具有安全性保证的自主车辆轨迹跟踪双四元数学习控制

Omayra Yago Nieto[1], Alexandre Anahory Simoes[2],Juan I. Giribet[3],*IEEE* 高级会员 和 Leonardo J. Colombo[4]

arXiv:2601.03097v1 [cs.RO] 6 Jan 2026

摘要—**我们提出一种面向自主机器人平台的基于学习的轨迹跟踪控制器，其运动可在SE(3)上用运动学描述。该控制器在双四元数框架下构建，并在速度层级运行，假设可直接控制角速度和线速度，这在许多空中飞行器和全向移动机器人中十分常见。我们将高斯过程（GP）回归融入几何反馈律，以在线学习并补偿影响姿态和位置的未知状态相关扰动及模型缺陷，同时保留刚体运动固有的代数结构和耦合特性。**

所提出的方法不依赖于未知影响的显式参数化模型，因此特别适用于易受传感器引起的扰动、未建模的驱动耦合以及环境不确定性影响的机器人系统。基于李雅普诺夫的分析证明，在GP不确定性有界的条件下，位姿跟踪误差具有概率最终有界性，从而为基于学习的控制器提供形式化的稳定性保证。

仿真结果表明，即使存在真实且局部的扰动，系统仍能实现准确、平滑的轨迹跟踪，其中包括磁力计扰动引发的相关旋转和平移效应。这些结果展示了结合几何建模与概率学习的潜力，可为自主机器人系统实现鲁棒且数据高效的位姿控制。

I. 引言

THE 对无人飞行器和水下航行器的需求正在监测、制图、农业和配送等诸多领域迅速增长。这些系统的动力学通常可用刚体运动来描述，而大多数控制方法都基于反馈线性化 [1]或反步法 [2]，，并且常从稳定性角度进行分析 [3]。然而，要保证稳定性和精确跟踪，这些经典方法依赖于对飞行器动力学和扰动的精确模型。通过第一性原理获得此类不确定性的精确模型通常并不可行。尤其是，空气动力学或流体动力学效应、与非结构化环境的相互作用以及外部扰动会引入难以建模的强非线性。提高反馈增益以补偿这些不确定性，通常会导致噪声放大和执行器饱和。

一种很有前景的替代方案是采用基于学习的预言机，例如神经网络和高斯过程（高斯过程），它们能够直接从数据中捕捉未知动力学。这些数据驱动模型在控制、学习和系统辨识方面取得了显著成果。在数据驱动控制范式中，利用从系统收集的数据，对训练集未覆盖区域的未知动力学进行推断和预测。与参数化模型不同，数据驱动方法具有很高的灵活性，能够再现复杂的非线性行为 [4]。其中，高斯过程凭借其贝叶斯表述、偏差-方差权衡以及提供不确定性量化的能力，近年来在动力系统建模中备受关注 [5]。最后这一特性在控制领域尤具吸引力，因为不确定性估计值可以直接纳入稳定性和安全性分析。因此，基于高斯过程的模型已成功应用于预测控制 [6], 滑模控制 [7], 机械系统跟踪 [8], 以及欠驱动车辆的反步控制 [9]。文献 [10], [9], [11], [12] 进一步研究了利用这类模型补偿航空和水下航行器中的模型不确定性。

刚体姿态运动学通常用旋转矩阵、单位四元数或欧拉角等局部坐标表示。由于局部坐标图存在奇异性，自主车辆控制器通常采用单位四元数表示。近年来，双四元数表述逐渐成为一种紧凑且无奇异的表示方式，能够在单个代数对象中同时编码姿态和位置 [13], [14], [15], [16]。由于单位对偶四元数组成与 SE(3) 同构的李群，因此为表示和控制刚体运动提供了简洁且计算高效的框架 [17], [18], [19]。这种统一表述凭借其几何一致性和易于插值的特点，在机器人控制和导航应用中尤为重要。

本文提出了一种基于学习的轨迹跟踪控制器，适用于运动可在 SE(3) 上进行运动学描述的自主机器人平台。该控制器基于对偶四元数框架构建，并在速度层级运行，假设可以直接控制角

[1]Omayra Yago Nieto 是西班牙马德里理工大学的博士生。omayra.yago.nieto@alumnos.upm.es[2]Alexandre Anahory Simoes 任职于西班牙 IE大学科学与技术学院。alexandre.anahory@ie.edu[3]Juan I. Giribet 任职于阿根廷圣安德烈斯大学（UdeSA）和 CONICET。jgiribet@conicet.gov.ar[4]Leonardo J. Colombo 任职于西班牙自动化与机器人中心（CSIC-UPM）。leonardo.colombo@car.upm-csic.es

J. Giribet 部分获得了阿根廷国家科学技术研究局资助的 PICT-2019-2371 和 PICT-2019-0373 项目，以及布宜诺斯艾利斯大学（UBA）的 UBACyT-0421BA 项目资助。作者感谢西班牙科学与创新部提供的经费支持，资助项目为 PID2022-137909NB-C21，由 MCIN/AEI/10.13039/501100011033 资助。促成本研究成果的研究部分获得了 iRoboCity2030-CM 和面向可持续城市的智能机器人（TEC-2024/TEC-62）的支持，资金来自马德里自治区活动计划 I+D 技术项目。

速度和线速度，这在许多空中飞行器和全向移动机器人中十分常见。我们将高斯过程（GP）集成到几何反馈律中，以学习并补偿影响姿态和平移的未知状态相关扰动及建模误差。通过将基于高斯过程的扰动估计值直接嵌入控制回路，该方法能够利用机载数据进行在线自适应，同时保留刚体运动固有的代数结构和耦合特性。

从机器人学的实际应用角度来看，所提出的框架旨在应对传感和驱动相关效应，因为这些效应难以通过运动学层面的第一性原理模型加以刻画。如第四节所示，影响姿态估计的局部扰动（例如，磁异常导致磁力计测量失真）可能引发相互耦合的旋转和平移跟踪误差，包括空中飞行器的高度偏差。尽管没有显式的动力学耦合模型，该基于学习的控制器仍能够直接从数据中识别并补偿这些相关效应，从而在真实运行条件下提升位姿跟踪性能。

与此同时，所提出的方法具有严谨的理论基础。高斯过程不仅能够对未知运动学扰动进行数据驱动回归，还能提供有原则的不确定性量化，并将其明确纳入控制设计。基于李雅普诺夫方法的分析证明，在高斯过程不确定性有界的条件下，位姿跟踪误差具有概率最终有界性，从而为仿真中观察到的经验结果提供了形式化保证。几何建模、概率学习与稳定性分析相结合，使该控制器既能在机器人应用中发挥实际效用，又具有坚实的理论依据。

据我们所知，这是首项将在线高斯过程学习与基于双四元数的运动学层面反馈控制相结合的工作，旨在处理位姿跟踪中的不确定性，并提供概率保证。此前的研究已采用高斯过程学习刚体动力学 [20] ，并采用神经网络以双四元数形式预测刚体运动 [21], ，但尚未解决如何将概率学习整合到具有明确稳定性保证的几何反馈控制框架中；本文正是对此进行了研究。

本文其余部分安排如下。第 II 节介绍问题 formulierung以及双四元数运动学和名义位姿控制器的预备知识。第三节介绍基于学习的模型框架、采用高斯过程的方法以及所提出的跟踪控制律，并给出相应的稳定性分析。第四节报告仿真与实验结果，展示所提方法的性能与鲁棒性。最后，第五节讨论结论以及扩展和应用的展望。

II. 双四元数中的标称控制器

A. 符号说明

我们首先说明本节全文所使用的符号。集合 $\mathbb{H}$ 表示四元数集合，而 $\mathcal{H}$ 表示集合双四元数。单位四元数和单位双四元数分别表示为 $\mathbb{H}_u$ 和 $\mathcal{H}_u$。表 I 总结了常用符号。

符号	空间	描述
$\boldsymbol{p}$	$\mathbb{R}^3$	$\mathbb{R}^3$ 中的车辆位置。
$\tilde{p} = (p, 0)$	$\mathbb{H}$	与之相关的纯四元数 $\boldsymbol{p}$.
$\boldsymbol{q} = (\boldsymbol{q}, q_0)$	$\mathbb{H}$	向量部为 $\boldsymbol{q} \in$ 的四元数 $\mathbb{R}^3$ 且标量部为 $q_0 \in \mathbb{R}$。
$\overline{\boldsymbol{q}}^*$	$\mathbb{H}$	$\boldsymbol{q}$ 的四元数共轭。
$\mathbb{H}_u$		单位四元数集合。
$\boldsymbol{Q}$	$\mathcal{H}$	双四元数。
$\mathcal{H}_u$		单位对偶四元数集合。
$\mathcal{P}(\boldsymbol{Q})$	$\mathbb{H}$	$\boldsymbol{Q}$的主（实）部分。
$\mathcal{D}(\boldsymbol{Q})$	$\mathbb{H}$	$\boldsymbol{Q}$的对偶部。
$\boldsymbol{Q}_d$	$\mathcal{H}_u$	期望飞行器 pose （双四元数）。
$\delta\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}_d^* \circ \boldsymbol{Q}$	$\mathcal{H}_u$	位姿误差（双四元数）。
$\overline{\delta \boldsymbol{q}} = \boldsymbol{q}_d^* \circ \boldsymbol{q}$	$\mathbb{H}_u$	姿态误差四元数。
$\widetilde{\delta \boldsymbol{p}} = (\delta \boldsymbol{p},\ 0)$	$\mathbb{H}$	位置误差作为纯四元数。

表 I：四元数、对偶四元数和位姿变量的符号说明。

B. 对偶四元数概述

设 $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^3$ 表示车辆位置，设 a 为参考坐标系。那么， $\boldsymbol{p}^a$ 表示在坐标系 a中表示的车辆位置。

设 $\mathbb{H}$ 为具有标准运算 [18], [22]的四元数集合。集合 $\mathbb{H}$ 可与 $\mathbb{R}^4$ 等同，其运算可写成矩阵形式。事实上，每个 $\boldsymbol{q} \in \mathbb{H}$都可分解为其向量分量 $\boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^3$ 和实分量 $q_0 \in \mathbb{R}$。于是，给定 $\boldsymbol{p}$， $\boldsymbol{q} \in \mathbb{H}$,–其中 $\boldsymbol{p} = (\boldsymbol{p},\ p_0)$ 和 $\boldsymbol{q} = (\boldsymbol{q},\ q_0)$，四元数乘积 $\circ$可写为

$$\overline{\boldsymbol{p}} \circ \overline{\boldsymbol{q}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{S}(\boldsymbol{p}) + \boldsymbol{I} p_0 & \boldsymbol{p} \\ -\boldsymbol{p}^T & p_0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{q} \\ q_0 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{I} \in \mathbb{R}^{3\times3}$ 为单位矩阵。反对称矩阵函数 $\boldsymbol{S}(\cdot) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^{3\times3}$ 是满足 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{v})\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}$的矩阵，对任意 $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^3$均成立，其中 $\times$ 表示 $\mathbb{R}^3$上的向量积。

给定$\overline{\boldsymbol{q}} = (\boldsymbol{q},\ q_0) \in \mathbb{H}$，四元数共轭 $\boldsymbol{q}^* \in \mathbb{H}$ 定义为 $\boldsymbol{q}^* = (-\boldsymbol{q},\ q_0)$。注意，给定四元数 $\boldsymbol{p}$， $\boldsymbol{q}$，则 $(\boldsymbol{p} \circ \boldsymbol{q})^* = \boldsymbol{q}^* \circ \boldsymbol{p}^*$。

四元数范数由 $\|\boldsymbol{q}\|^2 = \boldsymbol{q} \circ \boldsymbol{q}^* = \overline{\boldsymbol{q}}^* \circ \boldsymbol{q}$ 给出。众所周知，单位范数四元数表示实三维球面 $\mathbb{S}^3$ 中的旋转 $\mathbb{R}^4$。单位四元数的集合记为 $\mathbb{H}_u$ ，在四元数乘法下它是一个非阿贝尔李群。

旋转群 SO(3) 等价于 $\mathbb{RP}^3$ 上的对跖点对所构成的实射影空间。因此，映射 $\mathcal{R} : \mathbb{H}_u \to$ SO(3)，由 $\mathcal{R}(\boldsymbol{q})$ =定义

$\{\pm\overline{\boldsymbol{q}}\}$ 是一个二对一同态。换言之， $\boldsymbol{q} \in \mathbb{H}$和 $-\overline{\boldsymbol{q}} \in \mathbb{H}$ 表示相同的旋转。单位范数四元数与对应的旋转矩阵之间的关系为$\mathcal{R}(\boldsymbol{q}) = (q_0^2 - \boldsymbol{q}^T\boldsymbol{q})\boldsymbol{I} + 2\boldsymbol{q}\boldsymbol{q}^T + 2q_0\boldsymbol{S}(\boldsymbol{q})$。

单位四元数的李代数 $\mathbb{H}_u$ 是 $\mathfrak{h}_u \cong \mathfrak{su}(2) \cong \mathfrak{so}(3) \simeq \mathbb{R}^3$, 其中 $\mathfrak{so}(3)$表示 SO(3) 的李代数，即 3×3 斜对称矩阵的集合。作为一个向量空间， $\mathfrak{h}_u = \mathrm{Im}\,\mathbb{H} \cong \mathbb{R}^3$是纯虚四元数空间。

每个向量 $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^3$ 都可以通过 $\widetilde{\boldsymbol{p}} = (\boldsymbol{p},0)$与一个四元数 $\widetilde{\boldsymbol{p}} \in \mathbb{H}$ 对应。假设 $\boldsymbol{q} \in \mathbb{H}_u$ 表示车辆坐标系 b与惯性坐标系 i之间的旋转，那么 $\widetilde{\boldsymbol{p}}^b$ 和 $\widetilde{\boldsymbol{p}}^i$ 之间的关系为 $\widetilde{\boldsymbol{p}}^i = \boldsymbol{q}\circ\widetilde{\boldsymbol{p}}^b\circ\boldsymbol{q}^*$。设 $\widetilde{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\omega}_{ib}^b(t) \in \mathfrak{h}_u \simeq \mathbb{R}^3$ 为坐标系 b 相对于坐标系 i、在坐标系 b中的角速度。那么，表示从坐标系 b 到坐标系 i 旋转的 $\boldsymbol{q} \in \mathbb{H}_u$的动力学为

$$\dot{\overline{\boldsymbol{q}}} = \frac{1}{2}\overline{\boldsymbol{q}}\circ\widetilde{\boldsymbol{\omega}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{q}) + \boldsymbol{I}q_0 \\ -\boldsymbol{q}^T\end{bmatrix}\boldsymbol{\omega}. \tag{2}$$

已证明，对偶四元数有助于表示飞行器的位置和姿态 [22]。令 $\mathcal{H}$ 为对偶四元数集合，即该集合

$$\mathcal{H} \triangleq \{\boldsymbol{Q} = \overline{\boldsymbol{q}}_1 + \varepsilon\overline{\boldsymbol{q}}_2 \ : \ \overline{\boldsymbol{q}}_1, \overline{\boldsymbol{q}}_2 \in \mathbb{H},\ \varepsilon \neq 0,\ \varepsilon^2 = 0\}, \tag{3}$$

其中， ε 是满足以下性质的元素： $\varepsilon \neq 0$且 $\varepsilon^2 = 0$。我们将主部定义为 $\mathcal{P}(\boldsymbol{Q}) = \underline{\boldsymbol{q}}_1$ ，将对偶部定义为 $\mathcal{D}(\boldsymbol{Q}) = \overline{\boldsymbol{q}}_2$。

对偶四元数的加法、乘法和共轭可由 $\mathbb{H}$推广得到，同时考虑到 $\varepsilon^2 = 0$。对偶四元数共轭定义为 $\boldsymbol{Q}^* = \mathcal{P}(\boldsymbol{Q})^* + \varepsilon\mathcal{D}(\boldsymbol{Q})^*$。

正如单位范数四元数表示飞行器姿态，单位范数对偶四元数与飞行器的姿态和位置有关，也就是飞行器的位姿。更准确地说，令 $\boldsymbol{Q} = \mathcal{P}(\boldsymbol{Q}) + \varepsilon\mathcal{D}(\boldsymbol{Q})$ 为单位范数对偶四元数，则其满足$||\boldsymbol{Q}||^2 = \boldsymbol{Q}\circ\boldsymbol{Q}^* = \boldsymbol{Q}^*\circ\boldsymbol{Q} = 1$。以下结果刻画了单位范数对偶四元数。

引理*1*： 双四元数 $\boldsymbol{Q} = \mathcal{P}(\boldsymbol{Q}) + \varepsilon\mathcal{D}(\boldsymbol{Q})$ 是单位范数的，当且仅当其主部 $\mathcal{P}(\boldsymbol{Q})$ 是单位范数四元数，且对偶部可写为 $\mathcal{D}(\boldsymbol{Q}) = \frac{1}{2}\widetilde{\boldsymbol{p}}\circ\mathcal{P}(\boldsymbol{Q})$，其中 $\widetilde{\boldsymbol{p}} = (\boldsymbol{p},\ 0)$ 可视为 $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^3$。

证明： 首先，假设 $\boldsymbol{Q} = \mathcal{P}(\boldsymbol{Q}) + \varepsilon\frac{1}{2}\widetilde{\boldsymbol{p}}\circ\mathcal{P}(\boldsymbol{Q})$，且 $\widetilde{\boldsymbol{p}} = (\boldsymbol{p},0)$。那么 $\boldsymbol{Q}\circ\boldsymbol{Q}^* = \mathcal{P}(\boldsymbol{Q})\circ\mathcal{P}(\boldsymbol{Q})^* + \varepsilon\frac{1}{2}(\mathcal{P}(\boldsymbol{Q})\circ\mathcal{P}(\boldsymbol{Q})^*\circ\widetilde{\boldsymbol{p}}^* + \widetilde{\boldsymbol{p}}\circ\mathcal{P}(\boldsymbol{Q})\circ\mathcal{P}(\boldsymbol{Q})^*) = 1$，因为$\mathcal{P}(\boldsymbol{Q})$ 是单位范数四元数，且 $\widetilde{\boldsymbol{p}}^* = -\widetilde{\boldsymbol{p}}$。

现在假设 $\boldsymbol{Q} = \mathcal{P}(\boldsymbol{Q}) + \varepsilon\mathcal{D}(\boldsymbol{Q})$ 是一个单位范数双四元数，由此可得 $1 = \boldsymbol{Q}\circ\boldsymbol{Q}^* = \mathcal{P}(\boldsymbol{Q})\circ\mathcal{P}(\boldsymbol{Q})^* + \varepsilon\frac{1}{2}(\mathcal{P}(\boldsymbol{Q})\circ\mathcal{D}(\boldsymbol{Q})^* + \mathcal{D}(\boldsymbol{Q})\circ\mathcal{P}(\boldsymbol{Q})^*)$，那么 $\mathcal{P}(\boldsymbol{Q})$ 是一个单位范数四元数，且 $\mathcal{P}(\boldsymbol{Q})\circ\mathcal{D}(\boldsymbol{Q})^* + \mathcal{D}(\boldsymbol{Q})\circ\mathcal{P}(\boldsymbol{Q})^* = 0$。令$\widetilde{\boldsymbol{r}} = \mathcal{P}(\boldsymbol{Q})\circ\mathcal{D}(\boldsymbol{Q})^*$，则 $\widetilde{\boldsymbol{r}} = -\widetilde{\boldsymbol{r}}^*$ ，即 $\widetilde{\boldsymbol{r}} = (\boldsymbol{r},0)$。注意， $\mathcal{D}(\boldsymbol{Q}) = -\widetilde{\boldsymbol{r}}\circ\mathcal{P}(\boldsymbol{Q})$，那么取 $\boldsymbol{p} = -2\boldsymbol{r}$，单位范数双四元数 $\boldsymbol{Q}$具有所需的表达式。□

下文中，若 $\boldsymbol{q} \in \mathbb{H}_u$ 表示飞行器的姿态，且 $\widetilde{\boldsymbol{p}} \in \mathrm{Im}\,\mathbb{H}$（其中 Im $\mathbb{H}$ 表示实部为零的四元数集合）表示飞行器的位置，则单位范数双四元数表示为 $\boldsymbol{Q} = \underline{\boldsymbol{q}} + \varepsilon\frac{1}{2}(\widetilde{\boldsymbol{p}}\circ\boldsymbol{q})$。

单位双四元数群 $\mathcal{H}_u$ 是一个李群，它是特殊欧氏群 SE(3) 的双覆盖，因此可统一表示刚体位姿（位置和姿态）。其李代数 $\mathfrak{k}_u$ 可与纯虚双四元数对应，

$$\mathfrak{k}_u = \left\{Q = \tfrac{1}{2}(W + \varepsilon V) \ : \ W, V \in \mathrm{Im}\,\mathbb{H}\right\},$$

其中， W 表示角速度， V 表示线速度。

注意，给定 $\boldsymbol{Q}$，可以按如下方式求得飞行器的姿态和位置： $\boldsymbol{q} = \mathcal{P}(\boldsymbol{Q})$，以及 $\widetilde{\boldsymbol{p}} = 2\mathcal{D}(\boldsymbol{Q})\circ\mathcal{P}(\boldsymbol{Q})^*$。 $\boldsymbol{Q}$ 的时间导数可由主部和对偶部的导数求得。事实上，

$$\dot{\mathcal{P}}(\boldsymbol{Q}) = \frac{1}{2}\mathcal{P}(\boldsymbol{Q})\circ\widetilde{\boldsymbol{\omega}},\ \dot{\mathcal{D}}(\boldsymbol{Q}) = \frac{1}{2}(\mathcal{D}(\boldsymbol{Q})\circ\widetilde{\boldsymbol{\omega}} + \widetilde{\boldsymbol{v}}\circ\mathcal{P}(\boldsymbol{Q})) \tag{4}$$

其中引入了记号 $\dot{\widetilde{\boldsymbol{v}}} = \widetilde{\dot{\boldsymbol{p}}}$，最后一个等式由方程 (2) 得出。$\boldsymbol{Q}$的时间演化（即飞行器位姿）由指令角速度 $\boldsymbol{\omega}$（在车辆坐标系中）和线速度 $\boldsymbol{v}$ （在惯性坐标系中）决定。

设$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}(\widetilde{\omega},\ \widetilde{\boldsymbol{v}})$为一个双四元数，其主部和对偶部分别为 $\mathcal{P}(\boldsymbol{\Omega}) = \widetilde{\boldsymbol{\omega}}$ 和 $\mathcal{D}(\boldsymbol{\Omega}) = \mathcal{P}(\boldsymbol{Q})^*\circ\widetilde{\boldsymbol{v}}\circ\mathcal{P}(\boldsymbol{Q})$，则

$$\dot{\boldsymbol{Q}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{Q}\circ\boldsymbol{\Omega}(\widetilde{\boldsymbol{\omega}}, \widetilde{\boldsymbol{v}}). \tag{5}$$

注*1*： 本文中，角速度$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_{ib}^b$ 在机体坐标系 b中表示，而线速度 $\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{p}}$ 在惯性坐标系 i中表示。因此，扭量对偶四元数的对偶部定义为 $\mathcal{D}(\boldsymbol{\Omega}) = \mathcal{P}(\boldsymbol{Q})^*\circ\widetilde{\boldsymbol{v}}\circ\mathcal{P}(\boldsymbol{Q})$，从而$\boldsymbol{\Omega}$ 始终以由 $\boldsymbol{Q}$诱导的机体相关坐标表示。

C. 对偶四元数误差动力学

设 $\boldsymbol{Q}$ 为表示飞行器当前姿态和位置的双四元数，$\boldsymbol{Q}_d$ 为期望双四元数，即期望飞行器位姿。对偶四元数误差定义为

$$\delta\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}_d^*\circ\boldsymbol{Q} = \overline{\delta\boldsymbol{q}} + \varepsilon\frac{1}{2}(\widetilde{\delta\boldsymbol{p}}^b\circ\overline{\delta\boldsymbol{q}}),$$

其中，$\delta\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}_d^*\circ\boldsymbol{q} = (\delta\boldsymbol{q},\ \delta q_0)$ 和 $\delta\boldsymbol{p} = \widetilde{\boldsymbol{p}} - \widetilde{\boldsymbol{p}}_d = (\delta\boldsymbol{p},0)$，而项 $\widetilde{\delta\boldsymbol{p}}^b = \boldsymbol{q}_d^*\circ\widetilde{\delta\boldsymbol{p}}\circ\boldsymbol{q}_d = (\delta\boldsymbol{p}^b,\ 0)$ 可解释为相对于期望飞行器坐标系的位置误差。注意， $\mathcal{P}(\delta\boldsymbol{Q}) = \delta\boldsymbol{q}$ 以及 $\mathcal{D}(\delta\boldsymbol{Q}) = \frac{1}{2}(\widetilde{\delta\boldsymbol{p}}^b\circ\delta\boldsymbol{q})$。

我们将完整姿态误差四元数记为 $\delta\boldsymbol{q} = (\delta\boldsymbol{q},\ \delta q_0)$，其中 $\delta\boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^3$ 表示其向量部， $\delta q_0 \in \mathbb{R}$ 表示其标量部。

引理 *2:* 令 $\widetilde{\boldsymbol{\omega}} = (\boldsymbol{\omega},0)$ $\widetilde{\boldsymbol{v}} = (\boldsymbol{v},0) \in \mathbb{H}$, $\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_d = (\boldsymbol{\omega}_d,0)$ $\widetilde{\boldsymbol{v}}_d = (\boldsymbol{v}_d,0) \in \mathbb{H}$, 使得方程 (4) 或 (5) 分别对 $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{q} + \varepsilon\frac{1}{2}\widetilde{\boldsymbol{p}}\circ\boldsymbol{q}$和 $\boldsymbol{Q}_d = \boldsymbol{q}_d + \varepsilon\frac{1}{2}\widetilde{\boldsymbol{p}}_d\circ\boldsymbol{q}_d$ 成立。令误差对偶四元数为$\delta\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}_d^*\circ\boldsymbol{Q} = \delta\boldsymbol{q} + \varepsilon\frac{1}{2}\widetilde{\delta\boldsymbol{p}}^b\circ\delta\boldsymbol{q}$。给定双四元数 $\boldsymbol{\Omega}$, 其中 $\boldsymbol{\Omega}$ $\widetilde{\boldsymbol{\omega}} - \overline{\delta\boldsymbol{q}^*\circ\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_d\circ\delta\boldsymbol{q}}$ $\mathcal{D}\ \delta\boldsymbol{Q} = \delta\boldsymbol{q}^*\circ\dot{\widetilde{\delta\boldsymbol{p}}}^b\circ\delta\boldsymbol{q}$ 且 $\boldsymbol{\Omega}$, 误差满足

$$\delta\dot{\boldsymbol{Q}} = \frac{1}{2}\delta\boldsymbol{Q}\circ\delta\boldsymbol{\Omega}. \tag{6}$$

证明： 由方程 (2) 可得

$$\dot{\mathcal{P}}(\delta\boldsymbol{Q}) = \dot{\overline{\delta\boldsymbol{q}}} = \dot{\overline{\boldsymbol{q}}}_d^* \circ \overline{\boldsymbol{q}} + \overline{\boldsymbol{q}}_d^* \circ \dot{\overline{\boldsymbol{q}}} = \frac{1}{2}\left(-\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_d \circ \overline{\delta\boldsymbol{q}} + \overline{\delta\boldsymbol{q}} \circ \widetilde{\boldsymbol{\omega}}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\overline{\delta\boldsymbol{q}} \circ \left(\widetilde{\boldsymbol{\omega}} - \overline{\delta\boldsymbol{q}}^* \circ \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_d \circ \overline{\delta\boldsymbol{q}}\right) = \frac{1}{2}\mathcal{P}(\delta\boldsymbol{Q}) \circ \mathcal{P}(\delta\boldsymbol{\Omega}).$$
$$\dot{\mathcal{D}}(\delta\boldsymbol{Q}) = \frac{1}{2}\left(\widetilde{\delta\boldsymbol{p}}^b \circ \overline{\dot{\delta\boldsymbol{q}}} + \dot{\widetilde{\delta\boldsymbol{p}}}^b \circ \overline{\delta\boldsymbol{q}}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\widetilde{\delta\boldsymbol{p}}^b \circ \overline{\delta\boldsymbol{q}} \circ \mathcal{P}(\delta\boldsymbol{\Omega}) + \overline{\delta\boldsymbol{q}} \circ \overline{\delta\boldsymbol{q}}^* \circ \dot{\widetilde{\delta\boldsymbol{p}}}^b \circ \overline{\delta\boldsymbol{q}}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\mathcal{D}(\delta\boldsymbol{Q}) \circ \mathcal{P}(\delta\boldsymbol{\Omega}) + \mathcal{P}(\delta\boldsymbol{Q}) \circ \mathcal{D}(\delta\Omega)\right).$$

接下来，注意到

$$\dot{\mathcal{P}}(\delta\boldsymbol{Q}) + \varepsilon\dot{\mathcal{D}}(\delta\boldsymbol{Q}) = \frac{1}{2}(\mathcal{P}(\delta\boldsymbol{Q}) + \varepsilon\mathcal{D}(\delta\boldsymbol{Q})) \circ (\mathcal{P}(\delta\boldsymbol{\Omega}) + \varepsilon\mathcal{D}(\delta\boldsymbol{\Omega})),$$

并可得方程 (6)。 □

注 *2*： 当误差速度在惯性坐标系中给定时，可根据引理 2 得到 $\mathcal{D}(\delta\boldsymbol{\Omega})$ 的另一种表达式。

First, notice that $\dot{\overline{\boldsymbol{q}}}_d^* \circ \widetilde{\delta\boldsymbol{p}} \circ \overline{\boldsymbol{q}}_d + \overline{\boldsymbol{q}}_d{}^* \circ \widetilde{\delta\boldsymbol{p}} \circ \dot{\overline{\boldsymbol{q}}}_d = (S(\delta\boldsymbol{p}^b)\boldsymbol{\omega}_d, 0)$, then

$$\dot{\widetilde{\delta\boldsymbol{p}}}^b = \dot{\overline{\boldsymbol{q}}}_d^* \circ \widetilde{\delta\boldsymbol{p}} \circ \overline{\boldsymbol{q}}_d + \overline{\boldsymbol{q}}_d{}^* \circ \widetilde{\delta\boldsymbol{p}} \circ \dot{\overline{\boldsymbol{q}}}_d + \overline{\boldsymbol{q}}_d{}^* \circ \dot{\widetilde{\delta\boldsymbol{p}}} \circ \overline{\boldsymbol{q}}_d,$$
$$= (S(\delta\boldsymbol{p}^b)\boldsymbol{\omega}_d, 0) + \overline{\boldsymbol{q}}_d{}^* \circ \dot{\widetilde{\delta\boldsymbol{p}}} \circ \overline{\boldsymbol{q}}_d,$$

由此可得

$$\mathcal{D}(\delta\boldsymbol{\Omega}) = \overline{\delta\boldsymbol{q}}^* \circ (S(\delta\boldsymbol{p}^b)\boldsymbol{\omega}_d, 0) \circ \overline{\delta\boldsymbol{q}} + \overline{\boldsymbol{q}}^* \circ \widetilde{\delta\boldsymbol{v}} \circ \overline{\boldsymbol{q}},$$

其中， $\delta\boldsymbol{v} = \delta\boldsymbol{p}$ 为在惯性坐标系中表示的误差速度。最后，我们注意到

$$\dot{\overline{\delta\boldsymbol{q}}} = \frac{1}{2}\overline{\delta\boldsymbol{q}} \circ \widetilde{\boldsymbol{\omega}} - \frac{1}{2}\overline{\delta\boldsymbol{q}} \circ \overline{\delta\boldsymbol{q}}^* \circ \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_d \circ \overline{\delta\boldsymbol{q}}. \tag{7}$$

D. 标称控制设计

本节针对由双四元数 $\boldsymbol{Q}$ 表示的飞行器位姿设计运动学控制器，其演化由方程 (5) 给出。给定飞行器的期望位姿 $\boldsymbol{Q}_d$，以下定理给出了为实现期望姿态和位置（即 $\boldsymbol{Q} \to \boldsymbol{Q}_d$）而施加于飞行器的角速度和线速度。

定理 *1:* 设 $\boldsymbol{\omega}_d, \boldsymbol{v}_d$ 为期望角速度和线速度，且期望双四元数 $\boldsymbol{Q}_d$ 满足方程 (5)。设 $\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{\omega}}, \boldsymbol{K}_{\boldsymbol{v}}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{3\times3}$ 为一致有界且一致正定的矩阵函数，即存在常数 $0 < \alpha \le \beta$ 使得

$$\alpha\boldsymbol{I} \preceq \boldsymbol{K}_{\boldsymbol{\omega}}(\rho) \preceq \beta\boldsymbol{I}, \qquad \alpha\boldsymbol{I} \preceq \boldsymbol{K}_{\boldsymbol{v}}(\rho) \preceq \beta\boldsymbol{I}, \quad \forall\, \rho \in \mathbb{R},$$

并设双四元数 $\boldsymbol{Q}$ 由方程 (5) 给出，其中：

$$\widetilde{\boldsymbol{\omega}} = (\boldsymbol{\omega}, 0) = \overline{\delta\boldsymbol{q}}^* \circ \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_d \circ \overline{\delta\boldsymbol{q}} - (\mathrm{sgn}(\delta q_0)\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{\omega}}(\rho)\delta\boldsymbol{q}, 0), \tag{8}$$
$$\widetilde{\boldsymbol{v}} = (\boldsymbol{v}, 0) = (\widetilde{\boldsymbol{v}}_d - \boldsymbol{K}_{\boldsymbol{v}}(\rho)\delta\boldsymbol{p}, 0), \tag{9}$$

其中 $\delta\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}_d^* \circ \boldsymbol{Q} = \delta\boldsymbol{q} + \varepsilon\frac{1}{2}\widetilde{\delta\boldsymbol{p}}^b \circ \delta\boldsymbol{q}$，$\mathrm{sgn}(x)$ 为符号函数，且 $\mathrm{sgn}(0) = 1$。因此，$(\delta\boldsymbol{q},\ \delta\boldsymbol{p}) \to (\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{0})$。

注*1*：控制目标是跟踪期望位姿 $\boldsymbol{Q}_d$ 及速度 $(\boldsymbol{\omega}_d,\ \boldsymbol{v}_d)$，即确保 $\delta\boldsymbol{Q} \to 1$，或者等价地，$(\delta\boldsymbol{q},\ \delta\boldsymbol{p}) \to (\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{0})$。

由于 SO(3) 的双覆盖 $\mathbb{H}_u \to$，四元数 $\delta\boldsymbol{q}$ 和 $-\delta\boldsymbol{q}$ 表示相同的旋转。项 $\mathrm{sgn}(\delta q_0)$ 强制采用最短旋转表示，并防止出现绕转现象 [23]。

证明： 首先，注意到 $\mathcal{D}(\delta\boldsymbol{Q})^* \circ \mathcal{D}(\delta\boldsymbol{Q}) = \frac{1}{4}\|\widetilde{\delta\boldsymbol{p}}\|^2$，并定义正定李雅普诺夫函数

$$V(\delta\boldsymbol{Q}) = \delta\boldsymbol{q}^T\delta\boldsymbol{q} + 2\mathcal{D}(\delta\boldsymbol{Q})^* \circ \mathcal{D}(\delta\boldsymbol{Q}).$$

函数 V 满足 $V = 0$ 当且仅当 $\delta\boldsymbol{q} = \boldsymbol{0}$, $|\delta q_0| = 1$ 且 $\mathcal{D}(\delta\boldsymbol{Q}) = (0,0)$。

对 V 求时间导数，由引理 2 可得

$$\dot{V} = \delta\boldsymbol{q}^T(\boldsymbol{S}(\delta\boldsymbol{q}) + \boldsymbol{I}\delta q_0)\mathcal{P}(\delta\boldsymbol{\Omega}) + \delta\boldsymbol{p}^T\dot{\delta\boldsymbol{p}},$$

由于对每个 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$，$\dot{\delta\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_d = -\boldsymbol{K}_v(\rho)\delta\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$，且 $\mathcal{P}(\delta\boldsymbol{\Omega}) = -\mathrm{sgn}(\delta q_0)\boldsymbol{K}_\omega(\rho)\delta\boldsymbol{q}$，因此可得

$$\dot{V} = -|\delta q_0|\delta\boldsymbol{q}^T\boldsymbol{K}_\omega(\rho)\delta\boldsymbol{q} - \delta\boldsymbol{p}^T\boldsymbol{K}_v(\rho)\delta\boldsymbol{p}.$$

由于 $\boldsymbol{K}_v, \boldsymbol{K}_\omega$ 一致有界，因此存在 $\alpha > 0$，使得对每个 ρ，$\boldsymbol{K}_v(\rho) \ge \alpha\boldsymbol{I}$ 且 $\boldsymbol{K}_\omega(\rho) \ge \alpha\boldsymbol{I}$，于是

$$\dot{V} = -\alpha\left(|\delta q_0|\|\delta\boldsymbol{q}\|^2 + \|\delta\boldsymbol{p}\|^2\right) \le 0,$$

对每个 $\delta\boldsymbol{p} \ne \boldsymbol{0}$ 和 $\delta\boldsymbol{q} \ne \boldsymbol{0}$。

当 $\delta q_0 = 0$ 且 $\delta\boldsymbol{p} = 0$时，我们有 $\dot{V} = 0$。将其与 $\widetilde{\boldsymbol{\omega}}$ 代入式 (7)，并利用 $\mathrm{sgn}(0) = 1$，可得

$$\dot{\overline{\delta\boldsymbol{q}}} = (-\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{\omega}}(\rho)\delta\boldsymbol{q}, 0)$$

这意味着 $\dot{\delta\boldsymbol{q}} = -\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{\omega}}(\rho)\delta\boldsymbol{q}$。此外，我们还知道 $\|\delta\boldsymbol{q}\| = 1$。沿着前述常微分方程的解对其求导，可得 $0 = -\delta\boldsymbol{q}^T\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{\omega}}(\rho)\delta\boldsymbol{q}$。由于 $\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{\omega}}(\rho) > 0$，这只有在 $\delta\boldsymbol{q} = 0$ 时才可能成立。因此，根据拉萨尔不变性原理，我们推得系统的轨迹渐近收敛到 $\delta\boldsymbol{q} = \boldsymbol{0}$ 和 $\delta\boldsymbol{p} = \boldsymbol{0}$。 □

E. 扰动和测量误差调制 *el*

定理 1 的基本假设是，可以测量飞行器的位姿（即位置和姿态）$\boldsymbol{q}$。这样就可以在方程 (8) 中反馈信号误差 $\delta\boldsymbol{q}$。

现在，假设姿态测量值 $\boldsymbol{q}$ 受到未知姿态误差 $\boldsymbol{q}_\rho$ 的干扰。在这种情况下，可用信号不再是 $\delta\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}_d^* \circ \boldsymbol{q}$，而是

$$\overline{\delta\boldsymbol{q}}_\rho := \overline{\boldsymbol{q}}_d^* \circ \overline{\boldsymbol{q}} \circ \overline{\boldsymbol{q}}_\rho = \overline{\delta\boldsymbol{q}} \circ \overline{\boldsymbol{q}}_\rho.$$

虽然也可以对位置进行同样的处理，但这里我们明确考虑完整位姿中的姿态误差和位置误差的影响，该位姿由双四元数表示

$$\boldsymbol{Q}_\rho := \overline{\boldsymbol{q}}_\rho + \varepsilon\frac{1}{2}(\widetilde{\boldsymbol{p}}_\rho \circ \overline{\boldsymbol{q}}_\rho),$$

其中， $\widetilde{\boldsymbol{p}}_\rho$ 表示位置测量中可能存在的平移误差（或偏差）。因此，测量位姿为

$$\boldsymbol{Q}_{\text{meas}} = \boldsymbol{Q} \circ \boldsymbol{Q}_\rho,$$

用于反馈的位姿误差变为

$$\delta \boldsymbol{Q}_\rho := \boldsymbol{Q}_d^* \circ \boldsymbol{Q}_{\text{meas}} = \boldsymbol{Q}_d^* \circ \boldsymbol{Q} \circ \boldsymbol{Q}_\rho = \delta \boldsymbol{Q} \circ \boldsymbol{Q}_\rho.$$

$\delta \boldsymbol{Q}$与 $\delta \boldsymbol{Q}_\rho$之间的显式关系，包括它们的主部和对偶部，见附录。

如果我们使用受干扰的测量值$\boldsymbol{Q} \circ \boldsymbol{Q}_\rho$控制系统，则方程（8）和（9）将替换为：

$$\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_\rho = \widetilde{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\eta}_{\boldsymbol{\omega}}(\overline{\delta \boldsymbol{q}}_\rho), \tag{10}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{v}}_\rho = \widetilde{\boldsymbol{v}} + \boldsymbol{\eta}_{\boldsymbol{v}}(\delta \boldsymbol{Q}_\rho), \tag{11}$$

其中，$\boldsymbol{\eta}_{\boldsymbol{\omega}} : \mathbb{H}_u \to \mathfrak{h}_u$ 和 $\boldsymbol{\eta}_{\boldsymbol{v}} : \mathcal{H}_u \to \operatorname{Im}\mathbb{H}$ 是与状态相关的未知函数，分别用于描述未建模扰动以及由$\boldsymbol{q}_\rho$ 和 $\boldsymbol{Q}_\rho$ 引起的传感器误差。我们假设这些未知项可分解为

$$\boldsymbol{\eta}_{\boldsymbol{\omega}}(\overline{\delta \boldsymbol{q}}_\rho) = \boldsymbol{\rho}_{\boldsymbol{\omega}}(\overline{\delta \boldsymbol{q}}_\rho) + \nu_\omega, \qquad \boldsymbol{\eta}_{\boldsymbol{v}}(\delta \boldsymbol{Q}_\rho) = \boldsymbol{\rho}_{\boldsymbol{v}}(\delta \boldsymbol{Q}_\rho) + \nu_v,$$

其中，ν_ω 和 ν_v 是具有已知协方差的零均值高斯扰动，例如 $\nu_\omega \sim \mathcal{N}(0, \Sigma_\omega)$和 $\nu_v \sim \mathcal{N}(0, \Sigma_v)$。这对应于高斯过程模型的含噪训练数据，其噪声统计量已知。

也就是说，用于训练高斯过程的样本含有噪声，并且假设噪声的均值和方差均已知。为简化记法，省略状态和扰动对时间的依赖关系，即 $\boldsymbol{\eta}_{\boldsymbol{\omega}}(\delta \boldsymbol{q}_\rho) := \boldsymbol{\eta}_{\boldsymbol{\omega}}(\delta \boldsymbol{q}_\rho(t)\ t)$和$\boldsymbol{\eta}_{\boldsymbol{v}}(\delta \boldsymbol{Q}_\rho) := \boldsymbol{\eta}_{\boldsymbol{v}}(\delta \boldsymbol{Q}_\rho(t)\ t)$。

$\tilde{\boldsymbol{\rho}}_{\boldsymbol{\omega}}$ 的潜在来源取决于传感仪器；例如，使用磁力计作为姿态传感器时，它们可能用于建模磁场扰动。同样，$\tilde{\boldsymbol{\rho}}_{\boldsymbol{v}}$ 可能源自平移动力学中未建模的效应，例如空气动力阻力、地面效应相互作用，或 GPS 和视觉里程计传感器的偏差。从现在起，为简化符号表示，我们省略对$\delta \boldsymbol{q}_\rho$ 和 $\delta \boldsymbol{Q}_\rho$的依赖，直接记为 $\delta \boldsymbol{q}$ 和 $\delta \boldsymbol{Q}$。

III. 基于高斯过程的基于学习的轨迹跟踪控制

如车辆动力学（10）–（11）所述，系统受到未知函数 $\boldsymbol{\rho}_{\boldsymbol{\omega}}$ 和 $\boldsymbol{\rho}_{\boldsymbol{v}}$ 的影响，它们表示未建模或不确定的动力学。本节旨在设计一种控制器，利用高斯过程（GP）回归在线估计这些未知效应，从而对其进行补偿。

所提出的策略将高斯过程模型集成到控制回路中，利用基于数据的扰动估计值更新标称控制器。与连续数据采集方案不同，飞行器无需始终记录数据。为降低计算负荷，可以选择性地启用数据采集，从而形成批量测量数据，随后用于更新高斯过程模型。这既支持在线学习阶段，也支持离线/在线混合学习阶段。见图 1。

基于高斯过程的预测结果被嵌入控制律中，以纠正影响车辆动力学的建模误差和外部扰动。通过这种方式，控制器仅依靠自身观测到的数据持续完善其内部模型，无需任何外部监督或关于扰动特性的先验知识。

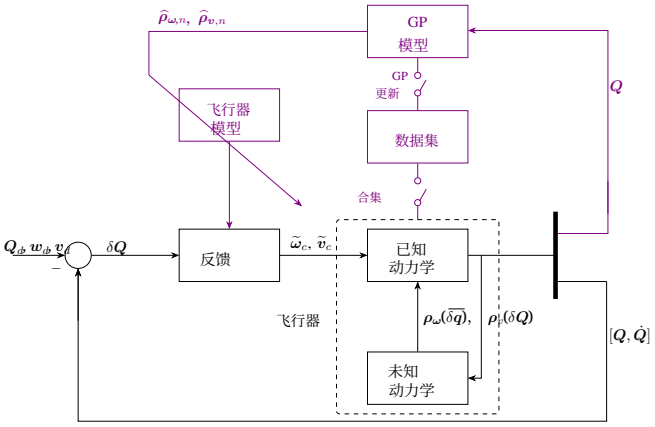

图 1：所提出控制律的框图

接下来，我们将详细介绍学习与控制框架。

A. 基于高斯过程的学习

高斯过程（GP）是一种随机过程，由均值函数和核函数完全确定。为补偿式 (10)–(11) 中的未知动力学，定义两个相互独立的高斯过程，分别对 $\boldsymbol{\rho}_{\boldsymbol{\omega}}$ 和 $\boldsymbol{\rho}_{\boldsymbol{v}}$ 建模。其定义汇总于表 II。

未知函数	$\boldsymbol{\rho}_{\boldsymbol{\omega}} : \mathbb{H}_u \to \mathbb{R}^3$
输入	$x = \overline{\delta \boldsymbol{q}} \in \mathbb{H}_u \subset \mathbb{R}^4$
高斯过程（每个分量）	$\{f_{GP,i}^{(\boldsymbol{\omega})}\}_{i=1}^3$
核函数	$k^{(\boldsymbol{\omega})} : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$
未知函数	$\boldsymbol{\rho}_{\boldsymbol{v}} : \mathcal{H}_u \to \mathbb{R}^3$
输入	$x = \delta \boldsymbol{Q} \in \mathcal{H}_u \subset \mathbb{R}^8$
高斯过程（每个分量）	$\{f_{GP,i}^{(\boldsymbol{v})}\}_{i=1}^3$
核函数	$k^{(\boldsymbol{v})} : \mathbb{R}^8 \times \mathbb{R}^8 \to \mathbb{R}$

表 II：用于补偿未知动力学的高斯过程模型。

未知函数 $\boldsymbol{\rho}_{\boldsymbol{\omega}}$ 和 $\boldsymbol{\rho}_{\boldsymbol{v}}$ 为 $\mathbb{R}^3$值函数。在实际应用中，我们使用具有相同核函数的相互独立的标量高斯过程对每个输出分量进行建模，即对于 $(\cdot) \in \{\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{v}\}$和 $i \in \{1, 2, 3\}$，我们使用

$$f_{GP,i}^{(\cdot)}(x) \sim \mathcal{GP}\big(m_{GP,i}^{(\cdot)}(x),\, k^{(\cdot)}(x, x')\big),$$

并将三个后验均值堆叠起来，形成向量预测。这对应于在式 (22)–(23) 中使用列 $Y^{(\cdot)} : i$。

对于其对应定义域中的任意 x，x'，每个高斯过程均满足：

$$f_{GP}^{(\cdot)}(x) \sim \mathcal{GP}\big(m_{GP}^{(\cdot)}(x),\, k^{(\cdot)}(x, x')\big), \tag{12}$$

with

$$m_{GP}^{(\cdot)}(x) = \mathbb{E}[f_{GP}^{(\cdot)}(x)], \tag{13}$$

$$k^{(\cdot)}(x, x') = \mathbb{E}\big[(f_{GP}^{(\cdot)}(x) - m_{GP}^{(\cdot)}(x))(f_{GP}^{(\cdot)}(x') - m_{GP}^{(\cdot)}(x'))\big]. \tag{14}$$

训练数据集由 $N(n)$ 个样本构成，如下所示

$$\mathcal{D}_{n(t)}^{(\cdot)} = \{x^{\{i\}}, y_{(\cdot)}^{\{i\}}\}_{i=1}^{N(n)},\ y_{(\cdot)}^{\{i\}} = \boldsymbol{\rho}_{(\cdot)}(x^{\{i\}}) + \nu_{(\cdot)}^{\{i\}}, \quad (15)$$

其中，$\nu^{\{i\}}{}_{(\cdot)} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \sigma_{\nu,(\cdot)}^2 I_3)$ 是独立同分布的测量噪声。输入为 $x = \begin{cases} \delta\boldsymbol{q}, \text{对于} (\cdot) = \boldsymbol{\omega} \\ \delta\boldsymbol{Q}, \text{对于} (\cdot) = \boldsymbol{v} \end{cases}$.

数据集 $\mathcal{D}_{n\ t}^{(\boldsymbol{\omega})}{}_{()}$ 和 $\mathcal{D}_{n\ t}^{(\boldsymbol{v})}{}_{()}$（其中 $n: \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{N}$）可以随时间 t 演化。在给定时刻 $t_1 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$，存在包含 $N(n(t_1))$ 个训练点的数据集 $\mathcal{D}_{n\ (t_1)}^{(\cdot)}$。这种构造允许随时间累积训练数据，即 $\mathcal{D}_n^{(\boldsymbol{\omega})}$和 $\mathcal{D}_n^{(\boldsymbol{v})}$中的训练点数量 $N(n)$ 可以单调递增，同时也能够启用“遗忘”机制，以便在需要时将 $N(n)$ 保持为常数。

为简化记号，我们将 $\mathcal{D}_n^{(\boldsymbol{\omega})}$和 $\mathcal{D}_n^{(\boldsymbol{v})}$定义为时间区间 $t \in [t_n, t_{n+1})$ 的训练数据集，每个数据集包含 $N(n)$ 个训练点，其中 $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots$。例如，$\mathcal{D}_n^{(\boldsymbol{\omega})}$可以包含截至时间 t_n 累积记录的所有数据对 $\{\delta\boldsymbol{q}^{\{i\}}, \widehat{\boldsymbol{y}}^{\{i\}}{}_{(\boldsymbol{\omega})}\}$，即 $\mathcal{D}_0^{(\boldsymbol{\omega})} \subset \cdots \subset \mathcal{D}_n^{(\boldsymbol{\omega})}$；而 $\mathcal{D}_n^{(\boldsymbol{v})}$可以包含截至 t_n 累积的所有数据对 $\{\delta\boldsymbol{Q}^{\{i\}}, \widehat{\boldsymbol{y}}^{\{i\}}{}_{(\boldsymbol{v})}\}$，即 $\mathcal{D}_0^{(\boldsymbol{v})} \subset \cdots \subset \mathcal{D}_n^{(\boldsymbol{v})}$。

或者，如果每个 $\mathcal{D}_n^{(\cdot)}$仅由新记录的数据组成，则这些数据集可以互不相交。

时变高斯过程估计记为$\widehat{\boldsymbol{\rho}}_{\boldsymbol{\omega},\ n}$ 和$\widehat{\boldsymbol{\rho}}_{\boldsymbol{v},\ n}$，以强调它们对相应数据集 $\mathcal{D}_n^{(\cdot)}$的依赖关系，使得

$$\widehat{\boldsymbol{\rho}}_{\boldsymbol{\omega},n} = \widehat{\boldsymbol{y}}_{(\boldsymbol{\omega})} \,|\, \overline{\delta\boldsymbol{q}}, \mathcal{D}_n^{(\boldsymbol{\omega})}, \quad (16)$$

$$\widehat{\boldsymbol{\rho}}_{\boldsymbol{v},n} = \widehat{\boldsymbol{y}}_{(\boldsymbol{v})} \,|\, \delta\boldsymbol{Q}, \mathcal{D}_n^{(\boldsymbol{v})}, \quad (17)$$

其中，$\widehat{\boldsymbol{y}}_{(\boldsymbol{\omega})} \in \mathbb{H}$ 和 $\widehat{\boldsymbol{y}}_{(\boldsymbol{v})} \in \mathcal{H}$ 分别表示目标变量 $\widetilde{\boldsymbol{y}}_{(\boldsymbol{\omega})}$ 和 $\widetilde{\boldsymbol{y}}_{(\boldsymbol{v})}$的高斯过程估计。

该框架天然支持离线学习（仅使用先前收集的数据）和混合在线/离线方案，可根据学习策略持续纳入新样本或有选择地遗忘样本。

假设*1*：数据集 $\mathcal{D}_n^{(\boldsymbol{\omega})}$，$\mathcal{D}_n^{(\boldsymbol{v})}$的数量有限，且 $n(t)$随时间发生的切换次数有限，因此存在一个时间 $T_{end} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$，使得 $n(t) = n_{end}, \forall t \geq T_{end}$。

请注意，假设1的限制较少，因为集合的数量通常会因计算能力有限或内存限制而自然地受到约束；此外，由于式（10）和式（11）中的未知函数$\boldsymbol{\rho}_{\boldsymbol{\omega}}$、$\boldsymbol{\rho}_{\boldsymbol{v}}$ 不显式依赖时间，通常不需要长期学习。因此，存在常数数据集 $\mathcal{D}_{n_{end}}^{(\boldsymbol{\omega})}$，$\mathcal{D}_{n_{end}}^{(\boldsymbol{v})}$，对所有 $t > T_{end}$均成立。此外，假设1确保数据集之间的切换不会无限快，这符合现实应用中的实际情况。还请注意，在实践中，由于任务的持续时间有限，我们依赖这样一个假设：时间范围足够长，使 $\mathcal{D}_{n_{end}}^{(\boldsymbol{\omega})}$ 和 $\mathcal{D}_{n_{end}}^{(\boldsymbol{v})}$ 具有实际意义。

高斯过程（GP）模型是用于非线性函数回归的强大预测工具。在预测步骤中，我们将每个数据集 $\mathcal{D}_n^{(\cdot)}$的 $N(n)$ 个训练点拼接成输入矩阵和相应的输出矩阵，作为

$$X^{(\boldsymbol{\omega})} = \left[\overline{\delta\boldsymbol{q}}^{\{1\}}, \overline{\delta\boldsymbol{q}}^{\{2\}}, \ldots, \overline{\delta\boldsymbol{q}}^{\{N(n)\}}\right]^T \in \mathbb{H}^{N(n)}, \quad (18)$$

$$X^{(\boldsymbol{v})} = \left[\delta\boldsymbol{Q}^{\{1\}}, \delta\boldsymbol{Q}^{\{2\}}, \ldots, \delta\boldsymbol{Q}^{\{N(n)\}}\right]^T \in \mathcal{H}^{N(n)}, \quad (19)$$

$$Y^{(\boldsymbol{\omega})} = \left[\widehat{\boldsymbol{y}}_{(\boldsymbol{\omega})}^1, \widehat{\boldsymbol{y}}_{(\boldsymbol{\omega})}^2, \ldots, \widehat{\boldsymbol{y}}_{(\boldsymbol{\omega})}^{N(n)}\right], \quad (20)$$

$$Y^{(\boldsymbol{v})} = \left[\widehat{\boldsymbol{y}}_{(\boldsymbol{v})}^1, \widehat{\boldsymbol{y}}_{(\boldsymbol{v})}^2, \ldots, \widehat{\boldsymbol{y}}_{(\boldsymbol{v})}^{N(n)}\right], \quad (21)$$

其中，测量值 $\widehat{\boldsymbol{y}}_{(\boldsymbol{\omega})} = \widetilde{\boldsymbol{y}}_{(\boldsymbol{\omega})} + \eta$和 $\widehat{\boldsymbol{y}}_{(\boldsymbol{v})} = \widetilde{\boldsymbol{y}}_{(\boldsymbol{v})} + \eta$受到加性高斯噪声 $\eta \sim \mathcal{N}(\mathbf{0},\ \sigma_\nu^2)$的干扰。

高斯过程预测：设 $\overline{\delta\boldsymbol{q}}^\dagger \in \mathbb{H}$ 和 $\delta\boldsymbol{Q}^\dagger \in \mathcal{H}$ 为新的测试点。对应的高斯过程预测 $\boldsymbol{y}^\dagger{}_{(\boldsymbol{\omega})} \in \mathbb{H}$ 和 $\boldsymbol{y}^\dagger{}_{(\boldsymbol{v})} \in \mathcal{H}$ 为

$$\mu(\boldsymbol{y}_{(\cdot)}^\dagger | x^\dagger, \mathcal{D}^{(\cdot)}) = m^{(\cdot)}(x^\dagger) + \boldsymbol{k}^{(\cdot)}(x^\dagger, X^{(\cdot)})^T K_{(\cdot)}^{-1} Y_{:,i}^{(\cdot)}, \quad (22)$$

$$\text{var}(\boldsymbol{y}_{(\cdot)}^\dagger | x^\dagger, \mathcal{D}^{(\cdot)}) = k^{(\cdot)}(x^\dagger, x^\dagger) - \boldsymbol{k}^{(\cdot)}(x^\dagger, X^{(\cdot)})^T K_{(\cdot)}^{-1} \boldsymbol{k}^{(\cdot)}(x^\dagger, X^{(\cdot)}), \quad (23)$$

对所有 $i \in \{1, 2, 3\}$，其中 $Y_{(\cdot):\ i}$表示输出矩阵 $Y_{(\cdot)}$的第 i 列。均值函数 $m^{(\cdot)}(\cdot)$ 编码了系统的先验知识，而核函数 $k^{(\cdot)}(\cdot,\cdot)$ 则定义了输入相关性，具体针对 $\mathbb{H}$ 或 $\mathcal{H}$，取决于所建模的变量。

核函数和协方差定义：格拉姆矩阵 $K_{(\cdot)} \in \mathbb{R}^{N(n)\times N(n)}$ 按元素定义为

$$K_{j',j}^{(\cdot)} = k^{(\cdot)}(X_{:,j'}^{(\cdot)}, X_{:,j}^{(\cdot)}) + \delta(j,j')\,\sigma^2,\ j,j' \in \{1,\ldots,N(n)\}, \quad (24)$$

其中，当 $j = j'$时，$\delta(j,j') = 1$，否则为 0。向量值协方差函数 $\boldsymbol{k}^{(\cdot)}$：$\mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}^{N(n)}$（其中 $\mathcal{X} \in \{\mathbb{H}, \mathcal{H}\}$ $x^\dagger$ $_j$ $j =$）的元素为 $k_j^{(\cdot)} = k^{(\cdot)}$ $_{1\ \ldots\ N\ n}$ $(\cdot, X^{(\cdot)})$，适用于 $,(),$ 表示测试输入 $x^\dagger$ 与训练数据 $X^{(\cdot)}$之间的协方差。

备注 *2*：单位四元数 $\bar{\boldsymbol{q}}$，$\bar{\boldsymbol{q}}' \in \mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$ 是 SO(3) 的双覆盖，因此 $\bar{\boldsymbol{q}}$ 和 $-\bar{\boldsymbol{q}}$ 表示相同的旋转。为避免学习重复表示，四元数输入上的核函数应在对跖映射 $\bar{\boldsymbol{q}} \mapsto -\bar{\boldsymbol{q}}$下保持不变。一种常见且几何一致的选择是对跖不变的弦距离

$$d_\pm(\bar{\boldsymbol{q}}, \bar{\boldsymbol{q}}') := \min\{\|\bar{\boldsymbol{q}} - \bar{\boldsymbol{q}}'\|_2,\ \|\bar{\boldsymbol{q}} + \bar{\boldsymbol{q}}'\|_2\} = \sqrt{2 - 2|\langle \bar{\boldsymbol{q}}, \bar{\boldsymbol{q}}' \rangle|},$$

其中，$\|\cdot\|_2$ 和 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$ 分别表示 $\mathbb{R}^4$中的欧几里得范数和内积。将 $d_\pm$ 与标准正定核函数（例如平方指数核）复合，可得到对跖不变核函数，例如：

$$k^{(\boldsymbol{\omega})}(\bar{\boldsymbol{q}}, \bar{\boldsymbol{q}}') := \sigma_f^2 \exp\Big(-\tfrac{d_\pm(\bar{\boldsymbol{q}}, \bar{\boldsymbol{q}}')^2}{2\ell^2}\Big),$$

其中 σ_f^2 表示信号方差，ℓ_d 表示逐维长度尺度，该方法已用于旋转的高斯过程学习；参见 [20]。

这种构造自然可以扩展到由单位双四元数 $\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{Q}' \in \mathcal{H}_u \subset \mathbb{R}^8$ 表示的刚体运动；单位双四元数构成 SE(3) 的双重覆盖（即，$\boldsymbol{Q}$ 和 $-\boldsymbol{Q}$ 表示相同的位姿）。设 $\boldsymbol{Q} \leftrightarrow (\bar{\boldsymbol{q}}, \boldsymbol{p})$ 和 $\boldsymbol{Q}' \leftrightarrow (\bar{\boldsymbol{q}}', \boldsymbol{p}')$，其中 $\bar{\boldsymbol{q}}, \bar{\boldsymbol{q}}' \in \mathbb{S}^3$

以及 $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}' \in \mathbb{R}^3$。例如，可以在 SE(3) 上定义几何感知距离：

$$d_{\mathrm{SE}(3)}(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{Q}') := \sqrt{d_{\pm}(\bar{\boldsymbol{q}}, \bar{\boldsymbol{q}}')^2 + \tfrac{1}{\lambda^2}\|\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}'\|_2^2},$$

其中 $\lambda > 0$ 平衡了平移尺度与旋转尺度。接下来

$$k^{(\boldsymbol{v})}(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{Q}') := \sigma_f^2 \exp\Big(-\tfrac{d_{\mathrm{SE}(3)}(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{Q}')^2}{2\ell^2}\Big)$$

在 $\boldsymbol{Q} \mapsto -\boldsymbol{Q}$ 下保持不变，并遵循群几何。文献 [20], [9]讨论了李群上的相关几何感知高斯过程构造及其在基于学习的控制中的应用。

模型选择与超参数：核函数的选择及其超参数的确定构成了回归的自由度。超参数以及高斯噪声方差 σ_ν^2通过最大化边际对数似然进行估计（见 [24]）。物理系统高斯过程模型中广泛使用的一种核函数——也是我们实验中采用的核函数——是平方指数核函数，其采用各向同性距离度量。关于其他核函数性质的概述见 [24]。

均值函数 $m^{(\boldsymbol{\omega})}$ 和 $m^{(\boldsymbol{v})}$ 可通过针对未知动力学 $\boldsymbol{\rho}_{\boldsymbol{\omega}}$ 和 $\boldsymbol{\rho}_{\boldsymbol{v}}$ 的标准系统辨识技术获得（见 [25]）。然而，在缺乏先验知识的情况下，它们设为零，即

$$m^{(\boldsymbol{\omega})}(\overline{\delta \boldsymbol{q}}^{\dagger}) = 0, \qquad m^{(\boldsymbol{v})}(\delta \boldsymbol{Q}^{\dagger}) = 0.$$

多元形式：根据 (22)–(23)，三个输出分量定义了一个多元高斯分布，其均值向量和协方差矩阵分别由三个标量高斯过程的后验均值和方差堆叠而成。类似地，$\boldsymbol{y}^{\dagger}{}_{(\boldsymbol{v})}|x^{\dagger}$ 和 $\mathcal{D}_n^{(\boldsymbol{v})}$对应的分布记为 $\mu(\boldsymbol{y}^{\dagger}{}_{(\boldsymbol{v})}|x^{\dagger}, \mathcal{D}_n^{(\boldsymbol{v})})$ 和 $\Sigma(\boldsymbol{y}^{\dagger}{}_{(\boldsymbol{v})}|x^{\dagger}, \mathcal{D}_n^{(\boldsymbol{v})})$。

备注 *3*：为简单起见，所有输出维度均采用相同的核函数。不过，高斯过程模型可以轻松扩展为对每个输出维度使用不同的核函数。由于高斯过程应用于在线场景，且新数据会持续收集，用于预测的数据集 $\mathcal{D}_n^{(\boldsymbol{\omega})}$和 $\mathcal{D}_n^{(\boldsymbol{v})}$（见 (22)–(23)）会随时间演变。高斯过程框架能够自然地纳入新的训练样本，因为任何数据子集都服从多元高斯分布。关于在线学习性能的详情，见 [26]和 [27]。

假设式 (15) 中的测量噪声是独立同分布的，并且与输入相互独立；同时，收集训练样本，使得标准高斯过程集中性结果适用（见 [28]）。

假设 *2*：考虑基于数据集 $\mathcal{D}_n^{(\boldsymbol{\omega})}$ 和 $\mathcal{D}_n^{(\boldsymbol{v})}$ 得到的高斯过程预测 $\widehat{\boldsymbol{\rho}}_{\boldsymbol{\omega},\,n} \in \mathcal{C}^0$ 和 $\widehat{\boldsymbol{\rho}}_{\boldsymbol{v},\,n} \in \mathcal{C}^0$。设 $Q_{\mathcal{X}}^{(\boldsymbol{\omega})} \subset \mathbb{H}$ 和 $Q_{\mathcal{X}}^{(\boldsymbol{v})} \subset \mathcal{H}$ 为紧子集，其中 $\widehat{\boldsymbol{\rho}}_{\boldsymbol{\omega},\,n}$ 和 $\widehat{\boldsymbol{\rho}}_{\boldsymbol{v},\,n}$ 分别有界。则存在有限的界函数

$$\boldsymbol{\rho}_n^{\boldsymbol{\omega},\ddagger} : Q_{\mathcal{X}}^{(\boldsymbol{\omega})} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \qquad \boldsymbol{\rho}_n^{\boldsymbol{v},\ddagger} : Q_{\mathcal{X}}^{(\boldsymbol{v})} \to \mathbb{R}_{\geq 0},$$

使得对于所有 $\delta \boldsymbol{q} \in Q_{\mathcal{X}}^{(\boldsymbol{\omega})}$、$\delta \boldsymbol{Q} \in Q_{\mathcal{X}}^{(\boldsymbol{v})}$ 和 $n \in \{1, \ldots, n_{\text{end}}\}$，预测误差均满足，

$$P\big(\|\boldsymbol{\rho}_{\boldsymbol{\omega}} - \widehat{\boldsymbol{\rho}}_{\boldsymbol{\omega},n}\| \leq \boldsymbol{\rho}_n^{\boldsymbol{\omega},\ddagger}(\overline{\delta \boldsymbol{q}}, \gamma)\big) \geq \gamma_{\boldsymbol{\omega}}, \tag{25}$$

$$P\big(\|\boldsymbol{\rho}_{\boldsymbol{v}} - \widehat{\boldsymbol{\rho}}_{\boldsymbol{v},n}\| \leq \boldsymbol{\rho}_n^{\boldsymbol{v},\ddagger}(\delta \boldsymbol{Q}, \gamma)\big) \geq \gamma_{\boldsymbol{v}}, \tag{26}$$

其中 $\gamma_{\boldsymbol{\omega}}$，$\gamma_{\boldsymbol{v}} \in (0, 1]$ 表示相应的置信概率。

备注 *4*：假设 2 确保对于每个数据集 $\mathcal{D}_n$，都存在高斯过程预测误差的概率上界。具体而言，它界定了 $Q_{\mathcal{X}}^{(\boldsymbol{\omega})}$ 上实际动力学 $\boldsymbol{\rho}_{\boldsymbol{\omega}}(\delta \boldsymbol{q})$ 与其估计值 $\widehat{\boldsymbol{\rho}}_{\boldsymbol{\omega},\,n}(\delta \boldsymbol{q})$ 之间的差异；类似地，也界定了 $Q_{\mathcal{X}}^{(\boldsymbol{v})}$ 上 $\boldsymbol{\rho}_{\boldsymbol{v}}(\delta \boldsymbol{Q})$ 与 $\widehat{\boldsymbol{\rho}}_{\boldsymbol{v},\,n}(\delta \boldsymbol{Q})$ 之间的差异。

为提供模型误差界，必须对 $\mathcal{D}_n^{(\boldsymbol{\omega})}$ 和 $\mathcal{D}_n^{(\boldsymbol{v})}$ 的未知组成部分引入额外假设 [29]。

假设 *3*：核函数 k 的选取应满足：$\boldsymbol{\rho}_{\boldsymbol{\omega}}$ 和 $\boldsymbol{\rho}_{\boldsymbol{v}}$ 分别在 $Q_{\mathcal{X}}^{(\boldsymbol{\omega})}$ 和 $Q_{\mathcal{X}}^{(\boldsymbol{v})}$ 上具有有限的再生核希尔伯特空间（RKHS）范数，即

$$\|\boldsymbol{\rho}_{\boldsymbol{\omega}}(\overline{\delta \boldsymbol{q}})\|_k = \xi_1 < \infty, \qquad \|\boldsymbol{\rho}_{\boldsymbol{v}}(\delta \boldsymbol{Q})\|_k = \xi_2 < \infty.$$

备注*5*：例如，基于 SO(3) 和 SE(3) 上几何感知且对跖不变的距离函数构造的通用核函数，便满足假设 3。此类核函数通过将标准正定核（例如平方指数核）与平滑且符合几何特性的距离函数复合而得，这些距离函数遵循单位四元数和单位双四元数的双覆盖结构。

由于 SO(3) 和 SE(3) 限制在集合 $Q_{\mathcal{X}}^{(\boldsymbol{\omega})}$ 和 $Q_{\mathcal{X}}^{(\boldsymbol{v})}$ 上时是紧致的，因此所得核函数仍具有通用性，并能诱导出再生核希尔伯特空间，该空间在这些集合上的连续函数空间中稠密。因此，假设 3 在实践中并不苛刻，因为任意连续的未知动力学 $\boldsymbol{\rho}_{\boldsymbol{\omega}}$ 和 $\boldsymbol{\rho}_{\boldsymbol{v}}$ 均可被任意精度地逼近，同时保留底层的群对称性。

RKHS 范数的有界性与未知函数的性质有关，而非核函数本身，尽管核函数的选择会影响界的数值。假设 3 要求所选核函数确保 $\boldsymbol{\rho}_{\boldsymbol{\omega}}$ 和 $\boldsymbol{\rho}_{\boldsymbol{v}}$ 属于相应的 RKHS。乍看之下，这一假设可能显得过于严格，因为未知函数并非显式已知。然而，存在通用核，能够在紧集 [30,上以任意精度逼近任意连续函数（见引理 4.55]）。如上所述，若使用 SO(3) 和 SE(3) 上与几何一致且具有对跖不变性的距离构造这类核，则所得 RKHS 会自然地遵循群结构，同时保留通用逼近性质。使用这类核，可以约束有界 RKHS 范数误差，如下引理所述。

引理 *3*（改编自 *[28]*）：考虑未知函数 $\boldsymbol{\rho}_{(\cdot)} \in \{\boldsymbol{\rho}_{\boldsymbol{\omega}}, \boldsymbol{\rho}_{\boldsymbol{v}}\}$ 以及满足假设 3 的高斯过程模型。则对于所有 $x \in Q_{\mathcal{X}}^{(\cdot)}$、$\gamma_{(\cdot)} \in (0,\ 1)$ 和 $n \in \{1, \ldots, n_{\text{end}}\}$，模型误差满足

$$P\Big(\|\mu(\widehat{\boldsymbol{\rho}}_{(\cdot),n} \,|\, x, \mathcal{D}_n^{(\cdot)}) - \boldsymbol{\rho}_{(\cdot)}\| \leq \|\boldsymbol{\beta}_{(\cdot),n}^T \Sigma^{1/2}\Big(\widehat{\boldsymbol{\rho}}_{(\cdot),n} \,|\, x, \mathcal{D}_n^{(\cdot)}\Big)\|\Big) \geq \gamma_{(\cdot)}. \tag{27}$$

这里，$\boldsymbol{\beta}_{(\cdot),\,n} \in \mathbb{H}$ 按元素定义为

$$(\boldsymbol{\beta}_{(\cdot),n})_j = \sqrt{2\|\boldsymbol{\rho}_{(\cdot),n}\|_k^2 + 300\,\Gamma_j^{(\cdot)} \ln^3\left(\frac{N(n)+1}{1-\gamma_{(\cdot)}^{1/3}}\right)}, \tag{28}$$

其中，对于 $x,\ x' \in \{x^{\{1\}},\dots,x^{\{N(n)+1\}}\}$，最大信息增益项 $\Gamma_j^{(\cdot)} \in \mathbb{R}$ 由下式给出

$$\Gamma_j^{(\cdot)} = \max_{x^{\{1\}},\dots,x^{\{N(n)+1\}} \in Q_{\mathcal{X}}^{(\cdot)}} \frac{1}{2}\log\left|I + \sigma_j^{-2} K_{(\cdot)}(x,x')\right|. \tag{29}$$

证明：这可由 [28,定理 6]直接得出。 □

因此，假设 2 中的概率误差界可简洁地写为

$$\boldsymbol{\rho}_n^{(\cdot),\ddagger}(x,\gamma_{(\cdot)}) := \left\|\boldsymbol{\beta}_{(\cdot),n}^T \Sigma^{1/2}\left(\widehat{\boldsymbol{\rho}}_{(\cdot),n} \,|\, x, \mathcal{D}_n^{(\cdot)}\right)\right\|. \tag{30}$$

备注 *6*：可基于最大信息增益高效地计算 $\boldsymbol{\beta}_n$ 。尽管 $\boldsymbol{\beta}_n$ 的各项通常会随着训练数据量的增加而增大，但由于预测方差 Σ不断减小，真实函数 $\boldsymbol{\rho}_{\boldsymbol{\omega}}$ 和 $\boldsymbol{\rho}_{\boldsymbol{v}}$ 仍可学习到任意小的误差（见 [31]）。通常，当高斯过程预测不确定性较高时，预测误差界 $\boldsymbol{\rho}^{\boldsymbol{\omega}}{}_{,n}{}^{\ddagger}(\delta\boldsymbol{q},\gamma_{\boldsymbol{\omega}})$和$\boldsymbol{\rho}^{\boldsymbol{v}}{}_{,n}{}^{\ddagger}(\delta\boldsymbol{Q},\gamma_{\boldsymbol{v}})$较大；反之则较小。随着紧集 $Q_{\mathcal{X}}^{(\boldsymbol{\omega})}$ 和 $Q_{\mathcal{X}}^{(\boldsymbol{v})}$ 扩张，这些界也往往会增大。由于含噪训练样本数量有限，该界具有随机性。

备注 *7*：引理 3 给出的概率界可从计算复杂度方面与近期文献中的其他结果进行比较，因为随着数据量不断增加，训练有时会变得难以处理。特别是，近期研究了如何应对这些可扩展性挑战，以便实时自适应地处理流数据，见 [32], [33], [34], [35]。

在本文中，我们采用了[28], 中给出的界的一种改进形式。该界目前是机械系统轨迹跟踪文献中最常用的界（例如，参见[8], [36], [37], [9], [38], [39]）。尽管对不同性能方法进行比较分析并非本文的研究主题，但可以在后续论文中比较此类界在本文所研究系统类别中的效率。

B. 控制设计

现在，我们为受扰系统（10）–（11）设计一个基于学习的位姿控制器。其思路是从标称控制器（8）–（9）出发，并利用高斯过程预测补偿未知项$\boldsymbol{\rho}_{\boldsymbol{\omega}}$ 和 $\boldsymbol{\rho}_{\boldsymbol{v}}$。我们采用一族李雅普诺夫函数 $\{V_n\}$进行稳定性分析；当高斯过程使用相应的数据集 $\mathcal{D}_n^{(\boldsymbol{\omega})}$和 $\mathcal{D}_n^{(\boldsymbol{v})}$进行预测时，第 n个函数处于激活状态。根据假设1，切换次数有限，因此稳定子系统之间的切换不会导致轨迹无界 [40]。

定理 *2*：考虑双四元数运动学 (4)，并令 $\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_d = (\boldsymbol{\omega}_d,\ 0)$ 和 $\widetilde{\boldsymbol{v}}_d = (\boldsymbol{v}_d,\ 0) \in \mathbb{H}$，以及满足 (5) 的期望双四元数 $\boldsymbol{Q}_d$。

假设实际输入如式 (10)–(11) 所示受到扰动，其中未知函数 $\boldsymbol{\rho}_{\boldsymbol{\omega}}$ 和 $\boldsymbol{\rho}_{\boldsymbol{v}}$ 由高斯过程（GP）先验建模，且满足假设 1–3 以及引理 3 的概率误差界，置信水平为$\gamma_{\boldsymbol{\omega}},\ \gamma_{\boldsymbol{v}} \in (0,1]$。设增益矩阵 $\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{\omega},\,n},\ \boldsymbol{K}_{\boldsymbol{v},\,n} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{3\times 3}$ 一致有界、对称且正定。也就是说，存在常数 $\alpha_n^{(\boldsymbol{\omega})} > 0$和 $\alpha_n^{(\boldsymbol{v})} > 0$，使得，

对所有自变量 β, $\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{\omega},\,n}(\beta) \succeq \alpha_n^{(\boldsymbol{\omega})} I$, $\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{v},\,n}(\beta) \succeq \alpha_n^{(\boldsymbol{v})} I$ 均成立。为简洁起见，定义 $\alpha_n := \min\{\alpha_n^{(\boldsymbol{\omega})}, \alpha_n^{(\boldsymbol{v})}\}$。

假设 $\boldsymbol{Q}$ 按照 (5) 在标称控制律 (8)–(9) 的作用下演化，并定义学习控制器

$$\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_c = \widetilde{\boldsymbol{\omega}} - \mu\left(\widehat{\boldsymbol{\rho}}_{\boldsymbol{\omega},n} \,|\, \overline{\delta\boldsymbol{q}}, \mathcal{D}_n^{(\boldsymbol{\omega})}\right), \tag{31}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{v}}_c = \widetilde{\boldsymbol{v}} - \mu\left(\widehat{\boldsymbol{\rho}}_{\boldsymbol{v},n} \,|\, \delta\boldsymbol{Q}, \mathcal{D}_n^{(\boldsymbol{v})}\right), \tag{32}$$

其中，$\overline{\delta\boldsymbol{q}} = \mathcal{P}(\delta\boldsymbol{Q})$、 $\delta\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}_d^* \circ \boldsymbol{Q}$ 和 $\mu(\cdot|\cdot,\ \mathcal{D}_n^{(\cdot)})$ 表示给定数据集 $\mathcal{D}_n^{(\cdot)}$ 时的高斯过程后验均值。根据 (10)–(11)，闭环输入变为 $\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_\rho = \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_c + \boldsymbol{\rho}_{\boldsymbol{\omega}}(\delta\boldsymbol{q}) + \nu_\omega$ 和$\widetilde{\boldsymbol{v}}_\rho = \widetilde{\boldsymbol{v}}_c + \boldsymbol{\rho}_{\boldsymbol{v}}(\delta\boldsymbol{Q}) + \nu_v$，因此残余扰动恰好就是 GP 模型误差。

对于每个 n，定义

$$c_n^{(\boldsymbol{\omega})} := \max_{\overline{\delta\boldsymbol{q}} \in Q_{\mathcal{X}}^{(\boldsymbol{\omega})}} \boldsymbol{\rho}_n^{(\boldsymbol{\omega}),\ddagger}(\overline{\delta\boldsymbol{q}}, \gamma_{\boldsymbol{\omega}}),$$

$$c_n^{(\boldsymbol{v})} := \frac{1}{2\alpha_n^{(\boldsymbol{v})}} \max_{\delta\boldsymbol{Q} \in Q_{\mathcal{X}}^{(\boldsymbol{v})}} \left(\boldsymbol{\rho}_n^{(\boldsymbol{v}),\ddagger}(\delta\boldsymbol{Q}, \gamma_{\boldsymbol{v}})\right)^2,$$

并设

$$\varepsilon_{0,n} := \frac{c_n^{(\boldsymbol{\omega})} + c_n^{(\boldsymbol{v})}}{\alpha_n}.$$

最后定义 $K_{\varepsilon_{0,\,n}} := \{\delta\boldsymbol{Q} : |\delta q_0|\,\|\delta\boldsymbol{q}\|^2 + \|\delta\boldsymbol{p}\|^2 \le \varepsilon_{0,\,n}\}$，以及 $M_n := \max_{\delta\boldsymbol{Q} \in K_{\varepsilon_0}} V_n(\delta\boldsymbol{Q})$。

那么，存在一个时间 $T \ge 0$ 和一个指标 n_{end}（如假设1所述），使得对于 $\gamma := \min\{\gamma_{\boldsymbol{\omega}}, \gamma_{\boldsymbol{v}}\}$，双四元数误差 $\delta\boldsymbol{Q}$ 依概率一致最终有界：

$$P\left\{\|\delta\boldsymbol{q}(t)\|^2 + \frac{1}{2}\|\delta\boldsymbol{p}(t)\|^2 \le M_{n_{\text{end}}},\ \forall t \ge T\right\} \ge \gamma. \tag{33}$$

证明：对于每个 n，考虑李雅普诺夫候选函数

$$V_n(\delta\boldsymbol{Q}) = \|\delta\boldsymbol{q}\|^2 + \frac{1}{2}\|\delta\boldsymbol{p}\|^2, \tag{34}$$

其在 $\delta\boldsymbol{Q}$ 上正定，并且满足 $V_n(\delta\boldsymbol{Q}) = 0$ 当且仅当 $\delta\boldsymbol{q} = \boldsymbol{0}$、$|\delta q_0| = 1$ 和 $\mathcal{D}(\delta\boldsymbol{Q}) = (0,0)$。

沿着误差动力学 $\delta\boldsymbol{Q}$ （见式 (4)）的解，对 V_n 求时间导数，可得

$$\dot{V}_n = \delta\boldsymbol{q}^T\left(\mathbf{S}(\delta\boldsymbol{q}) + I\delta q_0\right)\mathcal{P}(\delta\boldsymbol{\Omega}) + \delta\boldsymbol{p}^T\dot{\delta\boldsymbol{p}}, \tag{35}$$

其中， $\mathcal{P}(\delta\boldsymbol{\Omega})$ 表示双四元数 $\delta\boldsymbol{\Omega}$ 的主（非对偶）部分。

对于标称控制器 (8)–(9)（不含未知扰动且不含高斯过程补偿），根据标准结果（见定理 1），误差动力学满足

$$\dot{V}_n = -|\delta q_0|\,\delta\boldsymbol{q}^T\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{\omega},n}(\beta)\,\delta\boldsymbol{q} - \delta\boldsymbol{p}^T\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{v},n}(\beta)\,\delta\boldsymbol{p}. \tag{36}$$

使用学习控制器 (31)–(32)，我们可以将式 (36) 的闭环扰动写成依赖于 GP 模型误差的附加项。

引入 GP模型误差函数

$$\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\omega},n}(\overline{\delta\boldsymbol{q}}) := \boldsymbol{\rho}_{\boldsymbol{\omega},n}(\overline{\delta\boldsymbol{q}}) - \mu\left(\widehat{\boldsymbol{\rho}}_{\boldsymbol{\omega},n} \,|\, \overline{\delta\boldsymbol{q}}, \mathcal{D}_n^{(\boldsymbol{\omega})}\right), \tag{37}$$

$$\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{v},n}(\delta\boldsymbol{Q}) := \boldsymbol{\rho}_{\boldsymbol{v},n}(\delta\boldsymbol{Q}) - \mu\left(\widehat{\boldsymbol{\rho}}_{\boldsymbol{v},n} \,|\, \delta\boldsymbol{Q}, \mathcal{D}_n^{(\boldsymbol{v})}\right). \tag{38}$$

那么，结合学习控制器 (31)–(32)，导数 (35) 可表示为

$$\begin{aligned}\dot{V}_n = &-|\delta q_0|\,\delta\boldsymbol{q}^T\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{\omega},n}(\beta)\,\delta\boldsymbol{q} - \delta\boldsymbol{p}^T\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{v},n}(\beta)\,\delta\boldsymbol{p}\\ &- \delta\boldsymbol{q}^T\big[\mathbf{S}(\delta\boldsymbol{q}) + I\delta q_0\big]\,\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\omega},n}(\overline{\delta\boldsymbol{q}}) - \delta\boldsymbol{p}^T\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{v},n}(\delta\boldsymbol{Q}).\end{aligned} \tag{39}$$

利用$\mathbf{S}(\delta\boldsymbol{q})$是斜对称矩阵这一性质，可得 $\delta\boldsymbol{q}^T\mathbf{S}(\delta\boldsymbol{q}) = 0$，因此 $\delta\boldsymbol{q}^T\big[\mathbf{S}(\delta\boldsymbol{q}) + I\delta q_0\big] = \delta q_0\,\delta\boldsymbol{q}^T$。由此，(39) 可简化为

$$\begin{aligned}\dot{V}_n = &-|\delta q_0|\,\delta\boldsymbol{q}^T\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{\omega},n}(\beta)\,\delta\boldsymbol{q} - \delta\boldsymbol{p}^T\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{v},n}(\beta)\,\delta\boldsymbol{p}\\ &- \delta q_0\,\delta\boldsymbol{q}^T\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\omega},n}(\overline{\delta\boldsymbol{q}}) - \delta\boldsymbol{p}^T\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{v},n}(\delta\boldsymbol{Q}).\end{aligned} \tag{40}$$

根据增益条件，$\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{\omega},n}(\beta) \succeq \alpha_n^{(\boldsymbol{\omega})} I$ 且 $\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{v},n}(\beta) \succeq \alpha_n^{(\boldsymbol{v})} I$，因此

$$-|\delta q_0|\,\delta\boldsymbol{q}^T\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{\omega},n}(\beta)\,\delta\boldsymbol{q} \le -\alpha_n^{(\boldsymbol{\omega})}|\delta q_0|\|\delta\boldsymbol{q}\|^2, \tag{41}$$

and

$$-\delta\boldsymbol{p}^T\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{v},n}(\beta)\,\delta\boldsymbol{p} \le -\alpha_n^{(\boldsymbol{v})}\|\delta\boldsymbol{p}\|^2. \tag{42}$$

接下来，我们对两个高斯过程误差项进行界定。由于 $\delta\boldsymbol{q}$ 是单位四元数，因此有 $\|\delta\boldsymbol{q}\| \le 1$ 和 $|\delta q_0| \le 1$，从而

$$\big|\delta q_0\,\delta\boldsymbol{q}^T\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\omega},n}(\overline{\delta\boldsymbol{q}})\big| \le \|\delta\boldsymbol{q}\|\,|\delta q_0|\,\|\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\omega},n}(\overline{\delta\boldsymbol{q}})\| \le \|\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\omega},n}(\overline{\delta\boldsymbol{q}})\|. \tag{43}$$

对于平移部分，我们应用柯西–施瓦茨不等式以及不等式 $2ab \le a^2 + b^2$:

$$\begin{aligned}\big|\delta\boldsymbol{p}^T\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{v},n}(\delta\boldsymbol{Q})\big| &\le \|\delta\boldsymbol{p}\|\,\|\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{v},n}(\delta\boldsymbol{Q})\|\\ &\le \tfrac{1}{2}\alpha_n^{(\boldsymbol{v})}\|\delta\boldsymbol{p}\|^2 + \frac{1}{2\alpha_n^{(\boldsymbol{v})}}\|\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{v},n}(\delta\boldsymbol{Q})\|^2.\end{aligned} \tag{44}$$

将 (41)–(44) 代入 (40)，得到

$$\begin{aligned}\dot{V}_n &\le -\alpha_n^{(\boldsymbol{\omega})}|\delta q_0|\|\delta\boldsymbol{q}\|^2 - \alpha_n^{(\boldsymbol{v})}\|\delta\boldsymbol{p}\|^2\\ &\quad + \|\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\omega},n}(\overline{\delta\boldsymbol{q}})\| + \tfrac{1}{2}\alpha_n^{(\boldsymbol{v})}\|\delta\boldsymbol{p}\|^2 + \frac{1}{2\alpha_n^{(\boldsymbol{v})}}\|\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{v},n}(\delta\boldsymbol{Q})\|^2\\ &= -\alpha_n^{(\boldsymbol{\omega})}|\delta q_0|\|\delta\boldsymbol{q}\|^2 - \tfrac{1}{2}\alpha_n^{(\boldsymbol{v})}\|\delta\boldsymbol{p}\|^2\\ &\quad + \|\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\omega},n}(\overline{\delta\boldsymbol{q}})\| + \frac{1}{2\alpha_n^{(\boldsymbol{v})}}\|\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{v},n}(\delta\boldsymbol{Q})\|^2.\end{aligned} \tag{45}$$

根据假设 2 和引理 3，对于每个 $n \in \{1,\dots,n_{\text{end}}\}$ 以及所有 $\delta\boldsymbol{q} \in \overline{Q_{\mathcal{X}}^{(\boldsymbol{\omega})}}$、$\delta\boldsymbol{Q} \in Q_{\mathcal{X}}^{(\boldsymbol{v})}$，高斯过程预测误差满足

$$P\Big(\|\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\omega},n}(\overline{\delta\boldsymbol{q}})\| \le \boldsymbol{\rho}_n^{(\boldsymbol{\omega}),\ddagger}(\overline{\delta\boldsymbol{q}},\gamma_{\boldsymbol{\omega}})\Big) \ge \gamma_{\boldsymbol{\omega}}, \tag{46}$$

$$P\Big(\|\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{v},n}(\delta\boldsymbol{Q})\| \le \boldsymbol{\rho}_n^{(\boldsymbol{v}),\ddagger}(\delta\boldsymbol{Q},\gamma_{\boldsymbol{v}})\Big) \ge \gamma_{\boldsymbol{v}}. \tag{47}$$

令 $\gamma := \min\{\gamma_{\boldsymbol{\omega}},\gamma_{\boldsymbol{v}}\} \in (0,1]$，，并考虑（46）–（47）中的两个界同时成立的事件。在该事件上（其概率至少为 γ），我们有

$$\|\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\omega},n}(\overline{\delta\boldsymbol{q}})\| \le \boldsymbol{\rho}_n^{(\boldsymbol{\omega}),\ddagger}(\overline{\delta\boldsymbol{q}},\gamma_{\boldsymbol{\omega}}), \tag{48}$$

$$\|\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{v},n}(\delta\boldsymbol{Q})\|^2 \le \big(\boldsymbol{\rho}_n^{(\boldsymbol{v}),\ddagger}(\delta\boldsymbol{Q},\gamma_{\boldsymbol{v}})\big)^2. \tag{49}$$

定义最坏情况常数

$$c_n^{(\boldsymbol{\omega})} := \max_{\overline{\delta\boldsymbol{q}}\in Q_{\mathcal{X}}^{(\boldsymbol{\omega})}} \boldsymbol{\rho}_n^{(\boldsymbol{\omega}),\ddagger}(\overline{\delta\boldsymbol{q}},\gamma_{\boldsymbol{\omega}}), \tag{50}$$

$$c_n^{(\boldsymbol{v})} := \frac{1}{2\alpha_n^{(\boldsymbol{v})}} \max_{\delta\boldsymbol{Q}\in Q_{\mathcal{X}}^{(\boldsymbol{v})}} \big(\boldsymbol{\rho}_n^{(\boldsymbol{v}),\ddagger}(\delta\boldsymbol{Q},\gamma_{\boldsymbol{v}})\big)^2. \tag{51}$$

于是，在概率至少为 γ 的事件上，不等式（45）推出 $\dot{V}_n \le -\alpha_n^{(\boldsymbol{\omega})}|\delta q_0|\|\delta\boldsymbol{q}\|^2 - \frac{1}{2}\alpha_n^{(\boldsymbol{v})}\|\delta\boldsymbol{p}\|^2 + c_n^{(\boldsymbol{\omega})} + c_n^{(\boldsymbol{v})}$。

令 $\alpha_n := \frac{1}{2}\min\{\alpha_n^{(\boldsymbol{\omega})},\alpha_n^{(\boldsymbol{v})}\}$，使得 $\alpha_n^{(\boldsymbol{\omega})} \ge 2\alpha_n$ 且 $\frac{1}{2}\alpha_n^{(\boldsymbol{v})} \ge \alpha_n$。于是

$$\dot{V}_n \le -\alpha_n\big(|\delta q_0|\|\delta\boldsymbol{q}\|^2 + \|\delta\boldsymbol{p}\|^2\big) + d_n, \tag{52}$$

其中定义 $d_n := c_n^{(\boldsymbol{\omega})} + c_n^{(\boldsymbol{v})} > 0$。引入标量$\varepsilon_{0,\,n} := \frac{d_n}{\alpha_n}$，以及集合

$$\mathcal{A}_{\varepsilon_{0,n}} := \big\{\delta\boldsymbol{Q} \;:\; |\delta q_0|\,\|\delta\boldsymbol{q}\|^2 + \|\delta\boldsymbol{p}\|^2 > \varepsilon_{0,n}\big\}. \tag{53}$$

对于所有 $\delta\boldsymbol{Q} \in \mathcal{A}_{\varepsilon_{0,\,n}}$，有

$$|\delta q_0|\|\delta\boldsymbol{q}\|^2 + \|\delta\boldsymbol{p}\|^2 > \varepsilon_{0,n} = \frac{d_n}{\alpha_n},$$

因此，根据 (52)，$\dot{V}_n < -\alpha_n\varepsilon_{0,\,n} + d_n = 0$。因此，以至少 γ 的概率，在 GP 误差界成立的事件条件下，对于所有 $\delta\boldsymbol{Q} \in \mathcal{A}_{\varepsilon_{0,\,n}}$，我们有 $\dot{V}_n(\delta\boldsymbol{Q}) < 0$。现在考虑其补集

$$K_{\varepsilon_{0,n}} := \big\{\delta\boldsymbol{Q} \;:\; |\delta q_0|\,\|\delta\boldsymbol{q}\|^2 + \|\delta\boldsymbol{p}\|^2 \le \varepsilon_{0,n}\big\},$$

如定理陈述所述，并定义 $M_n := \max_{\delta\boldsymbol{Q}\in K_{\varepsilon_{0,\,n}}} V_n(\delta\boldsymbol{Q})$。由于 $K_{\varepsilon_{0,\,n}}$ 是紧集，且 V_n 连续，因此 M_n 有限且严格为正（除非 $\delta\boldsymbol{Q}$ 位于原点）。令 $B_n := \{\delta\boldsymbol{Q} : V_n(\delta\boldsymbol{Q}) \le M_n\}$。于是$K_{\varepsilon_{0,\,n}} \subseteq B_{n_0}$。根据 (52) 以及 V_n 在 $\mathcal{A}_{\varepsilon_{0,\,n}}$上为负这一事实，标准的李雅普诺夫论证表明，在概率至少为 γ 的事件条件下，每条轨迹 $\delta\boldsymbol{Q}(t)$ 都会在有限时间内进入B_n，且一旦进入 B_n，便不会离开 B_n（否则，V_n 必须在 B_n 的边界上的某点为正，这与 (52) 矛盾）。因此，B_n 是一个正向不变集，并且 $K_{\varepsilon_{0,\,n}}$ 是一致最终吸引的。

根据假设1，数据集切换次数 $n(t)$有限，且存在 n_{end}，使得对于所有 $t \ge T_{\text{end}}$，$n(t) = n_{\text{end}}$。利用多重李雅普诺夫函数论证 [40]，并注意到每个 V_n 以至少 γ的概率在相应的 $K_{\varepsilon_{0,\,n}}$ 之外递减，我们可以得出，存在$T \ge 0$，使得对于所有 $t \ge T$，$V_{n_{\text{end}}}(\delta\boldsymbol{Q}(t)) \le M_{n_{\text{end}}}$ 的概率至少为 γ。这等价于

$$\|\delta\boldsymbol{q}(t)\|^2 + \tfrac{1}{2}\|\delta\boldsymbol{p}(t)\|^2 \le M_{n_{\text{end}}}, \quad \forall t \ge T,$$

其概率至少为 γ，这证明了式（33）所述的概率一致最终有界性。□

注 *8*：该框架通过对数据集 $\mathcal{D}_n^{(\boldsymbol{\omega})}$ 和 $\mathcal{D}_n^{(\boldsymbol{v})}$ 进行顺序更新来支持在线学习，这些数据集会随着新数据的获取而扩充或替换。然而，本文重点关注所得基于学习的控制器的稳定性分析，而非在线高斯过程性能的优化。有关实时高斯过程更新的先进策略，包括稀疏形式和流式形式，请参见 [26], [27]。

注 *9*：高斯过程模型 $\mathrm{GP}^{(\boldsymbol{\omega})}$ 和 $\mathrm{GP}^{(\boldsymbol{v})}$ 还可以通过基于延迟测量对后验进行条件化来处理处理延迟或通信延迟。当新数据或延迟数据到达时，该机制能够对估计误差进行后验校正，从而增强基于高斯过程的控制器对反馈延迟和异步数据采集的鲁棒性。

C. 基于在线学习的跟踪算法

具体实现过程自然遵循定理 2 中建立的理论框架。特别是，在每次学习迭代 n中，使用更新后的数据集 $\mathcal{D}_n^{(\boldsymbol{\omega})}$和 $\mathcal{D}_n^{(\boldsymbol{v})}$重新训练高斯过程模型 $\mathrm{GP}^{(\boldsymbol{\omega})}$ 和 $\mathrm{GP}^{(\boldsymbol{v})}$，从而得到新的后验均值估计 $\widehat{\boldsymbol{\rho}}_{\boldsymbol{\omega},\,n}$ 和 $\widehat{\boldsymbol{\rho}}_{\boldsymbol{v},\,n}$。这些估计值定义了学习得到的控制律 (31)–(32) 以及相应的李雅普诺夫函数 $V_n(\delta \boldsymbol{Q})$。

可选地，可以使用 (30) 计算概率模型误差界 $\boldsymbol{\rho}^{(\boldsymbol{\omega})\,\ddagger}_{n}$和 $\boldsymbol{\rho}^{(\boldsymbol{v})\,\ddagger}_{n}$，以评估 (33) 的最终界 M_n。特别是，最终迭代 $n = n_{\text{end}}$ 得到界 $M_{n_{\text{end}}}$，它表示置信水平$\gamma = \min\{\gamma_{\boldsymbol{\omega}}, \gamma_{\boldsymbol{v}}\}$下预期稳态跟踪误差的最大值。该迭代过程总结于算法 1 中

算法 1 在线学习跟踪控制

输入： GP 更新的最大次数 n_{end}；批量大小 $\{m_n\}_{n=1}^{n_{\text{end}}}$；初始数据集 $\mathcal{D}_0^{(\boldsymbol{\omega})}$，$\mathcal{D}_0^{(\boldsymbol{v})}$（可能为空）
初始化： 训练高斯过程模型 $f_{GP}^{(\boldsymbol{\omega})}$以及 $f_{GP}^{(\boldsymbol{v})}$，基于 $\mathcal{D}_0^{(\boldsymbol{\omega})}$，$\mathcal{D}_0^{(\boldsymbol{v})}$ 并获得后验均值 $\widehat{\boldsymbol{\rho}}_{\boldsymbol{\omega},\,0}$，$\widehat{\boldsymbol{\rho}}_{\boldsymbol{v},\,0}$
初始化： 根据 实现控制律 $\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_c$，$\widetilde{\boldsymbol{v}}_c$ 依据（31）–（32），其中 $n=0$
设置 $n \leftarrow 0$
当 $n < n_{\text{end}}$ **时执行**
  $n \leftarrow n+1$
  从系统 (8)–(9) 收集 m_n 个新数据点，并更新数据集 $\mathcal{D}_n^{(\boldsymbol{\omega})}, \mathcal{D}_n^{(\boldsymbol{v})}$ 如 (15) 所示
  在 $\mathcal{D}_n^{(\boldsymbol{\omega})}, \mathcal{D}_n^{(\boldsymbol{v})}$ 上重新训练高斯过程模型并计算后验均值 $\widehat{\boldsymbol{\rho}}_{\boldsymbol{\omega},n}$, $\widehat{\boldsymbol{\rho}}_{\boldsymbol{v},n}$
  （可选）计算误差界 $\boldsymbol{\rho}_n^{(\boldsymbol{\omega})\,\ddagger}$ 以及 $\boldsymbol{\rho}_n^{(\boldsymbol{v})\,\ddagger}$ 使用式 (30) 及其在式 (33) 中对应的最终界 M_n
  更新控制律 $\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_c, \widetilde{\boldsymbol{v}}_c$ 使用新的后验 (31)–(32)中的含义
结束循环

在该流程开始时，设计者设定高斯过程模型所允许的最大跟踪误差 $M_{n_{\text{end}}}$ 以及数据集更新的最大次数 n_{end}。这一选择取决于可存储和处理的数据总量，而这通常受内存和计算资源限制。如果在时刻 t_n 和 t_{n+1}之间收集到 m_n 个数据点，且可用存储容量允许存储 $\bar{m}$ 个数据点，则最大数据集数设为 $n_{\text{end}} = \lfloor \bar{m}/m_n \rfloor$。

每个高斯过程模型 $\mathrm{GP}^{(\boldsymbol{\omega})}$ 和 $\mathrm{GP}^{(\boldsymbol{v})}$均使用各自对应的数据集 $\mathcal{D}_0^{(\boldsymbol{\omega})}$ 和 $\mathcal{D}_0^{(\boldsymbol{v})}$ 进行初始化。这些初始数据集可以来自离线辨识实验、仿真活动；如果没有可用的先验数据，则可以为空。在后一种情况下，初始高斯过程后验均值为零，即 $\widehat{\boldsymbol{\rho}}_{\boldsymbol{\omega},\,0} = \mathbf{0}$ 和 $\widehat{\boldsymbol{\rho}}_{\boldsymbol{v},\,0} = \mathbf{0}$，因此控制律简化为其标称形式 (8)–(9)。

运行期间，在 t_n 和 t_{n+1} 之间从飞行器收集一批 m_n 个新的测量值，并将其存储为数据集 $\mathcal{D}_n^{(\boldsymbol{\omega})}$和 $\mathcal{D}_n^{(\boldsymbol{v})}$。随后，使用各自的数据集重新训练两个高斯过程模型，并在时间 t_{n+1} 根据学习得到的补偿项$\widehat{\boldsymbol{\rho}}_{\boldsymbol{\omega},\,n}$ 和$\widehat{\boldsymbol{\rho}}_{\boldsymbol{v},\,n}$ 更新控制输入，如(31)–(32)所示。

重要的是，在时间 t_n 之前，控制回路会继续使用先前的估计值 $\widehat{\boldsymbol{\rho}}_{\boldsymbol{\omega},\,n-1}$ 和 $\widehat{\boldsymbol{\rho}}_{\boldsymbol{v},\,n-1}$，这意味着对 GP 进行重新训练的步骤不受硬实时约束。该过程会一直重复，直到达到最大数据集数量 n_{end}，此后，定理 2 的稳定性结果保证跟踪误差 $\delta \boldsymbol{Q}(t)$保持在由 $M_{n_{\text{end}}}$ 定义的概率界内，置信水平为 $\gamma = \min\{\gamma_{\boldsymbol{\omega}}, \gamma_{\boldsymbol{v}}\}$。

注 *10*：所提出的框架可以视为在线学习平衡（OLBB）方法 [41] 的几何扩展：将其从二阶机械系统的欧几里得状态空间扩展到 SE(3) 的双四元数表示。在 [41], 中，OLBB 控制器将基于模型的项与自适应反馈增益律相结合，该增益的大小取决于高斯过程预言机预测的模型误差，从而以高概率确保跟踪误差有界。在本文中，这一原理被重新表述为几何形式：未知的旋转和平移动力学 $\boldsymbol{\rho}_{\boldsymbol{\omega}}$ 和 $\boldsymbol{\rho}_{\boldsymbol{v}}$ 起到 OLBB 中未建模力的作用，而从高斯过程后验推导出的概率界则被纳入定理 2 的李雅普诺夫分析，以保证双四元数跟踪误差有界。因此，定理 2 将 OLBB 的稳定性结果推广到刚体运动的非线性流形，在遵循 SE(3) 群结构的同时保留概率学习保证。

IV. 仿真结果

为验证所提出的算法，我们进行了若干数值仿真。第一个仿真对应一条双纽线形轨迹，如图2所示。图中描绘了标称参考路径以及预期飞行器跟随的姿态。

本次仿真的目标有两个。首先，展示双四元数控制器在时变参考运动下的标称轨迹跟踪性能。其次，评估所提出的基于学习的补偿方案处理持续性状态相关扰动的能力，这些扰动会影响旋转和平移动力学。

飞行器沿该轨迹以线性递减的速度行进，这意味着随着时间推移，飞行器沿双纽线移动得越来越慢。因此，飞行器在轨迹中心附近停留的时间越来越长。

假设在双纽线的中心存在一个外部扰动源。该扰动会影响车辆朝向（偏航角）和垂直位置（高度）。因此，每当飞行器接近轨迹的

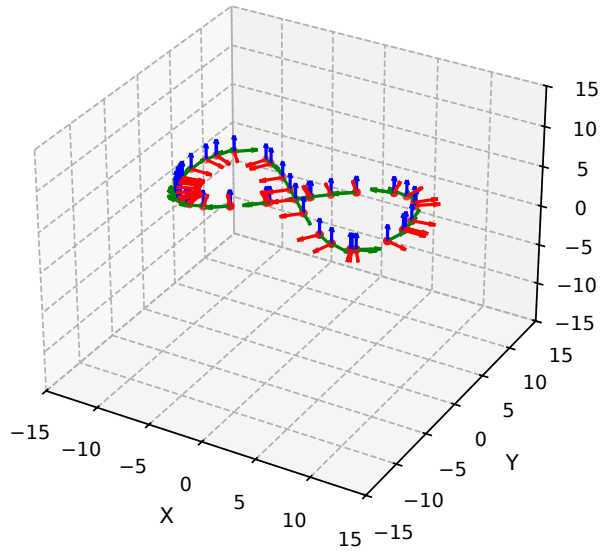

图 2：位置和姿态的标称参考轨迹。

中心时，外部扰动便会作用于系统。该扰动的影响取决于飞行器在中心附近停留的时间长短：随着飞行器逐渐减速，扰动作用的持续时间会更长。

从建模角度来看，这种扰动可以解释为作用于角速度和线速度通道的局部状态相关扰动。具体而言，当飞行器状态接近特定区域时，扰动被激活，而在其他区域则保持不激活。这一设置与第 II 节中引入的扰动模型一致，其中未知函数以耦合方式影响旋转和平移运动学。

这种行为在图 3 和图 4 中可以清楚地观察到：随着时间推移，扰动的持续时间逐渐增加。这是飞行器速度不断降低的直接结果，因为飞行器在扰动源附近停留的时间更长。图 3 和图 4 给出了注入的扰动及其对应的基于高斯过程的估计值。扰动窗口持续时间的增加反映了飞行器速度的降低，而高斯过程预测则会针对反复暴露于相同扰动模式的情况进行在线调整。

从物理角度来看，这类扰动可能代表影响磁力计测量的外部磁扰动。这种扰动会导致偏航角偏转，迫使飞行器调整成对旋翼（顺时针或逆时针旋转）的旋转速度，以补偿非预期的旋转。由于飞行器动力学模型存在不完善之处——尤其是将扭矩和推力映射到电机转速的矩阵——这些旋翼转速变化可能会暂时降低总推力。因此，高度会下降，而这一下降与影响偏航测量的磁扰动相关联。此设置有意增加了跟踪任务的难度，因为飞行器受到扰动影响的时间间隔会逐渐延长。因此，扰动的累

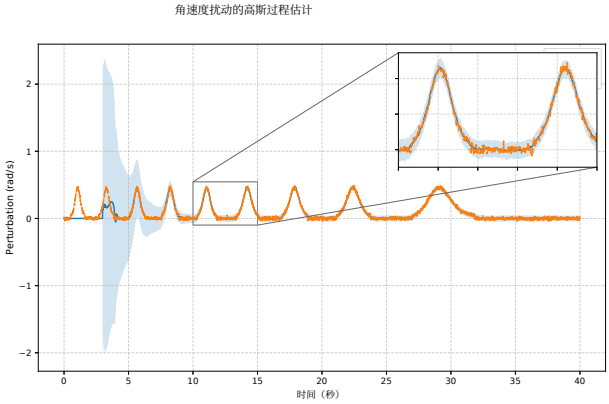

图 3：当飞行器接近轨迹中心时影响偏航和高度的外部扰动。角速度扰动的高斯过程估计。

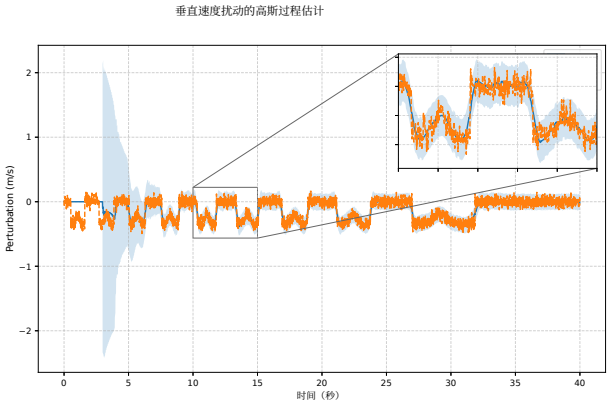

图 4：飞行器接近轨迹中心时，影响偏航和高度的外部扰动。线速度扰动的高斯过程估计值。

积效应会随时间增长，从而对基于学习的补偿机制构成严格考验。

A. 开环实验（无高斯过程补偿）

在相同条件下进行了两次数值实验。在第一次实验中，控制器不使用高斯过程（GP）估计值来补偿扰动（即高斯过程在线运行，但其预测值不会注入控制输入中）。为清晰起见，这里所说的“开环”仅针对学习补偿；反馈控制器本身仍处于闭环状态。

如图 5 所示，当磁力计感测到的磁场受到扰动影响时，偏航跟踪性能明显下降。同时，图 6 显示位置跟踪也受到影响，扰动尤其明显地表现为高度损失。

为定量评估控制器性能，计算了均方误差（MSE）和平均绝对误差（MAE）。为了分析这些指标随时间的变化情况，我们使用 10 s 的滑动时间窗口评估误差。这种方法可以观察跟踪性能随时间的演变。姿态和位置的均方误差（MSE）与平均绝对误差（MAE）分别如图 7 和图 8 所示。

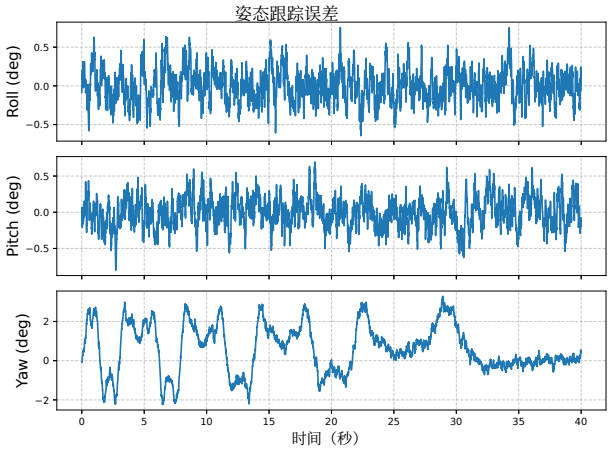

图5：存在外部磁扰动时的开环偏航跟踪性能。

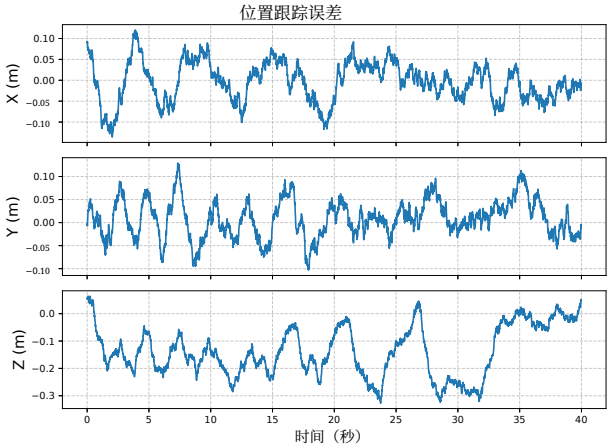

图6：开环位置跟踪性能，展示了外部扰动导致的高度损失。

尽管本实验未使用高斯过程估计进行控制补偿，高斯过程估计器仍在在线运行。这使得我们能够独立于控制回路评估其估计能力。如图 3 和图 4 所示，高斯过程能够准确估计影响飞行器的扰动。在这些图中，真实扰动以橙色虚线表示，估计均值以蓝色实线表示， ±2标准差则以蓝色阴影区域表示。

仿真开始时，由于缺乏足够的训练数据，高斯过程的方差较大。然而，随着时间推移，收集到的样本越来越多，方差逐渐减小，高斯过程最终能够准确估计外部扰动。

在这些仿真中，导航系统以 300 Hz 的频率融合惯性测量单元数据，并以 5 Hz 的频率融合位置和姿态信息（来自磁力计）。磁力计测量受到加性小角度噪声的影响（约为 0.5°），而位置测量值则受到零均值高斯噪声的影响，其每个轴上的标准差为 0。5 m。角速度由陀螺仪提供，其噪声特性与低成本飞行控制器中常用的MEMS惯性测量单元相符，角度随机游走（

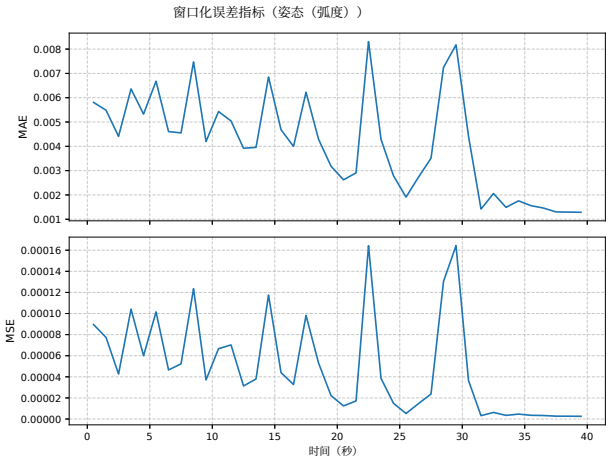

图7：开环控制器的姿态跟踪误差在10 s滑动时间窗口内计算的平均绝对误差（MAE）和均方误差（MSE）。

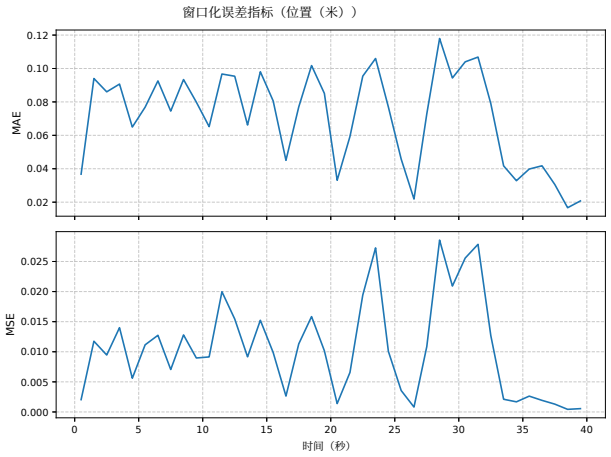

图8：开环控制器的位置跟踪误差在10 s滑动时间窗口内计算的平均绝对误差（MAE）和均方误差（MSE）。

ARW）约为 1。0 度/√小时。系统使用标准扩展卡尔曼滤波器（EKF）融合这些信息，以估计飞行器的位置、速度和姿态。随后，这些估计值被提供给以 100 Hz 运行的控制算法。

扰动估计采用基于 GPyTorch 库实现的稀疏变分高斯过程（SVGP）。使用了两个相互独立的高斯过程模型：一个用于估计影响姿态动力学的扰动，另一个用于估计影响位置动力学的扰动。

对于这两个模型，均使用带有自动相关性确定（ARD）的备注 2 核函数。

高斯过程模型采用滑动窗口方式在线训练，使用 Adam 优化器，学习率为 10^{-2}。维护一个包含最近 $N = 2000$ 个样本的数据集，并设置 300 个样本的初始预热阶段。使用大小为 $B = 256$ 的小批量，每次高斯过程更新包含五个基于梯度的优化步骤。这

种配置使高斯过程模型能够在线适应缓慢变化的扰动。

所提出的控制与估计框架面向实时执行而设计，并在嵌入式硬件上评估了其计算需求。部署于 NVIDIA Jetson Orin Nano 时，得益于 GPU 加速支持高斯过程模型的推理和在线训练，该算法能够在线运行。在所考虑的实现中，控制回路以100Hz运行，而高斯过程模型的更新频率较低，为20Hz，采用稀疏变分形式，并使用128个诱导点。

在这些条件下，高斯过程推理的执行时间远低于控制采样周期，定期进行的高斯过程更新也能在几毫秒内完成，因此控制器可以实时运行而不违反时序约束。

如果需要更大的计算余量，可将控制回路频率降低至 50 –60Hz 左右，而不会显著影响所考虑轨迹的控制性能。降低频率可直接放宽实时约束，并进一步增加高斯过程更新的可用计算时间，从而能够更频繁地进行训练，或增加优化迭代次数。因此，该算法仍适用于在嵌入式平台上实时执行，同时保留基于高斯过程的扰动补偿优势。

B. 闭环实验（带高斯过程补偿）

在第二次数值实验中，实验设置与第一次相同，主要区别在于利用高斯过程扰动估计对控制输入进行补偿。

所得的姿态和位置跟踪结果如图 9 和图 10 所示。起初，由于高斯过程估计的不确定性较高，补偿效果并不明显。然而，一旦高斯过程收集到足够的数据，补偿便显著提升了跟踪性能。

图 11 和图 12 所示的均方误差和平均绝对误差指标对比定量 पुष्टि了这一改进。启用基于高斯过程的补偿后，与开环情形相比，姿态误差和位置误差均显著降低。

C. 不同轨迹下的定量性能评估

为进一步分析所提出算法的行为，采用不同的若干数值实验进行了研究
参考轨迹。具体而言，考虑了三种具有代表性的轨迹类别：双纽线轨迹、圆形轨迹和上升螺旋轨迹。这些 40s-时长轨迹用于评估控制器在不同运动模式和动态条件下的性能。在这些场景中，扰动在整个飞行过程中持续影响飞行器。

针对每一类轨迹 $p = 16$均进行了实验，并通过计算均方误差（MSE）和

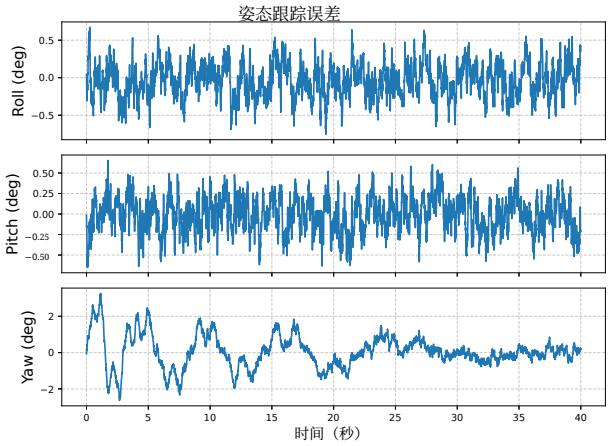

图 9：采用基于高斯过程的扰动补偿时的闭环姿态跟踪性能。在初始瞬态阶段，高斯过程不确定性较高；此后，偏航跟踪精度显著提高。

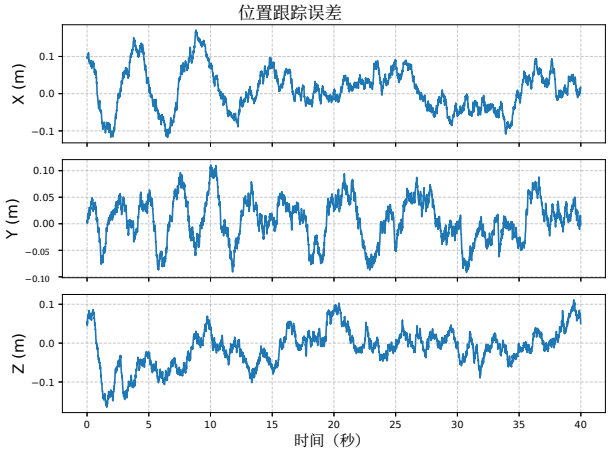

图 10：采用基于高斯过程的扰动补偿时的闭环位置跟踪性能。高斯过程估计收敛后，扰动引起的高度损失得到有效缓解。

姿态和位置误差的平均绝对误差（MAE），对跟踪性能进行了定量评估。评估分别在控制回路中未加入和加入基于高斯过程（GP）的扰动补偿两种情况下进行。

结果表明，加入高斯过程校正显著提升了所有测试轨迹的跟踪性能。这种提升在姿态误差和位置误差方面均一致可见。表 III 汇总了各条轨迹在采用和未采用基于高斯过程的补偿时得到的均方误差和平均绝对误差值。

V. 结论与未来工作

本文提出了一种基于学习的自主车辆轨迹跟踪控制器，并在双四元数框架下进行公式化。该方法将高斯过程（GP）模型融入几何控制律，以补偿影响姿态和位置的未知非线性动力学及外部扰动，同时保持

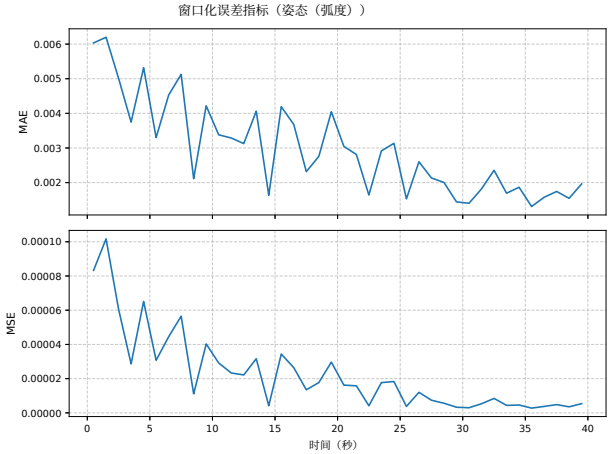

图 11：对于采用基于高斯过程的扰动补偿的闭环控制器，在 10 s 滑动时间窗口内计算的姿态跟踪误差的平均绝对误差（MAE）和均方误差（MSE）。

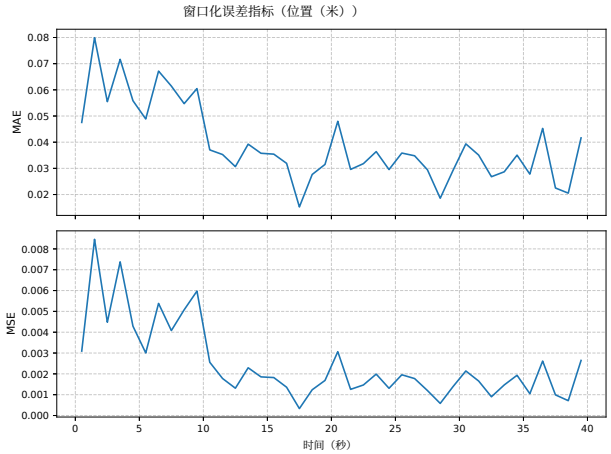

图 12：对于采用基于高斯过程的扰动补偿的闭环控制器，在 10 s 滑动时间窗口内计算的位置跟踪误差的平均绝对误差（MAE）和均方误差（MSE）。

车辆的几何构型。概率学习公式无需显式建立不确定性的参数模型，即可实现数据驱动自适应；基于李雅普诺夫的分析则证明，在高斯过程不确定性有界的条件下，位姿跟踪误差具有概率最终有界性。

第四节报告的结果针对一种与空中机器人学密切相关的扰动模式：局部磁异常会污染磁力计读数，且主要表现为偏航误差。在开环情形下，这种偏航退化会沿着姿态—推力分配流程传播：校正性转子转速差（用于抑制虚假偏航）与不完善的扭矩/推力到电机的混合分配相互作用，导致净推力暂时损失，进而造成高度下降。这一机制使旋转通道与平移通道之间产生了具有实际意义的耦合，并清晰地体现在偏航

姿态		
轨迹	**平均绝对误差（高斯过程）**	**平均绝对误差（无高斯过程）**
双纽线	0.00387	0.01950
圆	0.00441	0.02101
上升螺旋	0.00453	0.02123
轨迹	**均方误差（高斯过程）**	**均方误差（无高斯过程）**
双纽线	9.919e-05	0.00104
圆	0.00012	0.00121
上升螺旋	0.00012	0.00123
位置		
轨迹	**平均绝对误差（高斯过程）**	**平均绝对误差（无高斯过程）**
双纽线	0.03752	0.11191
圆	0.04678	0.11775
上升螺旋	0.04579	0.12915
轨迹	**均方误差（高斯过程）**	**均方误差（不使用高斯过程）**
双纽线	0.00289	0.01927
圆	0.00378	0.01947
上升螺旋	0.00355	0.02357

表 III：不同轨迹在采用和未采用基于高斯过程的扰动补偿时的平均绝对误差（MAE）和均方误差（MSE）。

以及垂直位置退化同时出现（图 5–8）。启用基于高斯过程的补偿后，控制器可直接从飞行数据中学习这种耦合且依赖状态的效应：高斯过程后验能够快速适应反复进入扰动区域的情况（图 3–4）；不确定性降低后，闭环跟踪在偏航和高度方面均显著改善（图 9–12）。总体而言，这些结果表明，所提出的基于几何学习的控制器能够识别并补偿双四元数运动中的传感器引起的交叉耦合效应，而无需对底层耦合建立显式参数模型；这正是现实世界部署中的常见挑战。

未来的工作将重点放在把所提出的框架扩展到李群上的多智能体系统。一个自然的方向是，在基于学习的控制器中纳入运动可行性条件和协调约束，并以近期关于李群上多智能体系统的研究成果为基础 [42]。在此背景下，将高斯过程学习与分布式及基于共识的架构相结合，或可使智能体共享局部不确定性模型并提升集体鲁棒性，正如基于学习的编队控制方法所探索的那样 [43], [44]。

另一个有前景的研究方向是将双四元数学习框架扩展到编队控制和领导者–跟随者架构。具体而言，簇空间表述为将群内形状变量与群间运动解耦提供了有力工具，从而能够基于双四元数实现可扩展的协调策略 [45]。在此类簇空间和领导者–跟随者结构中嵌入基于学习的扰动补偿，将使异构车辆群能够在线适应不确定的相互作用，同时保持几何一致性。

最后，未来的工作将致力于大规模实验验证和实时实现，包括自适应

数据选择、稀疏高斯过程近似和异构车辆动力学。预计这些进展将进一步提升基于学习的几何控制方法的可扩展性和适用性，使其能够应用于复杂且不确定的环境中运行的协作机器人系统。

附录

A. $\delta\boldsymbol{Q}$与 $\delta\boldsymbol{Q}_\rho$之间的关系

回顾一下，飞行器的位姿由单位双四元数表示

$$\boldsymbol{Q} = \overline{\boldsymbol{q}} + \varepsilon\,\frac{1}{2}\,\tilde{p}\circ\overline{\boldsymbol{q}},$$

双四元数跟踪误差定义为

$$\delta\boldsymbol{Q} := \boldsymbol{Q}_d^*\circ\boldsymbol{Q} = \overline{\delta\boldsymbol{q}} + \varepsilon\,\frac{1}{2}\,\widetilde{\delta p}_b\circ\overline{\delta\boldsymbol{q}},$$

其中 $\delta\boldsymbol{q} := \boldsymbol{q}_d^*\circ\boldsymbol{q}$ 和 $\delta p_b = (\delta p_b, 0)$ 表示在期望机体坐标系中表达的位置误差。

传感器受到一个未知位姿误差的影响，该误差建模为单位双四元数

$$\boldsymbol{Q}_\rho := \overline{\boldsymbol{q}}_\rho + \varepsilon\,\frac{1}{2}\,\tilde{p}_\rho\circ\overline{\boldsymbol{q}}_\rho,$$

其中，$\boldsymbol{q}_\rho$ 表示姿态误差，$\tilde{p}_\rho = (p_\rho, 0)$表示可能的平移偏差。因此，测量位姿为

$$\boldsymbol{Q}_{\text{meas}} = \boldsymbol{Q}\circ\boldsymbol{Q}_\rho,$$

相应地，用于反馈的双四元数误差为

$$\delta\boldsymbol{Q}_\rho := \boldsymbol{Q}_d^*\circ\boldsymbol{Q}_{\text{meas}} = \boldsymbol{Q}_d^*\circ\boldsymbol{Q}\circ\boldsymbol{Q}_\rho = \delta\boldsymbol{Q}\circ\boldsymbol{Q}_\rho.$$

利用双四元数乘积

$$(a+\varepsilon b)\circ(c+\varepsilon d) \;=\; a\circ c + \varepsilon\,(a\circ d + b\circ c),$$

并代入

$$\delta\boldsymbol{Q} = \overline{\delta\boldsymbol{q}} + \varepsilon\,\frac{1}{2}\,\widetilde{\delta p}_b\circ\overline{\delta\boldsymbol{q}}, \qquad \boldsymbol{Q}_\rho = \overline{\boldsymbol{q}}_\rho + \varepsilon\,\frac{1}{2}\,\tilde{p}_\rho\circ\overline{\boldsymbol{q}}_\rho,$$

可得

$$\begin{aligned}\delta\boldsymbol{Q}_\rho &= \left(\overline{\delta\boldsymbol{q}} + \varepsilon\,\tfrac{1}{2}\,\widetilde{\delta p}_b\circ\overline{\delta\boldsymbol{q}}\right)\circ\left(\overline{\boldsymbol{q}}_\rho + \varepsilon\,\tfrac{1}{2}\,\tilde{p}_\rho\circ\overline{\boldsymbol{q}}_\rho\right)\\ &= \overline{\delta\boldsymbol{q}}\circ\overline{\boldsymbol{q}}_\rho + \varepsilon\,\frac{1}{2}\left(\overline{\delta\boldsymbol{q}}\circ\tilde{p}_\rho\circ\overline{\boldsymbol{q}}_\rho + \widetilde{\delta p}_b\circ\overline{\delta\boldsymbol{q}}\circ\overline{\boldsymbol{q}}_\rho\right).\end{aligned}$$

因此，$\delta\boldsymbol{Q}_\rho$ 的主部和对偶部为

$$\mathcal{P}(\delta\boldsymbol{Q}_\rho) = \overline{\delta\boldsymbol{q}}_\rho := \overline{\delta\boldsymbol{q}}\circ\overline{\boldsymbol{q}}_\rho, \tag{54}$$

$$\mathcal{D}(\delta\boldsymbol{Q}_\rho) = \frac{1}{2}\left(\overline{\delta\boldsymbol{q}}\circ\tilde{p}_\rho\circ\overline{\boldsymbol{q}}_\rho + \widetilde{\delta p}_b\circ\overline{\delta\boldsymbol{q}}\circ\overline{\boldsymbol{q}}_\rho\right). \tag{55}$$

根据引理1，存在唯一的 $\widetilde{\delta p}_b^{\,\rho}$，使得

$$\delta\boldsymbol{Q}_\rho = \overline{\delta\boldsymbol{q}}_\rho + \varepsilon\,\frac{1}{2}\,\widetilde{\delta p}_b^{\,\rho}\circ\overline{\delta\boldsymbol{q}}_\rho,$$

与式（55）比较可得

$$\widetilde{\delta p}_b^{\,\rho} = \left(\overline{\delta\boldsymbol{q}}\circ\tilde{p}_\rho\circ\overline{\boldsymbol{q}}_\rho + \widetilde{\delta p}_b\circ\overline{\delta\boldsymbol{q}}\circ\overline{\boldsymbol{q}}_\rho\right)\circ\overline{\boldsymbol{q}}_\rho^*\circ\overline{\delta\boldsymbol{q}}^*. \tag{56}$$

特别地，如果平移偏差为零，即 $\tilde{p}_\rho = 0$，则

$$\mathcal{D}(\delta\boldsymbol{Q}_\rho) = \frac{1}{2}\,\widetilde{\delta p}_b\circ\overline{\delta\boldsymbol{q}}\circ\overline{\boldsymbol{q}}_\rho, \qquad \widetilde{\delta p}_b^{\,\rho} = \widetilde{\delta p}_b,$$

且只有误差中的姿态部分会受到影响。

参考文献

[1] D. Lee、H. J. Kim 和 S. Sastry，《四旋翼直升机的反馈线性化与自适应滑模控制》，《国际控制、自动化与系统杂志》，第 7 卷，第 3 期，第 419–428 页，2009年。[2] G. V. Raffo、M. G. Ortega 和 F. R. Rubio，《四旋翼无人飞行器路径跟踪的反步法/非线性控制》，载于《美国控制会议》论文集，2008年，第 3356–3361 页。[3] E. Frazzoli、M. A. Dahleh 和 E. Feron，《采用反步算法的自主直升机轨迹跟踪控制设计》，载于《美国控制会议》论文集，2000年，第 4102–4107 页。[4] Z.-S. Hou 和 Z. Wang，《从基于模型的控制到数据驱动控制：综述、分类与展望》，《信息科学》，第 235 卷，第 3–35 页，2013年。[5] T. Beckers，《高斯过程模型简介》，arXiv 预印本 arXiv:2102.05497，2021年。[6] L. Hewing、J. Kabzan 和 M. N. Zeilinger，《基于高斯过程回归的谨慎模型预测控制》，《IEEE控制系统技术汇刊》，第 28 卷，第 6 期，第 2736–2743 页，2019年。[7] G. S. Lima、S. Trimpe 和 W. M. Bessa，《面向水下机器人的高斯过程回归滑模控制》，《智能与机器人系统杂志》，第 99 卷，第 3 期，第 487–498 页，2020年。[8] T. Beckers、D. Kuli´c 和 S. Hirche，《欧拉–拉格朗日系统的基于高斯过程的稳定跟踪控制》，《自动化》，第 103 卷，第 390–397 页，2019年。[9] T. Beckers、L. J. Colombo、S. Hirche 和 G. J. Pappas，《面向具有不确定动力学的欠驱动车辆的在线学习轨迹跟踪》，《IEEE 控制系统快报》，第 6 卷，第 2090–2095 页，2021年。[10] G. Cao、E. M.-K. Lai 和 F. Alam，《无人四旋翼飞行器的高斯过程模型预测控制》，《智能与机器人系统杂志》，第 88 卷，第 1 期，第 147–162 页，2017年。[11] T. Beckers、L. J. Colombo 和 S. Hirche，《具有部分未知动力学的欠驱动车辆安全轨迹跟踪》，《几何力学杂志》，第 14 卷，第 4 期，第 491–505 页，2022年。[12] L. J. Colombo 和 J. I. Giribet，《具有模型不确定性的六旋翼飞行器基于学习的容错控制》，《IEEE控制系统技术汇刊》，第 32 卷，第 2 期，第 672–679 页，2024。[13] Y. Wang 和 C. Yu，《基于单位双四元数的网络化刚体分布式姿态与平移一致性》，《国际鲁棒与非线性控制杂志》，2017年。[14] P. van Goor、Z. Sun 和 C. Yu，《基于单位四元数表示的多个三维刚体姿态与位姿编队控制》，载于《2018年第37届中国控制会议》。IEEE，2018年，第 6505–6510 页。[15] X. Wang 和 C. Yu，《基于单位双四元数的姿态与位置动力学反馈线性化跟踪问题》，《系统与控制快报》，第 62 卷，第 3 期，第 225–233 页，2013年。[16] H. J. Savino、L. C. Pimenta、J. A. Shah 和 B. V. Adorno，《基于对偶四元数代数的位姿一致性及其在移动操作机器人分散式编队控制中的应用》，《富兰克林研究所杂志》，第 357 卷，第 1 期，第 142–178 页，2020年。[17] B. V. Adorno 和 P. Fraisse，《交叉运动不变群及其在运动学中的应用》，《IMA数学控制与信息杂志》，第 34 卷，第 4 期，第 1359–1378 页，2017年。[18] K. Lynch 和 F. Park，《现代机器人学》。剑桥大学出版社，2017年。[19] H. T. Kussaba、L. F. Figueredo、J. Y. Ishihara 和 B. V. Adorno，《利用对偶四元数进行刚体位姿稳定的混合运动学控制》，《富兰克林研究所杂志》，第 354 卷，第 7 期，第 2769–2787 页，2017年。[20] M. Lang、M. Kleinsteuber、O. Dunkley 和 S. Hirche，《基于对偶四元数的高斯过程动力学模型》，载于《2015年欧洲控制会议（ECC）》。IEEE，2015年，第 2847–2852 页。[21] J. Pöppelbaum 和 A. Schwung，《利用带有四元数注意力的对偶四元数循环神经网络预测刚体动力学》，《IEEE Access》，第 10 卷，第 82 923–82 943 页，2022年。[22] B. V. Adorno，《基于对偶四元数代数的机器人运动学建模与控制——第一部分：基础》。2017年。[23] S. P. Bhat 和 D. S. Bernstein，《旋转运动连续全局稳定化的拓扑障碍与绕转现象》，《系统与控制快报》，第 39 卷，第 1 期，第 63–70 页，2000年。[24] C. E. Rasmussen 和 C. K. Williams，《机器学习中的高斯过程》。麻省理工学院出版社，剑桥，2006年，第 1 卷。[25] K. J. Åström 和 P. Eykhoff，《系统辨识——综述》，《自动化》，第 7 卷，第 2 期，第 123–162 页，1971年。[26] X. Dai、Z. Yang、S. Zhang、D.-H. Zhai、Y. Xia 和 S. Hirche，《通过带有事件触发机制的高斯过程进行多智能体系统控制的协同在线学习》，《IEEE神经网络与学习系统汇刊》

，2024。

[27] X. Dai、Z. Yang、M. Xu、S. Zhang、F. Liu、G. Hattab 和 S. Hirche，《采用高斯过程回归的多智能体系统安全一致性控制的去中心化事件触发在线学习》，《欧洲控制杂志》，第 80 卷，第 101058 页，2024。[28] N. Srinivas、A. Krause、S. M. Kakade 和 M. W. Seeger，《多臂老虎机设定下高斯过程优化的信息论遗憾界》，《IEEE 信息论汇刊》，第 58 卷，第 5 期，第 3250–3265 页，2012。[29] D. H. Wolpert，《学习算法之间缺乏先验区别》，《神经计算》，第 8 卷，第 7 期，第 1341–1390 页，1996。[30] I. Steinwart 和 A. Christmann，《支持向量机》。施普林格科学与商业媒体，2008。[31] F. Berkenkamp、R. Moriconi、A. P. Schoellig 和 A. Krause，《利用高斯过程安全地学习不确定非线性系统的吸引域》，载于 IEEE 决策与控制会议论文集，2016，第 4661–4666 页。 [在线]。可访问：https://arxiv.org/abs/
1603 04915 1603 04915 [ ] 。arXiv：。
[32] cs.SY A. Lederer、J. Umlauft 和 S. Hirche，《高斯过程回归的一致误差界及其在安全控制中的应用》，《神经信息处理系统进展》，第 32 卷，2019。[33] A. Lederer、A. J. O. Conejo、K. A. Maier、W. Xiao、J. Umlauft 和 S. Hirche，《面向安全关键应用的基于高斯过程的实时学习》，载于国际机器学习会议。PMLR，2021，第 6055–6064 页。[34] A. Lederer、A. Begzadi´c、S. Hirche、J. Cortés 和 S. Herbert，《通过事件触发学习对不确定系统进行安全障碍函数约束控制》，arXiv 预印本 arXiv:2408.16144，2024。[35] Z. Yang、D. Zhang、X. Dai、F. Yu、C. Zhang、B. Huang、H. Sadeghian 和 S. Haddadin，《用于在线学习与控制的流式生成式高斯过程专家》，arXiv 预印本 arXiv:2508.03679，2025。[36] J. Umlauft 和 S. Hirche，《基于事件触发在线学习的高斯过程反馈线性化》，《IEEE 自动控制汇刊》，第 65 卷，第 10 期，第 4154–4169 页，2019。[37] T. Beckers 和 S. Hirche，《利用高斯过程对部分未知非线性系统进行反步控制》，《IEEE 控制系统快报》，第 3 卷，第 2 期，第 416–421 页，2019。[38] T. Beckers，《端口哈密顿系统的数据驱动贝叶斯控制》，载于 2023 年第 62 届 IEEE 决策与控制会议（CDC）。IEEE，2023，第 8708–8713 页。[39] T. Beckers 和 L. Colombo，《面向无源性跟踪控制的物理信息驱动学习》，arXiv 预印本 arXiv:2505.01569，2025。[40] D. Liberzon 和 A. S. Morse，《切换系统稳定性与设计中的基本问题》，《IEEE 控制系统杂志》，第 19 卷，第 5 期，第 59–70 页，1999。[41] T. Beckers、L. J. Colombo、M. Morari 和 G. J. Pappas，《基于学习的二阶机械系统模型控制与反馈控制平衡》，载于 2022 年第 61 届 IEEE 决策与控制会议（CDC）。IEEE，2022，第 4667–4673 页。[42] L. J. Colombo 和 D. V. Dimarogonas，《李群上多智能体控制系统的运动可行性条件》，《IEEE 网络系统控制汇刊》，第 7 卷，第 1 期，第 493–502 页，2019。[43] T. Beckers、S. Hirche 和 L. J. Colombo，《基于高斯过程的多智能体系统在线学习编队控制》，载于第 60 届 IEEE 决策与控制会议论文集（CDC），2021，第 2197–2202 页。[44] O. Y. Nieto、A. A. Simoes、J. I. Giribet 和 L. J. Colombo，《具有碰撞规避功能的多智能体系统基于学习的去中心化控制》，《IEEE 网络系统控制汇刊》，第 1–12 页，2025–。[45] J. I. Giribet、L. J. Colombo、P. Moreno、I. Mas 和 D. V. Dimarogonas，《双四元数簇空间编队控制》，《IEEE 机器人与自动化快报》，第 6 卷，第 4 期，第 6789–6796 页，2021。



Omayra Yago Nieto 是西班牙马德里理工大学自动控制与机器人学博士生。她的研究兴趣包括几何力学、基于学习的控制和机器学习方法。



Alexandre Anahory Simoes 在西班牙马德里自治大学获得数学博士学位，目前是西班牙马德里IE科学与技术学院的助理教授。他的研究兴趣包括几何力学、几何控制理论和动力系统的数值积分。



Juan I. Giribet 于2003年获得阿根廷布宜诺斯艾利斯大学电气工程学位，并于2009年获得同一机构的博士学位。他目前是圣安德烈斯大学的副教授，同时隶属于人工智能与机器人实验室，并担任CONICET应用数学领域的研究员。Giribet教授是IEEE高级会员。



Leonardo J. Colombo 是西班牙国家研究委员会（CSIC）自动化与机器人中心（CAR）的终身科学家（Científico Titular）。他于2014年获得马德里自治大学数学博士学位。2014年至2017年间，他曾任密歇根大学数学系助理教授和博士后研究员。此后，他继续从事博士后研究（2017—2018年），在瑞典斯德哥尔摩KTH皇家理工学院电气工程与计算机科学学院担任ACCESS Lineaus中心博士后研究员。2018年，他获得西班牙的Juan de la Cierva入职资助，在马德里数学科学研究所（ICMAT）几何力学与控制组开展工作。2019年，他获得拉凯沙基金会的青年领军人才引进资助，致力于开发用于多架无人空中飞行器合作与协调的控制算法。2021年，他加入自动化与机器人中心（CAR）的实地与服务机器人组。