arXiv:2601.03095v1 [math.AP] 6 Jan 2026

具有无穷多个守恒律的 Kirchhoff 方程

CHIARA BOITI 和 RENATO MANFRIN

ABSTRACT. 我们在此证明，拟线性基尔霍夫-波赫扎耶夫方程

$$u_{tt} - \big(a\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx + b\big)^{-2}\Delta u = 0,$$

对于 $a \neq 0$，存在任意阶的守恒律。

1. 引言与结果

我们在此研究 Kirchhoff-Pokhozhaev 方程

$$u_{tt} - \frac{\Delta u}{\big(a\|\nabla u\|^2 + b\big)^2} = 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^n \times [0,T), \tag{1.1}$$

对于某个 $T>0$，其中 $\|\nabla u\|^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x,\ t)|^2 dx$ 且 $a,\ b \in \mathbb{R}$，满足 $a \neq 0$。

S. I. Pokhozhaev 在 [8], [9] 中证明，方程 (1.1) 存在一个二阶守恒律。更确切地说，设 u 在 $\mathbb{R}^n \times [0,T)$ 中定义，其中某个 $T>0$，并且满足

$$u \in C^j([0,T); H^{2-j}(\mathbb{R}^n)) \qquad (j=0,1), \tag{1.2}$$

and

$$q \ = \ a\|\nabla u\|^2 + b \neq 0 \quad \text{for} \quad t \in [0,T); \tag{1.3}$$

若 u 在 $\mathbb{R}^n \times [0,T)$ 中是方程 (1.1) 的解，则二阶泛函

$$I_2(u) \ := \ q\|\nabla u_t\|^2 + \frac{\|\Delta u\|^2}{q} - a\left(\int_{\mathbb{R}^n} \nabla u \cdot \nabla u_t\, dx\right)^2 \tag{1.4}$$

在 $[0,T)$ 中保持常数。另请参见 [2] 和 [7]，其中给出了 (1.4) 的其他推导。

正如 [9] 首先所示，随后 [6] 和 [7]，也证明了，泛函 I_2 的守恒在适当假设下，可保证方程 (1.1) 的柯西问题（以及初边值问题）整体可解，只要初始数据 $u(x,\ 0)$ 和 $u_t(x,\ 0)$ 属于阶数适当的索伯列夫空间。请注意，对于任何基尔霍夫型方程，简单的能量守恒（一级泛函）

$$u_{tt} - m(\|\nabla u\|^2)\Delta u = 0 \quad \text{with} \quad m \in C^0,\ m>0, \tag{1.5}$$

似乎不足以确保整体可解性。参见 [1]。

最近，在 [3], 中证明了，若对解假设某种额外正则性，则 (1.1) 也满足一条三阶守恒律。具体而言，若 $u \in C^j([0,T);\ H^{3-j}(\mathbb{R}^n))$，其中 $j \in \{0,1\}$,

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：35L65，35L72；次要分类：35L15。

Key words and phrases. Kirchhoff 方程、守恒律、拟线性双曲方程。

则三阶泛函

$$
\begin{aligned}
I_3(u) := q\|\Delta u_t\|^2 + \frac{\|\nabla(\Delta u)\|^2}{q} - q'\int_{\mathbb{R}^n} \Delta u \Delta u_t\, dx \\
+ \frac{1}{8} q'^2 \left(q\|\nabla u_t\|^2 + \frac{\|\Delta u\|^2}{q} \right) - \frac{1}{16a}\left(\frac{q'^4}{4} + q^2\, q''^2 \right)
\end{aligned} \tag{1.6}
$$

在 $[0,T$ 中保持不变）。注意，（1.6）取决于 q，q' 以及 q''，后者由下式给出

$$
q'' = 2a\left(\|\nabla u_t\|^2 - \frac{\|\Delta u\|^2}{q^2} \right),
$$

如果 u 是满足（1.2）、（1.3）的（1.1）的一个解。

泛函 I_3 是三阶的，因为它是一个主部与一个泛函之和

$$
q\|\Delta u_t\|^2 + \frac{\|\nabla(\Delta u)\|^2}{q} - q'\int_{\mathbb{R}^n} \Delta u \Delta u_t\, dx
$$

前者取决于 u的三阶导数，而后者是一个泛函

$$
J(u) = \frac{1}{8} q'^2 \left(q\|\nabla u_t\|^2 + \frac{\|\Delta u\|^2}{q} \right) - \frac{1}{16a}\left(\frac{q'^4}{4} + q^2\, q''^2 \right)
$$

其中仅包含 u 的二阶及以下导数。

在本文中，我们证明 Kirchhoff-Pokhozhaev 方程（1.1）具有任意阶 $k \in \mathbb{N}$、 $k \geq 3$的守恒律（更准确地说，是时间不变泛函），前提是所考虑的解足够光滑。

更精确地说，给定一个足够正则且满足 (1.3) 的 (1.1) 的解，我们按如下方式定义一个 $\leq l$ 阶泛函：

定义 1.1。 令 $l \in \mathbb{N}, l \geq 2$。若 $J = J(u)$ 可表示为以下形式，则称其为 $\leq l$ 阶泛函：

$$
\begin{aligned}
J = J(u) = P\Big(q^{-1}, q, q', \dots, q^{(2l-2)}, \|\nabla u\|^2, \dots, \|\nabla^l u\|^2, \|\nabla u_t\|^2, \dots, \|\nabla^{l-1} u_t\|^2, \\
\int_{\mathbb{R}^n} \nabla u \cdot \nabla u_t\, dx\, , \dots, \int_{\mathbb{R}^n} \nabla^{l-1} u \cdot \nabla^{l-1} u_t\, dx \Big)
\end{aligned} \tag{1.7}
$$

其中 P 是其自变量的多项式；对于 $i \in \mathbb{N}$ 和 v 这两个给定函数，我们采用以下约定：

$$
\nabla^{2i} v = \Delta^i v \qquad and \qquad \nabla^{2i+1} v = \nabla(\Delta^i v).
$$

注 1.2。 为阐明定义 *1.1*，我们还指出以下几个容易证明的事实。令 $l \in \mathbb{N}, l \geq 2$。若

$$
u \in C^j([0,T); H^{l-j}(\mathbb{R}^n)) \qquad (j = 0, 1),
$$

是 $\mathbb{R}^n \times [0,T)$ 中的一个解，满足条件 (1.3)，则

i) q 是 $[0,T)$ 中的一个 C^{2l-2} 函数；

ii) $q', q'', \dots, q^{(2l-2)}$ 可以表示为关于 q^{-1}，$\|\nabla u\|^2, \dots,$ $\|\nabla^l u\|^2$，$\|\nabla u_t\|^2, \dots, \|\nabla^{l-1} u_t\|^2$ 的多项式，并且

$$
\int_{\mathbb{R}^n} \nabla u \cdot \nabla u_t\, dx\, , \dots, \int_{\mathbb{R}^n} \nabla^{l-1} u \cdot \nabla^{l-1} u_t\, dx.
$$

这说明表达式 (1.7) $J(u)$ 是一个 $\leq l$ 阶泛函，因为它至多依赖于 u 的 l 阶导数。

现在我们可以陈述主要结果:

定理 1.3. 设 $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 3$. 存在一个 $J_k = J_k(u)$泛函，其阶数为 $\leq k-1$，使得对于满足以下条件的函数

$$u \in C^j([0,T); H^{k-j}(\mathbb{R}^n)) \qquad (j = 0, 1),$$

若 u 是 (1.1) 的解，则其满足 (1.3)

$$I_k(u) = q\|\nabla^{k-1}u_t\|^2 + \frac{\|\nabla^k u\|^2}{q} - q'\int_{\mathbb{R}^n} \nabla^{k-1}u \cdot \nabla^{k-1}u_t\, dx + J_k(u) \tag{1.8}$$

在 $[0,T)$ 中保持常数。

注意， I_k 的主部

$$q\|\nabla^{k-1}u_t\|^2 + \frac{\|\nabla^k u\|^2}{q} - q'\int_{\mathbb{R}^n} \nabla^{k-1}u \cdot \nabla^{k-1}u_t\, dx$$

取决于 k 阶导数 $\nabla^k u$ 和 $\nabla^{k-1}u_t$ ； 而根据注 1.2，泛函 J_k仅取决于解 u的低阶导数，即

$$\nabla^j u \text{ for } 1 \leq j \leq k-1 \quad \text{and} \quad \nabla^j u_t \text{ for } 1 \leq j \leq k-2.$$

最后，我们回顾一下，在 [8] S. I. Pokhozhaev 还证明了一个重要结论：方程 (1.1) 是唯一使 Kirchhoff 方程 (1.5) 存在二阶守恒律的情形。换言之，如果 (1.5) 存在二阶守恒律，那么

$$m(s) = \frac{1}{(as+b)^2} \tag{1.9}$$

对某个 a, $b \in \mathbb{R}$ 二者不全为零。因此，我们很可能可以认为，在这些 Kirchhoff 型方程 (1.5) 中，只有 (1.1) 存在阶数高于二阶的守恒律。

2. Liouville 型方程的一个二次型

本节考虑 Liouville 型（参见 [5,§6.2]）微分方程

$$w_{tt} + \frac{1}{q^2}|\xi|^2 w = 0 \quad \text{for} \quad t \in [0,T), \tag{2.1}$$

其中 $\xi \in \mathbb{R}^n$和 $q = q(t) : [0,T) \to \mathbb{R}$是一个足够光滑的函数，满足

$$q(t) \neq 0 \quad \text{in} \quad [0,T). \tag{2.2}$$

该方程由方程 (1.1) 对 x 变量作部分傅里叶变换得到。设 (2.1) 有一个复值解，例如

$$w = w(\xi, t),$$

我们仿照 [4, §2], 引入以下二次型集合:

定义 2.1. 给定 $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 3$，令

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_k(\xi,t) := &\sum_{i=0}^{k-2} \alpha_i |\xi|^{2k-2i-2}\left(|w_t|^2 + \frac{1}{q^2}|\xi|^2|w|^2\right) + \sum_{i=0}^{k-2}\beta_i|\xi|^{2k-2i-2}\Re(\overline{w}w_t) \\ &+ \sum_{i=0}^{k-3}\gamma_i|\xi|^{2k-2i-4}|w_t|^2,\end{aligned} \tag{2.3}$$

其中 $\alpha_i = \alpha_i(t)$ $\beta_i = \beta_i(t)$ $\gamma_i = \gamma_i(t)$ 是定义在 $[0,T)$ 上的适当实函数。

我们将通过将 $\frac{d}{dt}\mathcal{E}_k(\xi,t)$ 的表达式中 $|\xi|$ 的各次幂按从高到低的顺序依次置零，来确定 $\alpha_0,\beta_0,\gamma_0,\ldots,\alpha_{k-3},\beta_{k-3},\gamma_{k-3}$，最后确定 α_{k-2},β_{k-2}。我们的目标是得到

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}_k(\xi,t)=\beta'_{k-2}|\xi|^2\Re(\overline{w}w_t)\quad\text{for}\quad t\in[0,T). \tag{2.4}$$

我们首先建立 $\alpha_i,\beta_i,\gamma_i$ 必须满足的条件系统，然后证明该系统总是可解的。

1) 首先，我们考察 (2.3) 中含有 $i=0$ 的项。由于 w 是 (2.1) 的解，对 t 求导后，我们很容易得到：

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left[\alpha_0|\xi|^{2k-2}\left(|w_t|^2+\frac{1}{q^2}|\xi|^2|w|^2\right)+\beta_0|\xi|^{2k-2}\Re(\overline{w}w_t)+\gamma_0|\xi|^{2k-4}|w_t|^2\right]\\&=\left[\left(\frac{\alpha_0}{q^2}\right)'-\frac{\beta_0}{q^2}\right]|\xi|^{2k}|w|^2+\left[\alpha'_0+\beta_0\right]|\xi|^{2k-2}|w_t|^2\\&\quad+\left[\beta'_0-2\frac{\gamma_0}{q^2}\right]|\xi|^{2k-2}\Re(\overline{w}w_t)+\gamma'_0|\xi|^{2k-4}|w_t|^2.\end{aligned} \tag{2.5}$$

接下来，我们要求 $\alpha_0,\beta_0,\gamma_0$ 满足以下条件

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\alpha_0}{q^2}\right)'-\dfrac{\beta_0}{q^2}=0\\ \alpha'_0+\beta_0=0\\ \beta'_0-2\dfrac{\gamma_0}{q^2}=0.\end{cases} \tag{2.6}$$

这样，导数 (2.5) 化简为 $\gamma'_0|\xi|^{2k-4}|w_t|^2$。

2) 如果 $k\geq 4$ （因此 $k-3\geq 1$），我们也考察 (2.3) 中各项对 wit 的导数 h 指标 i使得 满足 $1\leq i\leq k-3$。我们有：

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left[\alpha_i|\xi|^{2k-2i-2}\left(|w_t|^2+\frac{1}{q^2}|\xi|^2|w|^2\right)+\beta_i|\xi|^{2k-2i-2}\Re(\overline{w}w_t)+\gamma_i|\xi|^{2k-2i-4}|w_t|^2\right]\\&=\left[\left(\frac{\alpha_i}{q^2}\right)'-\frac{\beta_i}{q^2}\right]|\xi|^{2k-2i}|w|^2+\left[\alpha'_i+\beta_i\right]|\xi|^{2k-2i-2}|w_t|^2\\&\quad+\left[\beta'_i-2\frac{\gamma_i}{q^2}\right]|\xi|^{2k-2i}\Re(\overline{w}w_t)+\gamma'_i|\xi|^{2k-2i-4}|w_t|^2,\end{aligned} \tag{2.7}$$

对 $1\leq i\leq k-3$。因此，若 $k\geq 4$，我们还要求

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\alpha_i}{q^2}\right)'-\dfrac{\beta_i}{q^2}=0\\ \alpha'_i+\beta_i=-\gamma'_{i-1}\qquad\text{for}\quad 1\leq i\leq k-3,\\ \beta'_i-2\dfrac{\gamma_i}{q^2}=0\end{cases} \tag{2.8}$$

其中 γ_0 由系统 (2.6) 给出。

若满足 (2.6) 和 (2.8) 的条件，则 (2.3) 中含有 $0\leq i\leq k-3$ 的各项的导数之和恰好为 $\gamma'_{k-3}|\xi|^2|w_t|^2$。

3) 最后，我们考察 (2.3) 中含有 $i = k-2$ 的各项。在这种情况下，我们得到：

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left[\alpha_{k-2}|\xi|^2\left(|w_t|^2+\frac{1}{q^2}|\xi|^2|w|^2\right)+\beta_{k-2}|\xi|^2\Re(\overline{w}w_t)\right]\\&\quad=\left[\left(\frac{\alpha_{k-2}}{q^2}\right)'-\frac{\beta_{k-2}}{q^2}\right]|\xi|^4|w|^2+\left[\alpha'_{k-2}+\beta_{k-2}\right]|\xi|^2|w_t|^2+\beta'_{k-2}|\xi|^2\Re(\overline{w}w_t).\end{aligned}\tag{2.9}$$

因此，我们要求

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\alpha_{k-2}}{q^2}\right)'-\dfrac{\beta_{k-2}}{q^2}=0\\ \alpha'_{k-2}+\beta_{k-2}=-\gamma'_{k-3}\,.\end{cases}\tag{2.10}$$

综上，如果满足条件 (2.6)、(2.8) 和 (2.10)，那么$\mathcal{E}_k(\xi,\ t)$ 的导数正如 (2.4) 所述，恰为 $\beta'_{k-2}|\xi|^2\Re(w w_t)$。

现在我们指出，如果将方程

$$\beta'_{k-2}-2\frac{\gamma_{k-2}}{q^2}=0$$

加入 (2.10)，并令

$$\gamma_{-1}\equiv 0,\tag{2.11}$$

我们可以将条件 (2.6)、(2.8) 和 (2.10) 总结为以下系统：

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\alpha_i}{q^2}\right)'-\dfrac{\beta_i}{q^2}=0\\ \alpha'_i+\beta_i=-\gamma'_{i-1}\\ \beta'_i-2\dfrac{\gamma_i}{q^2}=0\end{cases}\qquad\text{for}\quad 0\le i\le k-2.\tag{2.12}$$

这样，我们引入了辅助函数 γ_{-1} 和 γ_{k-2}。它们未用于二次型 $\mathcal{E}_k$的定义 (2.3)，但现在我们可以只处理一个系统，而不必分别处理三个系统。此外，由 (2.12) 可知，只有序列的长度

$$\alpha_0,\beta_0,\gamma_0,\dots,\alpha_{k-2},\beta_{k-2},\gamma_{k-2}$$

直接取决于整数 $k\ge 3$。换言之，对于 $0\le i\le k-2$，元素 α_i、β_i 和 γ_i 的具体表达式仅取决于 q 和 i。

为确定函数 α_i、β_i 和 γ_i，注意到 (2.12) 的前两个方程给出$\beta_i=-\gamma'_{i-1}-\alpha'_i$，因此

$$\left(\frac{\alpha_i}{q^2}\right)'-\frac{\beta_i}{q^2}=\frac{2}{q}\left(\frac{\alpha_i}{q}\right)'+\frac{\gamma'_{i-1}}{q^2}\quad\text{for}\quad 0\le i\le k-2,$$

因此，系统（2.12）可写为

$$\gamma_{-1}\equiv 0,\qquad\begin{cases}\left(\dfrac{\alpha_i}{q}\right)'=-\dfrac{\gamma'_{i-1}}{2q}\\ \beta_i=-\gamma'_{i-1}-\alpha'_i\\ \gamma_i=\dfrac{1}{2}q^2\beta'_i\end{cases}\qquad\text{for}\quad 0\le i\le k-2.\tag{2.13}$$

因此很容易看出，若假设（2.2）成立，并且

$$q \in C^{2k-2}([0,T)). \tag{2.14}$$

在此假设下，我们还有 $\alpha_i \in C^{2k-2i-2}([0,T))$、$\beta_i \in C^{2k-2i-3}([0,T))$ 和 $\gamma_i \in C^{2k-2i-4}([0,T))$，其中 $0 \le i \le k-2$。特别地，如果 (2.14) 成立，则 α_0、β_0、γ_0 .....、α_{k-3}、β_{k-3}、γ_{k-3}以及 α_{k-2}、β_{k-2} 都是 C^1 函数（ $[0,T)$ 中的函数，正如定义 2.1 所要求的那样。

此外，对 (2.13) 积分可得

$$\gamma_{-1} \equiv 0, \qquad \begin{cases} \alpha_i = -q \displaystyle\int \frac{\gamma'_{i-1}}{2q}\,dt \\ \beta_i = -\left(\gamma_{i-1} - q\displaystyle\int \frac{\gamma'_{i-1}}{2q}\,dt\right)' \\ \gamma_i = -\dfrac{1}{2}q^2\left(\gamma_{i-1} - q\displaystyle\int \frac{\gamma'_{i-1}}{2q}\,dt\right)'' \end{cases} \quad \text{for} \quad 0 \le i \le k-2, \tag{2.15}$$

其中，在 (2.15) 的三个表达式中的每一个里，对于 $0 \le i \le k-2$，我们都必须取函数 $\frac{\gamma'_{i-1}}{2q}$ 的同一个原函数。 ——

最后，由 (2.15) 可立即看出，函数 α_0、β_0 和 γ_0 关于任意积分常数 $C_0 \in \mathbb{R}$ 线性相关； α_1、β_1、γ_1 关于 C_0 以及另一个任意积分常数 $C_1 \in \mathbb{R}$ 线性相关；一般而言，对于 $1 \le i \le k-2$，函数 α_i、β_i、γ_i 关于此前的 i 个任意积分常数 C_0、.....、$C_{i-1} \in \mathbb{R}$ 以及另一个任意积分常数 $C_i \in \mathbb{R}$ 线性相关。

总之，我们得到如下结论：

命题 2.2. 令 $k \in \mathbb{N}$, $k \ge 3$。此外，假设

$$q = q(t) \in C^{2k-2}([0,T)), \quad q(t) \neq 0 \quad in \quad [0,T). \tag{2.16}$$

然后，求解关于 $0 \le i \le k-2$ 的线性方程组 (2.12)，可得函数 $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \ldots, \alpha_{k-2}, \beta_{k-2}, \gamma_{k-2}$，它们关于 $k-1$ 个积分任意常数 $C_0, \ldots, C_{k-2} \in \mathbb{R}$ 线性相关，并且满足

$$\begin{cases} \alpha_i(t) = \alpha_i(C_0, \ldots, C_i, t) \in C^{2k-2i-2}([0,T)) \\ \beta_i(t) = \beta_i(C_0, \ldots, C_i, t) \in C^{2k-2i-3}([0,T)) \\ \gamma_i(t) = \gamma_i(C_0, \ldots, C_i, t) \in C^{2k-2i-4}([0,T)) \end{cases} \tag{2.17}$$

对于 $0 \le i \le k-2$。此外，考虑到 (2.5)、(2.7) 和 (2.9)，我们有等式 ty

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}_k(\xi,t) = \beta'_{k-2}|\xi|^2 \Re(\overline{w}w_t) \quad for \quad t \in [0,T). \tag{2.18}$$

3. α_i、β_i、γ_i 的多项式结构。

在命题 2.2 的假设下，本节将证明函数 α_i、β_i、γ_i分别是 q 及其 $q^{(h)}$ 阶导数 $h \le 2i$、$h \le 2i+1$ 和 $h \le 2i+2$的多项式。为简化说明，下面我们设

$$\int \frac{\gamma'_{-1}}{2q}\,dt = -C_0, \tag{3.1}$$

令 $C_0 \in \mathbb{R}$，则由 (2.15) 及 $i = 0$ 可得

$$\alpha_0 = C_0 q, \quad \beta_0 = -C_0 q', \quad \gamma_0 = -\frac{C_0}{2} q^2 q'', \tag{3.2}$$

并且我们还要求

$$C_0 \neq 0, \tag{3.3}$$

从而 α_0，β_0 和 γ_0 不恒等于零。

假设 $k \in \mathbb{N}$、 $k \geq 3$和 q如（2.16）所示，我们使用 $\gamma_{-1} \equiv 0$，γ_0、.....、γ_{k-3}引入以下函数：

定义 3.1。设 $k \in \mathbb{N}$、 $k \geq 3$。定义：

$$G_i := \gamma_{i-1} - q \int \frac{\gamma_{i-1}'}{2q}\, dt, \qquad 0 \leq i \leq k-2. \tag{3.4}$$

对于（3.1）和（3.3），于是有

$$G_0 = C_0 q \quad \text{with} \quad C_0 \neq 0, \tag{3.5}$$

并且我们可以将 (2.15) 写成

$$\begin{cases} \alpha_i = G_i - \gamma_{i-1} \\ \beta_i = -G_i' \qquad\qquad \text{for} \quad 0 \leq i \leq k-2. \\ \gamma_i = -\frac{1}{2} q^2 G_i'' \end{cases} \tag{3.6}$$

注 3.2. 假设 $q \in C^{2k-2}([0,T))$，由 (3.5) 可知 $G_0 \in C^{2k-2}([0,T))$。此外，根据命题 *2.2*，我们还知道，对于 $1 \leq i \leq k-2$， γ_{i-1}是 $\in C^{2k-2i-2}([0,T))$。因此，由定义 *3.1* 可推得，对于 $0 \leq i \leq k-2$，有 $G_i \in C^{2k-2i-2}([0,T))$。

现在我们需要一些技术引理来证明，对于 $0 \leq i \leq k-2$，每个 G_i都是 q及其 $h \leq 2i$ 阶导数 $q^{(h)}$的多项式。首先，我们证明 $G_1, \ldots, G_{k-2}$可以由 G_0递归得到：

引理 3.3。令 $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 3$。我们有

$$G_i = -\frac{q}{4} \int q G_{i-1}'''\, dt\,, \qquad 1 \leq i \leq k-2. \tag{3.7}$$

特别地，

$$\left(\frac{G_i}{q}\right)' = -\frac{1}{4} q G_{i-1}''', \qquad 1 \leq i \leq k-2. \tag{3.8}$$

证明。为证明 (3.7)，我们将 (3.6) 的最后一个方程中 γ_{i-1} 的表达式代入，得到

$$\gamma_{i-1}' = -q q' G_{i-1}'' - \frac{1}{2} q^2 G_{i-1}''' = -q \left(q G_{i-1}''\right)' + \frac{1}{2} q^2 G_{i-1}''',$$

因此

$$-\frac{\gamma_{i-1}'}{2q} = \frac{1}{2} \left(q G_{i-1}''\right)' - \frac{1}{4} q G_{i-1}'''$$

and

$$-\int \frac{\gamma_{i-1}'}{2q} dt = \frac{1}{2} q G_{i-1}'' - \frac{1}{4} \int q G_{i-1}'''\, dt.$$

因此，

$$-q\int\frac{\gamma_{i-1}'}{2q}dt=\frac{1}{2}q^2G_{i-1}''-\frac{q}{4}\int qG_{i-1}'''dt=-\gamma_{i-1}-\frac{q}{4}\int qG_{i-1}'''dt$$

由 (3.4) 可立即得到 (3.7)。最后，(3.8) 显然由 (3.7) 得出。 □

特别地，由于分部积分很容易得到

$$\int qq'''dt=qq''-\frac{1}{2}q'^2+C, \tag{3.9}$$

由 (3.5) 和 (3.7) 可得

$$G_1=-\frac{q}{4}\int qG_0'''dt=\frac{C_0}{4}\left(\frac{1}{2}q'^2-qq''\right)q+C_1q, \tag{3.10}$$

其中 $C_1\in\mathbb{R}$ 是一个额外的积分常数。应用 (3.10)，我们还可以递归地得到 G_2、……、G_{k-2} 的下列表达式：

引理 3.4。设 $k\in\mathbb{N}$, $k\geq4$。对于 $2\leq i\leq k-2$,

$$G_i=-\frac{q}{4}\left[qG_{i-1}''-q'G_{i-1}'+q''G_{i-1}+\frac{4}{C_0}\frac{G_1G_{i-1}}{q^2}+\frac{1}{C_0}\int G_1G_{i-2}'''dt\right]. \tag{3.11}$$

证明。为证明 (3.11)，注意到我们可以将 (3.10) 写成

$$qq'''=-\frac{4}{C_0}\left(\frac{G_1}{q}\right)' \tag{3.12}$$

因为 $C_0\neq0$。

接着，我们对 (3.7) 进行分部积分，并使用 (3.12)：

$$\begin{aligned}G_i&=-\frac{q}{4}\left[qG_{i-1}''-q'G_{i-1}'+q''G_{i-1}-\int q'''G_{i-1}dt\right]\\&=-\frac{q}{4}\left[qG_{i-1}''-q'G_{i-1}'+q''G_{i-1}-\int qq'''\left(\frac{G_{i-1}}{q}\right)dt\right]\\&=-\frac{q}{4}\left[qG_{i-1}''-q'G_{i-1}'+q''G_{i-1}+\frac{4}{C_0}\int\left(\frac{G_1}{q}\right)'\left(\frac{G_{i-1}}{q}\right)dt\right]\\&=-\frac{q}{4}\left[qG_{i-1}''-q'G_{i-1}'+q''G_{i-1}+\frac{4}{C_0}\left(\frac{G_1}{q}\right)\left(\frac{G_{i-1}}{q}\right)-\frac{4}{C_0}\int\left(\frac{G_1}{q}\right)\left(\frac{G_{i-1}}{q}\right)'dt\right].\end{aligned} \tag{3.13}$$

由 (3.8)，用 $i-1$ 替代 i，最终得到 (3.11)。 □

引理 3.5. 设 $k\in\mathbb{N}$、$k\geq3$。那么，对于所有 $0\leq i$、$j\leq k-3$，我们有：

$$\int G_iG_j'''dt=G_iG_j''-G_i'G_j'+G_i''G_j+4\int\left(\frac{G_{i+1}}{q}\right)'\left(\frac{G_j}{q}\right)dt. \tag{3.14}$$

如果 $k\in\mathbb{N}$、$k\geq4$ 和 $0\leq i\leq k-3$，那么

$$\int G_iG_j'''dt=G_iG_j''-G_i'G_j'+G_i''G_j+4\frac{G_{i+1}G_j}{q^2}+\int G_{i+1}G_{j-1}'''dt, \tag{3.15}$$

对所有 $1\leq j\leq k-3$。

证明。我们来证明（3.14）。分部积分并利用（3.8），可得

$$\begin{aligned}\int G_i G_j'''' dt &= G_i G_j''' - G_i' G_j'' + G_i'' G_j - \int G_i''' G_j \, dt \\ &= G_i G_j''' - G_i' G_j'' + G_i'' G_j - \int \left(q G_i''''\right) \left(\frac{G_j}{q}\right) dt \\ &= G_i G_j''' - G_i' G_j'' + G_i'' G_j + 4 \int \left(\frac{G_{i+1}}{q}\right)' \left(\frac{G_j}{q}\right) dt.\end{aligned} \tag{3.16}$$

这就得到了 (3.14)。接下来，为了证明 (3.15)，我们假设 $k \geq 4$ 和 $1 \leq j \leq k-3$。分部积分，并对 $i = j$ 使用 (3.8)，得到：

$$\begin{aligned}\int \left(\frac{G_{i+1}}{q}\right)' \left(\frac{G_j}{q}\right) dt &= \frac{G_{i+1} G_j}{q^2} - \int \left(\frac{G_{i+1}}{q}\right) \left(\frac{G_j}{q}\right)' dt \\ &= \frac{G_{i+1} G_j}{q^2} + \frac{1}{4} \int \left(\frac{G_{i+1}}{q}\right) \left(q G_{j-1}''''\right) dt.\end{aligned} \tag{3.17}$$

结合 (3.16)，即可得到 (3.15)。 □

最后，我们需要以下预备结果：

引理 3.6。设 $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 4$。给定 $j \in \mathbb{N}$, $1 \leq j \leq k-3$，假设 G_i 具有如下形式

$$G_i = q \mathcal{P}_i\left(q, q', \ldots, q^{(2i)}\right) \quad for \quad 0 \leq i \leq j, \tag{3.18}$$

其中 $\mathcal{P}_i$ 是其自变量的一个适当多项式。则

$$\int G_1 G_j'''' dt \tag{3.19}$$

是 q 及其 $\leq 2j+2$ 阶导数的多项式。

Proof. 我们应用引理 3.5，区分 j 为奇数和 j 为偶数的情形 .

情形 $j = 2l+1$。我们不妨设 $l \geq 1$，因为对于 $l = 0$，只需进行分部积分$\int G_1 G_1'''' dt$ （如公式 (3.9) 中所示），并使用 (3.10) 中给出的 G_1 的表达式。

然后，假设 $l \geq 1$，我们将引理 3.5 的公式 (3.15) 应用 l 次。考虑到对于 $0 \leq i \leq j$， G_i 具有形式 (3.18)，可得：

$$\begin{aligned}\int G_1 G_j'''' dt &= G_1 G_j''' - G_1' G_j'' + G_1'' G_j + 4 \frac{G_2 G_j}{q^2} + \int G_2 G_{j-1}'''' dt \\ &= \{*\} + \int G_2 G_{j-1}'''' dt \\ &= \{*\} + G_2 G_{j-1}''' - G_2' G_{j-1}'' + G_2'' G_{j-1}' + 4 \frac{G_3 G_{j-1}}{q^2} + \int G_3 G_{j-2}'''' dt \\ &= \{*\} + \int G_3 G_{j-2}''' dt \\ &\vdots \\ &= \{*\} + \int G_{1+l} G_{j-l}'''' dt,\end{aligned} \tag{3.20}$$

其中，在 (3.20) 的每一步中，符号 $\{*\}$ 表示关于 q 及其 $\le 2j+2$ 阶导数的多项式表达式。注意到

$$1+l=j-l=\frac{j+1}{2},$$

(3.20) 中最后一个不定积分是初等的：

$$\int G_{1+l}G'''_{j-l}\,dt=G_{\frac{j+1}{2}}\,G''_{\frac{j+1}{2}}-\frac{1}{2}\left(G'_{\frac{j+1}{2}}\right)^2+C, \tag{3.21}$$

其中 $C\in\mathbb{R}$ 是任意常数。根据 (3.18)，(3.21) 右侧是关于 q 及其 ≤ 2 阶导数 $j+1/2+2\le 2j+2$ 的多项式，因为 $j\ge 1$。

情形 $j=2l$. </style}若 $l=1$，我们立即应用引理 3.5 的公式 (3.14)，取 $i=1$ 和 $j=2$：

$$\begin{aligned}\int G_1G'''_2\,dt&=G_1G''_2-G'_1G'_2+G''_1G_2+4\int\left(\frac{G_2}{q}\right)'\left(\frac{G_2}{q}\right)dt\\&=G_1G''_2-G'_1G'_2+G''_1G_2+2\left(\frac{G_2}{q}\right)^2+C,\end{aligned} \tag{3.22}$$

其中 $C\in\mathbb{R}$ 是任意常数。根据 (3.18)，当 $j=2$ 时，(3.22) 中最后一个表达式是关于 q 及其 $\le 6=2j+2$ 阶导数的多项式，其中 $j=2$。

现在假设 $l\ge 2$。我们将公式 (3.15) 应用 $l-1$ 次，并按 (3.20) 中的方法进行推导。于是得到：

$$\int G_1G'''_j\,dt=\{*\}+\int G_lG'''_{j+1-l}\,dt, \tag{3.23}$$

其中，$\{*\}$ 是关于 q 及其 $\le 2j+2$阶导数的多项式表达式。

最后，我们将公式 (3.14) 应用于 (3.23) 的最后一个积分，得到：

$$\begin{aligned}\int G_1G'''_j\,dt&=\{*\}+G_lG''_{j+1-l}-G'_lG'_{j+1-l}+G''_lG_{j+1-l}\\&\quad+4\int\left(\frac{G_{l+1}}{q}\right)'\left(\frac{G_{j+1-l}}{q}\right)dt\\&=\{*\}+4\int\left(\frac{G_{l+1}}{q}\right)'\left(\frac{G_{j+1-l}}{q}\right)dt,\end{aligned} \tag{3.24}$$

其中，$\{*\}$ 仍表示关于 q 及其 $\le 2j+2$阶导数的多项式表达式。(3.24) 的最后一个不定积分是初等的，因为

$$l+1=j+1-l=\frac{j+2}{2}$$

因此

$$\int\left(\frac{G_{l+1}}{q}\right)'\left(\frac{G_{j+1-l}}{q}\right)dt=\frac{1}{2}\left(\frac{G_{\frac{j+2}{2}}}{q}\right)^2+C, \tag{3.25}$$

其中 $C\in\mathbb{R}$ 为任意常数。由 (3.18) 可知，(3.25) 右端显然是 q 及其 $\le j+2\le 2j+2$ 阶导数的多项式。证明至此完成。□

注 3.7。 注意， $\int G_1 G_0'''\,dt$ 也是 q 及其 ≤ 2 阶导数的多项式。事实上，由 (3.8) 可得

$$\int G_1 G_0'''\,dt = \int \left(\frac{G_1}{q}\right) q G_0'''\,dt = -4\int \left(\frac{G_1}{q}\right)\left(\frac{G_1}{q}\right)' dt = -2\left(\frac{G_1}{q}\right)^2 + C, \tag{3.26}$$

其中 $C \in \mathbb{R}$ 是任意常数。因此，考虑到 (3.10)， $\int G_1 G_0'''\,dt$ 是关于 q、 q' 和 q''的多项式。

现在我们可以证明本节的主要结果。正如在函数 α_i、 β_i和 γ_i的 (2.12) 之后已经指出的，我们注意到，序列 $G_0, \ldots, G_{k-2}$中各项的形式不依赖于 k。换言之，给定 $i \in \mathbb{N}$，函数 G_i 的表达式对于每个满足 $k-2 \geq i$的整数 $k \geq 3$ 都相同。

定理 3.8。 设 $k \in \mathbb{N}$、 $k \geq 3$。那么，对于 $0 \leq i \leq k-2$，有

$$G_i = q\,\mathcal{P}_i\Big(q, \ldots, q^{(2i)}\Big) \tag{3.27}$$

其中 $\mathcal{P}_i$ 是其自变量的一个适当多项式。

证明。 由公式 (3.5) 和 (3.10)，我们已经知道 G_0 和 G_1 具有 (3.27) 的形式。这意味着该结论对于 $k=3$ 显然成立。

因此，要证明 $k=4$ 的定理 3.8，只需证明 G_2 具有形式 (3.27)。对 $i=2$应用 (3.7) 进行分部积分，得到

$$G_2 = -\frac{q}{4}\left[qG_1'' - q'G_1' + q''G_1 - \int q'''G_1\,dt\right].$$

但是，考虑到 (3.12)，我们可以写成

$$q'''G_1 = (qq''')\left(\frac{G_1}{q}\right) = -\frac{4}{C_0}\left(\frac{G_1}{q}\right)'\left(\frac{G_1}{q}\right),$$

因此

$$\begin{aligned} G_2 &= -\frac{q}{4}\left[qG_1'' - q'G_1' + q''G_1 + \frac{4}{C_0}\int \left(\frac{G_1}{q}\right)\left(\frac{G_1}{q}\right)' dt\right] \\ &= -\frac{q}{4}\left[qG_1'' - q'G_1' + q''G_1 + \frac{2}{C_0}\left(\frac{G_1}{q}\right)^2 + C\right], \end{aligned} \tag{3.28}$$

对于某个 $C \in \mathbb{R}$。因此， G_2 具有形式 (3.27)。

既然我们也已证明该定理对 $k=4$成立，就可以通过对 $k \geq 4$作归纳法来完成证明。于是，假设该命题对给定的 $k_o \geq 4$成立。这意味着

$$G_0, \ldots, G_{k_o-2} \quad \text{satisfy (3.27)}. \tag{3.29}$$

那么，取 $k = k_o + 1$，我们需要证明

$$G_{k_o-1} = q\,\mathcal{P}_{k_o-1}\Big(q, \ldots, q^{(2k_o-2)}\Big),$$

其中， $\mathcal{P}_{k_o-1}$ 是其各自变量的适当多项式。

现在，应用引理 3.4，我们可以将 G_{k_o-1} 写成

$$G_{k_o-1} = -\frac{q}{4}\left[qG_{k_o-2}'' - q'G_{k_o-2}' + q''G_{k_o-2} + \frac{4}{C_0}\frac{G_1 G_{k_o-2}}{q^2} + \frac{1}{C_0}\int G_1 G_{k_o-3}''''\,dt\right]. \tag{3.30}$$

(3.30) 右端的表达式显然是 q 的倍数。此外，根据归纳假设 (3.29),

$$qG''_{k_o-2} - q'G'_{k_o-2} + q''G_{k_o-2} + \frac{4}{C_0}\frac{G_1 G_{k_o-2}}{q^2} \tag{3.31}$$

是 q 及其 ≤ 2 阶导数的多项式 $k_o - 2 + 2 = 2k_o - 2$。因此，尚需证明不定积分也

$$\int G_1 G'''_{k_o-3} dt \tag{3.32}$$

是 q 及其 $\le 2k_o - 2$ 阶导数的多项式。

为此，我们对 $k = k_o + 1$ 和 $j = k_o - 3$应用引理 3.6。事实上，由于 $k_o \ge 4$，我们有 $1 \le j = k_o - 3 \le k - 3$；根据归纳假设 (3.29)，我们知道

$$G_0, \dots, G_{k_o-3} \quad \text{satisfy condition (3.18).}$$

由引理 3.6 可知，不定积分 (3.32) 是 q 及其 ≤ 2 阶导数的多项式 $k_o - 3 + 2 = 2k_o - 4$。证明至此完成。□

由定理 3.8 可立即得到:

推论 3.9。设 $k \in \mathbb{N}, k \ge 3$。设 $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ 为 (2.15) 中针对 $0 \le i \le k-2$定义的函数。那么， $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ 分别是 q 及其 $q^{(h)}$ 阶导数的多项式，阶数分别为 $h \le 2i$, $h \le 2i+1$ 和$h \le 2i+2$。

证明。由 (3.6) 和定理 3.8 可得。 □

4. Kirchhoff-Pokhozhaev 方程的二次型

现在，我们将前几节的结果应用于方程 (1.1)。

设 $k \in \mathbb{N}$、 $k \ge 3$，并设 u 是 (1.1) 在 $\mathbb{R}^n \times [0,T)$ 中的一个解，使得

$$u \in C^j([0,T); H^{k-j}(\mathbb{R}^n)) \qquad (j = 0, 1),$$

且 (1.3) 成立。由注 1.2 可得

$$t \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x,t)|^2 dx$$

是 C^{2k-2} 函数，属于 $[0,T)$。

对 x 变量进行部分傅里叶变换 $u = u(x,t)$，即,

$$w(\xi,t) := (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} u(x,t) e^{-ix\cdot\xi} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

并注意到

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x,t)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2 |w(\xi,t)|^2 d\xi,$$

根据普朗歇尔定理，我们需要考虑方程

$$w_{tt} + \frac{|\xi|^2 w}{\left(a\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2 |w|^2 d\xi + b\right)^2} = 0, \quad t \in [0,T). \tag{4.1}$$

接下来，我们令 $q = q(t) = a\|\nabla u\|^2 + b$ 如式 (1.3) 所示，并考虑 Liouville型方程

$$w_{tt} + \frac{1}{q^2}|\xi|^2 w = 0,$$

对于该情形，我们按照定义 2.1 引入二次型 $\mathcal{E}_k(\xi,\ t)$。

在定义 $\mathcal{E}_k(\xi,\ t)$ 时，我们使用通过求解系统（2.12）得到的系数 $\alpha_i,\ \beta_i$ 和 γ_i；或者，等价地，对于 $0 \le i \le k-2$，取 $\alpha_i,\ \beta_i$ 和 γ_i，如（2.15）所示。此外，我们假设第一个积分常数满足条件，使得（3.2）在 $C_0 \neq 0$ 下成立。因此，第 3 节的所有结果均有效。

然后我们引入泛函

$$E_k = E_k(t) := \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{E}_k(\xi, t)d\xi \quad \text{for} \quad t \in [0, T). \tag{4.2}$$

注意到

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2 \Re(\overline{w} w_t)d\xi = \frac{1}{2a}\, q', \tag{4.3}$$

由公式（2.18）可容易得到

$$\frac{d}{dt}E_k = \beta'_{k-2} \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2 \Re(\overline{w} w_t)d\xi = \frac{1}{2a}\, \beta'_{k-2}\, q'. \tag{4.4}$$

应用引理 3.6 和定理 3.8，我们得到如下结果：

引理 4.1。设 $k \in \mathbb{N},\ k \ge 3$。则

$$\beta'_{k-2} q' = \left(\beta_{k-2} q'\right)' + \frac{d}{dt} Q_k\left(q, q', \ldots, q^{(2k-4)}\right) \tag{4.5}$$

其中，Q_k 是其自变量的一个适当多项式。

证明。我们首先回顾

$$\beta_{k-2} = -G'_{k-2}$$

由（3.6）可知。于是由（3.12）我们有：

$$\begin{aligned}
\beta'_{k-2} q' &= \left(\beta_{k-2} q'\right)' - \beta_{k-2} q'' \\
&= \left(\beta_{k-2} q'\right)' + G'_{k-2} q'' \\
&= \left(\beta_{k-2} q'\right)' + \left(G_{k-2} q''\right)' - G_{k-2} q''' \\
&= \left(\beta_{k-2} q'\right)' + \left(G_{k-2} q''\right)' - \left(\frac{G_{k-2}}{q}\right)\left(q q'''\right) \\
&= \left(\beta_{k-2} q'\right)' + \left(G_{k-2} q''\right)' + \frac{4}{C_0}\left(\frac{G_1}{q}\right)'\left(\frac{G_{k-2}}{q}\right).
\end{aligned} \tag{4.6}$$

现在我们首先 首先考虑情形 $k = 3$，此时只需应用定理 3.8，然后便可处理一般情形 $k \ge 4$，此时还需要引理 3.6。

令 $k = 3$，并将 (4.6) 写成

$$\beta'_1 q' = \left(\beta_1 q'\right)' + \frac{d}{dt}\left[G_1 q'' + \frac{2}{C_0}\left(\frac{G_1}{q}\right)^2\right]. \tag{4.7}$$

根据定理 3.8，我们知道 G_1 的形式为

$$G_1 = q\mathcal{P}_1\left(q, q', q''\right), \tag{4.8}$$

其中 $\mathcal{P}_1$ 是其自变量的一个适当多项式。因此，由表达式 (4.7) 可知，当 $k=3$ 时，公式 (4.5) 成立。

若 $k \geq 4$，我们从 (4.6) 的最后一个表达式继续，写成

$$\begin{aligned}\beta'_{k-2}q' &= \big(\beta_{k-2}\,q'\big)' + \big(G_{k-2}q''\big)' + \frac{4}{C_0}\left(\frac{G_1G_{k-2}}{q^2}\right)' - \frac{4}{C_0}\left(\frac{G_1}{q}\right)\left(\frac{G_{k-2}}{q}\right)' \\ &= \big(\beta_{k-2}\,q'\big)' + \big(G_{k-2}q''\big)' + \frac{4}{C_0}\left(\frac{G_1G_{k-2}}{q^2}\right)' + \frac{1}{C_0}G_1G'''_{k-3}\,,\end{aligned} \tag{4.9}$$

这是因为对于 $i=k-2$，由 (3.8) 可知。

由定理 3.8 可知，项

$$\big(G_{k-2}q''\big) + \frac{4}{C_0}\left(\frac{G_1G_{k-2}}{q^2}\right)$$

是关于 q，q'，……，$q^{(2k-4)}$ 的多项式。因此，只需证明 $G_1G'''_{k-3}$ 是关于 q，q'，……，$q^{(2k-4)}$ 的某个多项式的导数。这可由以下事实推出：

$$\int G_1G'''_{k-3}\,dt$$

是 q 及其 $\leq 2k-4$ 阶导数的多项式。为证明这一点，只需在 $j=k-3$ 的情形下应用引理 3.6。事实上，$k-3\geq 1$，因为我们假设 $k\geq 4$，而条件 (3.18) 显然由定理 3.8 保证。□

5. 定理 1.3 的证明

证明引理 4.1 后，证明定理 1.3 就很容易了。首先，我们在 (3.2) 中令 $C_0=1$。也就是说，我们取

$$\alpha_0 = q, \quad \beta_0 = -q', \quad \gamma_0 = -\frac{1}{2}q^2q''. \tag{5.1}$$

由 (4.4) 和引理 4.1 可知，泛函

$$I_k = E_k - \frac{1}{2a}\beta_{k-2}q' - \frac{1}{2a}Q_k\Big(q,q',\dots,q^{(2k-4)}\Big)$$

在 $[0,T)$ 中关于时间演化保持不变。

考虑到（4.2）和（2.3），并注意到

$$\beta_{k-2}\int_{\mathbb{R}^n}|\xi|^2\Re(\overline{w}w_t)d\xi \;=\; \frac{1}{2a}\,\beta_{k-2}\,q'$$

我们可以将 I_k 表示为

$$\begin{aligned} I_k &:= \alpha_0 \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2k-2} \left(|w_t|^2 + \frac{1}{q^2}|\xi|^2|w|^2 \right) d\xi + \beta_0 \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2k-2} \Re(\overline{w} w_t) d\xi \\ &+ \sum_{i=1}^{k-2} \alpha_i \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2k-2i-2} \left(|w_t|^2 + \frac{1}{q^2}|\xi|^2|w|^2 \right) d\xi \\ &+ \sum_{i=1}^{k-3} \beta_i \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2k-2i-2} \Re(\overline{w} w_t) d\xi + \sum_{i=0}^{k-3} \gamma_i \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2k-2i-4} |w_t|^2 d\xi \\ &- \frac{1}{2a} Q_k\Big(q, q', \dots, q^{(2k-4)}\Big), \end{aligned} \tag{5.2}$$

其中，式 (5.2) 中的第二个求和，即 $\sum_{i=1}^{k-3} \beta_i \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2k-2i-2} \Re(w w_t) d\xi$，在 $k = 3$ 时为空。根据普朗歇尔定理，并结合 (5.1)，我们还可以写成：

$$\begin{aligned} I_k &:= q\|\nabla^{k-1} u_t\|^2 + \frac{\|\nabla^k u\|^2}{q} - q' \int_{\mathbb{R}^n} \nabla^{k-1} u \cdot \nabla^{k-1} u_t \, dx \\ &+ \sum_{i=1}^{k-2} \alpha_i \left(\|\nabla^{k-i-1} u_t\|^2 + \frac{\|\nabla^{k-i} u\|^2}{q^2} \right) + \sum_{i=1}^{k-3} \beta_i \int_{\mathbb{R}^n} \nabla^{k-i-1} u \cdot \nabla^{k-i-1} u_t \, dx \\ &+ \sum_{i=0}^{k-3} \gamma_i \|\nabla^{k-i-2} u_t\|^2 - \frac{1}{2a} Q_k\Big(q, q', \dots, q^{(2k-4)}\Big), \end{aligned} \tag{5.3}$$

其中

$$\begin{aligned} J_k &:= \sum_{i=1}^{k-2} \alpha_i \left(\|\nabla^{k-i-1} u_t\|^2 + \frac{\|\nabla^{k-i} u\|^2}{q^2} \right) + \sum_{i=1}^{k-3} \beta_i \int_{\mathbb{R}^n} \nabla^{k-i-1} u \cdot \nabla^{k-i-1} u_t \, dx \\ &+ \sum_{i=0}^{k-3} \gamma_i \|\nabla^{k-i-2} u_t\|^2 - \frac{1}{2a} Q_k\Big(q, q', \dots, q^{(2k-4)}\Big) \end{aligned} \tag{5.4}$$

按照定义 1.1 的含义，它是一个 $\leq k-1$ 阶泛函。

事实上，根据推论 3.9，我们知道 α_i、β_i 和 γ_i 分别是 q 及其 $q^{(h)}$ 阶导数的多项式，其中 $h \leq 2i$、$h \leq 2i+1$ 和 $h \leq 2i+2$。因此，表达式 (5.4) 中 q 的导数的最高阶为 $\leq 2k-4$。结合注 1.2，我们推知 J_k 是一个 $\leq k-1$ 阶泛函。

定理 1.3 的证明至此结束。

致谢。第一作者是意大利国家高等数学研究所（INdAM）全国数学分析、概率及其应用小组（GNAMPA）的成员，并获得意大利大学与研究部资助，资助项目为 PRIN2022（滚动项目）“偏微分方程中的异常及其应用”，项目代码：2022HCLAZ8 002，CUP：J53C24002560006。

参考文献

[1] A. Arosio、S. Panizzi、 *On the well-posedness of the Kirchhoff string*, 《美国数学会汇刊》，第348卷，第1期（1996），305-330。[2] C. Boiti、R. Manfrin、 *Notes on a paper of Pokhozhaev*, 《非线性》，第36卷（2023），5609–5620。

[3] C. Bonfiri, R. Manfrin, *A third-order conservation law for the Kirchhoff-Pokhozhaev equation*, 预印本（2025），https://doi.org/10.48550/arXiv.2512.12380；已提交发表。[4] R. Manfrin, *Quadratic forms for the Liouville equation $w_{tt}+\lambda^2 a(t)\,w=0$ with applications to Kirchhoff equation*, 《葡萄牙数学》（新系列）第65卷，第4期（2008），447-484。[5] J. D. Murray, *Aymtotic Analysis*, 《应用数学科学丛书》第48卷，施普林格出版社，纽约，1984。[6] S. Panizzi, *Low regularity global solutions for nonlinear evolution equations of Kirchhoff type*, 《数学分析及其应用杂志》第332卷（2007），1195-1215。[7] G. Perla Menzala, *On classical solutions of a quasilinear hyperbolic equatuion*, 《非线性分析：理论、方法与应用》3（1979），613-627。[8] S.I. Pokhozhaev, *Quasilinear hyperbolic Kirchhoff equations and conservation laws*, （俄文）《莫斯科动力学院学报》，第201期（1974），118-126。[9] S.I. Pokhozhaev, *The Kirchhoff quasilinear hyperbolic equation*, 《微分方程》，第21卷，第1期（1985），101-108（英文译本：《微分方程》，第21卷（1985），82-87）。

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA, UNIVERSITÀ DI FERRARA, VIA MACHIAVELLI N. 30, I-44121 FERRARA, ITALY *Email address*: chiara.bonfiti@unife.it

DIPARTIMENTO DI CULTURE DEL PROGETTO, UNIVERSITÀ IUAV DI VENEZIA, DORSODURO N. 2196, I-30123VENEZIA, ITALY*Email address*: manfrin@iuav.it