad\text{ and }\quad Kc_7-c_6-Kc_8s>0.$$

因此，

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(*\Omega-K\psi)\geq \lambda^2\Big[&\Delta(*\Omega-K\psi)+(*\Omega)(|\mathrm{II}^t-\mathrm{II}^\Sigma|^2-|S^\Sigma|^2)\\ &+(Kc_8s-c_6)(s^2+\psi)(|\mathrm{II}^t-\mathrm{II}^\Sigma|^2+|\mathrm{II}^\Sigma|^2)+(Kc_7-c_6-c_8Ks)(s^2+\psi)\Big].\end{aligned}$$

注意， $|S^\Sigma|^2\leq c_9\psi$ 和 $|\mathrm{II}^\Sigma|^2\leq c_{10}$。如果我们取 ϵ 足够小，就可推出

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(*\Omega-K\psi)\geq \lambda^2\Big[&\Delta(*\Omega-K\psi)+\big(*\Omega+(Kc_8s-c_6)(s^2+\psi)\big)|\mathrm{II}^t-\mathrm{II}^\Sigma|^2\\ &+\big(Kc_7-c_6-Kc_8s-c_9+c_{10}(Kc_8s-c_6)\big)(s^2+\psi)\Big].\end{aligned}$$

最后，我们将 K 取得足够大，使得

$$\frac{\partial}{\partial t}(*\Omega-K\psi)\geq\lambda^2\Big[\Delta(*\Omega-K\psi)+\frac{1}{2}\big((*\Omega)-K\psi\big)|\mathrm{II}^t-\mathrm{II}^\Sigma|^2\Big]+c_{11}(s^2+K\psi).$$

我们注意到

$$1-*\Omega\leq 1-(*\Omega)^2=\sin^2\theta_1+\sin^2\theta_2-\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2\leq 2s^2.$$

因此，

$$\frac{\partial}{\partial t}(1-*\Omega+K\psi)\leq\lambda^2\Big[\Delta(1-*\Omega+K\psi)-\frac{1}{2}((*\Omega)-K\psi)|\mathrm{II}^t-\mathrm{II}^\Sigma|^2\Big]-c_{12}(1-*\Omega+K\psi).$$

根据最大值原理， $1-*\Omega-K\psi$ 是非递减的。于是证明完成。 □

4.4. **长时间存在性**。

引理 4.13. 特殊的 H-流 Γ^t 在所有时间上都存在。

证明。 回顾一下，在特殊的 H-流中，我们有 (11)

$$\frac{\partial}{\partial t}|\mathrm{II}^t|^2\leq\lambda^2\Big[\Delta|\mathrm{II}^t|^2+c(|\mathrm{II}^t|^4+1)\Big].$$

我们尝试利用最大值原理证明 $|\mathrm{II}^t|$ 一致有界。为此，我们考虑一个常数$p>1$，由 (26) 可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(*\Omega)^p&=p(*\Omega)^{p-1}\frac{\partial}{\partial t}(*\Omega)\\ &\geq p(*\Omega)^{p-1}\lambda^2\Big[\Delta(*\Omega)+(*\Omega)|\mathrm{II}^t-\mathrm{II}^\Sigma-S^\Sigma|^2-c_1(s^2+\psi)|\mathrm{II}^t|^2-c_1(s^2+\psi)\Big]\\ &\geq\lambda^2\Big[\Delta(*\Omega)^p-p(p-1)(*\Omega)^{p-2}|\nabla(*\Omega)|^2+p(*\Omega)^p|\mathrm{II}^t-\mathrm{II}^\Sigma-S^\Sigma|^2-c_1p(s^2+\psi)|\mathrm{II}^t|^2-c_1p(s^2+\psi)\Big].\end{aligned}$$

这里，我们注意到 $\Delta(*\Omega)^p = p(*\Omega)^{p-1}\Delta(*\Omega) + p(p-1)(*\Omega)^{p-2}|\nabla(*\Omega)|^2$。利用命题 4.8，我们推导出

$$\frac{\partial}{\partial t}(*\Omega)^p \geq \lambda^2\Big[\Delta(*\Omega)^p + p(*\Omega)^p|\mathrm{II}^t - \mathrm{II}^\Sigma - S^\Sigma|^2 - c_2p^2s^2|\mathrm{II}^\Gamma - \mathrm{II}^\Sigma|^2 - c_1p(s^2+\psi)|\mathrm{II}^t|^2 - c_3p^2(s^2+\psi)\Big].$$

再次利用（22），

$$\frac{\partial}{\partial t}(\psi) \leq \lambda^2\Big[\Delta(\psi) + c_4s(s^2+\psi)|\mathrm{II}^t|^2 - c_5(s^2+\psi)\Big],$$

我们计算得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}((*\Omega)^p - K'\psi) &\geq \lambda^2\Big[\Delta((*\Omega)^p - K'\psi) + p(*\Omega)^p|\mathrm{II}^t - \mathrm{II}^\Sigma - S^\Sigma|^2 - c_2p^2s^2|\mathrm{II}^\Gamma - \mathrm{II}^\Sigma|^2\\ &\quad - (c_1p + c_4K's)(s^2+\psi)|\mathrm{II}^t|^2 + (c_5K' - c_3p^2)(s^2+\psi)\Big]\\ &\geq \lambda^2\Big[\Delta((*\Omega)^p - K'\psi) + (p(*\Omega)^p - c_2p^2s^2 - (c_1p + c_4K's)(s^2+\psi))|\mathrm{II}^t - \mathrm{II}^\Sigma|^2\\ &\quad + (c_5K' - c_3p^2 - c_6p - c_1c_7p - c_4c_7K's)(s^2+\psi)\Big],\end{aligned}$$

其中 $|S^\Sigma|^2 \leq c_6\psi$ 且 $|\mathrm{II}^\Sigma| \leq c_7$。我们选择 p， K' 和 s 使得

$$\frac{\partial}{\partial t}((*\Omega)^p - K'\psi) \geq \lambda^2\Big[\Delta((*\Omega)^p - K'\psi) + \frac{p}{3}((*\Omega)^p - K'\psi)|\mathrm{II}^t - \mathrm{II}^\Sigma|^2\Big]. \tag{27}$$

取 ϵ 足够小，使得 $((*\Omega)^p - K'\psi) > \frac{1}{2}$ 在 Γ 时成立，那么由最大值原理，它是非递减的。定义 $\eta = \big((*\Omega)^p - K'\psi\big)$，则

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(\eta^{-1}|\mathrm{II}^t|^2) &= \eta^{-1}\frac{\partial}{\partial t}(|\mathrm{II}^t|^2) - \eta^{-2}\frac{\partial}{\partial t}(\eta)|\mathrm{II}^t|^2\\ &\leq \lambda^2\Big[\eta^{-1}\big(\Delta|\mathrm{II}^t|^2 + c_8|\mathrm{II}^t|^4 + c_8\big) - \eta^{-2}|\mathrm{II}^t|^2\big(\Delta(\eta) + \frac{p}{3}\eta|\mathrm{II}^t - \mathrm{II}^\Sigma|^2\big)\Big].\end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned}\Delta(\eta^{-1}|\mathrm{II}^t|^2) &= \Delta(\eta^{-1})|\mathrm{II}^t|^2 + \eta^{-1}\Delta(|\mathrm{II}^t|^2) + 2\big\langle\nabla(\eta^{-1}), \nabla(|\mathrm{II}^t|^2)\big\rangle\\ &= -\eta^{-2}|\mathrm{II}^t|^2\Delta\eta + \eta^{-1}\Delta(|\mathrm{II}^t|^2) - 2\eta^{-1}\big\langle\nabla(\eta), \nabla(\eta^{-1}|\mathrm{II}^t|^2)\big\rangle,\end{aligned}$$

so

$$\frac{\partial}{\partial t}(\eta^{-1}|\mathrm{II}^t|^2) \leq \lambda^2\Big[\Delta(\eta^{-1}|\mathrm{II}^t|^2) + 2\eta^{-1}\big\langle\nabla(\eta), \nabla(\eta^{-1}|\mathrm{II}^t|^2)\big\rangle + c_8\eta^{-1}(|\mathrm{II}^t|^4 + 1) - \eta^{-1}\frac{p}{3}|\mathrm{II}^t - \mathrm{II}^\Sigma|^2|\mathrm{II}^t|^2\Big]$$

最后，由于

$$|\mathrm{II}^t - \mathrm{II}^\Sigma|^2 \geq |\mathrm{II}^t|^2 - |\mathrm{II}^\Sigma|^2 \geq |\mathrm{II}^t|^2 - c_9,$$

我们可以将 p 选得足够大，使得 $\frac{p}{3} \succ c_7$，于是

$$\frac{\partial}{\partial t}(\eta^{-1}|\mathrm{II}^t|^2) \leq \lambda^2\Big[\Delta(\eta^{-1}|\mathrm{II}^t|^2) + 2\eta^{-1}\langle\nabla(\eta), \nabla(\eta^{-1}|\mathrm{II}^t|^2)\rangle + (c_8 - \frac{p}{3})\eta^{-1}|\mathrm{II}^t|^4 + c_9\eta^{-1}\frac{p}{3}|\mathrm{II}^t|^2 + c_8\eta^{-1}\Big].$$

根据最大值原理， $\eta^{-1}|\mathrm{II}^t|^2$ 一致有界，因此 $|\mathrm{II}^t|^2$ 也一致有界。 □

4.5. 主要结果的证明。 现在，我们准备好证明主要结果。

定理 4.14。 设 (M, g, ∇, I, J, K) 是一个超凯勒4维流形， $\Sigma \subset M$ 是相对于 I, K 的一个紧致、定向、强稳定复拉格朗日曲面，即，在 Σ 上有 $\omega_I + i\omega_K \equiv 0$，并且 $\Gamma \subset M$ 是相对于 K 的一个拉格朗日曲面，它与 Σ 足够接近。考虑

$$\mathcal{N} = \{f : \Gamma \to M | f^\star(\omega_J) = \rho, f^\star(\omega_K) = 0 \text{ where } \rho \text{ is a given volume form on } \Gamma\}$$

特殊 H-流 $f_t(\Gamma) = \Gamma^t \in \mathcal{N}$ 在 $f_0(\Gamma) = \Gamma$ 上存在，并光滑地收敛到 Σ .

证明。 由于长时间存在性，我们知道特殊 H-流对所有时间都存在。由 C^0 估计（命题 4.11），可知

$$\frac{\partial}{\partial t}(\psi) \leq \lambda^2(\Delta^{\Gamma_t}(\psi) + \langle\nabla(\frac{\lambda^2}{2}), \nabla\psi\rangle - c_1\psi.$$

因此， $\psi(x,t) \leq \sup\psi|_{t=0}e^{-c_1t}$,i。也就是说，它指数地收敛到 0。此外，由 C^1 估计（命题 4.12），我们有

$$\frac{\partial}{\partial t}(1 - *\Omega + K\psi) \leq \lambda^2\Big[\Delta(1 - *\Omega + K\psi) - \frac{1}{2}((*\Omega) - K\psi)|\mathrm{II}^t - \mathrm{II}^\Sigma|^2\Big] - c_2(1 - *\Omega + K\psi),$$

那么， $(1 - *\Omega + K\psi)(x, t) \leq \sup(1 - *\Omega + K\psi)|_{t=0}e^{-c_2t}$， 即 $(*\Omega)$ 根据 C^1 估计指数地收敛到 1。

为了得到 C^2 收敛，我们需要使用以下

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\eta \geq \lambda^2[\Delta\eta + \frac{p}{3}\eta|\mathrm{II}^t - \mathrm{II}^\Sigma|^2],\\ &\frac{\partial}{\partial t}|\mathrm{II}^t - \mathrm{II}^\Sigma|^2 \leq \lambda^2\Big[\Delta|\mathrm{II}^t - \mathrm{II}^\Sigma|^2 + c(|\mathrm{II}^t - \mathrm{II}^\Sigma|^4 + 1)\Big],\end{aligned} \tag{28}$$

其中第一个不等式是（27），第二个不等式则由（11）推出。

断言1： $\int_0^\infty (\int_{\Gamma_t} |\mathrm{II}^t - \mathrm{II}^\Sigma|^2 d\mu_t)dt \leq C_1$ 其中 C_1 是某个正的常数。

首先注意到

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{Vol}(\Gamma_t) = \int_{\Gamma_t}\frac{\partial}{\partial t}d\mu_t = \int_{\Gamma_t}\left(\Delta(\frac{\lambda^2}{2}) - \lambda^2|H|^2\right)d\mu_t = \int_{\Gamma_t} -\lambda^2|H|^2 d\mu_t \leq 0.$$

因此，$\mathrm{Vol}(\Gamma_t)$ 单调不增且有下界。于是，其极限存在。接下来，我们对（28）积分，并注意到 η 有下界，且一致地收敛到 1。

$$\int_{\Gamma_t}\frac{\partial}{\partial t}\eta d\mu_t \geq \int_{\Gamma_t}\lambda^2\Delta\eta d\mu_t + c_3\int_{\Gamma_t}|\mathrm{II}^t - \mathrm{II}^\Sigma|^2 d\mu_t.$$

改写左边

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_t}\frac{\partial}{\partial t}\eta d\mu_t &= \frac{\partial}{\partial t}\int_{\Gamma_t}\eta d\mu_t - \int_{\Gamma_t}\eta(\frac{\partial}{\partial t}d\mu_t)\\ &= \frac{\partial}{\partial t}\int_{\Gamma_t}\eta d\mu_t - \int_{\Gamma_t}\eta\left(\Delta(\frac{\lambda^2}{2}) - \lambda^2|H|^2\right)d\mu_t\\ &= \frac{\partial}{\partial t}\int_{\Gamma_t}\eta d\mu_t + \int_{\Gamma_t}\frac{1}{2}\langle\nabla(\lambda^2), \nabla\eta\rangle d\mu_t + \int_{\Gamma_t}\eta\lambda^2|H|^2 d\mu_t,\end{aligned}$$

这里我们使用斯托克斯定理。因此

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Gamma_t}\eta d\mu_t + \int_{\Gamma_t}\frac{3}{2}\langle\nabla(\lambda^2), \nabla\eta\rangle d\mu_t + \int_{\Gamma_t}\eta\lambda^2|H|^2 d\mu_t \geq c_3\int_{\Gamma_t}|\mathrm{II}^t - \mathrm{II}^\Sigma|^2 d\mu_t. \tag{29}$$

回顾一下，$|\nabla(\lambda^2)|$ 是一致有界的（因为 $|\mathrm{II}^t|$ 是一致有界的），且 $|\nabla\eta|^2 \leq c_4(|\nabla(*\Omega)|^2 + |\nabla\psi|^2)$。由命题 4.8及 C^0 中的证明可知，可以得到如下估计

$$|\nabla\eta|^2 \leq c_5(s^2 + \psi) \leq c_6(1 - *\Omega + K\psi) \leq c_7 e^{-c_8 t}.$$

现在，我们可以完成断言1的证明。第一项为

$$\int_0^t\frac{\partial}{\partial s}\int_{\Gamma_s}\eta d\mu_s ds = \int_{\Gamma_t}\eta d\mu_t - \int_{\Gamma_0}\eta d\mu_0.$$

由于 η 一致收敛于1，因此它是收敛的。第二项为

$$\int_0^t\int_{\Gamma_s}\frac{3}{2}\langle\nabla(\lambda^2), \nabla\eta\rangle d\mu_s ds \leq \int_0^t\int_{\Gamma_s}\frac{3}{2}(|\nabla(\lambda^2)||\nabla\eta|)d\mu_s ds \leq \int_0^t c_7 e^{-c_8 s}\mathrm{Vol}(\Gamma_0)ds < \infty.$$

最后一项为

$$\int_0^t\int_{\Gamma_s}\eta\lambda^2|H|^2 d\mu_s ds \leq \int_0^t\int_{\Gamma_s}\lambda^2|H|^2 d\mu_s ds = \int_0^t -\frac{\partial}{\partial s}\int_{\Gamma_s}d\mu_s ds = \mathrm{Vol}(\Gamma_0) - \mathrm{Vol}(\Gamma_t).$$

断言1的证明由不等式（29）得到。

断言2： $\frac{d}{dt}\int_{\Gamma_t}|\mathrm{II}^t - \mathrm{II}^\Sigma|^2 d\mu_t \leq C_2$，其中 C_2为某个正的常数。由（28）可得

$$\frac{\partial}{\partial t}|\mathrm{II}^t - \mathrm{II}^\Sigma|^2 \leq \lambda^2\Delta|\mathrm{II}^t - \mathrm{II}^\Sigma|^2 + c_9.$$

由于 $|\mathrm{II}^t|$ 一致有界，我们计算

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{\Gamma_t}|\mathrm{II}^t - \mathrm{II}^\Sigma|^2 d\mu_t &= \int_{\Gamma_t}\frac{\partial}{\partial t}|\mathrm{II}^t - \mathrm{II}^\Sigma|^2 d\mu_t + \int_{\Gamma_t}|\mathrm{II}^t - \mathrm{II}^\Sigma|^2(\frac{\partial}{\partial t}d\mu_t)\\ &\leq \int_{\Gamma_t}\Big(\lambda^2\Delta|\mathrm{II}^t - \mathrm{II}^\Sigma|^2 + \Delta(\frac{\lambda^2}{2})|\mathrm{II}^t - \mathrm{II}^\Sigma|^2 - \lambda^2|H|^2|\mathrm{II}^t - \mathrm{II}^\Sigma|^2 + c_9\Big)d\mu_t\\ &\leq \int_{\Gamma_t}\Big(-\frac{3}{2}\langle\nabla(\lambda^2), \nabla|\mathrm{II}^t - \mathrm{II}^\Sigma|^2\rangle + c_9\Big)d\mu_t < \infty.\end{aligned}$$

因为 $\left|\nabla|\mathrm{II}^t - \mathrm{II}^\Sigma|\right|^2$ 一致有界。

现在，由断言1和断言2，我们可以在 [18] 中使用引理 6.3，推导出

$$\int_{\Gamma_t} |\mathrm{II}^t - \mathrm{II}^\Sigma|^2 d\mu_t \to 0.$$

然后，利用标准论证可以证明，$|\mathrm{II}^t - \mathrm{II}^\Sigma| \longrightarrow 0$ 和 Γ^t 光滑收敛到 Σ。

□

推论 4.15. 设 Γ 是 *Eguchi-Hanson* 空间中相对于 K 的拉格朗日曲面，且它与零截面 S^2的距离为 C^1。那么，具有 $\Gamma^0 = \Gamma$ 的特殊 H-流 Γ^t 对所有时间都存在，并光滑收敛到 S^2。

References

[1] Michael Francis Atiyah 和 Nigel Hitchin。非阿贝尔磁单极子的低能散射

[ ] *Philosophical Trans-* 及讨论。 , , *actions of the Royal Society of London. Series A Mathematical and Physical Sciences* 315 1533 459 469, 1985 ( ): – 。[2] Michael Francis Atiyah 和 Nigel Hitchin。 *The Geometry and Dynamics of Magnetic Monopoles*。普林斯顿大学出版社，1988。[3] Bennett Chow 和 Dan Knopf。 *Ricci Flow: an introduction*。美国数学学会，2004。[4] Dennis M. DeTurck。沿其里奇张量方向变形度量。 *J. Differential Geom.*，18(1):157–162，1983。[5] S. K. Donaldson。矩映射与微分同胚。 *Asian J. Math.*，3(1):1–15，1999年。[6] Tohru Eguchi 和 Andrew J Hanson。欧几里得引力的自对偶解。 *Annals of Physics*，120:82–106，1979。[7] G. W. Gibbons 和 C. N. Pope。量子引力中的正作用量猜想与渐近欧几里得度量。

Comm. Math. , ( ): – 。[8] *Phys* 66 3 267 290, 1979

Richard S. Hamilton。具有正里奇曲率的三维流形。 *Journal of Differential Geometry*，17(2):255–306，1982。[9] Reese Harvey 和 H. Blaine Lawson。校准几何。 *Acta Mathematica*，148(none):47–157，1982。[10] Nigel Hitchin。超K¨ahler 流形。 *Astérisque*，(206):报告第 748 号，3，137–166，1992。S´eminaire Bourbaki，第 1991/92 卷。[11] Nigel J. Hitchin。特殊拉格朗日子流形的模空间。 *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa - Classe di Scienze*，Ser. 4，25(3-4):503–515，1997。[12] Gerhard Huisken。凸曲面在平均曲率流作用下收缩为球面。载于 *Miniconference on nonlinear analysis (Canberra, 1984)*，第 8 卷， *Proc. Centre Math. Anal. Austral. Nat. Univ.*，第 107–112 页。澳大利亚国立大学，堪培拉，1984。[13] Gerhard Huisken。黎曼流形中的凸超曲面在平均曲率作用下收缩。 *Invent. Math.*，84(3):463–480，1986。[14] Knut Smoczyk。变形拉格朗日子流形的一种典范方法。arXiv:dg-ga/9605005，1996。[15] Knut Smoczyk。高余维中的平均曲率流：介绍与综述。载于 Christian B¨ar、Joachim Lohkamp 和 Matthias Schwarz 编， *Global Differential Geometry*，第 231–274 页，柏林、海德堡，2012。施普林格·柏林·海德堡。[16] Jian Song 和 Ben Weinkove。关于 Donaldson 在超K¨ahler 四维流形上的曲面流。 *Math. Z.*，256(4):769–787，2007。[17] Matthew B. Stenzel。紧致秩一对称空间复化上的里奇平坦度量。 *manuscripta mathematica*，80:151–163，1993。[18] Chung-Jun Tsai 和 Mu-Tao Wang。极小子流形上的强稳定性条件及其含义。 *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)* 2020 10 2017 , , 。[19]

Chung-Jun Tsai 和 Mu-Tao Wang。Atiyah-Hitchin 流形中极小球面的整体唯一性。 *Mathematical Research Letters* 29 04 2018 , , 。[20]

Chung-Jun Tsai 和 Mu-Tao Wang。特殊全纯群流形中的平均曲率流。 *J. Differential Geom.*，108(3):531–569，2018。[21] Mu-Tao Wang。爱因斯坦四维流形中的曲面平均曲率流。 *J. Differential Geom.*，57(2):301–338，2001。[22] Mu-Tao Wang。任意余维图形平均曲率流的长时间存在性与收敛性。 *Invent. Math.*，148(3):525–543，2002。[23] Mu-Tao Wang。平均曲率流保持不变的格拉斯曼流形子集。 *Comm. Anal. Geom.*，13(5):981–998，2005。