arXiv:2601.03109v1 [math.PR] 6 Jan 2026

解耦随机游走的首次到达时间

Alexander Iksanov* 、Zakhar Kabluchko† 和 Vitali Wachtel‡

摘要

受与无限 Ginibre 点过程之间联系的启发，解耦随机游走在近期的一篇文章 Alsmeyer、Iksanov 和 Kabluchko (2025) 中被提出。解耦随机游走是一列相互独立的随机变量，其中第 n个变量的分布与具有非负增量的标准随机游走在时刻 n 的位置相同。我们证明，解耦随机游走的运行最大值和首次通过时间在赋予J_1-拓扑的 Skorokhod空间中依分布收敛。我们表明存在五种不同的情形，各自对应不同的极限定理。上述论文 Alsmeyer、Iksanov 和 Kabluchko (2025) 还较早得到了截然不同的函数极限定理，涉及解耦标准随机游走对区间 $[0,t]$ 的访问次数（当 $t\to\infty$ 时）。首次通过时间的极限过程属于逆极值型过程，而访问次数的极限过程则是平稳高斯过程。

关键词：解耦随机游走；极值过程；首次通过时间；泛函极限定理；尾部行为。

2020年数学主题分类：主要分类：60F17、60G55；次要分类：
60F10

1 引言与主要结果

设 ξ_1， ξ_2，.....是非负随机变量 ξ的独立副本，且其分布非退化。令 $S_n=\xi_1+\ldots+\xi_n$ 对 $n\in\mathbb{N}$成立。随机序列 $(S_n)_{n\geq 1}$ 称为具有非负跳跃的随机ˆ ˆ游走。设 S_1， S_2，.....为相互独立的随机变量，且对每个ˆ ˆ， $n\in\mathbb{N}$， S_n 与 S_n具有相同分布。沿用 [3], 的说法，我们将序列 $(S_n)_{n\geq 1}$ 称为解耦随机游走。

对于 $t\geq 0$，令

$$\hat{N}(t):=\sum_{n\geq 1}\mathbb{1}_{\{\hat{S}_n\leq t\}}\quad\text{and}\quad\hat{\tau}(t):=\inf\{n\geq 1:\hat{S}_n>t\}.$$

ˆ 注意，对每个 $t\geq 0$， $N(t)$ 和 ˆ$\tau(t)$ 几乎必然（a.s.）有限。等式 ˆ ˆ$\mathbb{P}\{N(t)<\infty\}=1$ 是 $\sum_{n\geq 1}\mathbb{P}\{S_n\leq t\}=\sum_{n\geq 1}\mathbb{P}\{S_n\leq t\}<\infty$ 的结果。此外，ˆ 不等式 ˆ$\tau(t)-1\leq N(t)$ a.s. 意味着 ˆ$\tau(t)$ 也几乎必然有限。函数 $t\mapsto\sum_{n\geq 1}\mathbb{P}\{S_n\leq t\}$ 在 $[0,\infty)$ 上称为更新函数。更新理论中的一个标准结论是

*基辅塔拉斯·舍甫琴科国立大学计算机科学与控制论学院，乌克兰；电子邮箱：iksan@univ.kiev.ua

†德国明斯特大学数学与计算机科学系；电子邮件地址：zakhar.kabluchko@uni-muenster.de

‡德国比勒费尔德大学数学学院；电子邮件地址：wachtel@math.uni-bielefeld.de

仅在假设 $\mathbb{P}\{\xi = 0\} < 1$ 的条件下，更新函数对所有非负自变量均有限。我们分别将随机过程 $N := (N(t))_{t\geq 0}$ 和 $(\tau(t))_{t\geq 0}$ 称为解耦更新过程和解耦首次通过时间过程。顺便指出，对于具有非负增量的经典随机游走 $(S_n)_{n\geq 1}$，有 $\inf\{n \geq 1 : S_n > t\} - 1 = \sum_{n\geq 1} \mathbb{1}_{\{S_n \leq t\}}$。

某些解耦随机游走自然地出现在对某些行列式点过程的研究中。这一联系促使人们在 [3]中引入解耦随机游走。现在我们将更详细地讨论这一联系。令 $\mathbb{C}$ 表示复数集。对于 $\rho > 0$，定义核 C_ρ 如下：

$$C_\rho(z, w) = \frac{\rho}{2\pi} \mathrm{E}_{2/\rho,\, 2/\rho}(z\bar{w}) \mathrm{e}^{-|z|^\rho/2 - |w|^\rho/2}, \quad z, w \in \mathbb{C}.$$

这里，$\bar{w}$ 表示 w 的复共轭；对于 $a,\ b > 0$，$\mathrm{E}_{a,\ b}$ 表示参数为 a 和 b 的 Mittag-Leffler函数，其定义为

$$\mathrm{E}_{a,\, b}(z) := \sum_{k\geq 0} \frac{z^k}{\Gamma(ak + b)}, \quad z \in \mathbb{C},$$

而 Γ 是欧拉伽马函数。记 Θ_ρ 为 $\mathbb{C}$ 上的一个简单点过程，使得对于任意 $k \in \mathbb{N}$ 以及任意互不相交的 Borel子集 $B_1, \ldots, B_k$，若它们属于 $\mathbb{C}$，则

$$\mathbb{E}\Big[\prod_{j=1}^{k} \Theta(B_j)\Big] = \int_{B_1 \times \ldots \times B_k} \det(C_\rho(z_i, z_j))_{1\leq i,j\leq k}\, \mathrm{d}z_1 \ldots \mathrm{d}z_k,$$

其中 det 表示行列式。点过程 Θ_ρ 是一个行列式点过程，其核为 C_ρ，相对于 $\mathbb{C}$上的 Lebesgue测度而言。过程 Θ_2 （对应于 $\rho = 2$）在文献中称为无限 *Ginibre* 点过程。我们推荐阅读专著 [4]，其中包含大量关于行列式点过程的信息。关于 Ginibre 点过程的讨论见该书第 4.3.7 节和第 4.7 节，以及最新专著 [9]的第一部分。 [1] 第 3—4 页指出， Θ_ρ 的原子的绝对值构成的集合，其分布与 $(S_n)^{1/\rho})_{n\geq 1}$ 相同，其中 S_1 服从参数为 $2/\rho$ 和 1 的伽马分布，也就是说，

$$\mathbb{P}\{\hat{S}_1 \in \mathrm{d}x\} = \frac{1}{\Gamma(2/\rho)} x^{2/\rho - 1} \mathrm{e}^{-x}\, \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x) \mathrm{d}x. \tag{1}$$

对于每个 $t \geq 0$，令 $\Theta_\rho(D_t)$ 表示 Θ_ρ 中位于圆盘 $D_t := \{z \in \mathbb{C} : |z| < t\}$ 内的原子数。那么

$$(\Theta_\rho(D_t))_{t\geq 0} \ \text{ has the same distribution as } \ (\hat{N}(t^\rho))_{t\geq 0} = \Big(\sum_{n\geq 1} \mathbb{1}_{\{\hat{S}_n \leq t^\rho\}}\Big)_{t\geq 0}, \tag{2}$$

与 S_1 （见式（1））相同。此外，我们不作详细说明，只指出，根据 [2], 中的定理3.1, 以 $m \in \mathbb{N}$ 为参数的广义无限Ginibre点过程的原子的绝对值集合，其分布与 $(S_n^{(1)} S_n^{(2)} \cdot \ldots \cdot S_n^{(m)})^{1/2})_{n\geq 1}$相同，其中 $(S_n^{(1)})_{n\geq 1}$，$\ldots$，$(S_n^{(m)})_{n\geq 1}$ 是 $(S_n)_{n\geq 1}$的独立副本，且 S_1 服从均值为 1 的指数分布。

在假设 ξ 的分布属于具有有限均值的稳定分布的吸引域的条件下，已证明了关于 $N(t)$的一个函数极限定理，其中 [3], 经过了适当的缩放、归一化和中心化。若 ξ 的分布为指数分布，则过程 N

可称为 解耦泊松过程。关于解耦泊松过程的函数型中心极限定理早已在 [11]的命题1.4中得到证明。关于解耦泊松过程的单对数律见 [8]的定理3.1。

本文较为完整地描述了经过适当缩放、归一化和中心化后，max 的分布以及$_{1\le k\le n}$ S_k 与 ˆ $\tau(t)$ 的渐近性质。这些结果分为五种不同情形，取决于 ξ的右尾。第一和第二种情形见定理 1.1和 1.6；第三种情形见定理 1.2 和 1.7，第四种情形见定理 1.3 和 1.8，第五种（边界情形）见定理 1.5 和1.9。

我们看不出目前的结果对点过程 Θ_ρ 有什么自然的应用。原因在于，据我们所知， Θ_ρ 的原子的绝对值无法以有用的方式进行枚举。

对于有限或无限、开或闭的区间 I，记 $D(I)$ 为 Skorokhod空间，即定义在`上的 c`àdl I àg 函数的集合。我们将使用 J_1 上的标准 $D(I)$-拓扑。关于 J_1-拓扑的全面介绍见 [6, 10]。我们用 $\Longrightarrow$表示函数空间中的弱收敛。

定理 1.1。假设

$$\mathbb{P}\{\xi > v\} \sim v^{-\alpha}\ell(v), \quad v \to \infty \tag{3}$$

对某个 $\alpha \in (0, 2]$ 以及某个 ℓ 在 ∞处缓慢变化的函数成立。令 $a(v)$ 为任意满足lim $_{v\to\infty}$ $v^2\mathbb{P}\{\xi > a(v)\} = 1$的正函数。记 $\mathcal{P}_\alpha^{(1)}$在$[0,\infty) \times (0,\infty]$ 上的泊松随机测度的原子为(t_k, j_k)，其均值测度为 ，其中 和 分别是定义在) 和$(0,\infty]$上的测度，定义如下：

$$\theta([0, x]) = x^2/2 \quad and \quad \nu_\alpha((x,\infty]) = x^{-\alpha}.$$

若 $\alpha \in (0,2)$ 或 $\alpha = 2$ 且 $\lim_{v\to\infty} \ell(v) = \infty$，则

$$\left(\frac{\max_{1\le k\le \lfloor tv\rfloor} \hat{S}_k}{a(v)}\right)_{t\ge 0} \Longrightarrow \left(\sup_{k:\, t_k\le t} j_k\right)_{t\ge 0} =: (X_1(t))_{t\ge 0}, \quad v \to \infty \tag{4}$$

在 J_1-拓扑下的 $D([0,\infty))$；而若 $\alpha = 2$ 且 $\liminf_{v\to\infty} \ell(v) < \infty$，则关系 (4)ˆ ˆ成立，其中用 $S_k - \mu k$ 替换 S_k，其中 $\mu := \mathbb{E}[\xi] < \infty$。极限过程的一维分布为 *Fréchet* 分布，定义如下：

$$\mathbb{P}\{X_1(t) \le y\} = \exp(-t^2 y^{-\alpha}/2), \quad y > 0$$

且 $\mathbb{P}\{X_1(t) \le y\} = 0$ 对于 $y \le 0$。

$(X_1(t))_{t\ge 0}$ 的一个实现如图1左侧面板所示。

定理 *1.2.* 假设 *(3)* 对某个 $\alpha \in$ *(2, 3)* 和某个在 ∞ 处缓慢变化的 ℓ 成立，或者对 $\alpha = 3$ 以及满足 *lim* $_{v\to\infty}$*(ℓ(v)/log v)* $= \infty$ 的缓慢变化的 ℓ 成立。设 *a(v)* 为任意满足 *lim*$_{v\to\infty}$ *va(v)*$\mathbb{P}\{\xi > a(v)\} = 1$ 的正函数。记 *(t_k, j_k)* 为定义在 $\mathbb{R} \times$ *(0,* $\infty]$ 上、均值测度为 *Leb* $\times\, \nu_\alpha$ 的泊松随机测度 $\mathcal{P}_\alpha^{(2)}$ 的原子，其中 *Leb* 表示 $\mathbb{R}$ 上的 *Lebesgue*测度，而 ν_α 是定义在 *(0,* $\infty]$ 上、由 ν_α*((x,* $\infty]) = x^{-\alpha}$ 给出的测度。则

$$\left(\frac{\max_{1\le k\le \lfloor v+ta(v)\rfloor} \hat{S}_k - \mu v}{a(v)}\right)_{t\in\mathbb{R}} \Longrightarrow \left(\sup_{k:\, t_k\le t} (\mu t_k + j_k)\right)_{t\in\mathbb{R}} =: (X_2(t))_{t\in\mathbb{R}}, \quad v \to \infty \tag{5}$$

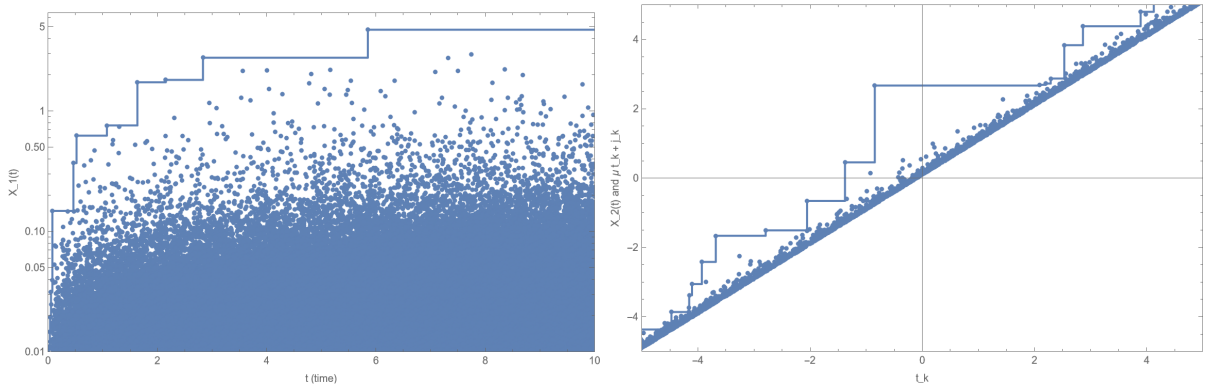


图 1：左：过程 $(X_1(t))_{t\geq 0}$ （定理 1.1）的一条样本路径，以及底层泊松随机测度 $\mathcal{P}_\alpha^{(1)}$中的点 (t_k, j_k)。纵轴采用对数尺度。右：过程 $(X_2(t))_{t\in\mathbb{R}}$ （定理1.2）的一条样本路径，以及点 $(t_k, \mu t_k + j_k)$。

在 $D(\mathbb{R})$ 上的 J_1-拓扑中，其中 $\mu = \mathbb{E}[\xi] < \infty$。极限过程的一维分布为（截断的）*Fréchet*分布，具体如下：

$$\mathbb{P}\{X_2(t) \leq y\} = \exp\Big(-\frac{1}{\mu(\alpha-1)(y-\mu t)^{\alpha-1}}\Big), \quad t \in \mathbb{R},\ y > \mu t$$

以及 $\mathbb{P}\{X_2(t) \leq y\} = 0$ 对于 $t \in \mathbb{R}$ 和 $y \leq \mu t$。

$(X_2(t))_{t\in\mathbb{R}}$ 的一种实现见图 1右图。

令 Φ 表示标准正态分布函数，即

$$\Phi(x) := (2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-y^2/2}\mathrm{d}y, \quad x \in \mathbb{R}.$$

函数 Φ严格递增且连续。因此，其逆函数 Φ^{-1} 定义良好。

定理 1.3。 假设 $\mathbb{E}[\xi^3] < \infty$ 或 (3) 成立，其中 $\alpha = 3$ 且存在一个在 ∞ 处缓慢变化的 ℓ，满足 $\lim_{v\to\infty}(\ell(v)/\log v) = 0$。令 $a(v) := \sigma(v/\log v)^{1/2}$ 并且

$$m(v) := \sigma(\mu v + v^{1/2}\Phi^{-1}(1 - 1/a(v)))$$

对于 $v > 1$，其中 $\mu = \mathbb{E}[\xi] < \infty$ 和 $\sigma^2 := \mathrm{Var}\,[\xi] \in (0, \infty)$。将泊松随机测度 $\mathcal{P}^{(3)}$ 在 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 上的原子记为(t_k, j_k)，其均值测度为 $\rho \times \nu$，其中 ρ和 ν是定义在 $\mathbb{R}$ 上的测度，由 $\rho(\mathrm{d}x) := \mathrm{e}^{\mu x}\mathrm{d}x$ 和 $\nu(\mathrm{d}y) := \mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y$ 定义，其中 x、$y \in \mathbb{R}$。则

$$\Big(\frac{\max_{1\leq k\leq \lfloor v+ta(v)\rfloor}\hat{S}_k - m(v)}{a(v)}\Big)_{t\in\mathbb{R}} \Longrightarrow \Big(\sup_{k:\, t_k\leq t} j_k\Big)_{t\in\mathbb{R}} =: (X_3(t))_{t\in\mathbb{R}}, \quad v\to\infty \tag{6}$$

在 $D(\mathbb{R})$上的 J_1-拓扑下。极限过程的一维分布是（平移后的）龚贝尔分布，具体为

$$\mathbb{P}\{X_3(t) \leq y\} = \exp\Big(-\mu^{-1}\mathrm{e}^{\mu t - y}\Big), \quad t, y \in \mathbb{R}.$$

图 2 的左侧面板展示了 $(X_3(t))_{t\in\mathbb{R}}$ 的一条样本路径。

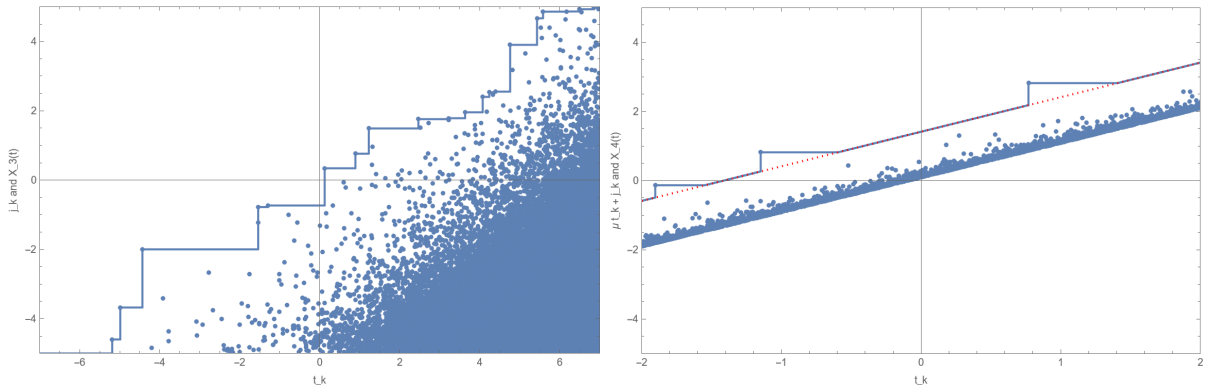


图 2：左：定理1.3中的过程 $(X_3(t))_{t\in\mathbb{R}}$ 的一条样本路径，以及底层泊松随机测度 $\mathcal{P}^{(3)}$的原子 $(t_k,\ j_k)$。右：定理 1.5中的过程 $(X_4(t))_{t\in\mathbb{R}}$ 的一条样本路径，以及点 $(t_k,\ \mu t_k + j_k)$。

注 1.4。可以验证，

$$\Phi^{-1}(1-h) = (2\log 1/h)^{1/2} - \frac{\log\log 1/h + \log 4\pi}{(8\log 1/h)^{1/2}} + o\Big(\frac{1}{(\log 1/h)^{1/2}}\Big),\quad h\to 0+.$$

这意味着

$$\Phi^{-1}(1-1/a(v)) \ =\ (\log v)^{1/2} - \frac{\log\log v}{(\log v)^{1/2}} - \frac{\log 2\pi}{(8\log v)^{1/2}} + o\Big(\frac{1}{(\log v)^{1/2}}\Big),\quad v\to\infty.$$

因此，定理1.3 中的中心化 $m(v)$ 可以替换为

$$\sigma\Big(\mu v + v^{1/2}\Big((\log v)^{1/2} - \frac{\log\log v}{(\log v)^{1/2}} - \frac{\log 2\pi}{(8\log v)^{1/2}}\Big)\Big).$$

最后，我们给出一个结果，讨论相对于定理1.2 和1.3所处理情形的边界情形。

定理 1.5。假设当 $v\to\infty$ 时，$\mathbb{P}\{\xi > v\} \sim Av^{-3}\log v$ 成立，其中某个 $A>0$。令 $a(v) = (A/2)v\log v)^{1/2}$，并用 (t_k, j_k) 表示限制在 $\mathbb{R}\times(2/A)^{1/2},\infty)$上的泊松随机测度 $\mathcal{P}_3^{(2)}$ 的原子（即 $\mathcal{P}_\alpha^{(2)}$且 $\alpha=3$）。那么，当 $v\to\infty$时，

$$\Big(\frac{\max_{1\le k\le\lfloor v+ta(v)\rfloor}\hat{S}_k - \mu v}{a(v)}\Big)_{t\in\mathbb{R}} \implies \big(\max\big\{\mu t + (2/A)^{1/2},\ \sup_{k:\,t_k\le t}(\mu t_k + j_k)\big\}\big)_{t\in\mathbb{R}} =: (X_4(t))_{t\in\mathbb{R}} \tag{7}$$

在 D 上的 J_1-拓扑中$(\mathbb{R})$，其中 $\mu = \mathbb{E}[\xi] < \infty$。极限过程的一维分布是（截断的）*Frˆechet* 分布，在 $\mu t + (2/A)^{1/2}$ 处具有原子，其形式为

$$\mathbb{P}\{X_4(t)\le y\} = \exp\Big(-\frac{1}{2\mu(y-\mu t)^2}\Big),\quad t\in\mathbb{R},\ y\ge \mu t + (2/A)^{1/2}$$

以及 $\mathbb{P}\{X_4(t)\ \le y\} = 0$，当 $t\in\mathbb{R}$ 且 $y < \mu t + (2/A)^{1/2}$ 时。

$(X_4(t))_{t\in\mathbb{R}}$ 的一条样本路径显示在图 2 的右侧面板中。

现在我们给出首次通过时间过程弱收敛方面的结果。对于单调非递减函数 $f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$，记 $f^{\leftarrow}$ 为其广义逆，即$f^{\leftarrow}(y) := \inf\{x\in\mathbb{R}:\ f(x)\ > y\}$，其中 $y\in\mathbb{R}$。

定理 1.6. 在定理 *1.1* 的假设下，若 $\alpha\in(0,2)$ 或 $\alpha=2$ 且 $\lim_{v\to\infty}\ell(v)=\infty$，则

$$\big((\mathbb{P}\{\xi>v\})^{1/2}\hat{\tau}(tv)\big)_{t\geq 0}\implies (X_1^{\leftarrow}(t))_{t\geq 0}:=\big(\inf\{z\geq 0:\sup_{k:\,t_k\leq z}j_k>t\}\big)_{t\geq 0}$$
$$=(\inf\{t_k:\ j_k>t\})_{t\geq 0},\quad v\to\infty \tag{8}$$

在 J_1-拓扑下，关于 $D([0,\infty))$；然而，若 $\alpha=2$ 且 $\liminf_{v\to\infty}\ell(v)<\infty$，则关系 (8)ˆ成立，其中 $\inf\{n\geq 1:\ \ S_n-\mu n>t\}$ 将 ˆ$\tau(t)$。极限过程的一维分布为

$$\mathbb{P}\{X_1^{\leftarrow}(t)\leq y\}=1-\exp(-t^{-\alpha}y^2/2),\quad y>0 \tag{9}$$

以及 $\mathbb{P}\{X_1^{\leftarrow}(t)\leq y\}=0$，对 $y\leq 0$ 成立。因此，$(X_1^{\leftarrow}(t))^2$ 的分布服从指数分布。

定理 1.7. 在定理 *1.2*的假设下，当 $v\to\infty$,

$$\Big(\frac{\hat{\tau}(v+ta(\mu^{-1}v))-\mu^{-1}v}{\mu^{-1/(\alpha-1)}a(v)}\Big)_{t\in\mathbb{R}}\implies (X_2^{\leftarrow}(t))_{t\in\mathbb{R}}:=\big(\inf\{z\in\mathbb{R}:\sup_{k:\,t_k\leq z}(\mu t_k+j_k)>t\}\big)_{t\in\mathbb{R}}$$
$$=(\inf\{t_k:\ \mu t_k+j_k>t\})_{t\in\mathbb{R}} \tag{10}$$

在 J_1-拓扑下，关于 $D(\mathbb{R})$。极限过程的一维分布为

$$\mathbb{P}\{X_2^{\leftarrow}(t)\leq y\}=1-\exp\Big(\frac{1}{\mu(\alpha-1)(t-\mu y)^{\alpha-1}}\Big),\quad t\in\mathbb{R},\ y<\mu^{-1}t \tag{11}$$

以及 $\mathbb{P}\{X_2^{\leftarrow}(t)\leq y\}=1$，对 $t\in\mathbb{R}$ 和 $y\geq\mu^{-1}t$ 成立。

定理 1.8. 在定理 *1.3*的假设下，当 $v\to\infty$,

$$\Big(\frac{\hat{\tau}(m(v)+ta(v))-v}{a(v)}\Big)_{t\in\mathbb{R}}\implies (X_3^{\leftarrow}(t))_{t\in\mathbb{R}}:=\big(\inf\{z\in\mathbb{R}:\sup_{k:\,t_k\leq z}j_k>t\}\big)_{t\in\mathbb{R}}$$
$$=\big(\inf\{t_k:\ j_k>t\}\big)_{t\in\mathbb{R}}$$

在 J_1-拓扑 下，在 $D(\mathbb{R})$ 上。极限过程的一维分布由下式给出

$$\mathbb{P}\{X_3^{\leftarrow}(t)\leq y\}=1-\exp\Big(-\mu^{-1}\mathrm{e}^{\mu y-t}\Big),\quad t,y\in\mathbb{R}.$$

定理 1.9。 在定理 *1.5*的假设下，当 $v\to\infty$,

$$\Big(\frac{\hat{\tau}(v+ta(\mu^{-1}v))-\mu^{-1}v}{\mu^{-1/2}a(v)}\Big)_{t\in\mathbb{R}}\implies (X_4^{\leftarrow}(t))_{t\in\mathbb{R}}$$
$$:=\big(\min\{\mu^{-1}(t-(2/A)^{1/2}),\inf\{t_k:\ \mu t_k+j_k>t\}\}\big)_{t\in\mathbb{R}} \tag{12}$$

在 J_1-拓扑下，定义于 $D(\mathbb{R})$ 上。极限过程的一维分布由下式给出

$$\mathbb{P}\{X_4^{\leftarrow}(t)\leq y\}=1-\exp\Big(\frac{1}{2\mu(t-\mu y)^2}\Big),\quad t\in\mathbb{R},\ y<\mu^{-1}(t-(2/A)^{1/2}) \tag{13}$$

且 $\mathbb{P}\{X_4^{\leftarrow}(t)\leq y\}=1$ 对于 $t\in\mathbb{R}$ 和 $y\geq\mu^{-1}(t-(2/A)^{1/2})$。

2 首次进入$(t,\ \infty)$的时间与访问$(-\infty,\ t]$的次数

设 $(S_n)_{n\geq 1}$ 为一个标准随机游走，其跳跃不一定是非负跳跃。对于 $t\in\mathbb{R}$，令

$$N(t):=\sum_{n\geq 1}\mathbb{1}_{\{S_n\leq t\}}\quad\text{and}\quad\tau(t):=\inf\{n\geq 1:S_n>t\}.$$

若 $\mu=\mathbb{E}[S_1]\in(0,\ \infty)$，则对每个 $t\in\mathbb{R}$，这些随机变量几乎必然有限。已知（例如参见 [13], 中的命题 A.1），若 $\mu\in(0,\ \infty)$ 且 $\sigma^2=\mathrm{Var}\,[S_1]\in(0,\ \infty)$，则

$$\Big(\frac{M(vt)-\mu^{-1}vt}{(\sigma^2\mu^{-3}t)^{1/2}}\Big)_{t\geq 0}\implies(B(t))_{t\geq 0},\quad v\to\infty$$

在 $D([0,\infty)$ 上的 J_1-拓扑中。这里，M要么是 N，要么是 τ，而 B是标准布朗运动。换言之，对于具有正均值和有限方差的标准随机游走，访问 $(-\infty,\ t]$的次数与首次进入 $(t,\ \infty)$ 的时间具有相同的分布渐近行为。这并不完全令人意外，因为 $N(t)$ 的主要贡献来自满足 $k\leq\tau(t)-1$ 的位置 S_k，而后续位置的贡献为 $o(t^{1/2})$。对于一维分布，论证尤其简单：只需写出

$$N(t)-(\tau(t)-1)=\sum_{n\geq\tau(t)+1}\mathbb{1}_{\{S_n\leq t\}}\leq\sum_{n\geq 1}\mathbb{1}_{\{S_{n+\tau(t)}-S_{\tau(t)}\leq 0\}}\quad\text{a.s.}$$

并注意到，后一个变量与 $N(0)$ 具有相同的分布。

对于解耦标准随机游走而言，情况截然不同。这种变化是由序列 $(S_n)_{n\geq 1}$ 并非单调非减这一事实造成的。这导致了如下现象：访问次数 N 和首次通过时间 $\hat{}\tau$ 呈现出截然不同的分布行为。例如，根据 [3], 中的定理 2.1，在假设 ξ 的分布属于具有有限均值的稳定分布的吸引域的条件下，N 的极限过程是平稳高斯过程。另一方面，由上一节的结果可知，$\hat{}\tau$ 的极限过程是逆极值型过程。具体而言，假设 $\mathbb{E}[\xi^3]<\infty$。根据 [3], 中的公式 (9)

$$\Big(\frac{\hat{N}(\sigma^2(t+v)^2)-\mu^{-1}\sigma^2(t+v)^2}{(\mu^{-3/2}\sigma^2 v)^{1/2}}\Big)_{t\geq 0}\implies(W(t))_{t\geq 0},\quad v\to\infty$$

在 J_1-拓扑下，关于 $D([0,\infty))$，前提是函数 $x\mapsto\sum_{n\geq 1}\mathbb{P}\{S_n\leq x\}$ 是 Lipschitz 连续的。这里，W 是一个协方差已明确给出的中心化平稳高斯过程。关于 $\hat{}\tau$，定理 1.7给出了一个截然不同的分布极限定理。再次强调，上述显著差异并不令人意外。和 $\hat{}\tau$ 的渐近行为分别由变量 $\hat{}\ S_k$ 所决定，其中 $k=\lfloor\mu^{-1}v+tv^{1/2}\rfloor$ 随 t 在 $[0,\infty)$ 上变化，而 $k=\lfloor v+t(v/\log v)^{1/2}\rfloor$ 随 t 在 $\mathbb{R}$上变化。

3 主要结果的证明

3.1 当 $\alpha\leq 2$ 时的大偏差概率

引理 3.1。假设 (3) 对某个 $\alpha\leq 2$成立。则对于固定的 $t,\ y>0$,

$$\lim_{v\to\infty}v\mathbb{P}\{S_{\lfloor tv\rfloor}>a(v)y\}=ty^{-\alpha}\tag{14}$$

如果 $\mathbb{E}[\xi]=\infty$ 且

$$\lim_{v\to\infty} v\mathbb{P}\{S_{\lfloor tv\rfloor}-\mu\lfloor tv\rfloor > a(v)y\} = ty^{-\alpha} \tag{15}$$

如果 $\mu=\mathbb{E}[\xi]<\infty$。

证明。这是一个标准事实（例如，参见 [12]中的引理 6.1.3）： a在∞ 处正则变变，指数为 $2/\alpha$。特别地， a 的增长速度快于 S_n的极限定理中的标准化序列。因此，当 $\alpha<2$ 时，(14) 和 (15) 中所需的关系可由 [5]中的定理 2.1 得出。

现在我们讨论 $\alpha=2$ 的情形。我们先推导 $\mathbb{P}\{S_n^0>x\}$ 的下界，其中$S_n^0:=S_n-\mu n$ 对于 $n\in\mathbb{N}$。另设 $\xi_k^0:=\xi_k-\mu$ 对于 $k\in\mathbb{N}$。对于每个 $\varepsilon>0$ 和 $x>0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{S_n^0>x\} &\geq n\mathbb{P}\{\xi_1^0>(1+\varepsilon)x\}\mathbb{P}\big\{S_{n-1}^0\geq-\varepsilon x, \max_{j\leq n-1}\xi_j^0\leq(1+\varepsilon)x\big\}\\ &\geq \mathbb{P}\{\xi_1^0>(1+\varepsilon)x\}\big(1-\mathbb{P}\{S_{n-1}^0<-\varepsilon x\}-\mathbb{P}\big\{\max_{j\leq n-1}\xi_j^0>(1+\varepsilon)x\big\}\big)\\ &\geq \mathbb{P}\{\xi_1^0>(1+\varepsilon)x\}\left(1-n\mathbb{P}\{\xi_1^0>(1+\varepsilon)x\}-\mathbb{P}\{S_{n-1}^0<-\varepsilon x\}\right).\end{aligned}$$

由于 $\xi_k^0\geq-\mu$，应用伯恩斯坦不等式可得

$$\mathbb{P}\{S_{n-1}^0<-\varepsilon x\}\to 0$$

只要 $xn^{-1/2}\to\infty$ 成立。这便得到关系

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{\mathbb{P}\{S_n^0>x\}}{n\mathbb{P}\{\xi_1^0>x\}}\geq(1+\varepsilon)^{-\alpha}$$

for x 满足 $xn^{-1/2}\to\infty$ 且 $n\mathbb{P}\{\xi_1>x\}\to 0$. 。在此令 $\varepsilon\to 0+$，我们得到 n

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{\mathbb{P}\{S_n^0>x\}}{n\mathbb{P}\{\xi_1^0>x\}}\geq 1 \tag{16}$$

对于满足 $xn^{-1/2}\to\infty$ 和 $n\mathbb{P}\{\xi_1>x\}\to 0$. 的 x

为得到相应的上界，我们应用福克-纳盖夫不等式之一。根据 [15], 中的定理 1.2，取 $t=2$ 和 $y=x/r$ ，其中某个 $r>1$,

$$\mathbb{P}\{S_n^0>x\}\leq n\mathbb{P}\{\xi_1^0>x/r\}+\mathrm{e}^r\left(\frac{rn\sigma^2(x/r)}{x^2}\right)^r,$$

其中

$$\sigma^2(y):=\mathbb{E}\left[(\xi_1^0)^2\,\mathbb{1}_{\{|\xi_1^0|\leq y\}}\right],\quad y\geq 0.$$

假设（3）确保函数 σ^2 在无穷远处缓慢变化。因此，存在一个常数 C_r 使得

$$\mathbb{P}\{S_n^0>x\}\leq n\mathbb{P}\{\xi_1^0>x/r\}+C_r\left(\frac{n\sigma^2(x)}{x^2}\right)^r.$$

这个界意味着，如果 $x\geq n^{1/2+\delta}$ 满足某个 $\delta>0$，那么

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{\mathbb{P}\{S_n^0>x\}}{n\mathbb{P}\{\xi_1^0>x\}}\leq r^\alpha.$$

现在令 $r \to 1+$，我们得出

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\mathbb{P}\{S_n^0 > x\}}{n\mathbb{P}\{\xi_1^0 > x\}} \le 1 \tag{17}$$

只要 $x \ge n^{1/2+\delta}$。结合（16）和（17），并回想 a 是指数为 $2/\alpha$的正则变差函数，我们便可推知（15）对 $\alpha = 2$成立。因此，引理3.1 的证明至此完成。 □

现在我们说明，在某些情况下，可以省略（15）中的中心化项 $\mu\lfloor tv\rfloor$。具体而言，如果$\alpha \in (1, 2)$，或者 $\alpha = 1$ 且 $\mu < \infty$，那么 a 的正则变差指数为 $2/\alpha$，这意味着 $\lim_{v\to\infty} v^{-1}a(v) = \infty$。如果 $\alpha = 2$ 且 $\lim_{v\to\infty} \ell(v) = \infty$，则由 $(\ell(a(v)))^{1/2} \sim v^{-1}a(v)$ as $v \to \infty$可知，后一个极限关系同样成立。综上，如果 $\alpha \in (0, 2)$，或者 $\alpha = 2$ 且 $\lim_{v\to\infty} \ell(v) = \infty$，则（14）成立；而如果 $\alpha = 2$ 且 $\liminf_{v\to\infty} \ell(v) < \infty$，则（15）成立。

定理1.1的证明

对于区间 I和 J，记 $M_p(I \times J)$为赋予模糊拓扑的 $I \times J$上的拉东点测度空间。此外，令$\varepsilon_{(t,x)}$ 表示在 (t, x) 处有原子的狄拉克测度。作为准备，我们需要一个关于模糊收敛的结果。回忆一下，泊松随机测度 $\mathcal{P}_\alpha^{(1)}$的定义已在定理1.1中给出。

命题 3.2。 在定理*1.1*的假设下，若 $\alpha \in (0,2)$ 或 $\alpha = 2$ 且$\lim_{v\to\infty} \ell(v) = \infty$，则

$$\sum_{k\ge1} \varepsilon_{(k/v,\hat{S}_k/a(v))} \implies \mathcal{P}_\alpha^{(1)}, \quad v \to \infty$$

关于 $M_p([0,\infty) \times (0, \infty])$；然而，若 $\alpha = 2$ 且 $\liminf_{v\to\infty} \ell(v) < \infty$，则

$$\sum_{k\ge1} \varepsilon_{(k/v,(\hat{S}_k-\mu k)/a(v))} \mathbb{1}_{\{\hat{S}_k>\mu k\}} \implies \mathcal{P}_\alpha^{(1)}, \quad v \to \infty$$

关于 $M_p([0,\infty) \times (0, \infty])$，其中 $\mu = \mathbb{E}[\xi] < \infty$。*1.1*。

证明。 The case where (14) prevails. 根据 [17], 第 153 页的命题 3.19，只需证明

$$\lim_{v\to\infty} \mathbb{E}\Big[\exp\Big(-\sum_{k\ge1} f\big(k/v, \hat{S}_k/a(v)\big)\Big)\Big] = \exp\Big(-\int_{[0,\infty)\times(0,\infty)} (1 - \mathrm{e}^{-f(t,y)})\theta(\mathrm{d}t)\nu_\alpha(\mathrm{d}y)\Big) \tag{18}$$

对于定义在 $[0,\infty) \times (0,\infty]$ 上、具有紧支撑的任意非负连续函数 f，约定集合 $[0,a] \times [b,\infty]$ 在 $[0,\infty) \times (0,\infty]$ 上是紧的，其中 a， $b > 0$。

固定任意一个如上所述的 f。那么存在 λ， $\gamma > 0$，使得当 $t > \lambda$ 或 ^ ^$y \in [0,\gamma)$ 时， $f(t,\ y) = 0$。由 S_1, S_2，..... 的独立性，

$$\begin{aligned}\log \mathbb{E}\Big[\exp\Big(-\sum_{k\ge1} f(k/v, \hat{S}_k/a(v))\Big)\Big] &= -\sum_{k\ge1} \log \mathbb{E}\big[\exp(-f(k/v, S_k/a(v)))\big] \\ &= -\sum_{k\ge1} \log\Big(1 - \int_{(\gamma,\infty)} (1 - \mathrm{e}^{-f(k/v,y)})\mathbb{P}\{S_k/a(v) \in \mathrm{d}y\}\Big).\end{aligned}$$

令 $S_0 := 0$，并定义 $f(0,\ 0)$ 为 0。将此用于转化为积分时，我们得到

$$\sum_{k\geq 1}\int_{(\gamma,\infty)}(1-\mathrm{e}^{-f(k/v,y)})\mathbb{P}\{S_k/a(v)\in \mathrm{d}y\}$$
$$=\int_0^\lambda\int_{(\gamma,\infty)}(\mathrm{e}^{-f(t,y)}-\mathrm{e}^{-f(\lfloor tv\rfloor/v,y)})v\mathbb{P}\{S_{\lfloor tv\rfloor}/a(v)\in \mathrm{d}y\}\mathrm{d}t$$
$$+\int_0^\lambda\int_{(\gamma,\infty)}(1-\mathrm{e}^{-f(t,y)})v\mathbb{P}\{S_{\lfloor tv\rfloor}/a(v)\in \mathrm{d}y\}\mathrm{d}t =: I(v)+J(v).$$

对于 $\delta>0$，令 $\omega_{\mathrm{e}^{-f}}(\delta) := \sup_{||\mathbf{x}-\mathbf{y}||\leq\delta}|\mathrm{e}^{-f(\mathbf{x})}-\mathrm{e}^{-f(\mathbf{y})}|$，其中 $\mathbf{x}$、$\mathbf{y}\in[0,\infty)\times(0,\ \infty)$。于是

$$|I(v)|\leq\lambda\omega_{\mathrm{e}^{-f}}(\sup_{t\in[0,\lambda]}(t-\lfloor tv\rfloor/v))v\mathbb{P}\{S_{\lfloor\lambda v\rfloor}>a(v)\gamma\}\ \to\ 0,\quad v\to\infty.$$

这由 (14)、$\lim_{v\to\infty}\sup^{t\in[0,\lambda]}(t-\lfloor vt\rfloor/v)\ =0$ 以及 e 的一致连续性可得$^{-f}$。关系式 (14) 保证，对于固定的 $t>0$，

$$\lim_{v\to\infty}\int_{(\gamma,\infty)}\left(1-\mathrm{e}^{-f(t,y)}\right)v\mathbb{P}\{S_{\lfloor tv\rfloor}/a(v)\in \mathrm{d}y\}=t\int_{(0,\infty)}\left(1-\mathrm{e}^{-f(t,y)}\right)\nu_\alpha(\mathrm{d}y).$$

对于每个 $t\in[0,\lambda]$，存在一个常数 $C>0$，使得对所有 $v>0$,

$$\int_{(\gamma,\infty)}\left(1-\mathrm{e}^{-f(t,y)}\right)v\mathbb{P}\{S_{\lfloor tv\rfloor}/a(v)\in \mathrm{d}y\}\leq v\mathbb{P}\{S_{\lfloor\lambda v\rfloor}>a(v)\gamma\}\leq \mathrm{C},$$

其中最后一个不等式由 (14) 得到。有了这一点，应用勒贝格控制收敛定理可得

$$\lim_{v\to\infty}\sum_{k\geq1}\int_{(\gamma,\infty)}(1-\mathrm{e}^{-f(k/v,y)})\mathbb{P}\{S_k/a(v)\in \mathrm{d}y\}=\lim_{v\to\infty}J(v)$$
$$=\int_{[0,\infty)\times(0,\infty)}(1-\mathrm{e}^{-f(t,y)})\theta(\mathrm{d}t)\nu_\alpha(\mathrm{d}y).\quad(19)$$

我们断言

$$\lim_{v\to\infty}\sup_{k\geq1}\int_{(\gamma,\infty)}\left(1-\mathrm{e}^{-f(k/v,y)}\right)\mathbb{P}\{S_k/a(v)\in \mathrm{d}y\}=0.\quad(20)$$

于是，不等式

$$x\leq-\log(1-x)\leq x+x^2,\quad x\in[0,1/2]$$

当 $x=\int_{(\gamma,\infty)}\left(1-\mathrm{e}^{-f(k/v,y)}\right)\mathbb{P}\{S_k/a(v)\ \in \mathrm{d}y\}$ 较大时成立 v。由 和 （20） 可推得 (19)

$$\lim_{v\to\infty}\sum_{k\geq1}\left(\int_{(\gamma,\infty)}\left(1-\mathrm{e}^{-f(k/v,y)}\right)\mathbb{P}\{S_k/a(v)\in \mathrm{d}y\}\right)^2=0,$$

由此完成了（18）的证明。

Proof of (20)。 根据 $k\geq\lfloor\lambda v\rfloor+1$，该积分等于 0。对于正整数 $k\leq\lfloor\lambda v\quad\rfloor$,

$$\int_{(\gamma,\infty)}\left(1-\mathrm{e}^{-f(k/v,y)}\right)\mathbb{P}\{S_k/a(v)\in \mathrm{d}y\}\leq\mathbb{P}\{S_{\lfloor\lambda v\rfloor}>a(v)\gamma\}\ \to\ 0,\quad v\to\infty$$

由式（14）可知。

THE CASE WHERE (15) PREVAILS. 再次调用 [17]第 153 页上的命题 3.19，我们得出，只需证明

$$\lim_{v\to\infty}\mathbb{E}\Big[\exp\Big(-\sum_{k\geq 1} f\big(k/v,(\hat{S}_k-\mu k)/a(v)\big)\,\mathbb{1}_{\{\hat{S}_k>\mu k\}}\Big)\Big] = \exp\Big(-\int_{[0,\infty)\times(0,\infty)}(1-\mathrm{e}^{-f(t,y)})\theta(\mathrm{d}t)\nu_\alpha(\mathrm{d}y)\Big)$$

对于任意非负的连续函数 f 在 $[0,\infty)\times\mathbb{R}$ 上，且在 $[0,\infty)\times(0,\infty]$ 内具有紧支撑（特别是，$f(x,y)=0$ 对于 $y\leq 0$）。证明与式（18）类似，唯一的区别是这里使用式（15），而不是式（14）。

命题 3.2的证明至此完成。 □

现在可以证明定理1.1了。

定理 1.1 的证明。回忆一下，$\mathcal{P}_\alpha^{(1)}$表示一个原子为（t_k，j_k）的泊松随机测度。显然，$\mathcal{P}_\alpha^{(1)}([0,\infty)\times(-\infty,0])=\mathcal{P}_\alpha^{(1)}(\{0\}\times(0,\infty])=0$ 几乎必然成立，$\mathcal{P}_\alpha^{(1)}$几乎必然没有聚集跳跃，并且对于所有 t、$s\geq 0$、$t<s$ 以及所有 $\delta>0$，$\mathcal{P}_\alpha^{(1)}([0,t]\times[\delta,\infty])<\infty$ 几乎必然成立，且$\mathcal{P}_\alpha^{(1)}((t,s)\times(0,\infty))\geq 1$ 几乎必然成立。因此，$\mathcal{P}_\alpha^{(1)}$以概率 1 满足命题 4.1 中对 ρ_0 施加的所有假设。随后，式（4）中所述的弱收敛可直接由命题 3.2、斯科罗霍德表示定理（该定理保证命题 3.2 中的点测度存在几乎必然收敛的版本）以及命题 4.1 推出，其中 $f(x)=0$ 对于 $x\geq 0$。

为完成证明，我们指出极限过程 X_1 的边缘分布：对于$y\geq 0$ 和 $t>0$,

$$\mathbb{P}\{\sup_{k:\ t_k\leq t} j_k\leq y\}=\mathbb{P}\{\mathcal{P}_\alpha^{(1)}((s,x):s\leq t,x>y)=0\} = \exp\big(-\mathbb{E}[\mathcal{P}_\alpha^{(1)}((s,x):s\leq t,x>y)]\big)=\exp(-t^2y^{-\alpha}/2).$$

□

3.3 定理 1.2 的证明

我们先给出一个命题。

命题 3.3。 在定理 *1.2*的假设下，

$$\sum_{k\geq 1}\varepsilon_{((k-v)/a(v),(\hat{S}_k-\mu k)/a(v))}\,\mathbb{1}_{\{\hat{S}_k>\mu k\}}\ \Longrightarrow\ \mathcal{P}_\alpha^{(2)},\quad v\to\infty$$

在 $M_p(\mathbb{R}\times(0,\infty])$，其中 $\mu=\mathbb{E}[\xi]<\infty$ 且 $\mathcal{P}_\alpha^{(2)}$如定理 *1.2* 中所定义 .

证明。我们首先注意到，$a(v)=v^{1/(\alpha-1)}L(v)$，其中 L 在 ∞ 处缓慢变化。现在我们证明

$$\lim_{v\to\infty}\frac{(L(v))^2}{\log v}=\infty \tag{21}$$

前提是 $\alpha=3$ 以及 $\lim_{v\to\infty}(\ell(v)/\log v)=\infty$。事实上，根据 a 的定义，当 $v\to\infty$ ，

$$1\ \leftarrow\ va(v)\mathbb{P}\{\xi>a(v)\}\ \sim\ v^{3/2}L(v)\frac{\ell(v^{1/2}L(v))}{v^{3/2}(L(v))^3}\ \sim\ \frac{\ell(v^{1/2}L(v))}{(L(v))^2}.$$

因此，给定 $\varepsilon > 0$ 不等式 $\ell(v^{1/2}L(v)) \le (1+\varepsilon)(L(v))^2$ 对充分大的 v 成立。此外，关于 ℓ 的假设确保了给定 $B > 0$ 不等式 $\ell(v) \ge B\log v$ 对充分大的v成立。因此，对于充分大的 v，有 $(L(v))^2 \ge (1+\varepsilon)^{-1}B\log(v^{1/2}L(v)) \ge (1+\varepsilon)^{-1}(B/2)\log v$，这证明了（21）。因此，在定理 1.2 的条件下，

$$\lim_{v\to\infty} \frac{a(v)}{(v\log v)^{1/2}} = \infty. \tag{22}$$

将定理 1.9 应用于 [15] 随机游走 $(S_n - \mu n)_{n\ge 1}$，我们推得

$$\mathbb{P}\{S_n - \mu n > x\} \sim n\mathbb{P}(\xi > x)$$

只要 $x > (\alpha - 2 + \delta)^{1/2}(n\log n)^{1/2}$ 对某个 $\delta > 0$成立即可。将此与 $n = \lfloor v + ta(v)\rfloor$ 结合，并回顾 a的定义，我们得到

$$\lim_{v\to\infty} a(v)\mathbb{P}\{S_{\lfloor v+ta(v)\rfloor} - \mu\lfloor v + ta(v)\rfloor > a(v)y\} = y^{-\alpha}. \tag{23}$$

与命题3.2的证明相同，只需证明

$$\lim_{v\to\infty} \mathbb{E}\Big[\exp\Big(-\sum_{k\ge 1} f\big((k-v)/a(v), (\hat{S}_k - \mu k)/a(v)\big)\,\mathbb{1}_{\{\hat{S}_k > \mu k\}}\Big)\Big]$$
$$= \exp\Big(-\int_{\mathbb{R}\times(0,\infty)} (1 - \mathrm{e}^{-f(t,y)})\mathrm{d}t\,\nu_\alpha(\mathrm{d}y)\Big)$$

对于任意定义在 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 上的非负连续函数 f，若其在 $\mathbb{R}\times(0,\infty]$ 中具有紧支撑（即 $f(x,y) = 0$对 $y \le 0$成立）。对于固定的 f，存在 $\lambda, \gamma > 0$，使得当 $|t| > \lambda$或 $y < \gamma$时，$f(t,y) = 0$。利用这一点以及随机变量 S_1、$S_2, \ldots$的独立性，我们得到

$$\log \mathbb{E}\Big[\exp\Big(-\sum_{k\ge 1} f((k-v)/a(v), (\hat{S}_k - \mu k)/a(v))\,\mathbb{1}_{\{\hat{S}_k > \mu k\}}\Big)\Big]$$
$$= -\sum_{k\ge 1} \log\big(\mathbb{E}\big[\exp(-f((k-v)/a(v), (S_k - \mu k)/a(v)))\,\mathbb{1}_{\{S_k > \mu k\}}\big] + \mathbb{P}\{S_k \le \mu k\}\big)$$
$$= -\sum_{k\ge 1} \log\Big(1 - \int_{\mathbb{R}} (1 - \mathrm{e}^{-f((k-v)/a(v),y)})\mathbb{P}\{(S_k - \mu k)/a(v) \in \mathrm{d}y\}\Big)$$
$$= -\sum_{k\ge 1} \log\Big(1 - \int_{(\gamma,\infty)} (1 - \mathrm{e}^{-f((k-v)/a(v),y)})\mathbb{P}\{(S_k - \mu k)/a(v) \in \mathrm{d}y\}\Big).$$

此外，对于较大的 v,

$$\sum_{k\ge 1} \int_{(\gamma,\infty)} (1 - \mathrm{e}^{-f((k-v)/a(v),y)})\mathbb{P}\{(S_k - \mu k)/a(v) \in \mathrm{d}y\}$$
$$= \int_{-\lambda}^{\lambda}\int_{(\gamma,\infty)} (\mathrm{e}^{-f(t,y)} - \mathrm{e}^{-f((\lfloor v+ta(v)\rfloor - v)/a(v),y)})a(v)\mathbb{P}\{(S_{\lfloor v+ta(v)\rfloor} - \mu\lfloor v + ta(v)\rfloor)/a(v) \in \mathrm{d}y\}\mathrm{d}t$$
$$+ \int_{-\lambda}^{\lambda}\int_{(\gamma,\infty)} (1 - \mathrm{e}^{-f(t,y)})a(v)\mathbb{P}\{(S_{\lfloor v+ta(v)\rfloor} - \mu\lfloor v + ta(v)\rfloor)/a(v) \in \mathrm{d}y\}\mathrm{d}t =: I(v) + J(v).$$

关系 (14) 和 $\lim_{v\to\infty}\sup^{t\in[-\lambda,\lambda]}(t-(\lfloor v+ta(v)\rfloor-v)/a(v))=0$ 以及 e 的一致连续性$^{-f}$ 推出

$$
\begin{aligned}
&|I(v)|\\
&\le \omega_{\mathrm{e}^{-f}}\Big(\sup_{t\in[-\lambda,\lambda]}(t-(\lfloor v+ta(v)\rfloor-v)/a(v))\Big)\int_{-\lambda}^{\lambda}a(v)\mathbb{P}\{S_{\lfloor v+ta(v)\rfloor}-\mu\lfloor v+ta(v)\rfloor>a(v)\gamma\}\mathrm{d}t\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\to\ 0,\quad v\to\infty.
\end{aligned}
$$

我们省略极限关系的证明

$$\lim_{v\to\infty}J(v)=\int_{\mathbb{R}\times(0,\infty)}(1-\mathrm{e}^{-f(t,y)})\mathrm{d}t\,\nu_\alpha(\mathrm{d}y).$$

It can be justified along the lines of the proof of the corresponding fragment of Proposition 3.2 上。回顾命题3.2 的证明，我们得出，必须得到式（20）的对应结果，而证明的其余部分则仿照命题 3.2的证明。因此，我们只需证明

$$\lim_{v\to\infty}\sup_{k\ge1}\int_{(\gamma,\infty)}\big(1-\mathrm{e}^{-f((k-v)/a(v),y)}\big)\mathbb{P}\{(S_k-\mu k)/a(v)\in\mathrm{d}y\}=0.$$

这是以下结论的推论:

$$
\begin{aligned}
&\sup_{v-\lambda a(v)\le k\le v+\lambda a(v)}\int_{(\gamma,\infty)}\big(1-\mathrm{e}^{-f((k-v)/a(v),y)}\big)\mathbb{P}\{(S_k-\mu k)/a(v)\in\mathrm{d}y\}\\
&\qquad\qquad\le\mathbb{P}\Big\{\frac{\sup_{1\le k\le v+\lambda a(v)}\big(S_k-\mu k\big)}{v^{1/2}}>\frac{\gamma a(v)}{v^{1/2}}\Big\}\ \to\ 0,\quad v\to\infty.
\end{aligned}
$$

这里，最后一个关系由 $\lim_{v\to\infty}v^{-1/2}a(v)=\infty$ 以及 $v\to\infty$时$\sup^{1\le k\le v+\lambda a(v)}(S_k-\mu k)\,(\mathrm{Var}\,[\xi]v)^{1/2}$ 弱收敛于一个服从标准正态分布的随机变量的绝对值而得到。

命题 3.3的证明至此完成。 □

定理 *1.2*的证明。我们从如下表示开始

$$\frac{\max_{1\le k\le v+ta(v)}\hat{S}_k-\mu v}{a(v)}=\max_{k:\ (k-v)/a(v)\le t}\Big(\frac{\mu(k-v)}{a(v)}+\frac{\hat{S}_k-\mu k}{a(v)}\Big),$$

该式对每个 $t\in\mathbb{R}$ 以及充分大的 v均成立。鉴于此，我们打算对 $x\in\mathbb{R}$应用命题 4.1，其中取 $f(x)=\mu x$和 $\rho_n=\sum_k\varepsilon_{\{(k-v_n)/a(v_n),(\hat{}S_k-\mu k)/a(v_n)\}}$，而 $(v_n)_{n\ge1}$是任意一个趋于 ∞ 的正数序列。可以验证， $\mathcal{P}_\alpha^{(2)}$以概率 1 满足命题 4.1 中对 ρ_0 施加的所有假设。结合斯科罗霍德表示定理和命题 4.1，式（5）中所述的弱收敛随即由命题 3.3 得出。

最后，我们 讨论极限过程 X_2 的边缘分布：对于 $t\in\mathbb{R}$ 和 $y>\mu t$ ，

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\Big\{\sup_{k:\ t_k\le t}(\mu t_k+j_k)\le y\Big\}&=\mathbb{P}\big\{\mathcal{P}_\alpha^{(2)}\big((s,x):s\le t,\mu s+x>y\big)=0\big\}\\
&=\exp\big(-\mathbb{E}\big[\mathcal{P}_\alpha^{(2)}\big((s,x):s\le t,\mu s+x>y\big)\big]\big).
\end{aligned}
$$

此外，

$$\mathbb{E}\big[\mathcal{P}_\alpha^{(2)}\big((s,x):s\le t,\mu s+x>y\big)\big]=\int_{-\infty}^{t}\int_{[0,\infty)}\mathbb{1}_{\{\mu s+x>y\}}\,\nu_\alpha(\mathrm{d}x)\mathrm{d}s=\int_{-\infty}^{t}(y-\mu s)^{-\alpha}\mathrm{d}s$$
$$=(\mu(\alpha-1))^{-1}(y-\mu t)^{1-\alpha}.$$

□

定理 1.3 的证明

命题 3.4。 在定理 *1.3*的假设下，

$$\sum_{k\ge1}\varepsilon_{((k-v)/a(v),(\hat{S}_k-m(v))/a(v))}\implies\mathcal{P}^{(3)},\quad v\to\infty$$

在 $M_p(\mathbb{R}\times(-\infty,\infty])$.

证明。 不失一般性，我们可以并且确实假设 $\sigma^2=1$。

我们断言，对于固定的 t， $y\in\mathbb{R}$,

$$\lim_{v\to\infty}a(v)\mathbb{P}\{S_{\lfloor v+ta(v)\rfloor}>m(v)+ya(v)\}=\mathrm{e}^{\mu t-y}.\tag{24}$$

首先假设，当 $v\to\infty$ 时， $\mathbb{P}\{\xi>v\}\sim v^{-3}\ell(v)$，且 $\lim_{v\to\infty}(\ell(v)/\log v)=0$。根据 [15], 中的定理 1.9

$$\mathbb{P}\{S_n-\mu n>x\}=\big(1-\Phi(xn^{-1/2})\big)(1+o(1))+n\mathbb{P}\{\xi>x\}(1+o(1)),\quad n\to\infty\tag{25}$$

关于 $x\ge n^{1/2}$ 一致。结合这一点，

$$n=\lfloor v+ta(v)\rfloor\quad\text{and}\quad x=\frac{m(v)-\mu\lfloor v+ta(v)\rfloor+ya(v)}{(\lfloor v+ta(v)\rfloor)^{1/2}},\tag{26}$$

我们打算证明正态分布尾部占主导。为此，我们首先证明，对于固定的 t， $y\in\mathbb{R}$,

$$\lim_{v\to\infty}a(v)\Big(1-\Phi\Big(\frac{m(v)-\mu\lfloor v+ta(v)\rfloor+ya(v)}{(\lfloor v+ta(v)\rfloor)^{1/2}}\Big)\Big)=\mathrm{e}^{\mu t-y}.\tag{27}$$

事实上，由于 $1-\Phi(x)\sim(2\pi)^{-1/2}x^{-1}\mathrm{e}^{-x^2/2}$ 当 $x\to\infty$ 时，以及

$$\frac{m(v)-\mu v}{v^{1/2}}=\Phi^{-1}(1-1/a(v))\sim(\log v)^{1/2},\quad v\to\infty\tag{28}$$

（见备注1.4）我们得到

$$1-\Phi\Big(\frac{m(v)-\mu\lfloor v+ta(v)\rfloor+ya(v)}{(\lfloor v+ta(v)\rfloor)^{1/2}}\Big)\sim1-\Phi\Big(\frac{m(v)-\mu v}{v^{1/2}}+\frac{(y-\mu t)a(v)}{v^{1/2}}\Big)$$
$$=1-\Phi\Big(\Phi^{-1}(1-1/a(v))+\frac{(y-\mu t)a(v)}{v^{1/2}}\Big)$$
$$\sim\frac{1}{(2\pi)^{1/2}\Phi^{-1}(1-1/a(v))}\mathrm{e}^{-(\Phi^{-1}(1-1/a(v)))^2/2}\mathrm{e}^{\Phi^{-1}(1-1/a(v))(\mu t-y)(\log v)^{-1/2}}$$
$$\sim1-\Phi(\Phi^{-1}(1-1/a(v)))\mathrm{e}^{\mu t-y}=\frac{\mathrm{e}^{\mu t-y}}{a(v)},\quad v\to\infty.$$

另一方面，利用（28），我们得到

$$a(v)v\mathbb{P}\{\xi > m(v)-\mu\lfloor v+ta(v)\rfloor+ya(v)\} \sim a(v)v\mathbb{P}\{\xi > m(v)-\mu v\} \sim \frac{v^{3/2}}{(\log v)^{1/2}}\frac{\ell((v\log v)^{1/2})}{(v\log v)^{3/2}}$$
$$= \frac{\ell((v\log v)^{1/2})}{(\log v)^2} \to 0, \quad v\to\infty.$$

这里，最后一个极限关系由 $\lim_{v\to\infty} {}^{\ell_{(v)\log v}} = 0$保证。我们已经证明，正态尾部的贡献占主导地位，因此得到（24）。

现在假设 $\mathbb{E}[\xi^3] < \infty$。根据 [16], 第 125 页上的定理 14，假设$\mathbb{E}[\xi^3] < \infty$ 保证存在一个普适常数 $C > 0$ 使得，对所有 $x \in \mathbb{R}$ 以及所有$n \in \mathbb{N}$,

$$\left|\mathbb{P}\{S_n - \mu n \le xn^{1/2}\} - \Phi(x)\right| \le \frac{C\mathbb{E}[\xi^3]}{n^{1/2}(1+|x|^3)}.$$

采用与（ n 和 x）中相同的26，我们推出

$$a(v)\Big|\mathbb{P}\{S_{\lfloor v+ta(v)\rfloor} > m(v)+ya(v)\} - \Big(1-\Phi\Big(\frac{m(v)-\mu\lfloor v+ta(v)\rfloor+ya(v)}{(\lfloor v+ta(v)\rfloor)^{1/2}}\Big)\Big)\Big|$$
$$= a(v)\Big|\mathbb{P}\Big\{S_{\lfloor v+ta(v)\rfloor} - \mu\lfloor v+ta(v)\rfloor \le \frac{m(v)-\mu\lfloor v+ta(v)\rfloor+ya(v)}{(\lfloor v+ta(v)\rfloor)^{1/2}}(\lfloor v+ta(v)\rfloor)^{1/2}\Big\}$$
$$- \Phi\Big(\frac{m(v)-\mu\lfloor v+ta(v)\rfloor+ya(v)}{(\lfloor v+ta(v)\rfloor)^{1/2}}\Big)\Big|$$
$$\le \frac{Ca(v)}{(\lfloor v+ta(v)\rfloor)^{1/2}}\Big(1+\frac{m(v)-\mu\lfloor v+ta(v)\rfloor+ya(v)}{(\lfloor v+ta(v)\rfloor)^{1/2}}\Big)^{-1} \sim \frac{C}{(\log v)^2} \to 0, \quad v\to\infty.$$

这表明，固定 t, $y \in \mathbb{R}$ 后，当 $v\to\infty$ 时，

$$a(v)\mathbb{P}\{S_{\lfloor v+ta(v)\rfloor} > m(v)+ya(v)\} \sim a(v)\Big(1-\Phi\Big(\frac{m(v)-\mu\lfloor v+ta(v)\rfloor+ya(v)}{(\lfloor v+ta(v)\rfloor)^{1/2}}\Big) \to \mathrm{e}^{\mu t-y}.$$

这里，最后一个极限关系由（27）得出。

要证明命题 3.4 中所述的极限关系，只需验证 t

$$\lim_{v\to\infty}\mathbb{E}\Big[\exp\Big(-\sum_{k\ge1} f\big((k-v)/a(v),(\hat{S}_k-m(v))/a(v)\big)\Big)\Big]$$
$$= \exp\Big(-\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}(1-\mathrm{e}^{-f(t,y)})\mathrm{e}^{\mu t-y}\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y\Big)$$

对于定义在 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 上、在 $\mathbb{R}\times(-\infty,\infty]$ 中具有紧支撑的任意非负连续函数 f。特别地，对于固定的 f，存在 $\lambda > 0$ 和 $\gamma \in \mathbb{R}$，使得只要 $|t| > \lambda$ 或 $y < \gamma$，就有 $f(t,y) = 0$。

极限关系的证明与命题3.2的证明类似。只是对于

$$\lim_{v\to\infty}\sup_{k\ge1}\int_{(\gamma,\infty)}\big(1-\mathrm{e}^{-f((k-v)/a(v),y)}\big)\mathbb{P}\{(S_k-m(v))/a(v)\in\mathrm{d}y\} = 0.$$

这是.....的推论

$$\max_{v-\lambda a(v)\le k\le v+\lambda a(v)} \int_{(\gamma,\infty)} \big(1-\mathrm{e}^{-f((k-v)/a(v),y)}\big)\mathbb{P}\{(S_k-m(v))/a(v)\in \mathrm{d}y\}$$
$$\le \max_{1\le k\le v+\lambda a(v)} \mathbb{P}\{\big(S_k-m(v)\big)/a(v)>\gamma\} \le \mathbb{P}\{S_{\lfloor v+\lambda a(v)\rfloor}>m(v)+\gamma a(v)\} \sim \mathrm{e}^{\mu\lambda-\gamma}/a(v) \to 0$$

如 $v\to\infty$。这里，最后一个极限关系由证明的前一部分得到。 □

定理 *1.3* 的证明。写出

$$\frac{\max_{1\le k\le\lfloor v+ta(v)\rfloor}\hat{S}_k-m(v)}{a(v)}=\max_{k\in\mathbb{N}:(k-v)/a(v)\le t}\frac{\hat{S}_k-m(v)}{a(v)}.$$

根据 第 214 页 中给出的论证， [17] 泛函 $T:\ M_p(\mathbb{R}\times(-\infty,\ \infty])\to D(\mathbb{R})$ 定义为

$$\Big(T\sum_k \varepsilon_{(\tau_k,y_k)}(t)\Big)_{t\in\mathbb{R}}:=(\max_{k:\tau_k\le t} y_k)_{t\in\mathbb{R}}$$

几乎必然在 $\mathcal{P}^{(3)}$ 关于 J_1-拓扑下连续。因此，关系（6）由这一观察结合命题 3.4 得出。

为求极限过程 X_3 的边缘分布，对 $t,\ y\in\mathbb{R}$，写出

$$\mathbb{E}\big[\mathcal{P}^{(3)}\big((s,x):s\le t,x>y\big)\big]=\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{\mu s}\mathrm{d}s\int_y^{\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\mu^{-1}\mathrm{e}^{\mu t-y}.$$

因此,

$$\mathbb{P}\Big\{\sup_{k:\ t_k\le t} j_k\le y\Big\}=\mathbb{P}\big\{\mathcal{P}^{(3)}\big((s,x):s\le t,x>y\big)=0\big\}$$
$$=\exp\big(-\mathbb{E}\big[\mathcal{P}^{(3)}\big((s,x):s\le t,x>y\big)\big]\big)=\exp(-\mu^{-1}\mathrm{e}^{\mu t-y}).$$

□

3.5 定理 1.5的证明

命题 3.5。 在定理 *1.5*的假设下，

$$\sum_{k\ge1}\varepsilon_{((k-v)/a(v),(\hat{S}_k-\mu k)/a(v))}\implies \mathcal{P}_3^{(2)},\quad v\to\infty$$

在 $M_p(\mathbb{R}\times((2/A)^{1/2},\infty])$.

证明。 我们证明，对于固定的 $t\in\mathbb{R}$ 和 $y>0$,

$$\lim_{v\to\infty}a(v)\mathbb{P}\{S_{\lfloor v+ta(v)\rfloor}-\mu\lfloor v+ta(v)\rfloor>ya(v)\}$$
$$=\begin{cases}y^{-3}, & \text{if } y>(2/A)^{1/2},\\ (A/(4\pi))^{1/2}+(A/2)^{3/2}, & \text{if } y=(2/A)^{1/2},\\ +\infty, & \text{if } y<(2/A)^{1/2}.\end{cases}\tag{29}$$

我们将使用公式（25），其中 $n = \lfloor v + ta(v) \rfloor$ 和 $x = ya(v)$。只要 ξ 的分布右尾在 ∞ 处具有指数 $-\theta$ 的正则变差性质，其中 $\theta > 2$，该公式便适用，参见 [15]中的定理 1.9。

可以验证 $\lim_{v\to\infty} va(v)\mathbb{P}\{\xi > a(v)\} = 1$，因此

$$\lim_{v\to\infty} \lfloor v + ta(v) \rfloor a(v)\mathbb{P}\{\xi > ya(v)\} = y^{-3}, \quad y > 0.$$

此外，

$$a(v)\Big(1 - \Phi\Big(\frac{ya(v)}{v^{1/2}}\Big)\Big) \sim \frac{a(v)}{(A\pi \log v)^{1/2} y} \mathrm{e}^{-A(y^2/4)\log v} = \frac{1}{2^{1/2} y v^{Ay^2/4 - 1/2}}$$
$$\to \begin{cases} 0, & \text{if } y > (2/A)^{1/2}, \\ (A/(4\pi))^{1/2}, & \text{if } y = (2/A)^{1/2}, \\ +\infty, & \text{if } y < (2/A)^{1/2}. \end{cases}$$

有了这些，应用（25）可得（29）。

证明的其余部分从略，因为它仿照命题3.3的证明。 □

定理 1.5 的证明。令 $A_v(t) := \{k \in \mathbb{N} : k - v \le ta(v), \hat{S}_k - \mu k \le (2/A)^{1/2} a(v)\}$ 以及$B_v(t) := \{k \in \mathbb{N} : k - v \le ta(v), \hat{S}_k - \mu k > (2/A)^{1/2} a(v)\}$。我们使用一个表示

$$\frac{\max_{1\le k\le \lfloor v+ta(v)\rfloor} \hat{S}_k - \mu v}{a(v)}$$
$$= \max\Big(\max_{k\in A_v(t)} \Big(\frac{\mu(k-v)}{a(v)} + \frac{\hat{S}_k - \mu k}{a(v)} \Big), \max_{k\in B_v(t)} \Big(\frac{\mu(k-v)}{a(v)} + \frac{\hat{S}_k - \mu k}{a(v)} \Big) \Big)$$
$$=: \max(Y_{1,v}(t), Y_{2,v}(t)).$$

命题 3.5结合斯科罗霍德表示定理和命题 4.1可确保

$$(Y_{2,v}(t))_{t\in\mathbb{R}} \implies (\sup_{k:\, t_k \le t} (\mu t_k + j_k))_{t\in\mathbb{R}}, \quad v \to \infty$$

在 J_1拓扑下，于 $D(\mathbb{R})$。因此，只要能够证明1.5 中的结论成立，

$$(Y_{1,v}(t))_{t\in\mathbb{R}} \implies (\mu t + (2/A)^{1/2})_{t\in\mathbb{R}}, \quad v \to \infty \tag{30}$$

在 $D(\mathbb{R})$上的 J_1拓扑下。

由于对于每个 $v > 1$、$Y_{1,v}$ 几乎处处非递减，且极限过程连续，因此只需证明一维分布的弱收敛。固定任意 $t \in \mathbb{R}$。由于$Y_{1,v}(t) \le \mu t + (2/A)^{1/2}$ 几乎处处成立，我们只需检验 $\lim_{v\to\infty} \mathbb{P}\{Y_{1,v}(t) \le y\} = 0$ 对于

$y < \mu t + (2/A)^{1/2}$。为此，写成

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{Y_{1,v}(t) \le y\} &= \prod_{k=1}^{\lfloor v+ta(v)\rfloor} \mathbb{P}\{S_k \le \mu v + ya(v),\, S_k \le \mu k + (2/A)^{1/2} a(v)\} \\ &= \prod_{v+\mu^{-1}(y-(2/A)^{1/2})a(v)\le k\le v+ta(v)} \mathbb{P}\{S_k \le \mu v + ya(v)\} \\ &\quad \times \prod_{1\le k<v+\mu^{-1}(y-(2/A)^{1/2})a(v)} \mathbb{P}\{S_k \le \mu k + (2/A)^{1/2} a(v)\} \\ &\le \prod_{v+\mu^{-1}(y-(2/A)^{1/2})a(v)\le k\le v+ta(v)} \mathbb{P}\{S_k \le \mu v + ya(v)\} \\ &\le \exp\Big(-\sum_{v+\mu^{-1}(y-(2/A)^{1/2})a(v)\le k\le v+ta(v)} \mathbb{P}\{S_k > \mu v + ya(v)\}\Big).\end{aligned}$$

还需证明

$$\begin{aligned}&\sum_{v+\mu^{-1}(y-(2/A)^{1/2})a(v)\le k\le v+ta(v)} \mathbb{P}\{S_k > \mu v + ya(v)\} \\ &= a(v)\int_{(\lfloor v+\mu^{-1}(y-(2/A)^{1/2})a(v)\rfloor - v)/a(v)}^{(\lfloor v+ta(v)\rfloor - v+1)/a(v)} \mathbb{P}\{S_{\lfloor v+xa(v)\rfloor} - \mu\lfloor v+xa(v)\rfloor > \mu v - \mu\lfloor v+xa(v)\rfloor + ya(v)\}\mathrm{d}x \\ &\qquad \to \infty, \quad v\to\infty.\end{aligned}$$

根据（29），

$$\lim_{v\to\infty} a(v)\mathbb{P}\{S_{\lfloor v+xa(v)\rfloor} - \mu\lfloor v+xa(v)\rfloor > (y-\mu x)a(v)\} = \infty$$

只要 $y - \mu x < (2/A)^{1/2}$。由法图引理，

$$\begin{aligned}&\liminf_{v\to\infty} a(v) \\ &\times \int_{(\lfloor v+\mu^{-1}(y-(2/A)^{1/2})a(v)\rfloor - v)/a(v)}^{(\lfloor v+ta(v)\rfloor - v+1)/a(v)} \mathbb{P}\{S_{\lfloor v+xa(v)\rfloor} - \mu\lfloor v+xa(v)\rfloor > \mu v - \mu\lfloor v+xa(v)\rfloor + ya(v)\}\mathrm{d}x \\ &\qquad \ge \int_{\mu^{-1}(y-(2/A)^{1/2})}^{t} \liminf_{v\to\infty} a(v)\mathbb{P}\{S_{\lfloor v+xa(v)\rfloor} - \mu\lfloor v+xa(v)\rfloor > (y-\mu x)a(v)\}\mathrm{d}x = \infty.\end{aligned}$$

这就完成了（30）的证明。

接下来讨论 X_4 的边缘分布。首先注意到 $X_4(t) \ge \mu t + (2/A)^{1/2}$ 几乎处处成立，因此对于 $t\in\mathbb{R}$，有 $\mathbb{P}\{X_4(t) \le y\} = 0$，且 $y < \mu t + (2/A)^{1/2}$。由于我们假设分布函数右连续，只需考虑 $t\in\mathbb{R}$ 且 $y > \mu t + (2/A)^{1/2}$ 的情形。对于这一范围，我们可以从定理 1.2 的证明中引用一个公式：$\mathbb{E}\big[\mathcal{P}_3^{(2)}\big((s,x): s\le t, \mu s + x > y\big)\big] = (2\mu)^{-1}(y-\mu t)^{-2}$。在此范围内，所声称的 $\mathbb{P}\{X_4(t) \le y\}$ 公式可直接得出。 □

3.6 定理1.6 的证明

回顾一下，a 在 ∞ 处正则变化，其指数为 $2/\alpha$，对 $\alpha\in(0,2]$。根据 [7], 中的定理 1.8.3，存在一个连续且严格递增的函数 b 满足 $b(v) \sim a(v)$，当 $v\to\infty$时。因而

结果，$\lim_{v\to\infty} v^2\mathbb{P}\{\xi > b(v)\} = 1$。因此，不失一般性，我们可以并且确实假设 a 连续且严格递增。

假设 $\alpha \in (0,2)$ 或 $\alpha = 2$ 且 $\lim_{v\to\infty} \ell(v) = \infty$。根据斯科罗霍德表示定理，在转到适当的概率空间后，我们可以将定理 1.6（分别为命题 3.2）中的弱收敛替换为 Skorokhod空间 $D([0,\infty))$ 中随机元素的几乎必然收敛，其中该空间赋予 J_1-拓扑（分别为 $M_p([0,\infty)\times(0,\infty])$ 中的几乎必然收敛，其中该空间赋予模糊拓扑）。Whitt 的一般结果 [18] 指出，将函数 $f \in D([0,\infty))$ 映射为其广义逆 $f^{\leftarrow}$的映射（其中 $\limsup_{t\to\infty} f(t) = \infty$）在 M_1-拓扑下连续，但在 J_1- 拓扑下不连续（反例见 [18] 第 419 页）。还要注意，M_1- 拓扑弱于 J_1- 拓扑。因此，从定理 1.6 出发并转到相应的首次通过时间过程，可得

$$\begin{aligned}\big(v^{-1}\hat{\tau}(ta(v))\big)_{t\geq 0} &= \big(\inf\{z\geq 0:\ \hat{S}_{\lfloor zv\rfloor} > ta(v)\}\big)_{t\geq 0}\\ &\longrightarrow \Big(\inf\big\{z\geq 0:\ \sup_{k:\,t_k\leq z} j_k > t\big\}\Big)_{t\geq 0} = \big(\inf\{t_k:\ j_k > t\}\big)_{t\geq 0}, \qquad v\to\infty \quad (31)\end{aligned}$$

在 $D([0,\infty))$ 上赋予 M_1-拓扑。为证明同样的收敛在 J_1-拓扑下成立，我们应用 [14] 中的引理 2.4(b)。回顾一下，$X_1(t) = \sup_{k:\,t_k\leq t} j_k$ 和 $X_1^{\leftarrow}(j) = \inf\{t_k:\ j_k > j\}$。令 j' 为 $X_1^{\leftarrow}$ 的一个不连续点；等价地说，j' 是 X_1 的一个常值区间上取得的值。更确切地说，点过程 $\sum_{k\geq 1}\delta_{(t_k,j_k)}$ 有两个原子 (t',j') 和 (t'',j'')，使得对所有 $t\in[t',t'')$，$X_1(t) = j'$，$X_1(t'-) < j'$，且 $X_1(t'') > j'$。由命题 3.2，

$$\sum_{\ell\geq 1}\varepsilon_{(\ell/v,\ \hat{S}_\ell/a(v))} \longrightarrow \sum_{k\geq 1}\varepsilon_{(t_k,j_k)}$$

在 $v\to\infty$ 下模糊收敛。因此，存在 $\sum_{\ell\geq 1}\varepsilon_{(\ell/v,\ \hat{S}_\ell/a(v))}$ 的原子 $(t'(v)\ j'(v))$ 和 $(t''(v)\ j''(v))$，当 $v\to\infty$ 时，它们分别收敛到 (t',j') 和 (t'',j'')；并且对所有充分大的 v，首次到达时刻过程 $\big(\inf\{z\geq 0:\hat{}\ S_{\lfloor zv\rfloor} > ja(v)\}\big)_{j\geq 0}$ 在 $j = j'(v)$ 处有一个跳跃，其左极限为 $t'(v)$，右极限为 $t''(v)$。由于 $t'(v)\to t'$ 且 $t''(v)\to t''$，满足 [14] 中引理 2.4(b) 的条件，因此 (31) 中的 M_1-收敛可提升为 J_1-收敛。

令 a^{-1} 为 a 的反函数。注意到，a 是 $x\mapsto 1/(\mathbb{P}\{\xi > x\})^{1/2}$ 的渐近广义逆，这特别意味着，当 $v\to\infty$ 时，$a^{-1}(v) \sim 1/(\mathbb{P}\{\xi > v\})^{1/2}$。现在用 $a^{-1}(v)$ 替换 (31) 左端的 v，即可得到 (8)。在 $\alpha = 2$ 且 $\liminf_{v\to\infty}\ell(v) < \infty$ 的情形下，论证是类似的。

对于 $s,u\geq 0$，令 $F(s,u) := \mathbb{P}\{X_1(s)\leq u\} = \exp(-s^2u^{-\alpha}/2)$，其中最后一个等式由定理 1.1 得出。由于 $X_1^{\leftarrow}$ 是一个非负过程，我们得出，对于 $y<0$，$\mathbb{P}\{X_1^{\leftarrow}(t)\leq y\} = 0$。对于 $y\geq 0$，公式 (9) 是 $\mathbb{P}\{X_1^{\leftarrow}(t)\leq y\} = 1 - F(y,t)$ 的结果。

3.7 定理的证明1.7 和 1.9

我们仅　给出定理的完整证明1.7。定理1.9的证明思路类似　　.

利用命题 3.3 结合 Whitt 的结果 [18]，并借助连续映射定理，我们得出

$$\begin{aligned}\Big(\frac{\hat{\tau}(\mu v + ta(v)) - v}{a(v)}\Big)_{t\in\mathbb{R}} &= \big(\inf\{z\in\mathbb{R}:\ \max_{1\leq k\leq\lfloor v+za(v)\rfloor}\hat{S}_k > \mu v + ta(v)\}\big)_{t\in\mathbb{R}}\\ &\Longrightarrow \Big(\inf\big\{z\in\mathbb{R}:\ \sup_{k:\ t_k\leq z} j_k > t\big\}\Big)_{t\in\mathbb{R}}, \quad v\to\infty \quad (32)\end{aligned}$$

在 M_1-拓扑下的 $D(R)$ 中。按照定理 1.6 证明中的论证方式，这种 M_1-收敛可以提升为 J_1-收敛。现在将 $\mu^{-1}v$ 替换为 v 等式左侧的（32），并注意到函数 a 在 ∞ 处正则变化，指数为 $1/(\alpha-1)$, 我们得到（10）。

任取 $t \in \mathbb{R}$。由于 $X_2(t) > \mu t$ 几乎必然成立，我们可推出 $X_2^{\leftarrow}(t) < \mu^{-1}t$ 几乎必然成立。因此， $\mathbb{P}\{X_2^{\leftarrow}(t) \leq y\} = 1$对 $y \geq \mu^{-1}t$成立。对于 $y < \mu^{-1}t$，公式（11）由（9）以及 $\mathbb{P}\{X_2^{\leftarrow}(t) \leq y\} = \mathbb{P}\{X_2(y) > t\}$得出。

3.8 定理1.8的证明

泛函 $Q: M_p(\mathbb{R} \times (-\infty, \infty]) \to D(\mathbb{R})$ 定义为

$$\Big(Q\sum_k \varepsilon_{(\tau_k, y_k)}(t)\Big)_{t\in\mathbb{R}} := \big(\inf\{z \in \mathbb{R} : \sup_{k:\, \tau_k \leq z} y_k > t\}\big)_{t\in\mathbb{R}} = (\inf\{\tau_k : y_k > t\})_{t\in\mathbb{R}}$$

几乎必然在 $\mathcal{P}^{(3)}$ 处连续，在 J_1-拓扑下；参见 [17]第 216 页推论4.21 的证明。结合这一观察，利用命题3.4 并借助连续映射定理，我们得出

$$\begin{aligned}\Big(\frac{\hat{\tau}(m(v)+ta(v))-v}{a(v)}\Big)_{t\in\mathbb{R}} &= \big(\inf\{z \in \mathbb{R} : \max_{1\leq k\leq \lfloor v+za(v)\rfloor} \hat{S}_k > m(v)+ta(v)\}\big)_{t\in\mathbb{R}} \\ &\Longrightarrow \big(\inf\{z \in \mathbb{R} : \sup_{k:\, t_k\leq z} j_k > t\}\big)_{t\in\mathbb{R}} = \big(\inf\{t_k : j_k > t\}\big)_{t\in\mathbb{R}}, \quad v \to \infty\end{aligned}$$

在 $D(R)$ 上的 J_1-拓扑中。

$X_3^{\leftarrow}$的边缘分布公式可按定理1.7的证明类似推出。

4 附录

我们给出一个确定性的连续性结果，该结果主要用于从随机点测度的模糊收敛过渡到 Skorokhod空间上最大值的弱收敛。该结果略微推广了 [12] 中的定理1.3.17，该定理讨论的是定义在 $[0,\infty) \times (-\infty,\infty]$ 以及 $\mathbb{R} \times (-\infty,\infty]$ 上的点测度，而非仅讨论定义在 $[0,\infty) \times (-\infty,\infty]$上的点测度。

令 I表示 $\mathbb{R}$或 $[0,\infty)$，并令 M_p^*表示定义在 $I \times (-\infty,\infty]$上的点测度 ρ所构成的集合，且这些点测度满足

$$\rho(I_T \times ((-\infty,-\delta] \cup [\delta,\infty])) < \infty \tag{33}$$

对所有 $\delta > 0$和所有 $T > 0$均成立，其中若 $I = [0,\infty)$，则 $I_T = [0,T]$；若 $I = \mathbb{R}$，则 $I_T = [-T,T]$。集合 M_p^* 赋予模糊拓扑。对于连续函数 $f: I \to \mathbb{R}$，定义从 M_p^* 到 $D(I)$的映射 $\mathcal{F}$ 如下：

$$\mathcal{F}(\rho)(t) := \begin{cases} \sup\limits_{k:\, \theta_k \leq t} (f(\theta_k)+y_k), & \text{if } \theta_k \leq t \text{ for some } k, \\ f(0), & \text{otherwise,} \end{cases}$$

其中 $\rho = \sum_k \varepsilon_{(\theta_k, y_k)}$。假设（33）确保 $\mathcal{F}(\rho) \in D(I)$。若（33）不成立，则 $\mathcal{F}(\rho)$ 可能不再具有右连续性。

命题 4.1。对于 $n \in \mathbb{N}$，设 $\rho_n \in M_p$。假设

- $\rho_0(I \times (-\infty,0]) = 0$ *and, if* $I = [0,\infty)$, *that* $\rho_0(\{0\} \times (-\infty,+\infty]) = 0$,
- $\rho_0((r_1,r_2) \times (0,\infty]) \geq 1$ 对所有 $r_1, r_2 \in I$满足 $r_1 < r_2$的情形，

- $\rho_0 = \sum_k \varepsilon_{\left(\theta^{(0)\,k}, y_k^{(0}\right)}$ 没有聚集跳跃，也就是说， $\theta_{(0)\,k} \neq \theta_{(0)\,j}$ 对于 $k \neq j$。

If

$$\lim_{n\to\infty} \rho_n|_{I\times(0,\infty]} = \rho_0$$

在 M_p^* 上，然后

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{F}(\rho_n) = \mathcal{F}(\rho_0)$$

在 D拓扑（I）中。

证明略去，因为只需对定理1.3.17在 [12]的证明作显然的修改即可。

致谢。 本工作的一部分是在A.I.访问比勒费尔德大学和明斯特大学期间完成的，时间为2025年6月。谨此衷心感谢所获得的经费支持和热情款待。Z.K.获得了德国研究基金会在德国卓越战略EXC 2044/2 – 390685587项目“明斯特数学：动力学—几何—结构”下的资助，并获得了德国研究基金会优先计划SPP 2265随机几何系统的资助。V.W.的工作得到德国研究基金会（DFG，德国研究基金会）的资助——项目编号317210226——SFB 1283

参考文献

[1] K. Adhikari, 复平面中 β系综与行列式点过程的空洞概率。电子概率学杂志 **23**(2018)，第48号论文，共21页。[2] G. Akemann 和 E. Strahov，复高斯矩阵乘积的空洞概率与过度拥挤估计。《统计物理杂志》**151** (2013)，987–1003。[3] G. Alsmeyer、A. Iksanov 和 Z. Kabluchko，论解耦标准随机游走。《理论概率杂志》**38** (2025)，第23号论文，共34页。[4] J. Ben Hough、M. Krishnapur、Y. Per`es 和 B. Vir`ag，高斯解析函数的零点与行列式点过程。美国数学学会，2009。[5] Q. Berger，关于柯西吸引域中的随机游走札记。《概率论及相关领域》**175** (2019)，1–44。[6] P. Billingsley，概率测度的收敛。Wiley，1968。[7] N.H. Bingham、C.M. Goldie 和 J.L. Teugels，正则变差。剑桥大学出版社，1989。[8] D. Buraczewski、A. Iksanov 和 V. Kotelnikova，独立指标变量之和的迭代对数律与单对数律及其在 *Ginibre* 点过程和 *Karlin*占位方案中的应用。《随机过程应用》**183** (2025)，第104597号论文，共32页。[9] S.-S. Byun 和 P.J. Forrester，*Ginibre*系综研究进展。施普林格，2025。[10] S.N. Ethier 和 T.G. Kurtz，马尔可夫过程：刻画与收敛，Wiley，2005。

[11] M. Fenzl 和 G. Lambert，不变行列式点过程圆盘计数统计的精确偏差。国际数学研究通知 **2022**(2022)，7420–7494。[12] A. Iksanov，扰动随机游走及类似过程的更新理论，Birkh¨auser，2016。[13] A. Iksanov 和 O. Kondratenko，随机游走折现指数泛函与折现收敛永续和的函数极限定理。《统计与概率快报》。 **176**(2021)，109148。[14] A. Iksanov、A. Pilipenko 和 I. Samoilenko，扰动随机游走最大值与发散永续和在 M_1-拓扑下的函数极限定理。《极值》。**20** (2017)，567–583。[15] S.V. Nagaev，独立随机变量之和的大偏差。《概率年刊》**7**(1979)，745–789。[16] V.V. Petrov，独立随机变量之和，施普林格出版社，1975。[17] S. Resnick，极值、正则变差与点过程。施普林格出版社，1987。[18] W. Whitt，首次通过时间过程的弱收敛。《应用概率学杂志》**8** (1971)，417–422。[19] W. Whitt，随机过程极限：随机过程极限及其在排队系统中的应用导论。施普林格，2002。