密度至关重要：通过删除边限制子图密度的复杂性二分

MatthiasBentert 德国柏林工业大学 & 挪威卑尔根大学

Tom-Lukas Breitkopf
德国柏林工业大学算法与计算复杂性

Vincent Froese
德国柏林工业大学算法与计算复杂性

Anton Herrmann
算法与计算复杂性，柏林工业大学，德国

André Nichterlein
算法与计算复杂性，柏林工业大学，德国

arXiv:2601.03129v1 [cs.DS] 6 Jan 2026

摘要

我们研究 τ-有界密度边删除（τ-BDED）问题：给定一个无向图 G，任务是删除尽可能少的边，以得到一个图 G'，使得其中没有任何子图 G' 的密度超过 τ。图（子图）的密度定义为边数除以顶点数。该问题最近被提出，并已证明对于 $\tau \in \{2/3,\ 3/4,\ 1+1/25\}$ 是 NP 难的，但对于 $\tau \in \{0,\ 1/2,\ 1\}$ [Bazgan 等人，JCSS 2025]，则可在多项式时间内求解。针对目标密度 τ，我们给出了一个完整的二分结论：

1. 若 $2\tau \in \mathbb{N}$（半整数目标密度）或 $\tau < 2/3$，则 τ-BDED 可在多项式时间内求解。**2.** 否则，τ-BDED 是 NP 难问题。

我们通过针对 G 树宽的固定参数可处理性结果，补充了 NP 困难性结论。此外，对于整数目标密度 $\tau \in \mathbb{N}$，我们证明 τ-BDED 可在随机化 $O(m^{1+o(1)})$ 时间内求解。我们的算法结果基于将问题归约为一个新的、针对受限网络的一般流问题；根据 τ 的不同，该问题可通过最大 s-t流或一般因子求解。我们认为，这些流与匹配变体之间的联系本身也具有研究价值。

2012年 ACM 学科分类 计算理论 → 参数化复杂性与精确算法；计算理论 → 问题、归约与完备性；计算数学 → 匹配与因子；计算数学 → 网络流

关键词与短语 转运、最大流、一般因子、匹配、图修改问题

资助 产生这些成果的研究获得了欧洲研究理事会（ERC）在欧盟地平线2020研究与创新计划下提供的资助（资助协议编号：819416），以及德国研究联合会（DFG，资助项目1-5003036：SPP 2378 – ReNO-2 ）提供的资助。

1 引言

在给定的无向图中寻找最密子图是一个“常青的研究课题” [16]。图（子图）的密度等于边数除以顶点数，也就是平均度的一半。因此，一个具有 n 个顶点的图的密度最高可达（$n-1$）/2；当且仅当该图是一个团时，才能达到这一最大值。不了解这一问题的读者可能会猜想它是NP难的——就像团问题一样——但事实上它可以在多项式时间内求解：这一点最早由Picard和Queyranne于1979年发现，并于1982年发表 [19] ，其算法基于最大流计算（参见 Lanciano 等人 [16]）。Goldberg提出的改进算法 [12] 同样依赖于最大 s-t 流。

本文研究一个密切相关的问题，称为 τ-有界密度边删除（τ-BDED），其定义如下：给定一个无向图 $G=(V,\ E)$，删除尽可能少的边，使得剩余图的最密子图的密度至多为 τ。Bazgan 等人 [3], 最近提出了这个问题，并指出，对于 $\tau<1$，剩余图必须是森林，且每棵树至多包含 $\lfloor 1/(1-\tau)\rfloor$ 个顶点。因此，τ-BDED 推广了可在多项式时间内求解的最大基数匹配（$\tau=1/2$）问题和 NP难的完美 P_3-打包（$\tau=2/3$）问题。对于 $\tau>1$，除了当 τ 略大于 1（$\tau=1+1/c$，其中 c 是任意大于 24 [3] 的常数）时该问题为 NP难之外，我们对 τ-BDED 的复杂性所知甚少。

我们的主要结果是关于 τ-BDED 的完整复杂性二分：

▶ **定理 1.1**。 如果 $2\tau\in\mathbb{N}$ 或 $\tau<2/3$，那么 τ-有界密度边删除问题是多项式时间可解的，否则为 *NP*难。此外，如果 $\tau\in\mathbb{N}$，那么它可以在随机化 $O(m^{1+o(1)})$ 时间内求解。

此外，我们证明了以树宽为参数的固定参数可处理性。为此，注意对于树宽为 tw 的图，可以在时间 $2^{O(\mathrm{tw}^2)}n^{O(1)}$ [15] 内计算出一个宽度为 tw 的树分解，并可在时间 $2^{O(\mathrm{tw})}n$ [14]内计算出一个宽度为 2 tw $+1$ 的树分解。

▶ **定理 1.2**。 τ-有界密度边删除问题关于树宽是固定参数可处理的。给定一个宽度为 tw 且满足 $\tau=\frac{a}{b}$ 的树分解，可以在时间 $(\max\{a,b\}+1)^{\mathrm{tw}+1}n^{O(1)}$内求解。

在技术层面上，我们遵循 Picard 和 Queyranne [19]以及 Goldberg [12]的思路：我们通过高效归约到一个广义流问题（称为二层一般转运问题（2GT））来获得算法结果。对于整数目标密度 $\tau\in\mathbb{N}$，2GT 可以通过在线性规模网络中进行一次简单的最大 s-t-流计算来求解，其中整数容量较小（至多为 τ）。这使我们能够利用近期计算最大流的算法 [7] ，在具有 m 条边的图上，以随机化 $O(m^{1+o(1)})$时间求解带有 $\tau\in\mathbb{N}$ 的 τ-BDED。对于 $\tau=1/2$，我们的流方法无法求解 2GT 实例。原因在于，我们依赖于最大流为整数型，并且某些弧具有容量 τ。在此类情况下，对容量进行简单缩放即可得到整数值。然而，我们的流问题会因此增加一项约束：某些弧要么传输全部流量（等于其容量），要么完全不传输流量。这些“全有或全无”限制使得最大流问题在一般情况下变为 NP难，即使所有弧的整数容量至多为二。[1] 受限的

[1]虽然我们没有在科学文献中找到这一结论，但 Neal Young 在 Stack Exchange 上给出了 NP 困难性证明：https://cstheory.stackexchange.com/questions/51243/maximum-flow-with-parity-requirement-on-certain-edges 。完整证明见 A 节。

网络结构（为二分图，且所有弧均指向其中一个分区）则允许将我们流问题归约到一般因子问题，而一般因子问题是最大基数匹配的推广。请注意，这与在二分图中通过归约到最大流来求解最大基数匹配的标准方法相反 [21]。借助关于一般因子的已知算法结果，我们获得了一个针对半整数目标密度 τ 的多项式时间算法，以及关于树宽的固定参数可处理性。

相关工作。关于最密子图及其各种求解方法和变体的概述，请参阅 Lanciano 等人 [16] 的综述。

据我们所知，迄今只有 Bazgan 等人 [3] 研究过有界密度边删除（BDED），这是 τ-BDED 的一个问题变体，其中目标密度是输入的一部分，因此可以依赖于 n。Bazgan 等人利用对 n 的依赖，证明了 BDED 关于树宽 [3] 的 W[1] 难度（该证明要求目标密度为 $\tau = 1 - 1/o(n)$）。鉴于 τ 的选择与问题计算复杂度之间的关系，他们得到了以下结果：当 $\tau \in [\frac{2}{3}, \frac{3}{4}]$ 或 $\tau = 1 + \frac{1}{c}$ 时，BDED 是 NP难的，其中 c 是任意大于 24 的常数；但当 $\tau < \frac{2}{3}$ 或 $\tau \in [1 - \frac{1}{n}, 1]$ 时，BDED 可在多项式时间内求解。

BDED 的顶点删除变体称为有界密度顶点删除（BDVD），它推广了顶点覆盖（$\tau = 0$）和反馈顶点集（$\tau = 1 - 1/n$）。该问题也由 Bazgan 等人 [3], 提出，他们证明了以下结果：对于任意常数目标密度，BDVD 都是 NP难的。BDED 和 BDVD 关于顶点覆盖数都是固定参数可解的，但分别关于解的大小（即要删除的边数和顶点数）是 W[1]-难和 W[2]-难的。

Chandrasekaran 等人 [5] 研究了 BDVD 的可近似性。有趣的是，他们（也）关注整数目标密度 $\tau \geq 2$，并给出了一种多项式时间 $O(\log n)$-近似算法；假设 P $\neq$ NP，则无法将其改进为 $o(\log n)$ 因子。他们的近似算法实际上还能解决更一般的问题，例如超模密度删除和拟阵反馈顶点集。

结构安排。在第 2 节介绍基本概念后，我们将在第 3 节构造一种简单的流，用于处理整数目标密度问题，τ 作为热身。我们将在第 4 节给出广义流变体的主要结果，并在第 5 节针对其余目标密度补充关于 τ-BDED 的 NP 困难性结果。最后，我们将在第 6 节总结全文。

2 预备知识

我们令 $\mathbb{N} := \{0, 1, \ldots\}$ 包含 0，并用 $\mathbb{Q}_0^+ := \{q \in \mathbb{Q} \mid q \geq 0\}$ ($\mathbb{Q}_0^- := \{q \in \mathbb{Q} \mid q \leq 0\}$) 表示非负（非正）有理数集合。对于 $n \in \mathbb{N}$，我们定义 $[n] := \{1, 2, \ldots, n\}$，其中 $[0] := \emptyset$。我们用 $\mathbb{H}$ 表示所有非负半整数有理数构成的集合，即 $\mathbb{H} = \{q \in \mathbb{Q} \mid 2q \in \mathbb{N}\}$。

图与有向图。本文中的所有图都是简单无权图。设 G 为无向图，D 为有向图。我们分别用 $V(G)$ 和 $V(D)$ 表示 G 和 D 的顶点集，用 $E(G)$ 和 $A(D)$ 分别表示 G 的边集和 D 的弧集。对于 $C \in \{G, D\}$，我们用 n_C 和 m_C 表示 C的顶点数和边（弧）数。顶点 $v \in V(G)$ 的度记为 $\deg_G(v) := |N(v)|$，其中 $N(v) := \{u \in V(G) \mid \{u, v\} \in E(G)\}$。类似地，顶点 $v \in V(D)$ 的入度（出度）

记为 $\deg_D^-(v) := |N^-(v)|$ ($\deg_D^+(v) := |N^+(v)|$)，其中 $N^-(v) := \{u \in V(D) \mid (u,v) \in A(D)\}$ ($N^+(v) := \{u \in V(D) \mid (v,u) \in A(D)\}$)。如果上下文已明确所讨论的图，则省略下标。我们用 $H \subseteq G$ 表示 H 是 G的子图。对于子集 $E' \subseteq E(G)$，我们用 $G - E'$ 表示从 G 中删除 E' 中的边后得到的子图。我们用 K_n 表示具有 n 个顶点的完全图（也称为阶为 n 的团）。

的密度为 $\rho(G) := m/n$，其中空图的密度定义为零。我们用 $\rho^*(G)$ 表示 G 的最密子图的密度，即 $\rho^*(G) := \max_{H \subseteq G} \rho(H)$。若对于每个子图 $H \subseteq G$，图 G 都满足 $\rho(H) \leq \rho(G)$，则称其为平衡的；这意味着 $\rho^*(G) = \rho(G)$。我们研究以下问题，该问题针对每个有理数 $\tau \geq 0$ 定义：

τ-有界密度边删除（τ-BDED）**输入：** 一个无向图 G 和一个整数 $k \in \mathbb{N}$。**问题：**
是否存在一个子集 $F \subseteq E(G)$，使得 $|F| \leq k$，且 $\rho^*(G - F) \leq \tau$?

在本文余下部分中，我们假设 G 是连通的，因此有 $n_G - 1 \leq m_G$，且 $O(m_G + n_G) = O(m_G)$。显然，若 G 不连通，我们可以分别求解每个连通分量，从而得到一个解；孤立顶点则可以忽略。

分数定向。定向是我们后续证明和方法中的关键工具，它源自 Charikar [6, 第3节1] 中用于计算最密子图密度的对偶线性规划公式。无向图 G 的定向为每条边 $\{u,v\}u$指定一个方向，也就是说，$\{u,v\}$ 会被替换为 (u,v) 或 (v,u)。Charikar[6] 观察到，G 的任意定向中的最大入度是 $\rho^*(G)$的上界。对于分数定向，这一结论同样成立：我们将边 $\{u,v\}$ 的一部分分配给 u，其余部分分配给 v。更正式地说，分数定向 ϕ 为每条边 $e = \{u,v\}$ 指定两个非负有理数 $\phi(e)^u$ 和 $\phi(e)^v$，满足 $\phi(e)^u + \phi(e)^v = 1$。我们用

$$\deg_\phi^-(v) := \sum_{u \in N(v)} \phi(\{u,v\})^v \qquad \text{and} \qquad \Delta_\phi^- := \max_{v \in V(G)} \deg_\phi^-(v)$$

顶点 $v \in V(G)$ 的入度，以及相对于分数定向 ϕ 的 G 的最大入度。从现在起，我们将 $\phi(uv)^v$ 作为 $\phi(\{u,v\})^v$ 的简写。

我们将上述性质重新表述为一个引理，并给出更严格的表述。

▶ **引理 2.1.** 对于任意图 G 和分数定向 ϕ，均有 $\rho^*(G) \leq \Delta_\phi^-$。

▶**引理 2.2** (Charikar [6])。对于任意图 G，存在一个分数定向 ϕ，满足$\rho^*(G) = \Delta_\phi^-$。

由 Charikar 的工作 [6] 以及线性规划可在多项式时间内求解这一事实 [21], 可知，能够在多项式时间内计算出满足 $\rho^*(G) = \Delta_\phi^-$ 的定向 ϕ。

流与因子。尽管最大流问题的研究已有半个多世纪之久，至今仍是活跃的研究课题 [7]。关于流的概述，可参阅标准教材 [1, 21]；接下来我们仅简要回顾最相关的概念与术语。在基本设定中，给定一个有向图 D 作为流网络，其中有两个指定顶点 s、$t \in V(D)$，且弧的容量为 cap: $A(D) \to \mathbb{Q}_0^+$。流 f: $A(D) \to \mathbb{Q}_0^+$为每条弧 $a \in A(D)$ 分配一个非负流量 $f(a) \leq \text{cap}(a)$，并满足：对于每个顶点 $v \in V(D) \setminus \{s,t\}$，流入该顶点的流量 $f_\Sigma^-(v) := \sum_{u \in N^-(v)} f(u,v)$ 等于流出该顶点的流量 $f_\Sigma^+(v) := \sum_{u \in N^+(v)} f(v,u)$。这里，以及

在全文中，我们用 $f(a, b)$ 简写 $f((a, b))$。流在 v处的超额量为 $f_\Sigma(v) := f^+_\Sigma(v) - f^-_\Sigma(v)$，也就是说，$s$和 t是仅有的超额量非零的顶点。流值定义为 $\text{val}(f) = f_\Sigma(s) = -f_\Sigma(t)$。

人们研究了基本最大流问题的许多扩展，包括弧上的费用、多个源点和汇点，或对弧上的流量设置下界（仅举几例）。在多项式时间内计算满足所有这些限制的最大流是可行的 [1, 21]。计算在所有 弧上流量均为偶数（同时仍满足容量限制）的最大流，也可以在多项式时间内完成（从在线搜索结果来看，这似乎是常见的练习）。然而，只需限制弧的一个子集 $F \subsetneq A(D)$，使其流量只能为 0 或 2，就足以使该问题成为 NP难问题（见 A 节）。

与最大流不同，以下匹配问题的推广在限制为偶数（或奇数）时仍可在多项式时间内求解。

一般因子
输入： 一个无向图 G，一个集合族 $\mathcal{B} = \{B_v \subseteq \{0, 1, \ldots, \deg_G(v)\} \mid v \in V(G)\}$。**问题：** 是否存在一个子集 $F \subseteq E(G)$，使得对每个顶点 $v \in V(G)$，$\deg_{(V(G),F)}(v) \in B_v$？

我们称解 F 为 $(G, \mathcal{B})$ 的因子。对于每个顶点 v，若一般因子中 $B_v = \{1\}$，则其恰为完美匹配。Cornuéjols [8] 证明，若任何 B_v 中的最大间隔长度至多为一，则一般因子问题可在多项式时间内求解。这里，整数子集 $B \subseteq \mathbb{Z}$ 的间隙长度为 $d \geq 1$，是指存在整数 $p \in B$，满足 $p + 1, \ldots\ldots, p + d \notin B$，但 $p + d + 1 \in B$。例如，集合 {0，2，3，5} 具有长度为一的间隙，这可由 $p = 0$ 和 $p = 3$ 证明。我们用 最大间隙表示所有集合 $B_v \in \mathcal{B}$ 的最大间隙长度。注意，最大间隙为一正是多项式时间可解的边界：可以直接将 NP难的三集合精确覆盖问题 SP2]归约到一般因子问题，其中每个顶点 v 的允许度要么为 $B_v = \{0, 3\}$（该顶点代表一个集合），要么为 $B_v = \{1\}$（该顶点代表一个元素）[8]。显然，构造的实例的最大间隙为二。

最近，Marx 等人 [17] 为一般因子提供了一种算法，该算法在树宽为 tw 的图上运行时间为 $(M + 1)^{3\,\text{tw}}$，其中 M 是任意集合 B_v中出现的最大整数。

3 预备：整数目标密度

考虑一个目标密度为 τ 的 τ-有界密度边删除实例 $\mathcal{I} = (G, k)$。我们将 $\mathcal{I}$ 转化为一个最大流实例，其中有 $O(m_G)$ 个顶点和弧，且容量较小并为整数。由于这类网络中的最大流可以在随机化的 $O(m^{1+o(1)})$ 时间内计算出来 [7], ，因此，当 $\tau \in \mathbb{N}$ 时，我们得到一个针对 τ-BDED 的近线性时间算法。

该流应对应于一个分数定向。也就是说，每条边 $\{u, v\}$都应有单位流量流出；其中一部分流向 u，其余部分流向 v。此外，每个顶点 v最多允许有 τ 的总流量流入。这个想法很容易转化为以下流网络构造 D（构造的示意图见图 1）：

- 将 D 的顶点集设为 $V(D) = V(G) \cup E(G) \cup \{s, t\}$。这意味着，对于 G 中的每个顶点以及 G 中的每条边，D 中都存在一个顶点。对于每个 $e = \{u, v\} \in E(G)$，在 D 中添加一条容量为 1 的弧，从源点 s 指向顶点 e。对于每个 $v \in V(G)$，在 D 中添加一条容量为 τ 的弧，从 v 指向汇点 t。对于每条边 $e = \{u, v\} \in E(G)$，在 D 中添加两条容量为 1 的弧，一条从顶点 e 指向顶点 u，另一条从 e 指向 v。

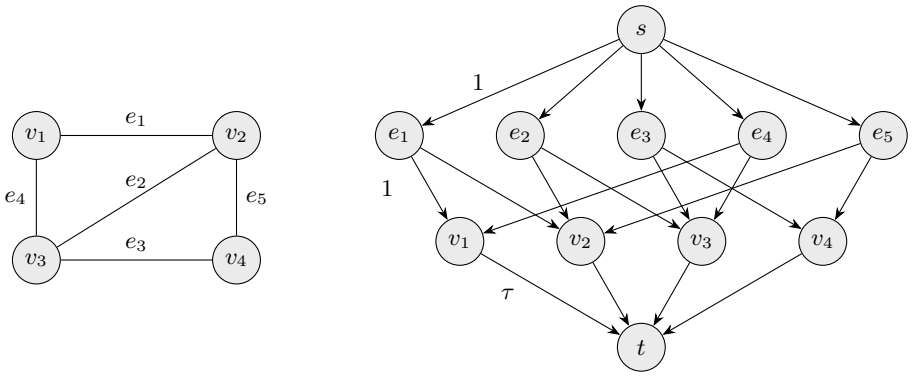

图 1 将一个 τ-BDED实例（左图）转换为流实例（右图）的示例。流网络中同一层的所有弧，其容量均与最左侧弧所示相同。

考虑所构造网络 D 中的一个最大 s-t-流 f 。由于所有容量都是整数，因此 f 是整数型 [1, 21]。不难看出，val(f) $= m_G$（也就是说，所有离开 s 的弧都承载值为 1 的流）当且仅当 G 中存在一个满足 $\Delta^-_\phi \leq \tau$ 的分数定向 ϕ； $E(G) \times V(G)$ 中弧上的流对应于 ϕ。然而，还成立一个更强的结论：对于 $\mathcal{I}$ ，存在大小为 $|F| = k$ 的解 $F \subseteq E(G)$，当且仅当 f 的值为 $m_G - k$ 。 f 与 F 之间的对应关系，从与 s 相接的弧上可以清楚地看出：对于一条边 $e \in E(G)$， $f(s, e)$ $= 0$ 当且仅当 $e \in F$。我们将这一结论的形式化证明留到下一节（见引理 4.1 ），届时我们会给出一种向更一般的流变体的变换，该变体也涵盖非整数型目标密度。

注意，流网络 D 的规模为 $O(m_G + n_G)$ $= O(m_G)$，且可在线性时间内构造。此外， τ 的最大合理值为 $\binom{n_G}{2}$。利用已有的、适用于多项式有界整数容量的快速最大流算法 [7], ，我们得到以下结果：

▶ **定理 3.1.** 存在一种随机化算法，可在 $O(m^{1+o(1)})$时间内求解目标密度为 $\tau \in \mathbb{N}$ 的 τ-有界密度边删除问题。

流构造的另一个推论是，如果 $\tau \in$ N，那么存在一种实际上为整数型的分数定向。也就是说，每条边都被分配给其两个端点之一。Chandrasekaran 等人 [5]此前已指出这一点。

注意，对于 $\tau = 1/2$ ， D 中的容量不再是整数型。因此，无法保证存在整数最大流。不过， τ-BDED 对于 $\tau = 1/2$ 对应于最大基数匹配。因此，对于我们的特定网络 D ，存在一种多项式时间算法，可以在所有从 s 出发的弧上流量均为整数的流中，计算出一个最大流。请注意，目前尚不知晓从最大基数匹配到流的线性时间归约。因此，针对具有半整数容量的 τ-BDED 的多项式时间算法，不能依赖上述这种简单归约。下一节将介绍这个问题的解决方案。

4 算法结果

本节中，我们针对具有特定目标密度的 τ-BDED 给出了高效算法。具体而言，对于整数型和半整数型目标密度，我们给出了多项式时间算法；对于任意常数目标密度，我们则证明了该问题关于输入图的树宽具有固定参数可处理性

。我们的方法基于第3节的总体思路，即将 τ-BDED 归约为某种流问题。具体而言，我们引入了二层一般转运问题（2GT）。简单来说，这是一个定义在图上的流问题，其中有多个源点和汇顶点，每条边都直接连接一个源点和一个汇顶点，且每个顶点都有一组允许的超额值。随后，我们将该问题转化为一般因子问题。借助一般因子的已知结果，我们最终推导出 2GT 的算法结果；这些结果一方面本身具有研究价值，另一方面也可进一步转化为 τ-BDED 的结果。

4.1 转运问题表述

为了更一般地描述 τ-BDED，我们转而讨论转运问题，也就是一种流问题的变体，其中有多个源点和汇点，它们分别提供或消耗指定数量的流 [21]。考虑有向图 D。对于函数 b: $V(D) \to \mathbb{Q}$，一个 b-转运是满足对所有顶点 $v \in V(D)$ 均有 $f_\Sigma(v) = b(v)$ 的流 f。注意，若要存在 b-转运，则必须满足 $\sum_{v \in V} b(v) = 0$。沿用一般因子中的记号，我们为每个顶点指定一个允许的超额值集合族 $\mathcal{B} = \{B_v \subseteq \mathbb{Q} \mid v \in V(D)\}$。于是，$\mathcal{B}$-转运是一个满足对所有 $v \in V(D)$ 均有 $f_\Sigma(v) \in B_v$ 的（流）函数 f: $A(D) \to \mathbb{Q}_0^+$。注意，如果还给定弧容量 $\mathrm{cap}: A(D) \to \mathbb{Q}_0^+$，则还需满足通常的附加要求：对每条弧 $a \in A(D)$，$f(a) \leq \mathrm{cap}(a)$。如果实例 $(D, \mathrm{cap}, \mathcal{B})$ 满足 $\mathrm{cap}: A(D) \to \mathbb{N}$ 且对所有 $v \in V(D)$ 均有 $B_v \subseteq \mathbb{Z}$，则称其为整数型实例。如果底层无向图是由部分 U 和 W 构成的二分图，且所有弧都从 U 指向 W，即 $A(D) \subseteq U \times W$，则称有向图 D 为 D-层的。对于一个顶点划分为 U 和 W、流为 f 的二层网络 D，我们定义其值 $\mathrm{val}(f) = \sum_{u \in U} f_\Sigma(u) = \sum_{w \in W} -f_\Sigma(w)$。注意，在二层转运实例中，我们可以假设 U 中的顶点是源点（超额量非负），而 W 中的顶点是汇点（超额量非正）。基于这些概念，我们可以定义转运问题：

> 二层一般转运问题（2GT）**输入：** 一个二层的网络 D，其部分为 U 和 W，弧容量为 $\mathrm{cap}: A(D) \to \mathbb{Q}_0^+$，以及一个集合族 $\mathcal{B} = \{B_v \subseteq \mathbb{Q}_0^+ \mid v \in U\} \cup \{B_v \subseteq \mathbb{Q}_0^- \mid v \in W\}$。**任务：** 求一个 $\mathcal{B}$-转运 f，使其位于 D 中，且 $\mathrm{val}(f)$ 最大。

在本文余下部分，我们假设 D 的底层无向图是连通的，因此有 $n_D - 1 \leq m_D$ 和 $O(m_D + n_D) = O(m_D)$。显然，若情况并非如此，我们可以分别求解每个连通分量，从而得到一个解；孤立顶点则可忽略。为帮助理解该问题，我们将 τ-BDED 的一个实例 $\mathcal{I} = (G, k)$ 建模为一个 2GT 实例；我们用 $T(\mathcal{I})$ 表示这一线性时间变换：

- 网络 D 的顶点集为 $V(D) := V(G) \cup E(G)$。对于每条边 $e = \{u, v\} \in E(G)$，在 D中添加容量为 1 的弧 (e, u) 和 (e, v)。对于每个 $e \in E(G)$，设 $B_e := \{0, 1\}$，也就是说，允许离开 e 的流量只能是 0 或 1。对于每个 $v \in V(G)$，设 $B_v := [-\tau, 0]$，也就是说，允许最多 τ 的流量流入 v。

注意，在上述构造中，顶点 $v \in V(G)$ 被赋予了一个无限大的允许超额值集合 $[-\tau, 0]$。因此，以下我们假设集合 B_v 采用合理的编码方式（例如，此处用数字 $-\tau$ 和 0 对区间进行编码）。

不难验证该归约的正确性：

▶ **引理 4.1.** 设 $I = (G, k)$ 是一个 *τ-BDED* 实例，令 $T(I) = (D, \text{容量}, \mathcal{B})$ 为构造出的 *2GT* 实例。那么，当且仅当存在边集 $F \subseteq E$, $|F| \leq k$，满足 $\rho^*(G - F) \leq \tau$时，D 中存在一个值为 $\mathrm{val}(f) \geq m_G - k$ 的 *$\mathcal{B}$*-转运 f。

证明。“⇒”：假设 f 是 (D, cap, B) 的一个 B-转运，且 $\mathrm{val}(f) \geq m_G - k$。我们将 $F \subseteq E(G)$ 定义为这样一组边：对应顶点在 D中没有流经过这些边发送，即 $F := \{e \in E(G) \mid f_\Sigma(e) = 0\}$。由于对于所有 $e \in E(G)$， $f_\Sigma(e) \in B_e = \{0, 1\}$，且 $\mathrm{val}(f) \geq m_G - k$，因此可得 $|F| \leq k$。

利用流 f，我们现在为 $G - F$构造一个分数定向 ϕ，使其满足 $\Delta^-_\phi \leq \tau$。由引理 2.1 即可得到结论。对于任意边 $e = \{u, v\} \in E(G) \setminus F$，考虑 $A(D)$ 中的弧 (e, u) 和 (e, v)。令 $\phi(e)^u := f(e, u)$，以及 $\phi(e)^v := f(e, v)$。由于 $f_\Sigma(e) = 1$，有 $\phi(e)^u + \phi(e)^v = 1$。对于任意顶点 $v \in V(G)$，有 $\deg^-_\phi(v) \leq \tau$，因为根据超额量约束 $B_v = [-\tau, 0]$， $f_\Sigma(v) \geq -\tau$。

“⇐”：现在，设 $F \subseteq E(G)$, $|F| \leq k$，且满足 $\rho^*(G - F) \leq \tau$。根据引理 2.2，存在一个定义在 $G - F$ 上的分数定向 ϕ，使其满足 $\Delta^-_\phi \leq \tau$。我们构造一个 B-转运 f，使得 $\mathrm{val}(f) \geq m_G - k$，其来源为 ϕ：对于每个 $e = \{u, v\} \in E(G) \setminus F$，令流 $f(e, u) := \phi(e)^u$, 以及 $f(e, v) := \phi(e)^v$；对于每个 $e = \{u, v\} \in F$，令 $f(e, u) = f(e, v) := 0$。考虑 $V(D)$ 中代表 $E(G)$ 的边的顶点。上述赋值确保对于任意顶点 $e \in E(G) \setminus F$， $f_\Sigma(e) = 1$；并且对于任意顶点 $e \in F$， $f_\Sigma(e) = 0$。此外，由于 $\Delta^-_\phi \leq \tau$，可保证 $f_\Sigma(v) \in [-\tau, 0]$。最后，我们有 $\mathrm{val}(f) = \sum_{e \in E \setminus F} 1 = m_G - |F| \geq m_G - k$。◀

4.2 通过一般因子求解二层一般转运

现在我们考虑如何使用一般因子求解 2GT。一个重要步骤是将 2GT 实例中顶点的超额约束限制为整数值。为此，我们首先考察 2GT 产生整数解的条件，也就是说，所得到的解中分配给任意边的流都是整数型的。

▶ **引理 4.2**。令 $(D$、容量：$A(D) \to \mathbb{N}$、$B)$ 为一个 *2GT* 实例，其中有 $A(D) \subseteq U \times W$。此外，对于每个 $v \in V(D)$，令 $B_v \subseteq \mathbb{Z}$ 或 $B_v = [c_v, d_v]$，其中 c_v、$d_v \in \mathbb{Z}$ 满足 $c_v \leq d_v$。如果$(D$、容量、$B)$ 具有一个 *B*-转运，则它能达到一个整数最大 *B*-转运。

证明。其思路是构造一个流实例，为每条弧上的流设置下界和上界，然后利用已知的整数性性质，最后将流转移回我们的 2GT实例。令 f 为 $\mathcal{B}$-转运 $(D$、容量、$\mathcal{B})$ 的一个最大值（如果存在可行转运，则该值必然存在），并考虑流实例$\mathcal{I}'$，其中我们取网络 D，并加入一个源点 s、一个汇点 t 以及以下弧，并为分配给这些弧的流设置下界和上界（用区间表示）：

- 对于每条弧 $a \in A(D)$，我们将允许流量设为 $[0,\mathrm{cap}(a)]$。对于每个满足 $f_\Sigma(u) > 0$ 的 $u \in U$，我们添加弧 (s, u)，并区分两种情况。如果 $B_u = [c_u, d_u]$，则将允许流量设为 $[c_u, d_u]$。否则，将允许流量设为 $[f_\Sigma(u)\ f_\Sigma(u)]$。对于每个满足 $f_\Sigma(w) < 0$ 的 $w \in W$，我们添加弧 (w, t)，并区分两种情况。如果 $B_w = [c_w, d_w]$，则将允许流量设为 $[-d_w, -c_w]$；否则设为 $[-f_\Sigma(w)\ -f_\Sigma(w)]$。

现在我们证明，构造的实例存在一个可行流 f'，进而可推出 $\mathcal{I}'$ 存在一个整数最大流（见 [21,推论 11.2e]）。设 a 是我们构造的实例中的某条弧。我们定义 f' 如下：

$$f'(a) := \begin{cases} f_\Sigma(u) & \text{if } a = (s, u) \text{ for some } u \in U \\ f(a) & \text{if } a \in A(D) \\ -f_\Sigma(w) & \text{if } a = (w, t) \text{ for some } w \in W. \end{cases}$$

注意，val(f) =val(f')，因为这两个流都从 U 向 W 输送相同数量的流。 f' 的可行性直接由我们的构造以及 f 是一个$\mathcal{B}$-转运这一事实得出。现在，设 f'' 是 $\mathcal{I}'$ 的一个整数最大流。我们定义一个整数$\mathcal{B}$-转运 f^*，令 $f^*(u,w) := f''(u,w)$，对所有 $(u,w) \in A(D)$ 均成立。

首先，我们证明 f^* 确实是一个 B-转运。为此，注意对于每个 $u \in U$，都有 $f^*_\Sigma(u) = f''(s, u)$。我们区分两种情况。若 $B_u \subseteq$Z，则 (s,u) 上允许的流恰好为 $f_\Sigma(u)$，因此 $f''(s,u) = f_\Sigma(u) \in B_u$。否则，$(s,u)$ 上允许的流为 $[c_u, d_u]$，这直接意味着 $f''(s,u) \in [c_u, d_u] = B_u$。对于所有顶点 $w \in W$，都有 $f^*_\Sigma(w) = -f''(w,t)$；根据上述类似论证，可得 $-f''(w,t) \in B_w$。

还需证明 f^* 确实是一个最大流。回想一下， f 是 (D，cap，$\mathcal{B}$) 的最大流，而 f' 满足 val(f') =val(f)，是 $\mathcal{I}'$ 的一个可行解。此外， f'' 是 $\mathcal{I}'$ 的一个整数最大流，即 val(f') ≤ val(f'')。最后，由于 val(f^*) = val(f'')，我们有 val(f) =val(f') ≤val(f'') =val(f^*)。◀

利用上述引理，我们现在观察到，任何具有整数最大转运的 2GT 实例都可以限制为整数容量和整数超额值。

▶ **观察 4.3**。 如果 *2GT* 实例 (D,cap, B) 具有整数最大 *B*-转运，则它等价于 (D,cap′, B')，其中 $B' := \{B_v \cap \mathbb{Z} \mid B_v \in B\}$，且对每条弧 $a \in A(D)$，$\mathrm{cap}'(a) := \lfloor \mathrm{cap}(a) \rfloor$。

利用这一观察，我们现在可以描述如何将整数型 2GT 实例归约为一般因子。这将使我们之后能够利用一般因子的已知算法来求解 2GT 实例。

▶ **引理 4.4**。 设 (D, 容量： $A(D) \to \mathbb{N}$, $B = \{B_v \subseteq \mathbb{Z} \mid v \in V(D)\}$) 是一个整数型 *2GT* 实例，其中所有容量均以多项式方式受限于 D 的规模。则可以在多项式时间内构造一个一般因子实例 (G, B')，并满足以下性质：

(i) (D, *cap*, *B*) 存在值为 p 的整数型 *B*-转运，当且仅当 (G, B') 存在大小为 $2p$ 的因子。 *(ii)* 给定 D 的底层无向图的宽度为 *tw* 的树分解，我们可以在多项式时间内计算出 G 的宽度为 *max{2, tw}* 的树分解。*(iii)* B' 的最大间隙为 *max{1,* γ*}*，其中 γ 是 *B* 的最大间隙。

证明。设 (D, cap, B $= \{B_v \subseteq$ Z $\mid v \in V(D)\}$) 是给定的 2GT 实例，且满足 $A(D) \subseteq U \times W$。现在，考虑将每条弧 (u,w) 替换为 cap(u,w) 条连接 u 和 w的无向平行边后得到的多重图。此外，令 B′ := {abs(B_v) $\mid B_v \in$ B}，其中 abs(B_v) := {$|x| \mid x \in B_v$}。通过细分每条边并为每个新创建的顶点添加度约束 {0, 2}，即可将该多重图转化为简单图。我们用 H 表示新顶点集合；如有必要，将为 u 和 w之间第 i^{th} 条平行边引入的顶点称为 h^i_{uw}。我们将得到的图称为 G，构造出的一般因子实例为 (G, B′)。接下来证明性质 (i)。

“⇒”：设 f是 (D， cap、$\mathcal{B}$) 的一个整数型 $\mathcal{B}$-转运。我们证明，对于实例 (G、$\mathcal{B}'$)，存在一个一般因子 $F \subseteq E(G)$，其大小为 $|F| = 2$val(f)。直观地说，如果弧 (u， w) 上的流值为 $f(u,\ w)$，那么我们就从 G向 F添加 $2f(u,\ w)$ 条边，使它们对应于边 $\{u,\ w\}$ 的 $f(u,\ w)$ 个副本。形式化地，我们令

$$F := \bigcup_{(uw) \in A(D)} \bigcup_{i=1}^{f(u,w)} \left\{ \{u, h^i_{uw}\}, \{h^i_{uw}, w\} \right\}.$$

由于从 U到 W的每一单位流都计入 val(f)，因此可直接推出 $|F| = 2\,\text{val}(f)$。下面只需证明 F满足度约束 B′，也就是说，对于每个 $v \in V(G)$，都有 $\deg_{(V(G),\,F)}(v) \in B_v$。回忆一下，对于 $h \in H$，我们有 $B_h = \{0, 2\}$。根据构造，我们要么不添加边，要么添加两条与 h关联的边，并且因此有 $\deg_{(V(G),\,F)}(h) \in B_h$。对于 $v \in U \cup W$，注意到 $(V(G), F)$ 中的度恰好等于 $f_\Sigma(v)$ 的绝对值。结合 $f_\Sigma(v) \in B_v$，可得 $\deg_{(V(G),\,F)}(v) \in \text{abs}(B_v) \in \text{B}'$。

“⇐”：现在假设 $F \subseteq E(G)$ 是一个 B′-因子。我们证明存在一个值满足 $= \binom{|F|}{2}$ 的 B-转运 f，即 val(f)。设 (u, w) 是 D 中的一条弧。根据构造，如果对某个 $h^i_{uw} \in H$ 有 $\{u, h^i_{uw}\} \in F$，那么也有 $\{h^i_{uw}, w\} \in F$，因为 $B_{h^i_{uw}} = \{0, 2\}$。现在，我们定义流 f，令 $f(u, w)$ 等于在 $(V(G), F)$ 中同时与 u 和 w 连通的、来自 H 的顶点数。该流是整数可行流，因为对于每条弧 $(u, w) \in A(D)$，根据构造，u和 w 在 G 中至多有 cap(u, w) 个公共邻居。此外，对于每个 $u \in U$，有 $f_\Sigma(u) = \deg_{(V(G),\,F)}(u) \in \text{abs}(B_u) = B_u$；对于每个 $w \in W$，有 $f_\Sigma(w) = -\deg_{(V(G),\,F)}(w) \in \{-x \mid x \in \text{abs}(B_w)\} = B_w$。由于 U 与 H 之间以及 H 与 W 之间恰有 $\binom{|F|}{2}$ 条边，因此可得 val(f) $= \binom{|F|}{2}$。 —

剩下的就是证明性质 (ii) 和 (iii)。

(ii)：设 $(\mathcal{T}, (X_i)_{i \in V(\mathcal{T})})$ 是 D 的底层无向图的一个宽度为 tw 的树分解。对于每条弧 $(u, w) \in A(D)$，存在一个袋 X_i，使得 $\{u, w\} \subseteq X_i$。对于 G，我们通过为每个 $j \in [\text{cap}(u, w)]$ 向 X_i 添加一个袋 $\{u, w, h^j_{uw}\}$，得到一个宽度为 $\max\{2, \text{tw}\}$ 的树分解。

(iii)：注意，对于任意顶点 $h \in H$，集合 B_h 的间隙恰好为 1。对于 $v \in U \cup W$，集合 $\mathcal{B}'$ 包含集合 abs(B_v)，其间隙与 B_v 相同，因为 $B_v \subseteq \mathbb{Q}_0^+$ 或 $B_v \subseteq \mathbb{Q}_0^-$。◀

总而言之，我们已经看到，允许流值处于端点为整数的区间内的 2GT 实例可以转化为整数实例，而整数型 2GT 实例可以转化为等价的一般因子实例。对于非整数 2GT 实例，向一般因子的归约行不通。我们稍后会用到一种常见技巧：将容量和超额约束按某个因子缩放，使其成为整数。显然，这种缩放会影响总体流值。

▶ **引理 4.5**。 设 $(D, \text{容量}, B)$ 为一个 *2GT* 实例，$q \in \mathbb{Q}_0^+$以及 $(D, \text{容量}', B')$ 为通过将 $(D, \text{容量}, B)$ 中的所有超额约束和容量乘以 q 所得的实例。那么，当且仅当 $(D, \text{容量}', B')$ 具有最大 B'-转运值 pq 时，$(D, \text{容量}, B)$ 具有最大 B-转运值 p。

证明。 显然，由于所有容量和超额值都乘以了 q，因此可知：f 是最大 $\mathcal{B}$-转运，当且仅当 $f_\prime$与 $f_\prime(u, w) := qf(u, w)$ 对所有 $(u, w) \in A(D)$ 都是最大 $\mathcal{B}'$- 转运。◀

我们将 $q\mathcal{B}$ 记作 $\mathcal{B}'$，以表示 $\mathcal{B}'$ 是通过乘以因子 q 从$\mathcal{B}$ 得到的。

4.3 算法推论

二层一般转运。在讨论了如何将一个 2GT 实例转化为一般因子实例之后，我们现在来考察这对 2GT 问题的算法影响。我们得到三个算法结果，如下述定理所述。

▶ **定理 4.6**。设$(D$, 容量: $A(D) \to \mathbb{N}, B)$ 是一个 *2GT* 实例。
(i) 若对每个顶点 v， $B_v = [a_v, b_v] \cap Z$ $a_v \leq 0 \leq b_v$，且超额约束和容量均以 D 的规模为界，那么可以在随机化 $O(m^{1+o(1)})$时间内计算出一个最大 *B*-转运。*(ii)* 若对每个顶点 v， $B_v \subseteq Z$ 的间隙至多为一，且容量以多项式为界，那么可以在多项式时间内计算出一个最大 *B*-转运，或输出不存在可行流。*(iii)* 假设给定了 D 底层无向图的一个宽度为 *tw* 的树分解。此外，假设对每个顶点 v， $B_v \subseteq Z$，且容量以多项式为界。令 $M := \max_{v \in V(D)} \max\{|x| \mid x \in B_v\}$。那么，可以在 $(M+1)^{\mathrm{tw}+1} n^{O(1)}$ 时间内计算出一个最大 *B*-转运，或输出不存在可行流。

证明。 我们分别证明这三个陈述。
(i)：我们给出一个到最大流的线性时间归约。如果边容量为整数且有多项式界，则可以在随机化 $m^{1+o(1)}$ 时间 [7]内计算该实例的一个（整数型）最大流。现在考虑如下最大流实例：取网络 D，添加一个源点 s、一个汇点 t 以及以下弧：

- 对于每个 $u \in U$，我们添加弧 (s, u)，其容量为 b_u。
- 对于每个 $w \in W$，我们添加弧 (w, t)，其容量为 $-a_w$。

该网络可以在 $O(m_D + n_D) = O(m_D)$ 时间内构造完成。现在我们计算该网络的一个最大流 f，并通过对所有 (u, w) 设置 $f^*(u, w) := f(u, w)$，得到一个 $\mathcal{B}$-转运。注意， f^* 是可行的，因为对于所有 $u \in U$， $f^*_\Sigma(u) = f^+_\Sigma(u) \in [0, b_u]$；并且对于所有 $w \in W$， $f^*_\Sigma(w) = -f^-_\Sigma(w) \in [a_w, 0]$。此外， f^* 是一个最大流，因为 $\mathrm{val}(f^*) = \mathrm{val}(f)$，且转运实例中的任意流都可以直接转换为值相同的 s-t-流 f'，如下所示：

$$f'(a) := \begin{cases} f^*_\Sigma(u) & \text{if } a = (s, u) \text{ for some } u \in U \\ f^*(a) & \text{if } a \in A(D) \\ -f^*_\Sigma(w) & \text{if } a = (w, t) \text{ for some } w \in W. \end{cases}$$

(ii)：我们应用引理 4.4，得到一个一般因子实例 $(G, \mathcal{B}')$；根据引理 4.4 (iii)，其间隙恰为一。利用 Dudycz 和 Paluch [10] 的算法，我们现在可以在多项式时间内求出 G 的最大 $\mathcal{B}'$-因子 F。具体而言，引理 4.4 给出了值为 $\frac{|F|}{2}$ 的$\mathcal{B}$-转运，并说明这确实是最大值。另一方面，如果 $(G, \mathcal{B}')$ 无解，那么 $(D, \mathrm{cap}, \mathcal{B})$ 也不存在可行流。

(iii)：我们再次应用引理 4.4，得到一个一般因子实例 $(G, \mathcal{B}')$。根据引理 4.4 (ii)，我们得到 G 的一个宽度至多为 $\mathrm{tw}+1$ 的树分解；并且根据一般因子实例的构造，我们知道 $\max\{\max B' \mid B' \in \mathcal{B}'\} \leq M$（注意，我们可以假设 $M \geq 2$，否则就属于情形 (ii)，而该情形是多项式时间可解的）。因此，我们可以应用 Marx 等人 [17], 的结果，该结果表明，可以在 $(M+1)^{\mathrm{tw}+1} n^{O(1)}$ 时间内计算出 G 的最大$\mathcal{B}'$-因子。如果 $(G, \mathcal{B}')$ 无解，那么 $(D, \mathrm{cap}, \mathcal{B})$ 也不存在可行流。◀

τ-有界密度边删除。在第 4.1 节中，我们描述了如何将 τ-BDED 归约为 2GT。因此，定理 4.6 中关于 2GT 的结果可直接转化为 τ-BDED 的结果，并推出定理 1.1 和 1.2 中的算法结果：

12 密度至关重要： τ有界密度边删除的复杂性二分

▶ 定理 *4.7*。设 $I = (G, k)$ 为一个 τ-有界密度边删除实例。*(i)* 若 $\tau \in N$，则可在随机化 $O(m^{1+o(1)})$ 时间内判定 I。*(ii)* 若 $2\tau \in N$，则可在多项式时间内判定 I。*(iii)* 若 $\tau = \frac{a}{b}$ 对某个固定的 $a, b \in N$，且给出了 G 的一个宽度为 tw 的树分解，则可在 $(\max\{a, b\} + 1)^{\mathrm{tw}+1} n^{O(1)}$ 时间内判定 I。

证明。回顾第 4.1 节中从 D 构造 2GT 实例 $T(\mathrm{I}) = (D, \mathrm{cap}, \mathrm{B})$ 的过程；该实例存在值至少为 $m_G - k$ 的最大 B-转运，当且仅当 (G, k, τ) 是一个是实例（见引理 4.1）。D 中弧的容量均为 1，超额约束的形式为 $\{0, 1\}$ 和 $[-\tau, 0]$。由于 τ 关于 n_D 有多项式上界，显然所有容量和超额约束也都有多项式上界。按照引理 4.5 所述，将实例按常数缩放时，这一点同样成立。利用该构造，我们可以推出以下三个结论。

(i)：首先注意，$T(\mathcal{I})$ 可以在 $O(m_G + n_G) = O(m_G)$ 时间内构造出来。超额约束的形式为 $\{0, 1\}$ 和 $[-\tau, 0]$。由于 $\tau \in \mathbb{N}$，且存在一个可行解（例如沿所有弧发送值为 0 的流），我们可以应用引理 4.2，它保证存在一个整数型最大 $\mathcal{B}$-转运。随后，观察 4.3 告诉我们，可以将所有超额约束限制为与 Z 的交集。这样便可应用定理 4.6 (i)，从而得出该算法。

(ii)：根据引理 4.5，我们可以将 2GT 实例 $T(\mathcal{I})$ 缩放两倍，得到的超额约束形式为 $\{0, 2\}$ 和 $[-2\tau, 0]$。由于 2τ 是整数且存在一个可行解，我们可以再次应用引理 4.2，从而得知存在一个整数最大流。同样，观察 4.3 告诉我们，可以将所有超额约束限制为与 Z 的交集。注意，此时超额约束的形式为 $\{0, 2\}$ 和 $[-2\tau, 0] \cap \mathbb{Z}$。特别是，它们的间隙至多为一，因此所得的转运实例满足定理 4.6 (ii) 的条件。由于我们将 $T(\mathcal{I})$ 缩放了两倍，最大 $2\mathcal{B}$-转运值至少为 $2(m_G - k)$，当且仅当 (G, k, τ) 是一个是实例。

(iii)：根据引理 4.5，我们可以将 2GT 实例 $T(\mathcal{I})$ 按因子 b 缩放，得到的超额约束形式为 $\{0, b\}$ 和 $[-b\tau, 0] = [-a, 0]$。当且仅当原实例的最大流至少为 $m_G - k$时，这个缩放后的版本才存在值至少为 $b(m_G - k)$ 的最大 $b\mathcal{B}$-转运。与上述论证相同，我们可以将超额约束限制为它们与 Z 的交集。此外，我们很容易为 D 的底层无向图得到一个宽度为 tw 的树分解，因为该图可以通过细分 G [9]的所有边得到。最后，注意到现在我们可以应用定理 4.6 (iii)，在 $(\max\{a, b\} + 1)^{\mathrm{tw}+1} n^{O(1)}$时间内计算最大转运。当且仅当其值至少为 $b(m_G - k)$时，我们返回 yes。◀

5 NP 困难性结果

本节通过证明所有常数目标密度 $\tau \in \{q \in \mathbb{Q} \mid q \geq 2/3 \wedge q \notin \mathbb{H}\}$ 对应的问题都是 NP难，从而补充了第 4 节中的算法研究结果，并完成定理 1.1 的证明。我们分两步证明这一结果。首先，我们证明任意固定的目标密度 $\tau \in [2/3, 1)$ 都会导致 NP 困难性。随后，我们证明对于任意常数目标密度 $\tau \in \{q \in \mathbb{Q} \mid q > 1 \wedge q \notin \mathbb{H}\}$，$\tau$-BDED 都是 NP难。

情形 $\tau < 1$。注意，对于 $\tau < 1$，任何解图（通过移除至多 k 条边得到的图）都不可能包含环，因为环的密度为 1。因此，任何解图都是森林。森林的最大密度由其中最大树的大小决定，因为一棵

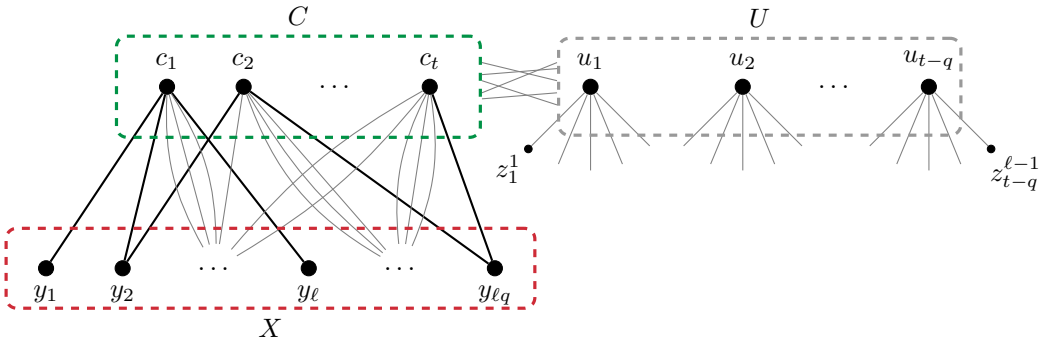

图2 定理5.1中归约的示意图。给定一个 XℓC 实例，其全集为 $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_{\ell q}\}$，集合族为 $C = \{C_1, C_2, \ldots, C_t\}$，我们为每个元素 $x_i \in X$ 添加一个顶点 y_i，并为每个集合 $C_j \in C$ 添加一个顶点 c_j。每当 $x_i \in C_j$ 时，我们就添加一条边 $\{y_i, c_j\}$。此外，我们还添加具有 $\ell - 1$ 个叶节点的虚拟星形图，并将其中心顶点与表示 C 的顶点完全连接。任何 τ-BDED 解都会留下 ℓ 个叶节点的 t 个星形图，并且（绿色）星形图中心顶点与 XℓC 解中选出的集合一一对应。

含有 n 个节点的树有 $n-1$ 条边，因此其密度为 $1 - 1/n$；该密度会随着 n 值的增大而单调递增。因此，任何目标密度 $\tau < 1$ 都可以替换为最大的值 $\tau\prime \leq \tau$，其中 $\tau' = \ell/\ell+1$ 对某个 $\ell \in \mathbb{N}$ 成立。对于 $\ell = 0$，我们必须移除所有边，因此 τ-BDED 问题变得平凡。对于 $\ell = 1$，该问题等价于寻找一个最小边集，使剩余图仅由匹配构成。我们可以通过计算一个最大匹配，并返回所有不属于该匹配的边，在多项式时间内解决此问题。对于 $\ell \in \{2,3\}$，Bazgan 等人 [3]证明了其 NP 困难性。我们将他们针对 $\ell = 3$ 的困难性结果推广到任意 ℓ。证明采用从 X-集合精确覆盖（XℓC）问题出发的归约，示意见图2。

▶ **定理5.1**。 *τ-BDED 对任何满足 $\ell \geq 3$ 的 $\tau = \ell/\ell+1$ 都是 NP难的。*

证明。 我们将问题归约自 精确覆盖 ℓ-集合问题；该问题在 $\ell \geq 3$ [13]时是 NP难的。其定义如下。

> 精确覆盖 ℓ-集合（XℓC）**输入：** 一个集合 X，其中有 $|X| = \ell q$，以及一个由 ℓ 元子集组成的集合族 C，这些子集取自 X。**问题：** 是否存在 C 的一个子集族 C'，使得 X 中的每个元素恰好在 C' 的一个集合中出现?

该证明是对 $\tau = 3/4$ [3]的难性证明的直接改编；图2给出了示意图。设 (X, C) 是 XℓC 的一个实例，其中 X={$x_1, x_2, \ldots, x_{\ell q}$, 且 C={$C_1, C_2, \ldots, C_t$。若 $t < q$，则显然可得到一个否实例，因为并非所有元素都出现在 C 的某个集合中。因此，我们假设 $t \geq q$，并按如下方式构造图 G：对于每个元素 $x_i \in X$，我们先加入一个顶点 y_i；对于每个集合 $C_j \in C$，加入一个顶点 c_j。每当 $x_i \in C_j$ 时，就加入一条边 $\{y_i, c_j\}$。随后，我们向 G 中加入 $t - q$ 个星形图 S_1, $S_2, \ldots, S_{t-q}$，每个星形图有 $\ell - 1$ 个叶节点。形式化地，对于每个 $i \in [t-q]$，我们加入一个顶点 u_i；对于每个 $i \in [t-q]$和每个 $j \in [\ell - 1]$，我们加入一个顶点 z_i^j，并加入边 $\{u_i, z_i^j\}$。接着，加入所有满足 $j \in [t]$ 且 $i \in [t-q]$的边 $\{c_j, u_i\}$。至此，图 G 的构造完成。设 m 为其中边的数量。为完成整个构造，我们令 $k := m - \ell t$。

由于构造可在多项式时间内完成，因此只需证明其正确性。为此，首先假设输入实例 (X, C) of XℓC 存在一个解 C'。注意到 $|C'| = q$。我们构造一个包含 ℓt 条边的集合 B，使得仅删除 B 中的边便可得到构造的 τ-BDED 实例的一个解。对于每个 $C_j \in C'$，加入

14 密度至关重要： τ有界密度边删除的复杂性二分

连接 c_j 与满足 $x_i \in C_j$ 的顶点 y_i 的 ℓ 条边。注意，这样的边恰好有 ℓq 条。此外，对于每个 $i \in [t-q]$ 和每个 $j \in [\ell-1]$，我们将边 $\{u_i, z_i^j\}$ 加入 B。最后，对于每个 $C_j \notin C'$，我们选取一个不同的顶点 u_i，并将 $\{u_i, c_j\}$ 加入 B。注意，$C \backslash C'$ 中恰有 $t-q$ 个集合，且有 u_i 个顶点。因此，B 包含这两组顶点之间的一个完美匹配。总而言之，B 的大小为 $\ell q + (\ell-1)(t-q) + (t-q) = \ell t$。注意，每个顶点 c_j 在由 B 诱导的图中都属于不同的连通分量。此外，每个这样的顶点都属于一棵还包含 ℓ 个顶点的树（该树要么是一个星形图 S_j，要么是一个 ℓ-顶点树）。因此，最大密度为 $\ell/\ell+1$，第一部分证明完毕。

反过来，假设存在一个至多包含 k 条边的集合 F，删除这些边后得到的图的最大密度至多为 $\tau = \ell/\ell+1$。注意，构造的图 G有 $(\ell+1)t$ 个顶点。此外，$G - F$ 至少有 $m - |F| \geq m - k = \ell t$ 条边。由于任意环的密度均为 1，$G - F$ 是森林；又由于含有 $\ell+2$ 个顶点的任意树都有 $\ell+1$ 条边，密度为 $\ell+1/\ell+2 > \ell/\ell+1$，因此 $G - F$ 中的每棵树至多包含 $\ell+1$ 个顶点。如果 $G - F$ 恰好包含 t 棵树，每棵树有 $\ell+1$ 个顶点和 ℓ 条边，那么 $G - F$ 包含 ℓt 条边，且 F 包含 $m - \ell t = k$ 条边。由于 G 是连通的（假设 C中的每个元素至少出现在一个集合中），增加 $G - F$中的树的数量，或减小 $G - F$中任意一棵树的大小，都会使 F的大小超过 k。因此，$G - F$恰好包含 t 棵树，且每棵树都包含 $\ell+1$ 个顶点和 ℓ 条边。这意味着，对于任意 $i \in [t-q]$ 和任意 $j \in [\ell-1]$，边 $\{u_i, z_i^j\}$ 都不属于 F。此外，每个顶点 u_j 在 $G - F$中恰好与 ℓ 个顶点相邻，因此，对于每个 $i \in [t-q]$，恰好有一条边 $\{u_i, c_j\}$ 不属于 F（且每个 i对应的索引 j 都是唯一的）。考虑剩余的 q 个顶点 c_j，它们没有与星形图 S_i相连。我们声称，对应的集合 C_j 构成原始 XℓC 实例的一个解。考虑任意顶点 y_i（对应于元素 $x_i \in X$）。根据构造，y_i 只与满足 $x_i \in C_j$ 的顶点 c_j相邻。由于 $G - F$中的每棵树恰好包含 $\ell+1$ 个顶点，且尚未分配的只有 q 个顶点 c_j和 ℓq 个顶点 y_i，因此，每个这样的未分配顶点 c_j 都必须分别与 ℓ 个顶点 y_i 相邻，而每个顶点 y_i 在 $G - F$中只与一个顶点 c_j 相邻。注意，这恰好对应于一个精确覆盖，由此证明得证。◀

情形 $\tau > 1$. </style}我们的目标是证明，对于任意满足 H 的常数，-BDED 都是 NP难 的。证明将通过对 -正则图上的顶点覆盖问题进行归约来完成，归约主要由两类构件组成：顶点构件 和边构件。从整体上看，顶点构件是密度为 τ 的平衡图。边构件的密度略低于 τ，但每个边构件还通过两条边连接到对应的两个顶点构件。将一个边构件与对应的两个顶点构件合并后，其密度略高于 τ（使得$(m-1/q)/n = \tau$）。其思路是，在顶点构件中删除一条边，就足以“修复”所有相邻的边构件。

顶点构件将基于以下引理。我们以更一般的形式陈述该引理，使其适用于解图包含环的情形。引理指出，在一个环中，我们总可以假设分数定向中至少有一条边被完全分配给其某个端点。其思路是沿着环移动分数定向，直到无法继续为止；此时，其中一条边的分数定向会被完全分配给一个端点。

▶**引理 5.2.** 设 G 是一个包含环 C 的图，且 ϕ 是 G的分数定向。那么，存在一个分数定向 ϕ'，使得对所有 $v \in V(G)$，均有$\deg^-_{\phi'}(v) = \deg^-_{\phi}(v)$，并且存在中的一条边{,}，满足(e) $^u = 1$；也就是说，分数定向 ϕ'将 e 完全分配给其某个端点。给定 G、C和 ϕ后，可以在线性时间内找到 ϕ'，所需时间与 G的大小成正比。

证明。设 $C = (v_1, \ldots, v_\ell, v_{\ell+1} = v_1)$。如果 C中已存在一条边$\{v_i, v_{i+1}\}$，满足 $\phi(v_i v_{i+1})^{v_i} = 1$ 或 $\phi(v_i v_{i+1})^{v_{i+1}} = 1$，则结论成立。否则，对每个 $i \in [\ell]$，令 $\varepsilon_i := \phi(v_i v_{i+1})^{v_i}$，其中 $\varepsilon := \min^{i \in [\ell]} \varepsilon_i$，并令 j 为满足 $\varepsilon = \varepsilon_j$的一个指标。通过对 G 中所有不属于某个 $i \in [\ell]$，ϕ'所对应的边$\{v_i, v_{i+1}\}$的边，令 $\phi'(e) = \phi(e)$，再令$v_i v_{i+1}$($^{v_{i+1}} := \phi(v_i v_{i+1})^{v_{i+1}} + \varepsilon$ 且 $\phi'(v_i v_{i+1})^{v_i} = \phi(v_i v_{i+1})^{v_i} - \varepsilon$，对所有 $i \in [\ell]$成立，我们便可由 ϕ 得到所需的分数定向 ϕ'。注意，根据 ε 的定义，这是可行的，且 $\phi'(v_j v_{j+1})^{v_{j+1}} = 1$。此外，对所有 $v \in V(G)$，有$\deg^-_{\phi'}(v) = \deg^-_\phi(v)$。给定 G、C和 ϕ后，显然可以在线性时间内确定 ϕ'，所需时间与 G 的大小成正比：环上的边至多检查两次，其他所有边至多检查一次。◀

对于边构件，基本思路是从一条路径开始，以规则间隔添加额外的边，从而构造一个近似平衡图，使其具有两种定向：除路径的两个端点外，所有顶点的入度均为 τ，一个端点的入度为 $\tau - 1$，另一个端点的入度为 $\tau - 1 + 1/q$。然后将路径的每个端点分别通过一条边连接到对应的顶点构件，即可确保三个构件中至少有一条边必须被删除。回想一下，我们希望编码这样的关系：若对应的顶点构件中有一条边被删除，则该顶点属于一个顶点覆盖。$1/q$ 的超额量足够小，因此，删除一条边所产生的可用容量可以分配给所有关联边构件。

▶ **引理5.3**。对于任意常数有理数 $\tau = \frac{p}{q} > 1$，其中 p 和 q 互素，可以在常数时间内构造一个含有两个特殊顶点 u 和 w 的图 W，使得存在两个分数定向 ϕ_1 和 ϕ_2，并满足以下性质：

(i) 对所有 $v \in V(W) \setminus \{u, w\}$，$\deg^-_{\phi_1}(v) = \deg^-_{\phi_2}(v) = \tau$；(ii) $\deg^-_{\phi_1}(u) = \deg^-_{\phi_2}(w) = \tau - 1 + \frac{1}{q}$；(iii) $\deg^-_{\phi_1}(w) = \deg^-_{\phi_2}(u) = \tau - 1$。

证明。令 $p = cq + r$，其中 c 和 r 为整数，且 $0 \le r < q$。注意，由于 p和 q 互素，因此 $r \ge 1$；又由于 $\tau > 1$，因此 $c \ge 1$。令 $p' := p - (c-1)q = q + r$，且 $\tau' := p'/q$。注意，$1 < \tau' < 2$，并且 p' 和 q 互素。我们分两个阶段构造图 W。首先，针对目标密度 τ' 构造图 $W\prime$，然后利用这一构造，针对目标密度 τ 构造图 W。

注意，若图 W' 有 n 个顶点，且满足分数定向的要求（目标密度为 $\tau\prime$），那么其中的边数 m 满足 $m = \tau' n - 2 + \frac{1}{q}$。这个数不一定是整数，但由于 p' 和 q 互素，我们可以选取 n，使得 $(p' \cdot n) \bmod q = q - 1$（例如，更多详情请参见 Burton [4]）。于是，$m = \tau' n - 2 + \frac{1}{q} = \frac{p'n + 1 - 2q}{q}$ 是整数。此外，对于任意正整数 a，我们都可以将 n 增加 aq，这会使 m 增加 ap'，因此 m 仍为整数。由于 $2q > p' > q$ 与 $1 < \tau' < 2$ 一样，这使我们能够选取一个正整数 $n \ge 4$，使得 m 也是正整数，且满足 $n + 1 \le m \le 2n - 3$。

为了构造一个具有 n 个顶点和 m 条边的 W'，我们从一条路径（$u = v_1$、.....、$v_n = w$）开始，并在逐步向构造中添加边的同时，确保所需的分数定向 ϕ'_1 存在。稍后我们将展示如何修改 ϕ'_1 以得到 ϕ'_2。首先，我们将边 $\{u, v_2\}$ 定向，使其向 u的定向值为 $\tau' - 1 + 1/q$，并使其定向值

[2] 首先使用扩展欧几里得算法得到一个整数 t，使得 $1 \equiv tp' \bmod q$。令 $n' = ((q-1)t) \bmod q$，则满足 $(n'p') \bmod q = ((q-1)tp') \bmod q = q - 1$。令 $m' = \frac{p'}{q} n' - 2 + \frac{1}{q}$。如果 $n' + 1 \le m'$（意味着$n' \ge 4$），则令 $n = n'$、$m = m'$；否则，逐步将 n'增加 q，直到条件成立。由于每次将 n' 增加 q 都会使 m' 增加 p'，且 $p' < q$，并且初始时 $n' < q$，因此该过程至多经过 q 步即可终止。

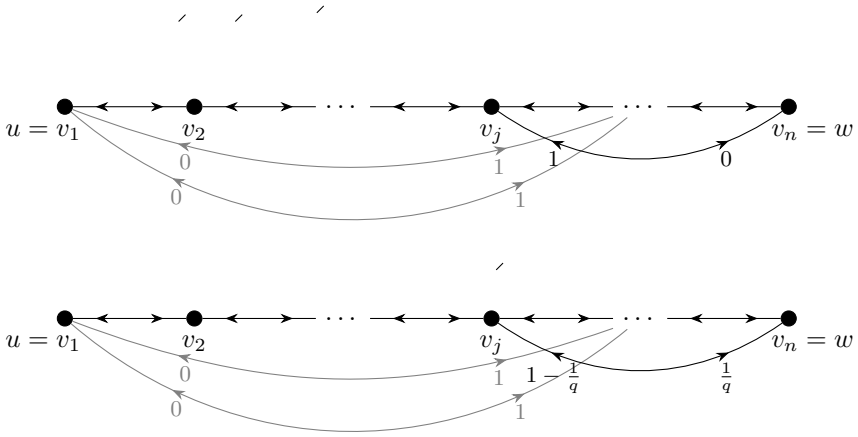

图3 引理5.3中所述边构件的示意图：上方为分数定向 ϕ_1，下方为 ϕ_2。顶点 $\{u = v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_n = w\}$ 构成一条路径，并向其添加边，以确保除 u 和 w 以外的所有顶点相对于 ϕ_1 的入度均为 τ'（这两个顶点的入度分别为 $\tau' - 1 + \frac{1}{q}$ 和 $\tau' - 1$）。顶点 v_j 是第一个需要额外添加边才能达到 τ' 的顶点，而 x 是它从 v_{j-1} 接收的分数定向量。为从 ϕ_1 得到 ϕ_2，将分数定向从 u“推”向 w，从而翻转它们的入度。

为 $1 - (\tau' - 1 + 1/q) = 2 - \frac{p'-1}{q}$ 到 v_2。这是可行的，因为 $1 \leq \tau' = \frac{p'}{q} < \frac{p'+1}{q} \leq 2$。现在从 $i = 2$ 开始，按递增的值依次对边 $\{v_i, v_{i+1}\}$ 进行定向，使得 v_i 从已定向的边获得的入度恰好为 τ'，直到达到这样一个点：即使赋予值 1 也不够。在后一种情况下，我们将边 $\{v_i, w\}$添加到图中，并将其完全定向至 v_i。然后像之前一样继续处理边 $\{v_i, v_{i+1}\}$；不过现在，每当值 1 不够时，我们就添加边 $\{u, v_i\}$，并将其完全定向至 v_i。图3展示了一个示例。

注意，由于 $m \geq n + 1$（我们接下来将证明所构造的图恰有 m 条边）且 $n - 1$ 条边属于初始路径 P，因此我们以这种方式至少添加两条边，所以尝试添加的边此前并不属于该路径（并且我们不会尝试向同一个顶点添加两条边，因为 $\tau' < 2$）。此外，由于 $m \leq 2n - 3$ 和 $n - 1$ 条边属于初始路径，我们最多只添加 $n - 2$ 条边，因此有足够的顶点来添加所需数量的边。接下来我们将证明，对所有 $2 \leq i \leq n - 1$ 执行上述操作后，该图恰有 m 条边，并且 ϕ'_1 满足引理陈述中的所有要求（目标密度为 τ'）。根据构造，u 相对于 ϕ'_1 的入度为 $\tau' - 1 + \frac{1}{q}$，而每个满足 $2 \leq i \leq n - 1$ 的顶点 v_i 的入度为 τ'。对所有顶点求和，入度之和为 $(n - 1)\tau' - 1 + \frac{1}{q}$。$w$ 的入度是介于 0 和 1 之间的某个值 t（只有边 $\{v_{n-1}, w\}$ 会给 w 分配正值）。由于入度之和等于边数，因此有 $(n - 1)\tau' - 1 + 1/q + t \in \mathbb{N}$。注意，对 $t = \tau' - 1$ 而言情况确实如此，因为此时 $(n - 1)\tau' - 1 + 1/q + t = n\tau' - 2 + 1/q = \frac{p'n+1}{q} - 2$，根据 n 的选取，这是一个整数。此外，$t = \tau' - 1$ 是唯一能使该等式成立的介于 0 和 1 之间的值，因为边数每增加或减少 1，t 也会相应增加或减少 1。因此，所构造图中的边数为 $n\tau' - 2 + 1/q = m$，且 $t = \tau' - 1$。于是，定向 ϕ'_1 满足引理陈述中的所有要求。

接下来还需证明分数定向 ϕ'_2 的存在性，并将构造调整为适用于大于 2 的目标密度。为证明前者，令 j 为添加边 $\{v_j, w\}$ 时的索引。注意，由于 $m \geq n$，该索引确实存在。直观地说，我们通过修改 ϕ'_1

，沿着路径（u，v_2，……，v_j，w），将定向值 $1/q$ 从 u 传递到 w。注意，根据构造，ϕ_1' 中的所有定向值都是 $1/q$ 的倍数。更形式化地，我们从 ϕ_1' 构造 ϕ_2'，并设（对所有 $i \in [2, j-1]$）

$$\phi_2'(uv_2)^u := \phi_1'(uv_2)^u - \frac{1}{q}, \qquad \phi_2'(uv_2)^{v_2} := \phi_1'(uv_2)^{v_2} + \frac{1}{q},$$
$$\phi_2'(v_iv_{i+1})^{v_i} := \phi_1'(v_iv_{i+1})^{v_i} - \frac{1}{q}, \qquad \phi_2'(v_iv_{i+1})^{v_{i+1}} := \phi_1'(v_iv_{i+1})^{v_{i+1}} + \frac{1}{q},$$
$$\phi_2'(v_jw)^{v_j} := \phi_1'(v_jw)^{v_j} - \frac{1}{q}, \text{ and} \qquad \phi_2'(v_jw)^{w} := \phi_1'(v_jw)^{w} + \frac{1}{q}.$$

注意，如果上述边中没有任何一条边将值 1 分配给“较晚的”顶点（即索引较大的顶点），那么上述修改是可行的，并且 ϕ_2' 也满足引理陈述中的所有要求。反设某条边 $\{v_i,v_{i'}\}$ 将值 1 分配给了较晚的顶点。令 $i < i'$，不妨设，并注意，根据构造，$i' \neq n$，因为边 $\{v_j, w\}$ 被完全分配给了 v_j，并且 $i \neq 1$ 为 $\tau' > 1$（因此 u 被分配了一个正值 $\tau' - 1 + 1/q > 1/q$）。因此，$i' = i + 1$ 且 $i < j$。这意味着，根据 ϕ_1'，v_i 被分配的值至多为 $1 < \tau'$，因为它只与 $\{v_{i-1}, v_i\}$ 和 $\{v_i, v_{i+1}\}$ 相 incident，其中 $i < j$，而 j 是我们添加额外边时的第一个索引。因此，假设 $\{v_i, v_{i'}\}$ 完全朝向 $v_{i'}$ 定向会导致矛盾。这表明上述修改是可行的，并且如所声称的，ϕ_2' 存在。

最后，我们调整该构造，将密度从 $\tau' = (q + r)/q$ 提高 $c - 1$至 $(q + r)/q + c - 1 = (cq + r)/q = p/q = \tau$。为此，我们添加一个密度为 τ 的平衡图 A（该图始终存在，且 Ruciński 和 Vince [20] 展示了如何针对每个 $\tau \geq 1$ 构造这样的图）。注意，由于任何含有 n 个顶点的图，其密度至多为 $\binom{n}{2}/n = (n-1)/2 < n$，因此 A 至少包含 $c - 1$ 个顶点（但对于每个常数 τ，A 的大小都是常数）。我们从 A 中选取一个包含 $c - 1$ 个任意顶点的集合 D。为完成边构件的构造，我们在 W' 中的每个顶点与 D 中的每个顶点之间添加一条边。为了构造目标密度为 τ 的定向 ϕ_1 和 ϕ_2，我们从 A 的一个定向开始，其中每个顶点恰好被分配 τ。注意，这样的定向存在，因为 A 是平衡的，且其密度为 τ。对于 W' 中的边，我们分别使用 ϕ_1 的定向 ϕ_1' 和 ϕ_2 的定向 ϕ_2'。最后，我们将 W' 与 D 之间的所有边都定向为指向 W' 中的顶点。现在不难验证，ϕ_1 和 ϕ_2 满足引理的所有要求。显然，如果 p 和 q 都是常数，该构造所需时间为常数。◀

现在我们可以证明本节的主要结果了。这将完成定理 1.1 的证明，而该定理由定理 4.7（针对算法部分）以及定理 5.1 和定理 5.4（针对 NP 困难性）推出。

▶ **定理 5.4.** *τ-BDED 对任意满足 $\tau \notin \mathbb{H}$ 的 $\tau > 1$ 都是 NP难。*

证明. 设 $\tau = p/q > 1$ 其中 p 且 q 互素。注意，由于 $\tau \notin \mathbb{H}$，有 $q \geq 3$。我们从 顶点覆盖 问题归约而来，该问题定义在 q-正则图上。众所周知，该问题是 NP 完全的。[3] 我们的思路是利用引理 5.2 和引理 5.3，分别为 G 中的每个顶点构造一个顶点构件，并为每条边构造一个边构件。

设 $(G = (V, E), k)$ 是顶点覆盖的一个实例，其中 G 是 q-正则的。我们按如下方式构造一个等价的 τ-BDED 实例 (G', k')。对于每个顶点 $v \in V$，我们添加一个顶点

[3] Amiri [2] 证明，除非 ETH 不成立，否则该问题无法在 $2^{o(m)}$ 时间内求解。同一个归约也能证明其 NP 困难性，但原文并未明确提及这一点。

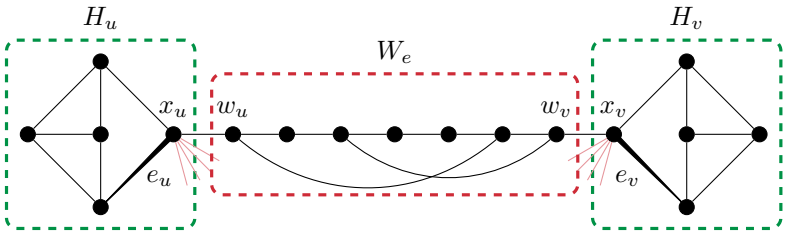

图 4 $\tau = p/q > 1$困难性归约示意图。图中展示了顶点覆盖实例中由一条边 $e = \{u, v\}$ 连接的两个顶点 u, v 的构造，其中包含 $\tau = \frac{7}{5}$。左侧和右侧分别是顶点构件 H_u 和 H_v （以绿色突出显示），其中包含特殊顶点 x_u 和 x_v，以及分别完全朝向 x_u 和 x_v 的特殊边 e_u 和 e_v （通过加粗边表示）。这两个顶点构件通过边构件 W_e 连接，边构件包含特殊顶点 w_u 和 w_v。浅红色线表示从 x_u 和 x_v 连接到其他边构件的边。注意，对于 $\tau = \frac{7}{5}$，可以使用 Ruciński 和 Vince [20]的构造创建一个含 5 个顶点和 7 条边的平衡图。对于 $p > \binom{q}{2}$，注意可以创建一个含 pq 个顶点和 p^2 条边（密度为 $\tau = p/q$）的图。

构件 H_v，其中包含一条特殊边 e_v 和一个与 G' 相连的顶点 x_v。图 H_v 是任意一个密度为 τ 的平衡图（这样的图总是存在，且 Ruciński 和 Vince [20] 展示了如何针对每个 $\tau \geq 1$ 构造这样的图）。令 ϕ_v 为 H_v 的任意一个分数定向，其中每个顶点的入度均为 τ；再令 C 为 H_v 中的任意一个环。两者都可以在多项式时间内找到。利用引理 5.2，我们构造另一个分数定向 ϕ'_v，其中每个顶点的入度为 τ，且一条边 e 将其定向完全赋给其中一个端点 u。我们令 $e_v := e$ 和 $x_v := u$。至此，顶点构件的构造完成。对于图 $\in E$ 中的每条边 $e = \{u, v\}$，我们添加边构件 W_e；该构件是由引理5.3中的构造得到的图，其密度为 τ，并具有特殊顶点 w_u 和 w_v。我们通过添加边 $\{x_u, w_u\}$ 和 $\{x_v, w_v\}$，将这些构件连接到我们的构造中。注意，由于我们假设 p 和 q 互素，因此可以使用引理5.3。最后，我们令 $k' := k$，完成构造。该归约的示意图见图 4。

由于图 H_v 和 W_e 的规模为常数，归约可以在多项式时间内计算，因此只需证明其正确性。为此，首先假设 (G, k) 是顶点覆盖的一个是实例，并令 C 为 G中大小至多为 k 的一个顶点覆盖。对于每个 $v \in C$，我们将顶点构件 H_v 中的边 e_v 加入解集 F。注意，这些都是 $|C| \leq k = k'$ 边。根据引理 2.1，只需给出 $G' - F$的一个分数定向 ϕ，使其满足 $\Delta^-_\phi \leq \tau$；我们按如下方式构造该定向。对每个顶点构件（其中可能移除边 e_v），我们采用分数定向 ϕ'_v。因此，顶点构件中的每个顶点的入度均为 τ，但对应于顶点 $v \in C$的顶点构件中的顶点 x_v 除外。在这种情况下，其入度为 $\tau - 1$。接下来，对于边 $e = \{u, v\}$对应的每个边构件 W_e （包括连接该边构件与顶点构件的两条边），我们构造其分数定向。不失一般性，假设 $u \in C$ （如果两者都属于该集合，则任意选取一个端点；只有 v 属于顶点覆盖的情形类似）。这意味着顶点 x_u 在当前定向中的入度为 $\tau - 1$。我们利用引理 5.3，为 W_e 中的边构造一个分数定向，使得此时其中除 w_u和 w_v以外的所有顶点的入度均为 τ，而 w_u的入度为 $\tau - 1 + 1/q$， w_v的入度为 $\tau - 1$。我们将边 $\{w_v, x_v\}$ 完全定向至 w_v，并将边 $\{w_u, x_u\}$ 以值 $1 - 1/q$定向至 w_u，以值 $1/q$ 定向至 x_u。对每条边 e都这样处理后，我们得到 $G' - F$ 的一个分数定向 ϕ，其中每个顶点的入度至多为 τ，因为每个顶点 x_u 至多只与 q 个边构件相连，而每个边构件分配的定向均为 $1/q$。

反过来，假设构造的实例 τ-BDED 是一个是实例，并令 F为一个大小至多为 $k' = k$ 的解。我们按如下方式为 G 构造一个大小至多为 k的顶点覆盖 C 。对于所有包含在某个顶点构件 H_v 中，或连接 H_v 中的顶点与边构件的边 $e \in F$，我们将 v 加入顶点覆盖 C。如果 $e \in F$ 包含在边构件 $W_{e'}$中，则任意选取 e'的两个端点之一，并将其加入 C。由于我们选取的顶点至多有 k 个，因此只需证明 C是一个顶点覆盖。反设并非如此。于是，存在某条边 $e = \{u, v\}$，其中 $u, v \notin C$。注意，这意味着，与对应于 u 和 v 的顶点构件中的顶点相 incident 的边，以及对应于 e 的边构件中的边，均不包含在 F中。令 n_v 为一个顶点构件中的顶点数， n_e 为一个边构件中的顶点数。上述三个构件的并集（加上构件之间的两条边）包含 $2n_v + n_e$ 个顶点和 $\tau(2n_v) + (\tau n_e - 2 + 1/q) + 2 = \tau(2n_v + n_e) + 1/q > \tau(2n_v + n_e)$ 条边。因此，该子图的密度大于 τ，这与 F 是一个解相矛盾。证明至此完成。◀

6 结论

我们针对目标密度 τ，给出了 τ-BDED 的复杂性二分：证明了当且仅当 τ 是半整数或小于 $2/3$ 时，该问题才是多项式时间可解的（假设 P $\neq$ NP）。我们还发现，输入图的树宽方面有一个令人鼓舞的结果。接下来很自然的一步，是研究 τ-BDED 关于其他自然参数（如团宽、输入图的直径）的情况，和/或从近似算法的角度进行研究。另一个后续方向是分析 τ 不是常数、而是可以依赖于例如 n 的情形。我们针对（半）整数型目标密度设计的多项式时间算法可以推广到这种情形，但我们的困难性结果以及针对树宽的固定参数可处理算法则不能。已知，对于依赖于 n 的某个值 $\tau = 1 - 1/o(n)$，该问题关于树宽 [3] 是 W[1]-困难的；而对于 $\tau = 1 - 1/n$，该问题是多项式时间可解的，因为这等价于计算输入图的反馈边集。我们的多项式时间算法还涵盖了 τ-BDED 的另一种推广，即加权问题变体，例如 Maximum s-t-Flow（Flow）和一般因子（GF）的加权变体，这些变体均可在多项式时间内求解 [10, 21]。

关于 2GT，一个有趣的问题是，本工作发现的可高效求解情形（最大间隙至多为一、树宽有界）能否扩展到更大的网络类。例如，对于只有部分弧受到偶数流限制的情形，其 NP 难性证明要求在路径上“堆叠”多个这样的弧：在所构造的无环流实例中，从 s 到 t的每条路径都恰好包含三条要求偶数流的弧（见 A 节）。因此，问题是：如果每条受此限制的弧都与 s 或 t相接，该问题是否可在多项式时间内求解。

参考文献

1 Ravindra K. Ahuja、Thomas L. Magnanti 和 James B. Orlin。《网络流——理论、算法与应用》。Prentice Hall，1993年。4, 5, 6 2 Saeed Akhoondian Amiri。关于正则图上最大独立集精细复杂性的注记。《信息处理快报》，170:106123，2021年。doi: 10.1016/J.IPL.2021.106123。17 3 Cristina Bazgan、André Nichterlein 和 Sofia Vazquez Alferez。摧毁最稠密子图是困难的。《计算机与系统科学杂志》，151:103635，2025。doi: 10.1016/j.jcss.2025.103635。2, 3, 13, 19 4 David M. Burton。《初等数论》。Tata McGraw-Hill Publishing Company Limited，2006年。15 5 Karthekeyan Chandrasekaran、Chandra Chekuri 和 Shubhang Kulkarni。关于删除顶点以降低图和超模函数中的密度。载于第 52 届国际自动机、语言与编程研讨会（ICALP）论文集，第 43:1–43:20 页。Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum für Informatik，2025。doi: 10.4230/ LIPICS.ICALP.2025.43。3, 6 6 Moses Charikar。用于寻找图中稠密分量的贪心近似算法。载于第 3 届组合优化近似算法国际研讨会（APPROX）论文集，第 84–95 页。Springer，2000年。doi: 10.1007/ 3-540-44436-X 10。4_7 Li Chen、Rasmus Kyng、Yang P. Liu、Richard Peng、Maximilian Probst Gutenberg 和 Sushant Sachdeva。近乎线性时间的最大流和最小费用流算法。《美国计算机学会通讯》，66(12):85–92，2023年。doi: 10.1145/3610940。2, 4, 5, 6, 11 8 Gérard Cornuéjols。图的一般因子。《组合理论杂志》，45(2): 185–198，1988年。doi: 10.1016/0095-8956(88)90068-8。5 9 Marek Cygan、Fedor V. Fomin、Lukasz Kowalik、Daniel Lokshtanov、Dániel Marx、Marcin Pilipczuk、Michal Pilipczuk 和 Saket Saurabh。《参数化算法》。Springer，2015年。doi: 10.1007/978-3-319-21275-3。12 10 Szymon Dudycz 和 Katarzyna Paluch。最优一般匹配。载于第 44 届计算机科学图论概念国际研讨会（ WG）论文集，第 176–189 页。Springer，2018年。doi: 10.1007/978-3-030-00256-5_15。11, 19 11 Michael R. Garey 和 David S. Johnson。《计算机与难解问题：NP 完全性理论指南》。W. H. Freeman，1979年。5, 22 12 Andrew V. Goldberg。寻找最大密度子图。技术报告，加州大学伯克利分校，美国，1984年。2 13 David G. Kirkpatrick 和 Pavol Hell。关于广义匹配问题的完全性。载于第 10 届美国计算机学会计算理论年度研讨会（ STOC）论文集，第 240–245 页。ACM，1978年。doi: 10.1145/800133.804353。13 14 Tuukka Korhonen。用于树宽的单指数时间 2-近似算法。载于第 62 届 IEEE 计算机科学基础年度研讨会（FOCS）论文集，第 184–192 页，2021年。doi: 10.1109/FOCS52979.2021.00026。2 15 Tuukka Korhonen 和 Daniel Lokshtanov。一种改进的树宽参数化算法。载于第 55 届美国计算机学会计算理论年度研讨会（STOC）论文集，第 528–541 页，2023年。2 16 Tommaso Lanciano、Atsushi Miyauchi、Adriano Fazzone 和 Francesco Bonchi。最稠密子图问题及其变体综述。《美国计算机学会计算调查》，56(8): 208:1–208:40，2024年。doi: 10.1145/3653298。2, 3

17 Dániel Marx、Govind S. Sankar 和 Philipp Schepper。《度与间隙：以树宽和割宽为参数的一般因子问题的紧复杂度结果》。载于第*48*届国际自动机、语言与编程研讨会论文集（*ICALP*），第95:1–95:20页。Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum für Informatik，2021年。doi: 10.4230/LIPICS.ICALP.2021.95. 5, 1118 Luke Mathieson 和 Stefan Szeider。《编辑图以满足度约束：一种参数化方法》。《计算机与系统科学杂志》，78(1):179–191，2012年。doi: 10.1016/J.JCSS.2011.02.001。19 Jean-Claude Picard 和 Maurice Queyranne。《一种求解某些非线性0-1规划问题的网络流方法及其在图论中的应用》。*Networks*，12(2):141–159，1982年。doi: 10.1002/NET.3230120206. 220 Andrzej Ruciński 和 Andrew Vince。《强平衡图与随机图》。图论杂志，10(2):251–264，1986年。doi: 10.1002/jgt.3190100214. 17, 1821 Alexander Schrijver。《组合优化：多面体与效率》。Springer，2003年。3, 4, 5, 6, 7, 8, 19

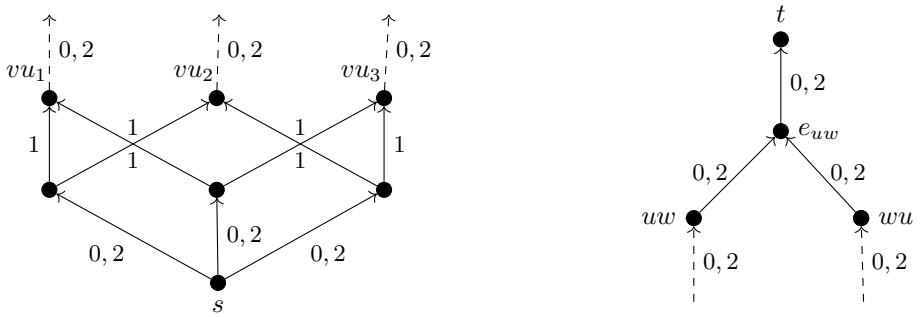

图 5 左侧展示了顶点 **构件** g_v，对应一个顶点 $v \in V(G)$及其邻居 u_1，u_2，u_3。底部的顶点 s 是流网络中唯一的源点，并出现在每个顶点构件中。右侧展示了边 g_{uw} 的边构件，对应边 $\{u, v\} \in E(G)$。边构件的每个底部顶点都对应于顶层顶点构件 g_u 和 g_v中的一个顶点。顶层顶点 t 是网络中唯一的汇点，并出现在每个边构件中。虚线表示正确连接时可以流入或流出一个顶点的流量，但它们并非构造的一部分。容量 0，2 表示沿一条弧只能发送 0 或 2 的流（不能发送 1 或 1.5）。

子集偶数流的 NP 困难性

考虑有向图 D 上的最大 s-t 流问题，c具有整数容量 $E \to \mathbb{N}$，并附加约束：对于弧的一个真子集 $F \subsetneq A(D)$，其容量必须为偶数。此变体称为子集偶数流问题，且为 NP难问题。尽管我们未能在科学文献中找到这一结果，但它已为人所知并在公开场合讨论过。现在我们复述 Neal Young 在 Stack Exchange[4] 上给出的证明概要。

▶ **定理 A.1** (NealYoung)。 子集偶数流是 *NP*难的，即使所有容量都不超过 *2*。

证明。我们从三次图上的独立集问题归约而来（三次图中的每个顶点恰有三个邻居），该问题已知是 NP难的 [11]。给定一个三次图 G，如下构造一个子集偶数流实例 $(D, \mathrm{cap}\ F)$：首先，在 D 中仅设置一个源点 s和一个汇点 t。然后，对于每个顶点 $v \in V(G)$，其邻居为 u_1、u_2、u_3，向实例中添加一个顶点构件 g_v（示意见图 5 左侧）。该构件由六个顶点 v_1、v_2、v_3（构成图 5 中的底层）和 vu_1、vu_2、vu_3（图中的顶层）组成；还包括偶数容量 $\mathrm{cap}(s, v_i) \in \{0, 2\}$ 的弧 (s, v_i)，其中 $i \in [3]$（即向 F 中添加 (s, v_i)），以及容量 $\mathrm{cap}(v_i, vu_j) = 1$ 的弧 (v_i, vu_j)，其中 i、$j \in [3]$、$i \neq j$。

对于每条边 $\{u, w\} \in E(G)$，选择 g_u和 g_w 的顶层中唯一的顶点 uw、wu，并按照图 5 右侧所示构造一个小工具 g_{uw}：添加一个顶点 e_{uw} 和弧 (uw, e_{uw})、(wu, e_{uw}) 以及 (e_{uw}, t)；这三条弧的容量要求均为偶数。至此，构造完成。

为了证明正确性，我们说明：G 包含一个大小为 k 的独立集，当且仅当 D 存在一个值为 $6k$ 且满足容量限制的 s-t-流。这基于以下观察：边构件编码了与非运算，因此来自 g_u 的两个顶点 uw 和来自 g_w的顶点 wu 中，只能有一个通过 e_{uw} 向 t发送流。

[4] https://cstheory.stackexchange.com/questions/51243/maximum-flow-with-parity-requirement-on-certain-edges

给定一个大小为 k的独立集 $S \subseteq V$（G），通过每个顶点构件 g_v 中带有 $v \in S$的所有边发送流。由于 S 是一个独立集，流可以通过边构件 g_{vu_i} 到达 t。因此， D中存在值为 $6k$ 的流。

反之，注意到 vu_i 中的每个顶点在 D 中都有一条流量要求为偶数的出弧。因此，满足奇偶限制的流解要么饱和 g_v 中的所有边，要么为其中所有边分配流量 0。因此，流的值为 $6k$ ，其中 $k \in \in$N，并且对应于 G 中大小为 k 的独立集。◀