arXiv:2601.03096v1 [math.DG] 6 Jan 2026

具有旋转对称性的球面里奇环面

IURY DOMINGOS 和 IRENE I. ONNIS

Abstract. 本文研究 c-球面里奇度量，即其高斯曲率 K 满足

$$(K-c)\Delta K - |\nabla K|^2 - 4K(K-c)^2 = 0,$$

对于某个 $c > 0$。我们明确构造了这类具有旋转对称性的度量的一个二参数族，并证明同一个环面上可以实现无穷多个非等距例子。此外，我们还研究了这些度量作为 $\mathbb{S}^3$ 中紧致旋转曲面的诱导度量时的实现方式，并通过控制与等距浸入相关的周期函数，确立了嵌入的紧致球面里奇曲面的存在性。

1. Introduction

黎曼曲面 $(\Sigma,\ \mathrm{d}\sigma^2)$ 到常截面曲率为 c 的三维空间形式 $\mathbb{M}^3_c$ 中是否存在局部极小等距浸入，可以从内蕴角度加以研究。这种极小浸入存在的一个自然障碍来自高斯方程：也就是说，$\mathrm{d}\sigma^2$ 的高斯曲率 K 必须满足 $K \leq c$。

在 $\mathbb{R}^3$的情形下，G. Ricci-Curbastro [13] 证明，若 $K < 0$ 且 $\Delta\log(-K) = 4K$，则存在局部极小浸入。B. H. Lawson 将此结果推广，[7], 证明具有 $K < c$ 的曲面可局部极小浸入到 $\mathbb{M}^3_c$ 中，条件是 K 满足$\Delta\log(c-K) = 4K$，等价地，

$$(K-c)\Delta K - |\nabla K|^2 - 4K(K-c)^2 = 0. \tag{1.1}$$

当 $c = 0$ 时，这个条件通常称为里奇条件。

在本文中，我们将注意力限定于情形 $c > 0$。按照 Lawson [8], ，满足该方程的黎曼曲面 $(\Sigma,\ \mathrm{d}\sigma^2)$ 称为 c-球面里奇曲面，而 $\mathrm{d}\sigma^2$ 则称为 c-球面里奇度量。显然，该条件仅取决于度量，并不要求 $(K-c)$ 为负。

2020 数学学科分类号。53C42, 53C40。关键词与短语。里奇曲面、极小曲面、旋转曲面。作者部分获得巴西国家科学技术发展委员会（CNPq）项目资助，项目编号 409513/2023-7，并获得 ICTP-INDAM 2025年结对研究计划资助。I.I. Onnis 获得撒丁岛基金会资助，并部分获得意大利国家复苏与韧性计划 e.INS 下一代撒丁岛创新生态系统资助（CUP F53C22000430001，MUR 代码 ECS00000038）。

我们致力于构造具有旋转对称性的 c-球面里奇环面。除圆度量外，没有任何 c-球面里奇度量在$K - c) \neq 0$ 的任何点处具有。在亏格一情形中，已知的唯一实例构造于 [3]，其度量与 $\mathbb{R}^3$中的德洛内常平均曲率曲面所诱导的度量一致。

我们的构造基于以下形式的常微分方程的正解

$$(f')^2 + A\, f^2 + B\, f^{-2} = C,$$

其中常数 A，B，$C \in \mathbb{R}$ 经过适当选取。该方程也出现在对 $\mathbb{S}^3$ [10, 15] 中旋转常平均曲率（CMC）曲面的研究中，其中正解与旋转 CMC 曲面之间存在一一对应关系。

尽管 c-球面里奇曲面总是允许局部极小等距浸入截面曲率为 c的三维球面 $\mathbb{S}^3_c$，但我们旨在研究不受外在约束的完备浸入，并在 $\mathbb{S}^3_c$ 中构造明确的紧致例子。

本文结构安排如下：第 2 节中，我们固定记号并回顾广义里奇曲面的已有结果。随后，我们聚焦于类型为（a，0，c）的广义里奇翘曲度量，用翘曲函数表述广义里奇条件，由此得到一个三阶微分方程。

第 3 节中，我们将对翘曲函数的研究化归为一个相关的自治系统，并寻求正周期解，由此构造亏格一曲面上具有旋转对称性的广义里奇度量二参数族。这种内蕴构造重新得到所有此前已知的类型为（a，0，c）的广义里奇环面例子。

在第 4 节中，我们研究 c-球面里奇曲面（类型 $(4,0,c)$），并明确构造了一个旋转度量的二参数族。定理 4.5 表明，该族中有无穷多个非等距度量可以实现于同一个环面上。

最后，在第 5 节中，我们研究这些度量可实现为 $\mathbb{S}^3$ 上的紧致旋转曲面的诱导度量所需满足的条件（定理 5.3和 5.6），分析与等距浸入相关的周期函数，并对可容许参数加以限制，以确保得到嵌入例子。

致谢。 作者谨向 Oscar Perdomo 致以谢意，感谢他提出宝贵建议，并提醒我们关注第 5 节讨论的嵌入例子。I. Domingos 还谨向卡利亚里大学数学系表示诚挚谢意，本研究始于该系；同时感谢阿卜杜斯·萨拉姆国际理论物理中心（ICTP）在 2025年6月研究伙伴计划期间给予热情接待，本研究亦于该计划期间完成。

2. Preliminaries

2.1. **具有旋转对称性的广义里奇度量**。 给定一个光滑连通的黎曼曲面（Σ，$\mathrm{d}\sigma^2$）以及一点（a，b，c）$\in \mathbb{R}^3$，例如在 [3], 度量 $\mathrm{d}\sigma^2$ 的定义中，若其高斯曲率是类型为（a，b，c）的广义里奇度量，则称该度量

K 满足以下方程:

$$(K-c)\Delta K - \|\nabla K\|^2 - (a\,K+b)(K-c)^2 = 0, \tag{2.1}$$

其中，∇ 和 Δ 分别表示 $\mathrm{d}\sigma^2$ 的梯度和 Laplace–Beltrami 算子。在这种情况下，$(\Sigma,\ \mathrm{d}\sigma^2)$ 称为类型为 $(a,\ b,\ c)$ 的广义 Ricci 曲面。

特别地，类型为 $(4,\ 0,\ 0)$ 的广义 Ricci 曲面就是 [9] 意义下的里奇曲面。因此，方程（2.1）称为类型为 （$a,\ b,\ c$）的广义 Ricci 条件。

我们需要回顾一些关于广义 Ricci 曲面的结果和重要事实，这些内容将在本文中用到；关于更详细的阐述，请参见 [3]。首先，注意在 $(K-c)$ 不为零的开集上，

$$\Delta \log|K-c| = \frac{(K-c)\Delta K - |\nabla K|^2}{(K-c)^2}$$

因此，方程（2.1）等价于

$$\Delta \log|K-c| = a\,K+b. \tag{2.2}$$

此外，在广义 Ricci 曲面上，要么 $K=c$，要么 $(K-c)$ 的零点是孤立的。特别地，函数 $(K-c)$ 不变号。

由（2.1）可以直接看出，给定一个类型为（σ^2 的广义里奇度量（$a,\ b,\ c$）以及 $\eta>0$，那么 $\eta\,\mathrm{d}\sigma^2$ 是一个类型为（$a,\ b/\eta^2,\ c/\eta^2$）的广义里奇度量。因此，在 $b=0$的情况下，除缩放外，在研究这些度量时，只有 c 的符号是相关的。此外，具有常高斯曲率 K 的度量是类型为（$a,\ b,\ c$）的广义里奇度量，当且仅当 $K=c$ 或 $a\,K+b=0$。

就拓扑而言，广义里奇条件的存在可能会对带有此类条件的、具有非恒定高斯曲率的紧致可定向曲面的存在性施加限制。例如，仅限于 $b=0$的情形，可得到以下结果:

- 对于类型为（$a,\ 0,\ c$）的紧致广义 Ricci 球面：– 若 $c=0$，则 $a\in -2\mathbb{N}^*$ 是必要且充分条件；– 若 $c\neq 0$，则 $a\in -\mathbb{N}^*$ 是必要条件，而 $a\in -2\mathbb{N}^*$ 是充分条件。

- 对于亏格为 1 的曲面，必要且充分条件是 $a\,c>0$。
- 对于亏格为 $g\geq 2$ 的紧致曲面，– 若 $c\leq 0$，则（$g-1$）$a\in\mathbb{N}^*$ 是必要且充分条件；– 若 $c>0$，则（$g-1$）$a\in\mathbb{N}^*$ 是必要条件。

特别地，在具有非常高斯曲率的（$4,\ 0,\ c$）型广义 Ricci 曲面这一类中，不存在球面；只有当 $c>0$ 时才会出现环面；然而，具有 $g\geq 2$ 的紧曲面却大量存在。

2.2. **SO(2)不变度量**。从现在起，我们将注意力转向具有旋转对称性的 $(a,0,c)$ 型广义里奇度量。

下文中，我们用 $\mathbb{S}^1(r)$ 表示 $\mathbb{R}^2$ 中半径为 r的圆。为方便起见，我们令 $\mathbb{S}^1 = \mathbb{S}^1(1)$。注意，对于 $r > 0$， $\mathbb{S}^1(r) \cong \mathbb{R}/2\pi r\mathbb{Z}$ ，其中 $\mathbb{Z}$ 表示所有整数的集合。

令 $I \subset \mathbb{R}$ 为一个开区间，并考虑扭曲度量 $\mathrm{d}\sigma^2 = \mathrm{d}s^2 + f(s)^2\,\mathrm{d}t^2$，其中 $f : I \to \mathbb{R}$ 是一个正光滑函数，且 $t \in \mathbb{S}^1$。我们可以定义特殊正交群 $\mathbf{SO(2)}$ 在曲面 $I \times \mathbb{S}^1$ 上的一个作用，其轨道恰为 $\{s\} \times \mathbb{S}^1$，其中 $s \in I$。这是一个等距作用，我们称 $\mathrm{d}\sigma^2$ 为**旋转对称度量**。

我们将讨论范围限制在 $(K - c)$ 不为零的任意开集上。我们注意到，用函数 f表示时，广义 Ricci 条件的形式较为简洁。通过直接计算 $\mathrm{d}\sigma^2$并利用其高斯曲率的表达式 $K = -f''/f$，方程 (2.2) 可得

$$\left[f\,(\log|K - c|)'\right]' + a\,f'' = 0,$$

其中 $'$ 表示对 s求导。对上述方程积分，并利用 $f^a(K - c) = -f^{a-1}(f'' + cf)$，寻找类型为 $(a, 0, c)$ 的广义里奇度量 $\mathrm{d}\sigma^2 = \mathrm{d}s^2 + f(s)^2\,\mathrm{d}t^2$，等价于寻找一个正解 f: $I \to \mathbb{R}_+$，使其满足

$$\left[f^{a-1}(f'' + cf)\right]' - A\,f^{a-2}(f'' + cf) = 0, \quad \text{for} \quad A \in \mathbb{R}. \tag{2.3}$$

注 2.1。 若 f： $I \to \mathbb{R}$ 是满足 $f'' + c\,f = 0$ 于 I的正光滑函数，则它是方程（2.3）的一个特解。在这种情况下，度量 $\mathrm{d}\sigma^2$ 具有常高斯曲率 c。

注 2.2。 对于（a， b， c） $=(4,\ 0,\ 0)$，满足里奇条件的旋转不变度量（其含义见 [9], ）由第一作者进行了研究和分类，见[4, 5]。在这种情况下，上述方程等价于以下一阶常微分方程

$$f'(s)f(s) = A\,f(s) + B\,s + C,$$

对于适当的 A， B， $C \in \mathbb{R}$。

2.3。 **相关的自治系统**。 通过令 $A = 0$，方程（2.3可导出一个自治二阶微分方程

$$f'' = m\,f^{1-a} - c\,f, \qquad m \in \mathbb{R}, \tag{2.4}$$

其解在 $m = 0$时给出一个具有常高斯曲率的度量。为处理一般情形，对于固定的 $m \in \mathbb{R}^*$ ，问题可归结为分析以下非线性系统

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = m\,x^{1-a} - c\,x. \end{cases} \tag{S_m}$$

（S_m）的平衡点是满足 $m\,x_*^{1-a} - c\,x_* = 0$ 的点（x_*,0）， 它们对应于常值解 $x\,(s) = x_*$ 和 $y\,(s) = 0$，前提是 x_* 有定义。我们可以

验证系统（S_m）是守恒的，因此总能量 $E_m(x,y) = y^2/2 + P_m(x)$ 沿其解保持守恒，其中

$$P_m(x) = \begin{cases} -m\log x + \dfrac{c\,x^2}{2}, & \text{when } a = 2, \\ -\dfrac{m\,x^{2-a}}{2-a} + \dfrac{c\,x^2}{2}, & \text{when } a \neq 2, \end{cases} \tag{2.5}$$

是（S_m）的势函数。因此，任意解（$x(s)$ $y(s)$）都满足 $E_m(x(s)\ y(s)) = \ell$，其中某个 $\ell \in \mathbb{R}$。此外，给定初始条件（$x(0)$ $y(0)$）$= (x_0, y_0)$，一条非空曲线 $\{(x,y) : E_m(x,y) = \ell\}$ 确定系统的一个唯一解，其中ℓ 满足 $(x_0, y_0) \in \{(x,y) : E_m(x,y) = \ell\}$。

3. 构造广义里奇环面

在讨论如何构造具有旋转对称性的（a，0，c）型紧致广义里奇环面之前，我们先说明为何直接聚焦于亏格 1 的情形。

考虑亏格 0 的情形，此时假设 $a \in -\mathbb{N}^*$。设（Σ，$\mathrm{d}\sigma^2$）是一个黎曼 2-球面，将其视为扭曲积 $(0,\ \delta) \times \mathbb{S}^1$，并赋予度量 $\mathrm{d}s^2 + f(s)^2\,\mathrm{d}t^2$。这里，$f(s)$ 是一个可平滑延拓至 $[0,\delta]$ 的正函数。这意味着 $f > 0$ 在 $(0,\ \delta)$ 上成立，并且满足

$$f(0) = f(\delta) = 0, \quad f'(0) = -f'(\delta) = 1, \quad \text{and} \quad f^{(2n)}(0) = f^{(2n)}(\delta) = 0, \tag{3.1}$$

对所有 $n \in \mathbb{N}^*$。这些条件确保度量 $\mathrm{d}s^2 + f(s)^2\,\mathrm{d}t^2$ 在$[0,\delta] \times \mathbb{S}^1$ (例如，参见 [12])。

为了在 Σ 上得到类型为 $(a, 0, c)$ 的里奇度量，我们寻求一个光滑的非负函数f: $[0,\delta] \to \mathbb{R}$，使得 $f(s)$ 是方程 (2.4) 在 $(0,\delta)$ 上的解，并满足 (3.1) 中的条件，其中 $\delta = \delta_{a,c,m} > 0$ 有待确定。由于 $m \in \mathbb{R}^*$，由 (3.1) 可知，$-a \in 2\mathbb{N}$ 是必要条件。此外，对于 $-a \in 2\mathbb{N}$，解存在，并且经过坐标变换后，它们与命题 5.7 中的解一致，其中 $\tau = 0]$ 对于 $c = 0$，以及命题 5.9] 中的解对于 $c \in \mathbb{R}^*$。因此，我们直接讨论亏格 1 的情形。

3.1. 具有 $a\,c > 0$的类型为$(a, 0, c)$的广义里奇环面。为了构造具有旋转对称性的类型为$(a, 0, c)$的广义里奇环面的例子，我们将分析限制在 $a\,c > 0$的情形。因此，我们通过令$t \in \mathbb{R}$ 来考虑万有覆盖，并寻求一个正的 T-周期解 $f : I \to \mathbb{R}$，使其满足(2.4)。得到这样的解后，度量 $\mathrm{d}s^2 + f(s)^2\,\mathrm{d}t^2$ 在 $\mathbb{R}^2$上定义了一个类型为$(a, 0, c)$的里奇度量。此外，由于 f 是一个 T-周期函数，对于任意格

$$\Gamma_T(\gamma_1, \gamma_2) = (T, \gamma_1)\,\mathbb{Z} \oplus (0, \gamma_2)\mathbb{Z},$$

对于（γ_1, γ_2）$\in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$，该解通过将度量 $\mathrm{d}s^2 + f(s)^2\,\mathrm{d}t^2$ 从 $\mathbb{R}^2$ 传递到商空间上，在环面 $\mathbb{R}^2/\Gamma_T(\gamma_1, \gamma_2)$上诱导出一个定义良好的（$a, 0, c$）型里奇度量。

我们在假设 S_m的条件下分析系统（ $m \in \mathbb{R}^*$ 满足 $c\,m > 0$。首先，该条件确保（S_m）存在唯一的平衡点，该平衡点对应于常值解（$x(s)$ $y(s)$ $=$ （x_*,0），其中 $x_* =$ $(m/c)^{1/a} > 0$。

由于我们关注的是 (S_m) 的周期解，而这些解由$E_m(x,\ y) = \ell$隐式定义，若对于某个$\ell \in \mathbb{R}$，等值集 $\{(x,\ y) : E_m(x,\ y) = \ell\}$ 非空，那么该集合便是描述一条围绕平衡点 (x_*，0) 的紧致曲线的等值集。下面我们建立该集合非空的条件。

命题 3.1. 设 a、c、$m \in \mathbb{R}^*$ 同号。当且仅当满足以下条件时，等值集 $\{(x$、$y)$：E_m $(x$、$y) = \ell\}$ 是围绕平衡点 $(x_*$、$0)$ 的一条紧致光滑曲线：

$$P_m(x_*) < \ell < \lim_{x\to 0} P_m(x),$$

其中，$P_m(x)$ 是(S_m)的势函数。

证明。令 $P_m(x)$ 为式(2.5)中定义的势函数，其中 $x \in (0,\ +\infty)$。根据假设，a、c、$m \in \mathbb{R}^*$ 同号，因此可以验证，$P_m(x)$ 在 $x_* = (m/c)^{1/a}$处取得最小值，在 (0，x_*) 上递减，并在 (x_*，$+\infty$) 上递增。此外：

(1) 若 $a \in (-\infty,\ 0) \cup (0,\ 2)$，则当 $x \to 0$ 时，$P_m(x_*) < 0$, $P_m(x)$ 趋近于 0，并在 $x \to +\infty$ 时发散至 $+\infty$。(2) 若 $a \geq 2$，则 $P_m(x)$ 在 $x \to 0$ 或 $x \to +\infty$ 时发散至 $+\infty$。

因此，当且仅当所述条件成立时，等值集 $\{(x,\ y) : E_m(x,\ y) = \ell\}$ 才定义一条围绕平衡点 (x_*，0) 的紧致光滑曲线。□

由命题 3.1 可知，系统 (S_m) 在 (0，$+\infty$) 内存在一个周期解单参数族 $\times \mathbb{R}$。由此族可导出一个具有旋转对称性的 (a，0，c) 型广义里奇度量二参数族。具体而言，令 a, $c \in \mathbb{R}^*$，其中 $a\,c > 0$，且 m，$\ell \in \mathbb{R}$ 使得 $c\,m > 0$ 且

$$\min P_m(x) < \ell < \lim_{x\to 0} P_m(x).$$

我们用（$f_{m,\,\ell}$（s） $f'_{m,\,\ell}$（s））表示包含于等值集 $\{$（x，y）E_m（x，y） $= \ell\}$中的周期解，其最小周期为 $T_{m,\,\ell} > 0$。根据构造，$f_{m,\,\ell}$（s）是方程 $f'' = m\,f^{1-a} - c\,f$ 的正的全局解，而 $T_{m,\,\ell}$ 可通过以下方式计算：

$$T_{m,\ell} = \sqrt{2}\int_{x^-_{m,\ell}}^{x^+_{m,\ell}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\ell - P_m(x)}}, \tag{3.2}$$

其中，$x^-_{m\,,\,\ell}$ 和 $x^+_{m\,,\,\ell}$ 是 P_m（x） $= \ell$的两个正根，且 $x^-_{m\,,\,\ell} < x^+_{m\,,\,\ell}$。

给定（γ_1，γ_2） $\in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$，令 $\Gamma_{T_{m,\,\ell}}(\gamma_1,\ \gamma_2) = (T_{m,\,\ell},\ \gamma_1)\,\mathbb{Z} \oplus (0,\ \gamma_2)\mathbb{Z}$ 为 $\mathbb{R}^2$中的一个格。我们陈述如下结果：

命题 3.2。 设 $a, c \in \mathbb{R}^*$，其中 $a\,c > 0$。那么，存在一个二参数族的广义里奇度量 $\{\mathrm{d}\sigma^2_{m,\,\ell}\}$ 其类型为 $(a,0,c)$，定义在 $\mathbb{R}^2$ 上，具有旋转对称性，其形式为

$$\mathrm{d}\sigma^2_{m,\ell} = \mathrm{d}s^2 + f_{m,\ell}(s)^2\,\mathrm{d}t^2,$$

其中 $f_{m,\ell}$ 是方程 $f'' = m\,f^{1-a} - c\,f$ 在能量为 ℓ 时的正 $T_{m,\ell}$-周期解。此外，给定 $(\gamma_1, \gamma_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, $\mathbb{R}^2/\Gamma_{T_{m,\ell}(\gamma_1,\gamma_2)}$ 赋予度量 $\mathrm{d}\sigma^2_{m,\ell}$ 是一个类型为 $(a, 0, c)$ 的广义里奇环面。

证明。我们注意到，$\mathrm{d}\sigma^2_{m,\ell}$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上定义了一个类型为 $(a,0,c)$ 的广义里奇度量。由于 $f_{m,\ell}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的 $T_{m,\ell}$-周期函数，度量 $\mathrm{d}\sigma^2_{m,\ell}$ 可下降到环面 $\mathbb{R}^2/\Gamma_{T_{m,\ell}(\gamma_1,\gamma_2)}$ 上，其中 $(\gamma_1, \gamma_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$。□

注 3.3。上述结果包含 [3, 例 5.13], 中所介绍的那类里奇度量，当 $m = c$ 时，这类度量称为德洛内型度量。具体而言，令 $F_{m,\ell}(s)$ 定义为

$$F_{m,\ell}(s) = \int_0^s \frac{\mathrm{d}\varsigma}{f_{m,\ell}(\varsigma)}.$$

由于 $f_{m,\ell}(s)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的 $T_{m,\ell}$-周期函数，因此它有界，从而 $f_{m,\ell}(s)^{-1}$ 也有界。此外，函数 $F_{m,\ell}(s)$ 满足

$$F_{m,\ell}(s + n\,T_{m,\ell}) = F_{m,\ell}(s) + n\,F_{m,\ell}(T_{m,\ell}), \quad \text{for all } n \in \mathbb{Z}.$$

因此，$F_{m,\ell}$ 是从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$的递增微分同胚。所以 $(s,t) \mapsto z = u(t) + i\,v(s)$，其中 $u(t) = t$且 $v(s) = F_{m,\ell}(s)$，定义了 $\mathbb{R}^2$ 与 $\mathbb{C}$之间的微分同胚。利用共形参数 $z = u+iv$，$\mathbb{C}$ 上的度量 $\mathrm{d}\sigma^2_{m,\ell}$ 可表示为 $e^{-2y}|\mathrm{d}z|^2$，其中$y\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ 是由 $y(u + i\,v) = -\log f_{m,\ell}(s(v))$ 定义的光滑函数。$e^{-2y}|\,\mathrm{d}z|^2$的高斯曲率由 $K = 4e^{2y}\,y_{z\bar{z}}$ 给出，并且由于 $f_{m,\ell}$满足 $f'' = m\,f^{1-a} - c\,f$，我们计算得

$$e^{-a\,y}(K - c) = -m.$$

此外，直接计算可知，$y(v)$ 是

$$\ddot{y} = c\,e^{-2y} - m\,e^{(a-2)y},$$

其中，点表示对 v 求导。特别地，当 $m = c$ 时，我们得到德洛内型度量。

4. The spherical Ricci tori

从本节开始，我们将重点讨论具有旋转对称性的球面里奇环面。回顾一下，固定 $c > 0$ 后，若黎曼曲面（Σ，$\mathrm{d}\sigma^2$）的高斯曲率 K 满足

$$(K - c)\,\Delta K - |\nabla K|^2 - 4K\,(K - c)^2 = 0.$$

在此背景下，上述方程称为 c-球面里奇条件，而度量 $\mathrm{d}\sigma^2$ 称为 c-球面里奇度量。

由于每个 c-球面里奇曲面都是类型为 $(4,0,c)$ 的广义 Ricci 曲面，且$c > 0$，由命题 3.1 可知，对于固定的 $c > 0$，存在一个二参数族 $\{\mathrm{d}\sigma^2_{m,\ell}\}$ 的 c-球面 Ricci 度量，其表达式为

$$\mathrm{d}\sigma^2_{m,\ell} = \mathrm{d}s^2 + f_{m,\ell}(s)^2\,\mathrm{d}t^2,$$

其中 $f_{m,\ell}$是方程 $f'' = m\,f^{-3} - c\,f$ 的正 $T_{m,\ell}$-周期解，能量为 ℓ。等价地，$f_{m,\ell}$ 满足一阶微分方程

$$(f')^2 + c\,f^2 + m\,f^{-2} = 2\ell. \tag{4.1}$$

在这种情况下， m 必须为正，因为 $c > 0$，且 $\ell > \sqrt{c\,m}$ 根据命题 3.1，可确保 $\ell^2 - c\,m > 0$。

4.1. **一个显式解族**。固定 $c > 0$，定义

$$\Lambda_c = \{(m, \ell) \in \mathbb{R}^2 : m > 0 \text{ and } \ell > \sqrt{c\,m}\}.$$

命题 4.1. 设 $c > 0$ 和$(m, \ell) \in \Lambda_c$。若 f 是方程(4.1)的周期解，则其最小周期 $T_{m,\ell}$ 为常数，且等于 $\pi/\sqrt{c}$。

证明。由于 $P_m(x) = (m\,x^{-2} + c\,x^2)/2$，引入变量 $u = c\,x^2 - \ell$，由此可计算最小周期 (3.2) $T_{m,\ell}$ 如下:

$$T_{m,\ell} = 2\int_{x^-_{m,\ell}}^{x^+_{m,\ell}} \frac{x\ \mathrm{d}x}{\sqrt{2\ell\,x^2 - cx^4 - \ell}} = \frac{1}{\sqrt{c}}\int_{-\sqrt{\ell^2 - c\,m}}^{\sqrt{\ell^2 - c\,m}} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{\ell^2 - c\,m - u^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{c}},$$

其中

$$x^{\pm}_{m,\ell} = \sqrt{\frac{\ell \pm \sqrt{\ell^2 - c\,m}}{c}}.$$

□

在下文中，对于 Λ_c 的元素，我们将给出方程（4.1）的一族周期解的显式形式。

引理 4.2。设 $c > 0$ 且 $(m, \ell) \in \Lambda_c$。则

$$f(s) = \sqrt{\frac{\ell + \sqrt{\ell^2 - c\,m}\,\sin(2\sqrt{c}\,s + c_1)}{c}}, \qquad c_1 \in \mathbb{R},$$

是一个正的、$\frac{\pi}{\sqrt{c}}$-周期解，满足方程（4.1），且在 $\mathbb{R}$上定义良好。此外，我们有

$$0 < \frac{\ell - \sqrt{\ell^2 - c\,m}}{c} \le f(s)^2 \le \frac{\ell + \sqrt{\ell^2 - c\,m}}{c}, \quad \textit{for all } s \in \mathbb{R}.$$

证明。令 $g(s) = f(s)^2$。对于 $c > 0$ 以及 $(m, \ell) \in \Lambda$，由方程（4.1）可得

$$g'(s)^2 = -4c\,g^2 + 8\ell\,g - 4m = 4c\left[\frac{\ell^2 - c\,m}{c^2} - \left(g(s) - \frac{\ell}{c}\right)^2\right].$$

对上式积分，得到

$$\arcsin\left(\frac{c\,g(s) - \ell}{\sqrt{\ell^2 - c\,m}}\right) = \pm 2\sqrt{c}\,s + c_1, \qquad c_1 \in \mathbb{R}.$$

由于 $g(s) = f(s)^2$, , 且正弦函数自变量中的符号可以吸收到常数c_1中，因此我们得到

$$f(s) = \sqrt{\frac{\ell + \sqrt{\ell^2 - c\,m}\,\sin(2\sqrt{c}\,s + c_1)}{c}}, \qquad c_1 \in \mathbb{R},$$

满足微分方程（4.1）。因此， f（s）是周期为$T = \pi/\sqrt{c}$的正周期函数，在 $\mathbb{R}$上定义良好。为了建立 f（s）^{2}, 的界，我们注意到它在

$$\frac{\ell + \sqrt{\ell^2 - c\,m}}{c}, \quad \text{when} \quad s = \frac{T}{4} + k\,T,$$

处达到最大值，并在

$$\frac{\ell - \sqrt{\ell^2 - c\,m}}{c}, \quad \text{when} \quad s = \frac{3T}{4} + k\,T,$$

处达到最小值，其中 $k \in \mathbb{Z}$。此外，由于 $\sqrt{c\,m} < \ell$，下界为正。这就完成了证明。□

注 4.3。 这些显式解随参数（m， ℓ） $\in \Lambda_c$连续变化。常值解为 $f = (m/c)^{1/4} = (\ell/c)^{1/2}$, 对应于退化情形 $\ell^2 = c\,m$。此外，当 $m = 0$ 且 $\ell > 0$时，相应的解 f 连续，但有无穷多个尖点，因此在 $\mathbb{R}$上并不光滑。

为了研究二参数度量族 $\{\mathrm{d}\sigma^2_{m,\,\ell}\}$，我们使用命题 4.2 给出的显式解，并假设 $c_1 = 0$。固定 $c > 0$，考虑由下式给出的度量

$$\mathrm{d}\sigma^2_{m,\ell} = \mathrm{d}s^2 + f_{m,\ell}(s)^2\,\mathrm{d}t^2, \qquad (m,\ell) \in \Lambda_c,$$

and

$$f_{m,\ell}(s) = \sqrt{\frac{\ell + \sqrt{\ell^2 - c\,m}\,\sin(2\sqrt{c}\,s)}{c}}.$$

尽管度量 $\mathrm{d}\sigma^2_{m,\,\ell}$ 也取决于 c，为简洁起见，我们在记号中省略这一依赖关系。记 $K_{m,\,\ell}$ 为 $\mathrm{d}\sigma^2_{m,\,\ell}$的高斯曲率，由引理4.2 可知

$$K_{m,\ell}(s) - c = -m\,f_{m,\ell}(s)^4, \tag{4.2}$$

这意味着 $K_{m,\,\ell}(s) < c$。

注 4.4。 我们观察到两种极限情形。曲率满足 $K_{m,\,\ell}(s) = c$ 当且仅当 $m = 0$，而 $K_{m,\,\ell}(s) = 0$ 当且仅当 $\ell^2 = c\,m$。在后一种情形下，$f_{m,\,\ell}(s)$ 是由 $f_{m,\,\ell}(s) \equiv (m/c)^{1/4}$ 给出的常值解。

作为本次讨论的总结，我们以本文的主要结果之一结束本节。给定 $(\gamma_1,\ \gamma_2) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$, 我们证明存在一个二参数族

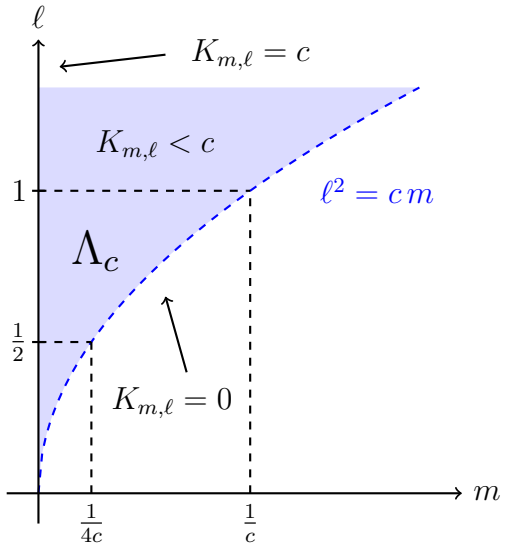

FIGURE 4.1. 参数的集合 Λ_c 。

of c-球面 Ricci 度量，可赋予环面 $\mathbb{R}^2/\Gamma_{\frac{\pi}{\sqrt{c}}}(\gamma_1, \gamma_2)$，且

$$\Gamma_{\frac{\pi}{\sqrt{c}}}(\gamma_1, \gamma_2) = \left(\frac{\pi}{\sqrt{c}}, \gamma_1\right)\mathbb{Z} \oplus (0, \gamma_2)\mathbb{Z},$$

其中 $(\gamma_1, \gamma_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$。

定理 4.5。设 $c > 0$ 且 $(\gamma_1, \gamma_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$。度量 $\{\mathrm{d}\sigma^2_{m,\ell}\}$，其中 $(m, \ell) \in \Lambda_c$，构成环面 $\mathbb{R}^2/\Gamma_{\frac{\pi}{\sqrt{c}}}(\gamma_1, \gamma_2)$ 上一族二参数的旋转不变 c-球面 *Ricci* 度量。此外，这一族中存在无穷多个彼此不等距的度量。

证明。定理的第一部分直接由前述结果以及方程（4.1）等价于类型为（4，0，c）的广义 Ricci 条件这一事实得出。事实上，根据命题 3.1，水平集 $\{(x, y): E_m(x, y) = \ell\}$ 是围绕平衡点的紧致光滑曲线。因此，周期解存在；其最小周期与 m 和 ℓ 均无关（命题 4.1），并可通过令 $c_1 = 0$，由引理 4.2 明确描述。因此，二参数族 $\{\mathrm{d}\sigma^2_{m,\ell}\}$ 定义了一组可赋予环面 $\mathbb{R}^2/\Gamma_{\frac{\pi}{\sqrt{c}}}(\gamma_1, \gamma_2)$ 的度量，对任意 $(\gamma_1, \gamma_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ 均成立。

此外，由关系式（4.2）可知，$(c - K_{m,\ell})$的取值范围为闭区间 $[L_1, L_2]$，其中 L_1 和 L_2 是给定的正数，具体为

$$L_1 = \frac{m\,c^2}{(\ell + \sqrt{\ell^2 - c\,m})^2} \qquad \text{and} \qquad L_2 = \frac{m\,c^2}{(\ell - \sqrt{\ell^2 - c\,m})^2}.$$

设 $(m,\ell),(m_*,\ell_*) \in \Lambda_c$ 满足 $\mathrm{d}\sigma^2_{m,\ell}$ 和 $\mathrm{d}\sigma^2_{m_*,\ell_*}$ 等距。由高斯绝妙定理可得 $L_1 = L_1^*$ 和 $L_2 = L_2^*$。此外，直接计算可得 $\sqrt{m}\,\ell_* = \sqrt{m_*}\,\ell$。

因此，对于固定的 $m_0 > 0$ 和 $\ell_0 > 0$，族 $\{\mathrm{d}\sigma^2_{m_0,\,\ell}\}$ 和 $\{\mathrm{d}\sigma^2_{m,\,\ell_0}\}$，其中 $(m_0,\ \ell)$，$(m,\ \ell_0) \in \Lambda_c$，定义了环面 $\mathbb{R}^2/\Gamma_{\frac{\pi}{\sqrt{c}}(\gamma_1,\ \gamma_2)}$ 上的单参数非等距度量族。

□

推论 4.6。每个环面 $\mathbb{S}^1(r_1)\times\mathbb{S}^1(r_2)$ 都具有一个 $\tilde{c}$-球面里奇度量，对任意 $\tilde{c} > 0$ 均成立。

证明。令 $c = 1/4r_1^2$ 且 $(\gamma_1,\ \gamma_2) = (0,\ 2\pi r_2)$。由于 $\mathbb{S}^1(r_1)\times\mathbb{S}^1(r_2) \cong \mathbb{R}^2/\Gamma_{2\pi r_1}(0,\ 2\pi r_2)$，定理 4.5 保证对于任意 $(m,\ \ell) \in \Lambda_c$，$\mathrm{d}\sigma^2_{m,\,\ell}$ 是环面上的 c-球面里奇度量。因此，缩放后的度量

$$\frac{1}{2r_1\sqrt{\tilde{c}}}\,\mathrm{d}\sigma^2_{m,\ell}$$

是 $\tilde{c}$ 球面里奇度量，定义在 $\mathbb{S}^1(r_1)\times\mathbb{S}^1(r_2)$ 上。 □

注记 4.7. 设 (m,ℓ) 满足 $\in \Lambda_c$ $4c\,m = (1-2\ell)^2$。令 $B^2 = 4\ell - 1$ 和 $H^2 = c$，可得 $\mathrm{d}\sigma^2_{m,\,\ell}$ 可写为

$$\mathrm{d}s^2 + \frac{\sqrt{1+B^2+2B\sin(2Hs)}}{2|H|}\,\mathrm{d}t^2,$$

也就是说，这族 $\{\mathrm{d}\sigma^2_{m,\ell}\}$ 度量由 $\mathbb{R}^3$中的德洛内曲面在 $4c\,m = (1-2\ell)^2$ 时诱导而成（例如参见 [6]）。

5. Spherical Ricci tori immersed in the 3-sphere

本节旨在将上一节构造的球面里奇环面实现为球面中的旋转不变曲面 $\mathbb{S}^3$。除 Lawson 的结果保证任何类型为 $(4,0,c)$ 的里奇度量都可极小局部等距浸入到常曲率为 c 的单连通三维空间形式中之外，值得注意的是，对于 $(c,m,2\ell) = (1+H^2, 1/D^2, 1-2H/D)$，方程 (4.1)

$$(f')^2 + c\,f^2 + m\,f^{-2} = 2\,\ell$$

在构造 $\mathbb{S}^3$中的常平均曲率浸入时发挥着重要作用。Otsuki 首先在 [10] 中针对 $H = 0$ 观察到这一点，后来 Wei 在 [15] 中针对 $H \neq 0$进行了推广。特别是，该方程在 $\mathbb{S}^3$ 中的常平均曲率旋转曲面与该微分方程的正解之间建立了一一对应关系（详细阐述请参见 [11] ）。

为此，我们固定 $c > 0$，并令 $\mathbb{S}^3_c$ 为截面曲率为 c的三维球面。为简便起见，我们有时采用归一化 $c = 1$。在这种情况下，我们记$\mathbb{S}^3 = \mathbb{S}^3_1$。

此外，我们将 $\mathbb{S}^3_c$ 与 $\mathbb{R}^4$中半径为 $1/\sqrt{c}$的球面等同，即

$$\mathbb{S}^3_c = \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x^2+y^2+z^2+w^2 = \frac{1}{c}\right\},$$

赋予来自 $\mathbb{R}^4$ 的诱导度量。

5.1. 旋转曲面。 给定一条测地线 $\gamma \subset \mathbb{S}^3_c$，设 $\{\phi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 为 $\mathbb{S}^3_c$ 的保持 γ 不变的一参数等距变换子群。不失一般性，我们可以假设 γ 是大圆 $\{(x,\ y,\ 0,\ 0) \in \mathbb{S}^3_c\}$，因此

$$\phi_t(x,y,z,w) = (x, y, z\cos t - w\sin t, z\sin t + w\cos t), \quad t \in \mathbb{S}^1,$$

由绕 γ 旋转角度 t 的旋转组成，其轨道是以 γ 为圆心的圆。因此，若 $\mathbb{S}^3_c$ 中的一个曲面在等距变换 $\{\phi_t\}$ 这一一参数子群的作用下保持不变，则称其关于 $\mathbb{S}^3_c$ 中的测地线 γ 具有旋转对称性，也称为旋转曲面。这样的曲面可局部参数化为

$$X(s,t) = \phi_t(\alpha(s)),$$

其中 $\alpha:\ I \subset \mathbb{R} \to (\mathbb{S}^2_c)_+$ 是全测地球面 $\mathbb{S}^2_c$ 的上半球中的一条正则曲线，该球面属于 $\mathbb{S}^3_c$ 并包含测地线 γ。曲线 α 被称为参数化 X 的轮廓曲线。

不失一般性，设 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to (\mathbb{S}^2_c)_+$ 是一条以弧长为参数、定义在包含 0 的开区间 $I \subset \mathbb{R}$ 上的正则曲线。固定 $(\mathbb{S}^2_c)_+ = \{(x,y,z,0) \in \mathbb{S}^3_c : z > 0\}$，于是 $\alpha(s) = (x(s)\ y(s)\ z(s), 0)$，其中 $z(s)$ 是正函数。首先注意到，经过积分后，α 完全由 $z(s)$ 确定。事实上，我们可以将 $x(s)$ 和 $y(s)$ 写成

$$\begin{cases} x(s) = \dfrac{1}{\sqrt{c}}\sqrt{1-c\,z(s)^2}\,\cos\theta(s), \\ y(s) = \dfrac{1}{\sqrt{c}}\sqrt{1-c\,z(s)^2}\,\sin\theta(s), \end{cases}$$

对于某个函数 $\theta : I \to \mathbb{R}$。此外，由于 α 以弧长为参数，因此 $\theta(s)$ 满足以下常微分方程：

$$\theta'(s)^2 = \frac{c - c^2\,z(s)^2 - c\,z'(s)^2}{[1-c\,z(s)^2]^2}.$$

经过沿测地线 γ 平移，并改变 α 的定向后，不妨设 $\theta(0) = 0$，且对所有 s，$\theta'(s) \geq 0$。因此，α 可参数化为

$$\alpha(s) = \left(\frac{1}{\sqrt{c}}\sqrt{1-c\,z(s)^2}\,\cos\theta(s), \frac{1}{\sqrt{c}}\sqrt{1-c\,z(s)^2}\,\sin\theta(s), z(s), 0\right)$$

其中 $\theta(s)$满足

$$\theta'(s) = \sqrt{c}\,\frac{\sqrt{1-c\,z(s)^2-z'(s)^2}}{1-c\,z(s)^2} \quad \text{and} \quad \theta(0) = 0. \tag{5.1}$$

因此，除全等变换外， $\mathbb{S}^3_c$ 中的任意旋转曲面 Σ 都可由 X 局部参数化为: $I\times\mathbb{S}^1\to\mathbb{S}^3_c$，其中

$$X(s,t)=\left(\sqrt{c^{-1}-z(s)^2}\,\cos\theta(s),\sqrt{c^{-1}-z(s)^2}\,\sin\theta(s),z(s)\cos t,z(s)\sin t\right)$$

对于某个光滑函数 $z(s)$: $I\to\mathbb{R}$ 满足 $0<z(s)<\frac{1}{\sqrt{c}}$，且其解$\theta(s)$在 (5.1)上有定义。 I 此外，利用参数化 $X(s,t)$，我们可以证明， Σ 上的诱导度量为

$$\mathrm{d}\sigma^2=\mathrm{d}s^2+z(s)^2\,\mathrm{d}t^2.$$

对于一个 适当的定向选择，我们计算出 H X的平均曲率 (s,t) s

$$H(s)=\frac{z(s)\,z''(s)+z'(s)^2+2c\,z(s)^2-1}{2z(s)\,\sqrt{1-c\,z(s)^2-z'(s)^2}}.\tag{5.2}$$

在 $\mathbb{S}^3_c$ 中，旋转曲面的极小方程的解构成一个单参数族 $\{z_j(s)\}_{j\in[0,1]}$，其中

$$z_j(s)=\sqrt{\frac{1+j\,\sin\left(2\sqrt{c}\,s\right)}{2c}}.\tag{5.3}$$

此外，Ripoll 在 [14, 定理 A] 中的结果指出， $\mathbb{S}^3_c$ 中的任意极小旋转曲面都与某个 $z_j(s)$ 生成的曲面全等，其中 $j\in[0,1]$. 根据方程 (5.1)，函数 $\theta_j(s)$可表示为

$$\theta_j(s)=\int_0^s\frac{\sqrt{2\,(1-j^2)\,c}}{(1-j\,\sin(2\sqrt{c}\,\varsigma))\sqrt{1+j\,\sin(2\sqrt{c}\,\varsigma)}}\,\mathrm{d}\varsigma,$$

因此，与 $z_j(s)$ 相关联的轮廓曲线为:

$$\alpha_j(s)=\left(\frac{1}{\sqrt{c}}\sqrt{1-c\,z_j(s)^2}\,\cos\theta_j(s),\frac{1}{\sqrt{c}}\sqrt{1-c\,z_j(s)^2}\,\sin\theta_j(s),z_j(s),0\right).$$

基于以上考虑，对 $\mathbb{S}^3_c$ 中极小旋转曲面的研究可分为三种不同情形:

(1) 对于 $j=0$，我们得到 $z_0(s)=1/\sqrt{2c}$ 和 $\theta_0(s)=\sqrt{2c}\,s$，它们定义在$\mathbb{R}$上。在这种情况下，当 $s\in[0,2\pi/\sqrt{2c}]$ 时，轮廓曲线 $\alpha_0(s)$ 是闭合的，而映射$X_0:\mathbb{S}^1(1/\sqrt{2c})\times\mathbb{S}^1\to\mathbb{S}^3_c$ 参数化了克利福德环面 $\mathbb{S}^1(1/\sqrt{2c})\times\mathbb{S}^1(1/\sqrt{2c})$。(2) 对于 $j=1$，我们得到 $\theta_1(s)=0$ 和

$$z_1(s)=\frac{\sin\left(\sqrt{c}\,s+\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{c}},$$

其中 $I=(-\frac{\pi}{4\sqrt{c}},\frac{3\pi}{4\sqrt{c}})$。轮廓曲线 $\alpha_1(s)$ 参数化了 $\mathbb{S}^3_c$ 的一段大圆。根据标准论证，$\mathrm{d}s^2+z_1(s)^2\,\mathrm{d}t^2$ 可延拓为 Ω 上的光滑度量 $=[-\frac{\pi}{4\sqrt{c}},\frac{3\pi}{4\sqrt{c}}]\times\mathbb{S}^1$，由此可知 $X_1:\Omega\to\mathbb{S}^3_c$ 参数化了全测地球面 $\{(x,0,z,w)\in\mathbb{S}^3_c\}$。

(3) 对于 $j \in (0, 1)$，我们有 $z_j(s)$ 是一个 $\frac{\pi}{\sqrt{c}}$-周期函数。函数 $\theta_j(s)$ 不是周期函数，并且轮廓曲线 $\alpha_j(s)$ 是闭曲线，当且仅当 $m\,\theta_j\left(\frac{\pi}{\sqrt{c}}\right) = 2n\pi$ 对所有 $m,\ n \in \mathbb{Z}$ 都成立，或者等价地，当

$$T(j) = \frac{\theta_j\left(\frac{\pi}{\sqrt{c}}\right)}{2\pi} \in \mathbb{Q}.$$

在此背景下，这些曲面既可以由闭曲线生成，也可以由非闭曲线生成，而这一问题则通过研究周期函数来分析T（j）。在这两种情形下，X_j（s，t）参数化了球面悬链面，因为它们的轮廓曲线在几何上被分类为球面悬链线。此外，闭球面悬链线是非嵌入的，具有二面体对称性，并在 $\mathbb{S}^3_c$（参见 [2, 推论 3.5 和定理 5.2]以了解更多详情）。

5.2. **将球面里奇环面浸入** $\mathbb{S}^3_c$。为将 c-球面里奇环面实现为 $\mathbb{S}^3_c$中的完备旋转不变曲面，我们使用定理 4.5 中给出的二参数度量族。首先由引理 4.2 可知，$0 < f_{m,\ell}(s)^2 < 1/c$ 当且仅当 $\ell < 1$ 且 $\ell < (1 + c\,m)/2$。因此，我们定义如下可容许参数对集合：

$$\Lambda'_c = \left\{(m, \ell) \in \mathbb{R}^2 : 0 < m < \frac{1}{c} \quad \text{and} \quad \sqrt{c\,m} < \ell < \frac{c\,m+1}{2}\right\} \subset \Lambda_c.$$

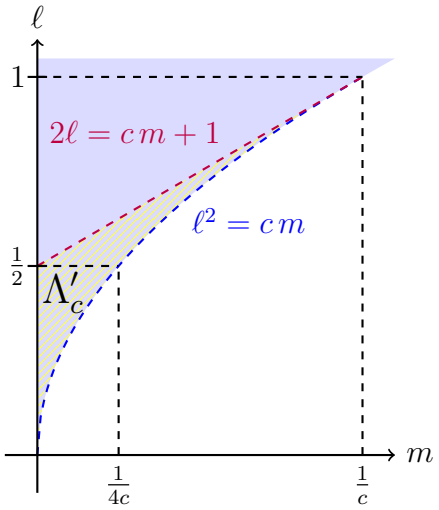

FIGURE 5.1. 可容许集Λ'_c。

注 5.1。对于每个 $c > 0$，我们有 $\{(m,\ 12) : 0 < m < \frac{1}{4c}\} \subset \Lambda'_c$。这些参数选择对应于 $\mathbb{S}^3_c$中极小旋转曲面的诱导度量，因为根据（5.3），函数 $z_j(s)$（其中 $j \in (0, 1)$）与 $f_{m,\ 12}(s)$ 一致，其中 $m \in (0,\ \frac{1}{4c})$。

接下来我们将证明，对于任意 $(m,\ell)\in\Lambda'_c$，与$f_{m,\ell}(s)$相关联的函数 $\theta_{m,\ell}(s)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的递增微分同胚。

命题 5.2. 设 $c>0$ *and* $(m,\ell)\in\Lambda'_c$. 则，函数

$$\theta_{m,\ell}(s)=\sqrt{c}\int_0^s\frac{\sqrt{m+(1-2\ell)\,f_{m,\ell}^2(\varsigma)}}{f_{m,\ell}(\varsigma)\,(1-c\,f_{m,\ell}^2(\varsigma))}\,\mathrm{d}\varsigma$$

是 $\mathbb{R}$ 上定义良好的递增微分同胚，满足

$$\theta_{m,\ell}\left(s+n\,\frac{\pi}{\sqrt{c}}\right)=\theta_{m,\ell}(s)+n\,\theta_{m,\ell}\left(\frac{\pi}{\sqrt{c}}\right),$$

对所有 $s\in\mathbb{R}$ 和 $n\in\mathbb{Z}$ 均成立。

证明。 考虑 $(m,\ell)\in\Lambda'_c$。由于

$$1-c\,f_{m,\ell}(s)^2-f'_{m,\ell}(s)^2=\frac{m}{f_{m,\ell}(s)^2}+1-2\ell,$$

引理 4.2 保证存在实常数 L_1 和 L_2 使得

$$L_1\le 1-c\,f_{m,\ell}(s)^2-f'_{m,\ell}(s)^2\le L_2.$$

此外，直接计算可得

$$L_1=1-\ell-\sqrt{\ell^2-c\,m}=1-c\,\max f_{m,\ell}(s)^2>0,$$

因为 $(m,\ \ell)\in\Lambda'_c$。因此，对于每个 $(m,\ \ell)\in\Lambda'_c$，存在正常数 M_1和 M_2，使得

$$M_1\le\sqrt{c}\,\frac{\sqrt{m+(1-2\ell)\,f_{m,\ell}^2(s)}}{f_{m,\ell}(s)\,(1-c\,f_{m,\ell}^2(s))}\le M_2.$$

根据柯西–利普希茨定理，存在唯一的光滑函数$\theta_{m,\ \ell}(s)$，其在 $\mathbb{R}$上有定义，且满足

$$\begin{cases}\theta'(s)=\sqrt{c}\,\dfrac{\sqrt{m+(1-2\ell)\,f_{m,\ell}(s)^2}}{f_{m,\ell}(s)\,(1-c\,f_{m,\ell}(s)^2)},\qquad \theta(0)=0,\end{cases}\tag{5.4}$$

对于每个 $(m,\ \ell)\in\Lambda'_c$。此外，由于 $\theta'_{m,\ \ell}(s)$ 有下界 $M_1>0$，可知 $\theta_{m,\ \ell}(s)\to\pm\infty$ 当 $s\to\pm\infty$ 时，因此 $\theta_{m,\ \ell}$ 是从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的递增微分同胚。现在考虑函数

$$\tilde{\theta}_{m,\ell}(s)=\theta_{m,\ell}\Big(s+\frac{\pi}{\sqrt{c}}\Big)-\theta_{m,\ell}\Big(\frac{\pi}{\sqrt{c}}\Big).$$

由于 $f_{m,\ell}(s)$是 $\frac{\pi}{\sqrt{c}}$-周期的，因此 $\theta_{m,\ell}(s)$ 也满足 $\mathbb{R}$ 上的（5.4）。由唯一性可知，$\tilde{\theta}_{m,\ell}(s)$ 必有 $\theta_{m,\ell}(s)=\theta_{m,\ell}(s)$。因此，对所有 $n\in\mathbb{Z}$,

$$\theta_{m,\ell}\left(s+n\,\frac{\pi}{\sqrt{c}}\right)=\theta_{m,\ell}(s)+n\,\theta_{m,\ell}\left(\frac{\pi}{\sqrt{c}}\right).$$

□

对于 $(m,\ell) \in \Lambda_c'$，考虑正则曲线 $\alpha_{m,\ell}\colon \mathbb{R} \to (\mathbb{S}_c^2)_+$，定义如下

$$\alpha_{m,\ell}(s) = \left(\frac{1}{\sqrt{c}} \sqrt{1 - c\, f_{m,\ell}(s)^2}\, \cos\theta_{m,\ell}(s), \frac{1}{\sqrt{c}} \sqrt{1 - c\, f_{m,\ell}(s)^2}\, \sin\theta_{m,\ell}(s), f_{m,\ell}(s),\ 0 \right).$$

我们注意到，$\alpha_{m,\ell}$ 是 $\mathbb{S}_c^3$ 中的闭曲线，当且仅当 $\theta_{m,\ell}(\frac{\pi}{\sqrt{c}})/2\pi \in \mathbb{Q}$；对于某个正整数 n，当 $\theta_{m,\ell}(\frac{\pi}{\sqrt{c}}) = 2\pi/n$ 时，它是嵌入的。根据上述讨论，我们得到以下定理：

定理 5.3. 设 $c > 0$ 和 $(m,\ell) \in \Lambda_c'$，并考虑由 $X_{m,\ell}(s,t) = \phi_t(\alpha_{m,\ell}(s))$ 定义的映射 $X_{m,\ell}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}_c^3$。那么，$X_{m,\ell}$ 定义了从 c-球面里奇曲面 $(\mathbb{R}^2, d\sigma_{m,\ell}^2)$ 到 $\mathbb{S}_c^3$ 的等距浸入。此外，若 $\theta_{m,\ell}(\frac{\pi}{\sqrt{c}})/2\pi \in \mathbb{Q}$，则 $X_{m,\ell}(\mathbb{R}^2)$ 是 $\mathbb{S}_c^3$ 中的紧曲面；对于某个正整数 n，当 $\theta_{m,\ell}(\frac{\pi}{\sqrt{c}}) = 2\pi/n$ 时，它是嵌入的。

注 5.4. 浸入 $X_{m,\ell}$ 当且仅当 $0 < m < 1/4c$ 和 $\ell = 1/2$ 时是极小的。

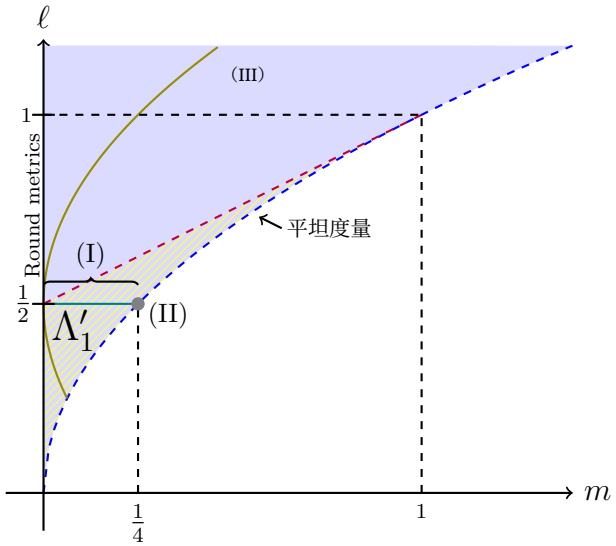

FIGURE 5.2. 可容许集 Λ_1'：（I）$\mathbb{S}^3$ 中旋转曲面上的极小曲面所诱导的度量；（II）克利福德环面的诱导度量；（III）$\mathbb{R}^3$ 中德洛内曲面所诱导的度量。

5.3. **一些显式例子。** 固定 $c = 1$。利用定理 5.3，只需找到参数 $(m,\ \ell) \in \Lambda_1'$ 使得

$$\frac{\theta_{m,\ell}(\pi)}{2\pi} \in \mathbb{Q}.$$

我们考虑函数 $\Theta : \Lambda_1' \to \mathbb{R}$，它由 $\Theta(m,\ell) = \theta_{m,\ell}(\pi)$ 定义。注意到 Θ 是连续的，且其被积函数在所有 $(m,\ell) \in \Lambda_1'$ 上连续且定义良好，并且

$s \in \mathbb{R}$。此外，通过利用引理4.2显式计算 $\Theta(m,\ell)$ 的界，可以验证

$$\lim_{m\to\ell^2}\Theta(m,\ell)=\frac{\pi}{\sqrt{1-\ell}},\quad \text{for each } \ell\in(0,1),$$

and

$$\lim_{m\to 0}\Theta(m,\ell)=\pi,\quad \text{for each } \ell\in\left(0,\tfrac{1}{2}\right].$$

注 5.5。特别地，对于 $\ell \le \frac{1}{2}$，不存在嵌入例子。事实上，对于 $(m,\ell)\in\Lambda_1'$ 且满足 $\ell\in\left(0,\frac{1}{2}\right]$，条件 $\theta_{m,\ell}(\pi)=\frac{2\pi}{n}$ 成立，当且仅当

$$\pi<\frac{2\pi}{n}<\frac{\pi}{\sqrt{1-\ell}}.$$

这个不等式迫使 $n=1$ 和 $4<\frac{1}{1-\ell}$，这是不可能的。在特殊情形 $\ell=\frac{1}{2}$ 下，函数 $m\mapsto\Theta(m,\frac{1}{2})$ 是 $\mathbb{S}^3$ 中的旋转极小曲面的周期函数，它单调递增，并将 $(0,\frac{1}{4})$ 映射到 $(\pi,\sqrt{2}\pi)$（参见 [1, 10, 11]）。

接下来我们证明，对于 $\ell>1/2$，存在嵌入紧致例子。

定理 5.6。对于每个 $m\in(0,\frac{9}{16})$，存在 $\ell\in(\frac{1}{2},\frac{25}{32})$ 使得 $(m,\ell)\in\Lambda_1'$ 且 $\Theta(m,\ell)=2\pi$。因此，对于此类参数 (m,ℓ)，浸入 $X_{m,\ell}$ 定义了 $\mathbb{S}^3$ 中一个嵌入的紧致球面里奇曲面。

证明。固定 $m\in(0,1)$。由引理 4.2，显式计算 $\Theta(m,\ell)$ 的界后，我们得到

$$\lim_{\ell\to\sqrt{m}}\Theta(m,\ell)=\frac{\pi}{\sqrt{1-\sqrt{m}}}.$$

因此，对于 $0<m<\frac{9}{16}$，此极限满足 $\lim_{\ell\to\sqrt{m}}\Theta(m,\ell)<2\pi$。另一方面，对于固定的 $m\in(0,1)$，可得

$$\lim_{\ell\to\frac{m+1}{2}}\Theta(m,\ell)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}g(m,\varsigma)\,\mathrm{d}\varsigma+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}g(m,\varsigma)\,\mathrm{d}\varsigma,$$

其中

$$g(m,\varsigma)=\frac{2\sqrt{m}}{\sqrt{1-m}\,\sqrt{1-\sin(2\varsigma)}\,\sqrt{1+m+(1-m)\sin(2\varsigma)}}.$$

尽管这两个积分都是反常积分，但它们可以显式求值，因为

$$\int g(m,\varsigma)\,\mathrm{d}\varsigma=\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{1-m}}\tanh^{-1}\left(\frac{\cos(2\varsigma)}{\sqrt{1-\sin(2\varsigma)}\,\sqrt{1+m+(1-m)\sin(2\varsigma)}}\right).$$

因此，

$$\lim_{\ell\to\frac{m+1}{2}}\Theta(m,\ell)=\lim_{\varepsilon\to0^+}\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}-\varepsilon}g(m,\varsigma)\,\mathrm{d}\varsigma+\int_{\frac{\pi}{4}+\varepsilon}^{\pi}g(m,\varsigma)\,\mathrm{d}\varsigma\right)$$
$$=\lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{2\sqrt{m}}{\sqrt{1-m}}\tanh^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}\,\cos\varepsilon}{\sqrt{1+m+(1-m)\cos(2\varepsilon)}}\right)=+\infty.$$

由连续性可知，对于每个 $m\in(0,\ 9\ 16)$ 都存在 $\ell\in(\sqrt{m},\ \frac{m+1}{2})$，使得$\Theta(m,\ \ell)=2\pi$。最后，注记 5.5保证了 $\ell\in(\ 1\,2,\ 2532)$，从而完成证明。□

通过对 $\Theta(m,\ \ell)$ 进行数值分析，我们能够构造出一些显式的 1-球面里奇环面例子。下面我们给出一个浸入例子和一个嵌入例子，并通过将 $\mathbb{S}^3$ 立体投影到 $\mathbb{R}^3$来加以说明。

例 5.7。 设 $m=0.51$。对于 $\ell=0.73$，我们发现 $\Theta(m,\ \ell)=2\pi$。在此情况下，母曲线是一条位于全测地二维球面的上半球内的闭嵌入曲线 $\mathbb{S}^2\subset\mathbb{S}^3$。

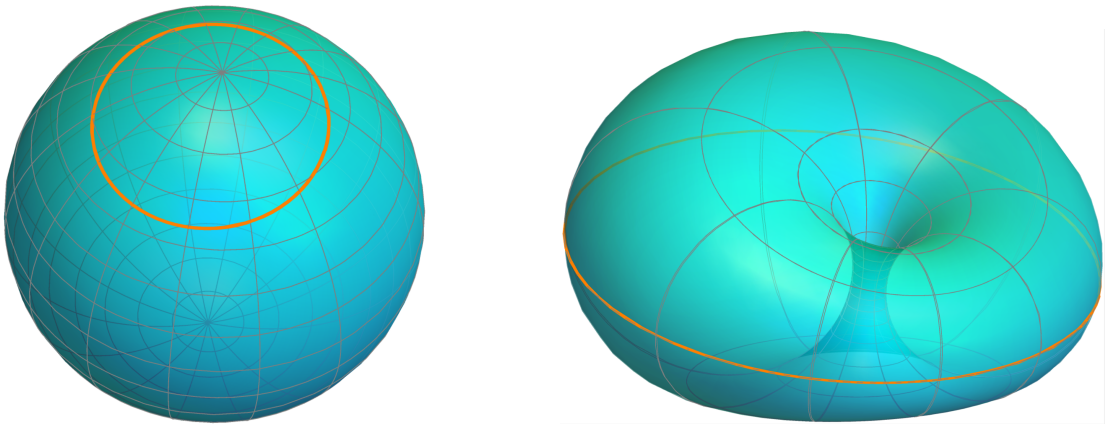

FIGURE 5.3. 母曲线和嵌入的 1-球面里奇环面，其中$m=0.51$ 和 $\ell=0.73$。

例 5.8. 设 $m=0.75$。对于 $\ell=0.8700024$，我们发现 $\Theta(m,\ \ell)=3\pi$。在此情形下，母曲线是一条闭浸入曲线，位于全测地二维球面 $\mathbb{S}^2\subset\mathbb{S}^3$ 的上半球内。

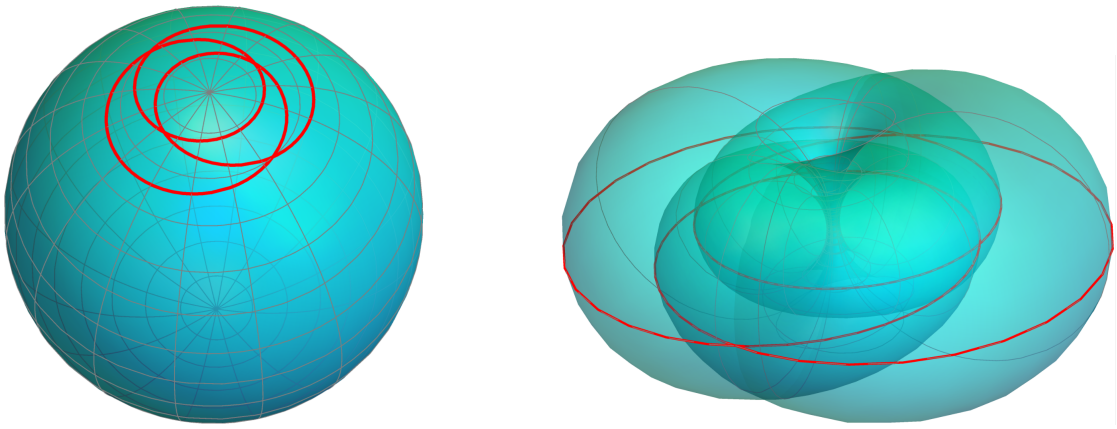

FIGURE 5.4. 母曲线以及浸入的1-球面里奇环面，其中$m = 0.75$ 和 $\ell \approx 0.87$。

REFERENCES

1. Ben Andrews 和 Haizhong Li，三维球面中的嵌入常平均曲率环面，J. Dif- ferential Geom. **99**(2015)，第 2 期，169–189。MR 3302037 2. Ildefonso Castro、Ildefonso Castro-Infantes 和 Jes´us Castro-Infantes，三维球面中的螺旋极小曲面：一种基于球面曲线的方法，Rev. R. Acad. Cienc. Exactas F´ıs. Nat. Ser. A Mat. RACSAM **118**(2024)，第 2 期，论文编号 77，21 页。MR 4721840 3. Beno ̂ıt Daniel 和 Yiming Zang，广义里奇曲面，J. Geom. Anal. **34** (2024)，第 8 期，论文编号 255，35 页。MR 4755559 4. Alcides de Carvalho、Iury Domingos 和 Roney Santos，直纹里奇曲面与常挠率曲线，Ann. Global Anal. Geom. **67** (2025)，第 2 期，论文编号 13，13 页。MR 4875703 5. Iury Domingos、Roney Santos 和 Feliciano Vit´orio，旋转里奇曲面，Ann. Mat. Pura Appl. (4) **203** (2024)，第 5 期，2075–2093。MR 4797285 6. Katsuei Kenmotsu，常平均曲率曲面，数学专著译丛，第 221 卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2003 年，译自 2000 年日文原版，译者为 Katsuhiro Moriya，作者修订。MR 2013507 7. H. Blaine Lawson, Jr.，在 S^3 中的完备极小曲面，Ann. of Math. (2) **92**(1970)，335–374。MR 270280 8. ，极小曲面的若干内蕴刻画，J. Analyse Math. **24**(1971)，151–161。MR 284922 9. Andrei Moroianu 和 Sergiu Moroianu，里奇曲面，Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5) **14**(2015)，第 4 期，1093–1118。MR 3467650 ˆ 10. Tominosuke Otsuki，常曲率黎曼流形中的极小超曲面，Amer. J. Math. **92** (1970)，145–173。MR 264565 11. Oscar M. Perdomo， 中具有常平均曲率的旋转曲面，J. Geom. Anal.**26**(2016)，第 3 期，2155–2168。MR 3511472 12. Peter Petersen，黎曼几何，第三版，数学研究生教材，第 171 卷，施普林格，查姆，2016 年。MR 3469435 13. Gregorio Ricci-Curbastro，关于曲面的内蕴理论，特别是二次曲面的内蕴理论，Atti R. Ist. Ven. di Lett. **Arti 6** (1895)，445–488。14. Jaime B. Ripoll， 中极小旋转曲面的唯一性，Amer. J. Math. **111**(1989)，第 4 期，537–547。MR 1011548

15. Guoxin Wei，单位球面中具有常平均曲率的完备超曲面，《Monatsh. Math.》**149**（2006），第 3 期，251–258。MR 2273364Universidade Federal de Alagoas,
Av. Manoel Severino Barbosa S/N, 57309-005 Ara-piraca - AL, Brazil电子邮箱：iury.domingos@arapiraca.ufal.brUniversità degli Studi di Cagliari,
Dipartimento di Matematica e Informatica, ViaOspedale 72, 09124 Cagliari, Italy
电子邮箱：irenei.onnis@unica.it