arXiv:2601.03145v1 [math.CO] 6 Jan 2026

Fine 多面体谱的分类

SOFÍA GARZÓN MORA 和 CHRISTIAN HAASE

摘要。本文研究 Fine 多面体伴随理论背景下、由 Fujita 提出的近期已获证明的谱猜想的一种类似形式。我们给出低维多面体的计算结果，由此完整分类了任意维数下该 Fine 谱的最大值。此外，我们完整分类了维数为一、二和三时的 Fine 谱，并为任意维数下的一般分类结果提供了一个框架。

1. 引言

代数簇 X 上的伴随线性系 $|K_X + tL|$ 的研究，其中 K_X 是典范丛， L 是丰沛线丛，在某种意义上是极小模型纲领的先导。在研究极化簇的伴随理论时，Fujita 在 [Fuj92] 和 [Fuj95] 中猜想，光滑极化 d 维簇的伪有效阈值集合除 0 外应为有限集。该猜想近期已获证明，见 [DC17]。多面体伴随理论已在 [DRHNP14], 中得到研究，而允许出现典范奇点的托里克簇的藤田谱猜想则由 Andreas Paffenholz 在 [Paf15] 中证明。

Fine 多面体伴随理论见于 [GH23], ，是多面体伴随理论 [DRHNP14], 的一种变体。在该理论中，人们已证明，谱猜想在 Fine 伴随情形下同样成立，且无需对（环面）奇点作出假设。本文的主要定理刻画了谱中的最高数值。本文完整刻画了维数一和二维数值空间中的谱，并为任意维数的多面体提供了一些一般性的分类结果 d。

我们计算了此前由 Gabriele Balletti [Bal18]获得的、按体积分组的大多数低维多面体的 Fine Q-余次数。此外，我们通过将分类问题表述为混合整数线性规划（MILP），从计算角度进一步研究了分类结果。由此，我们开发了旨在完整分类 Fine Q-余码谱的更多工具；我们发现，这一分类不仅细化并结合了多面体伴随理论中的现有结果与格多面体的分类，还揭示了底层理论所具有的强结构性质。

致谢

SGM 获得了德国研究联合会（DFG）通过“复杂性方面”研究生院（GRK 2434）以及德国卓越战略——柏林数学研究中心 MATH+ （EXC-2046/1，项目编号：390685689）提供的资助。CH 获得了 SPP 优先计划 2458 的资助：

关键词和短语。多面体伴随理论、Fine 内部、格多面体、环面簇、混合整数线性规划。

组合协同。我们谨向 Benjamin Nill 和 Andreas Paffenholz 致谢，感谢他们进行了极具启发性的讨论，并帮助解答了相关计算问题。

2. 预备知识

我们先在此列出一些关键定义，并作简要说明。更多细节请参阅 [GH23]。

设 $P \subseteq \mathbb{R}^d$ 是一个 d维有理多胞体，以唯一的最简形式表示为 $P = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \langle a_i, x\rangle \geq b_i, i = 1, ..., m\}$, 其中 $a_i \in (\mathbb{Z}^d)^*$ 是矩阵 A的本原行，这意味着它们不是其他格向量的倍数，并且 $b = (b_1, ..., b_m) \in \mathbb{Q}^m$。如果 P的顶点都属于 $\mathbb{Z}^d$，则称其为格多面体 。

定义 2.1. 设 f为仿射函数 $f(x) = \langle a, x\rangle - b$ 其中 $b \in \mathbb{Q}$，且a 是对偶格 $(\mathbb{Z}^d)^*$的一个元素。若对于半空间 $\mathcal{H}_+ := \{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) \geq 0\}$, 有 $P \subseteq \mathcal{H}_+$，则称该函数对多面体 P是有效 的。此外，若存在某个 $p \in P$ 使得 $f(p) = 0$，即 P 中至少有一点位于 $\mathcal{H}$所定义的超平面上，则称 f是 P的紧 有效不等式。

定义 2.2。 设 $\alpha \in (\mathbb{R}^d)^*$。我们定义与 P相关联的支撑 函数为

$$h_P : (\mathbb{R}^d)^* \to \mathbb{R}, \quad \alpha \mapsto \min_{x \in P} \langle \alpha, x\rangle.$$

对于某个固定实数 $s > 0$，我们可以定义*Fine*伴随多胞体，它是一个有理多胞体，定义如下:

$$P^{F(s)} := \{x \in \mathbb{R}^d \mid \langle a, x\rangle \geq h_P(a) + s, \text{ for all } a \in (\mathbb{Z}^d)^* \setminus \{0\}\}.$$

这里我们引入相关不等式的概念。

定义 2.3。 设 $\mathcal{F}$ 为 P的所有有效不等式组成的集合，其中任一元素$f \in \mathcal{F}$的形式为 $\langle a_f, x\rangle \geq b_f$。若对于某个 $s > 0$，下式成立，则称有效不等式 $f \in \mathcal{F}$对于 P 是相关的:

$$\{x \in \mathbb{R}^d | \langle a_f, x\rangle \geq h_P(a_f) + s \ \forall f \in \mathcal{F}\} \neq \{x \in \mathbb{R}^d | \langle a_f, x\rangle \geq h_P(a_f) + s \ \forall f \in \mathcal{F} \setminus \{f\}\}.$$

若有效不等式 f 不相关，则称其为不相关的 。

定理2.4。 [GH23，推论 2。7] 设 P 是一个维数为d的有理多胞体。对于 P，形式为 $\langle a, \cdot\rangle \geq h^F(a)$ 的有效相关不等式属于$a \in (\mathbb{Z}^d)^*$，其中 $a \in \operatorname{conv}(a_1, ..., a_m)$，且 $1 \leq i \leq m$ 对应的 a_i 是 P的本原内向面法向量。

在下文中，我们将以下述方式定义的多面体称为 P:

$$P = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \langle a_i, x\rangle \geq b_i, i = 1, ..., m\}, \tag{1}$$

其中， $b_i \in \mathbb{Q}$ 和 $a_i \in (\mathbb{Z}^d)^*$ 是矩阵 A 的本原行，包含了关于 P 的所有相关有效不等式。

定义 2.5. 有理多胞体 P 的$Fine$ Q-余次数 为

$$\mu^F(P) := (\sup\{s > 0 \mid P^{F(s)} \neq \emptyset\})^{-1},$$

P 的 *Fine* 核 为

$$\operatorname{core}^F(P) := P^{(1/\mu^F(P))}.$$

我们将这一量称为

$$n^F(P) := \frac{1}{\mu^F(P)}$$

作为*Fine* 数的 P。

根据定义，我们看到对于 $s \in \mathbb{Q}_{>0}$

$$n^F(sP) = sn^F(P) \text{ and therefore } s\mu^F(sP) = \mu^F(P) \text{ and} \tag{2}$$

$$\text{if } P \subseteq Q, \text{ then } P^{F(s)} \subseteq Q^{F(s)} \text{ so that } n^F(P) \leq n^F(Q)\,. \tag{3}$$

单调性 (3) 对于非 Fine 伴随并不成立。现在我们引入另一个定义，该定义改编自 [DRHNP14] ，将在后续各节的计算中发挥重要作用。

定义 2.6. 设 P是一个 d维多面体。 P 的 Fine 山 $M^F(P) \subseteq \mathbb{R}^{d+1}$ 定义为

$$M^F(P) := \{(x,s) \mid x \in P, 0 \leq s \leq \langle a, x\rangle - h_P(a), \text{ for all } a \in (\mathbb{Z}^d)^* \setminus \{0\}\}$$

并且若 P的不等式描述如 (1) 所示，则 $M^F(P)$ 可表示为

$$M^F(P) = \{(x,s) \in \mathbb{R}^{d+1} \mid (A| - \mathbb{1})(x,s)^T \geq b, s \geq 0\}.$$

因此， P 的 Fine 山是一个多面体，并且对所有 $s_0 \geq 0$ 都成立

$$M^F(P) \cap \mathbb{R}^d \times \{s_0\} = P^{F(s_0)} \times \{s_0\}.$$

作为比较，我们现在定义余次数这一概念，它出现在格多面体的 Ehrhart 理论背景中 [BN07]。

定义 2.7. 设 P 是一个格 d-多面体。我们将余次数 定义为

$$\mathrm{cd}(P) := \min\{k \in \mathbb{N}_{\geq 1} \mid \mathrm{int}(kP) \cap \mathbb{Z}^d \neq \emptyset\}.$$

那么， P的次数 为 $\deg(P) := d + 1 - \mathrm{cd}(P)$。

注意， $\emptyset \neq \mathrm{int}(\mathrm{cd}(P)P) \cap \mathbb{Z}^d \subseteq (\mathrm{cd}(P)P)^{F(1)}$，因此 $\mu^F(P) \leq \mathrm{cd}(P)$。

2.1. **Fine Q-余次数谱的有限性**。 文献 [GH23]证明，在每个维数下，当其下界为某个 $\varepsilon > 0$ 时，Fine Q-余次数可取的值构成有限集。

在 [Paf15], 中，特别地，给出了以下定理。

定理 2.8 （Paffenholz， [Paf15，定理 3.1]）。 设 $d \in \mathbb{N}$ 和 $\varepsilon > 0$ 已给定。那么

$$\{\mu（P） \mid P\text{是一个 } d \text{ 维格多面体，其典范法扇为}\} \cap \mathbb{R}_{\geq \varepsilon}$$

是有限的。

请注意，在代数几何的语境下，对于至多具有典范奇点的托里克簇而言，这就是藤田猜想。

这一结果的 Fine 版本已在 [GH23] 中得到证明。它使我们能够提出本文所关注的 Fine 谱的分类问题

$$\mathcal{S}^F(d) := \left\{\mu^F(P) \mid P \text{ is a } d\text{-dimensional lattice polytope}\right\}$$

本文所讨论的。

定理 2.9。 [GH23，定理 5。4] 设 $d \in \mathbb{N}$ 和 $\varepsilon > 0$ 给定，则$\mathcal{S}^F$（d）$\cap \mathbb{R}_{\geq \varepsilon}$ 是有限的。

关于这一证明的详细内容，请参阅原论文。不过，值得在此提及的是，该证明由两个主要部分组成。对于第一部分以及今后的使用，我们需要 Fine 核心法向量的概念:

定义 2.10。 泛函 $a \in (\mathbb{Z}^d)^*$ 是一个*Fine* 核心法向量 ， 当且仅当

$$\langle a_0, y\rangle = h_P(a_0) + \mu^F(P)^{-1}$$

对所有 $y \in$核心$^F(P)$。Fine 核心法向量在 $(\mathbb{R}^d)^*$ 中的凸包记为 A^F_{core}。

已证明，对于固定的 $d \in \mathbb{Z}_{>0}$，在格等价意义下，能够作为 d维格多面体的 Fine 核心法向量的集合只有有限多个。随后证明，每一种这样的 Fine 核心法向量构型，在任意正阈值 ε之上，都只产生有限多个 Fine Q-余次数值。若令 P 由式 (1) 中的所有相关不等式描述，则除重新标记外，可以假设 Fine 核心法向量集合由 $a_1, \ldots, a_k$ 组成，其中 $k \leq m$。这给出了定义 P的 Fine 核心的仿射包 $\operatorname{aff}(\operatorname{core}^F(P))$ 的一组不等式，即，

$$\begin{aligned} \operatorname{aff}\left(\operatorname{core}^F(P)\right) &= \left\{x \mid \langle a_i, x\rangle \geq b_i + \mu^F(P)^{-1}, 1 \leq i \leq k\right\} \\ &= \left\{x \mid \langle a_i, x\rangle = b_i + \mu^F(P)^{-1}, 1 \leq i \leq k\right\}. \end{aligned}$$

我们以如下评注结束本节。

注 2.11. 设 $\Lambda \subseteq \Lambda'$ 是格 Λ' 的子格，且 P 是相对于格 Λ 的有理多胞体。那么，若以 $\mu^F(P, \Lambda)$ 表示 P 相对于格 Λ 的 Fine Q-余次数，则有

$$\mu^F(P, \Lambda) \geq \mu^F(P, \Lambda').$$

3. 工具

在§4中探讨低维情形下的 Fine 谱，并在一定程度上研究一般维数的情形之前，我们先介绍一些通用工具，以便于开展研究。

3.1. **投影与提升**。现在，我们希望研究 Fine Q-余次数在保格投影 $\pi\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d'}$ 下的行为。

注 3.1. [GH23，注 3.4] 在任意投影 π 下，对于任意有理多胞体$P \subset \mathbb{R}^d$，我们有 $\mu^F(\pi(P)) \leq \mu^F(P)$。

但每个 P 都有其自身首选的投影。

定义 3.2。令 $K(P)$ 为平行于 $\operatorname{aff}(\operatorname{core}^F(P))$ 的线性空间。则投影 $\pi_P\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n/K(P)$ 称为与 P 相关联的自然投影。

它具有以下良好性质。

命题 3.3。 [GH23，命题 3。3] 自然投影将 P 映到有理多胞体 $Q := \pi_P(P)$，且满足 $\mu^F(Q) = \mu^F(P)$。此外，核心$^F(Q)$是点 π_P(核心$^F(P)$)。

利用自然投影，我们可以联系不同维数下的 Fine 谱。

引理 3.4。对于 $d \in \mathbb{Z}_{>1}$，$\mathcal{S}^F(d-1) \subset \mathcal{S}^F(d)$，以及

$$\mathcal{S}^F(d) \setminus \mathcal{S}^F(d-1) \subset \left\{\mu^F(P) \mid P \text{ a lattice } d\text{-polytope with } \operatorname{core}^F(P) \text{ a point}\right\}.$$

证明。对于第一个包含关系，注意到对于 $h \gg 0$，$\mu^F(P \times [0,h]) = \mu^F(P)$。
第二个包含关系是命题 3.3 的另一种表述。 □

3.2. **计算方法**。启动这个项目时，我们首先计算了由 Balletti [Bal18] 分类的、体积较小的所有格 d-多面体的 Fine Q-余次数，$d \leq 5$。下面总结我们的发现。

然后，在 §3.2.2 中，我们介绍一系列混合整数线性规划，以探索 Fine 谱。

3.2.1. 来自多胞体数据库的结果。Gabriele Balletti 编制了一个数据库，收录了维数至多为五、体积较小[1]且满足 [Bal18] 的所有格多面体，并按同构分类。

对于这些多面体，我们计算了 Fine Q–余次数。我们的算法的主要思路是：给定 $d \in \mathbb{Z}_{>0}$ 和一个维数为 d 的多面体 P，我们通过推论 2.4 得到 P 的相关有效不等式，并以此构造 P 的 Fine 山。随后，Fine Q-余次数可通过该 Fine 山的高度得出。此外，通过此算法还可以获得多面体的一些其他数据，例如 P 的 Fine 核的维数（对应于 P 的 Fine 山最顶面的维数），以及 Fine 核顶点（对应于该 Fine 山最顶面的顶点）。

用于计算 Fine 山、Fine Q-余次数和 Fine 核维数的代码，已使用面向多面体的软件 Polymake[GJ00, AGH+17] 实现。基于这些计算，我们观察到 Fine Q–余次数在不同维数下呈现出重复出现的模式。

维数	最大体积	Fine Q-余码谱
1	∞	$2, 1, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{1}{3}, \frac{2}{7}, \frac{1}{4}, \ldots$
2	50	$3, 2, \frac{3}{2}, 1, \frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{7}, \frac{2}{5}, \frac{3}{8}, \frac{1}{3}, \frac{3}{10}, \frac{2}{7}$
3	23	$4, 3, \frac{5}{2}, 2, \frac{3}{2}, 3, \frac{4}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{6}, 1, \frac{5}{6}, \frac{4}{5}, \frac{3}{4}$
4	14	$5, 4, \frac{7}{2}, 3, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{4}, \frac{9}{4}, 2, \frac{7}{4}, 3, \frac{5}{2}, \frac{3}{3}, \frac{4}{4}, 1$
5	14	$6, 5, \frac{9}{2}, 4, \frac{7}{2}, \frac{10}{3}, \frac{13}{4}, 3, \frac{11}{4}, \frac{8}{3}, \frac{5}{2}, \frac{7}{3}, \frac{9}{4}, 2, \frac{7}{4}, \frac{5}{3}, \frac{3}{2}, 1$

表 1. Fine Q-余余维谱

从此表中得到的首批观察之一（在更高维数下也成立，参见定理 4.11）是：d维多面体的 Fine Q-余次数 P 至多为 $d+1$，且仅当它是标准的 d维单形时取等号；此外，$\mu^F(P)$ 不会取 d 与 $d+1$之间的任何值。

3.2.2. 一族混合整数线性规划。 回顾定理 2.9 的证明，我们可以推导出一种探索 Fine 谱的方法。首先，对于固定的维数 d，我们需要确定 Fine 核心法向量的所有可能不同构型。请注意，这些构型对应于内部格点仅有原点的格多面体，而这类多面体只有有限种可能 [LZ91，定理 1]。然后，我们固定一组 Fine 核心法向量，并着手寻找具有此类 Fine 核心正规构型、且能产生不同 μ^F 值的所有可能多面体。正如我们将看到的，这相当于求解一个混合整数线性规划。

值得指出的是，接下来我们只需考虑 Fine 核心为零维的多面体，依据的是 §3.1 中的论证。

固定一个维数为 d、Fine 核心法向量配置为 $\mathcal{A}$ $a_1, \ldots, a_n \in (\mathbb{R}^d)^*$。我们希望构造一个多面体 P，其 Fine 核的维数为零，即 $\mathrm{core}^F(P) = \{p\}$，顶点为 $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{Z}^d$，并满足具有这些 Fine

[1]“小”体积的具体含义取决于维数，如表 1 第二列所示。

核心法向量这一性质。令 u_i 作为变量，其中对所有 $1 \le i \le n$， $p \in \mathbb{Q}^d$ 以及 $n^F := \frac{1}{\mu^F(P)} \in \mathbb{Q}$，取其 *Fine* 数 P。那么，混合整数线性规划可以表述如下：

(混合整数线性规划$_A^{\pm}$(L, U))

$$
\begin{array}{lll}
\text{maximize} & \pm n^F & \\
\text{subject to} & \langle a_i, u_j \rangle & \ge \langle a_i, u_i \rangle \qquad \text{for all } i \neq j \\
& \langle a_i, p \rangle & = \langle a_i, u_i \rangle + n^F \qquad \text{for all } i \\
& n^F & \in [L, U] \\
& p & \in \mathbb{Q}^d \cap [0,1]^d \\
& u_1, \ldots, u_n & \in \mathbb{Z}^d.
\end{array}
$$

求解此混合整数线性规划将返回向量 u_1、.....、 $u_n \in \mathbb{Z}^d$，其凸包定义了一个多面体，该多面体的 Fine 核心正规构型由 a_1、.....、 $a_n \in (\mathbb{R}^d)^*$ 给出，且满足 $L \le n^F \le U$，其中 L 和 U 分别是 Fine 数的下界和上界。可以通过最大化 n^F 并改变U ，或最大化 $-n^F$ 并改变 L来探索 Fine 谱，从而通过一致地改变这两个参数，完整列出 μ^F 的所有取值。一般而言，目前尚不清楚 L 和 U 的变化幅度需要多小，才能保证完整扫描 Fine 谱。

对取值 $\mu^F(P)$ 的这一刻画要求对仅以原点为内部格点的格多面体进行分类。事实上，只需对这类多面体中关于包含关系极小的多面体进行分类，见 2.11。下一节中，我们将研究较低维数的情形，并介绍一些适用于一般维数 d的结果。不过，为了让我们的工作更易于开展，我们将先讨论一些有趣的结果，这些结果限制了任意维数下的谱值 d。

3.3. **缩减搜索空间**。

引理 3.5. 设 P 是一个维数为 d 的格多面体，并假设存在 *Fine* 核心法向量 a_0、...、 a_ℓ 及系数 λ_0、...、 $\lambda_\ell \in \mathbb{R}_{>0}$，使得 $\sum_{i=0}^{\ell} \lambda_i a_i = 0$，那么存在一个维数为 $\le \ell$ 的格多面体 Q，使得

$$\mu^F(P) = \mu^F(Q).$$

证明。 对于该结论，我们可以安全地假设 $\ell < d$。
考察投影 $\pi = (a_1, \ldots, a_\ell) \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^\ell$。它将 P 映射到 $Q := \pi(P)$，将其视为子格 $\Lambda := \pi(\mathbb{Z}^d) \subseteq \mathbb{Z}^\ell$ 中的格多面体。我们的断言是，该投影保持 Fine Q-余次数，即 $\mu^F(P) = \mu^F(Q)$。

首先，注意到 $a_0, \ldots, a_\ell$ 下降为 $\Lambda^\vee$ 中定义良好的元素，即对于 $i = 0, \ldots, \ell$，有 $\ker \pi \subseteq \ker a_i$。
接下来，回顾注 3.1：对于任意投影， $\mu^F(\pi(P)) \le \mu^F(P)$。因此，我们只需验证反向不等式成立。
存在 $v_0, \ldots, v_\ell \in P \cap \mathbb{Z}^d$ 和 $b_0, \ldots, b_\ell \in \mathbb{Z}$，使得对于 $x \in$ 核心的相对内部$^F(P)$，我们有

$$b_i = h_P(a_i) = \langle a_i, v_i \rangle = \langle a_i, x \rangle - \frac{1}{\mu^F(P)}$$

对所有 $0 \le i \le \ell$ 均成立。关系 $\sum_{i=0}^{\ell} \lambda_i a_i = 0$ 给出了一个证书，表明对于每个 $s > 1/\mu^F(P)$，不等式组

$$\langle a_i, y \rangle \ge b_i + s \quad (i = 0, \ldots, \ell)$$

对于 $y \in \mathbb{R}^d$ 不可行。如上所述，这些不等式可导出关于 Q 的有效不等式。这表明，对于所有 $s > 1/\mu^F(P)$， $Q^{F(s)} = \varnothing$；换言之，$\mu^F(Q) \ge \mu^F(P)$。□

现在我们证明，只需考虑由格多面体顶点构成的 Fine 核心法向量构型，其中原点是唯一的内部格点，因为任何可能的子构型都已包含在此分类中。

引理 3.6。设 $v_1, \ldots, v_k$ 是多面体 P 的 *Fine* 核心法向量。设 $v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i \in \mathbb{Z}^d$，其中 $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \leq 1$ 且 $v \neq 0$。那么 v 也是 P 的 *Fine* 核心法向量。

证明。设 $b_i = \min_{p \in P} \langle v_i, p \rangle$，并设 $x \in$ 是 relint(core$^F(P)$)，则根据定义有 $\langle v_i, x \rangle = b_i + n^F(P)$。记 $b := \min_{p \in P} \langle v, p \rangle$，又由于 $v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i$，我们有

$$b \geq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i b_i.$$

此外，同样根据 $n^F(P)$ 的定义，我们有

$$\langle v, x \rangle \geq b + n^F(P).$$

为了证明 v 是 P 的 Fine 核心法向量，我们需要证明上述不等式实际上是等式。但是

$$n^F(P) \leq \langle v, x \rangle - b \leq \langle v, x \rangle - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i b_i = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \left(\langle v_i, x \rangle - b_i \right) = n^F(P) \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \leq n^F(P),$$

其中，第一个不等式由 $n^F(P)$ 的定义得出，第二个不等式由 b 与 b_i 之间的关系得出，最后一个不等式则由假设 $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \leq 1$ 得出。因此，我们得到所需的 $\langle v, x \rangle = b + n^F(P)$。□

为了进一步缩减数据库，我们想证明 Fine Q-余次数的分子集合是有限的。我们先定义这个集合。

定义 3.7. 对于固定维数 d，令 $\mathcal{I}_d \subset \mathbb{Z}_{>0}$ 为有理数 $\mu^F(P)$ 的所有可能分子组成的集合，其中 P 是一个格 d-多面体。

下面的定理为我们提供了一种计算集合 $\mathcal{I}_d$ 中元素的方法。

定理 3.8. 固定维数 $d \in \mathbb{Z}_{>0}$。考虑由 d 维 *Fine* 核心法向量构型组成的集合 $\mathcal{F}_d$，并对任意此类构型 $\mathcal{A}$，选取一组正生成的向量 $a_1, \ldots, a_{d+1} \subseteq \mathcal{A}$。对于这样的选取，我们关联一个矩阵 A，其第 i 行为 a_i，其中 $i = 1, \ldots, d+1$，以及一个数

$$\eta_A := \frac{\det \begin{bmatrix} A & -\mathbb{1} \end{bmatrix}}{D}$$

其中 $D :=$ 最大公因数$_{j=1, \ldots, d+1}\{$行列式 $\begin{bmatrix} A_j \end{bmatrix}\}$，而 A_j 是删除第 j 行后的矩阵 A。于是

$$\mathcal{I}_d = \mathcal{I}_{d-1} \cup \{ \eta_A \mid a_1, \ldots, a_{d+1} \subset \mathcal{A} \text{ positively spanning}, \mathcal{A} \in \mathcal{F}_d \}.$$

证明。对于所有 $d > 0$，$\mathcal{I}_d \subseteq \mathcal{I}_{d+1}$，根据 §3.1 中的论证可知。令核心$^F(P) = \{p\}$。根据定义，Fine 核心法向量满足

$$\langle a_i, p \rangle = b_i + n^F(P)$$

对于某些 $b_i \in$ Q、$i = 1$、……、$d+1$。注意到，我们确实可以找到 $d+1$ 个线性无关且正生成的 Fine 核核心法向量，因为 P 的 Fine 核由一个点组成。令 $A := A_{a_1、\ldots\ldots、a_{d+1}}$ 如上所述，并令 $b = (b_1、\ldots\ldots、b_{d+1})$。那么，$p$ 和 $n^F(P)$ 满足以下线性方程组：

$$\begin{bmatrix} A & -\mathbb{1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p \\ n^F(P) \end{pmatrix} = b.$$

根据克莱姆法则，该方程组有唯一解。特别地，

$$n^F(P) = \frac{\det\begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} A & -\mathbb{1} \end{bmatrix}}, \tag{4}$$

使得对于初始构型 $\mathcal{A}$ 中 Fine 核心法向量的每一种这样的选取 $a_1, \ldots\ldots, a_{d+1}$，$\det\begin{bmatrix} A & -\mathbb{1} \end{bmatrix} \in \mathcal{I}_d$。特别地，$\mathcal{I}_d$ 中的任意元素都会作为这样的行列式或其因子出现。

反之，给定这样的矩阵 A，我们可以找到一个向量 b，使得 $Ax \leq b$ 内的格点的凸包按照（4）实现 Fine 数（参见第 3.4 节）。

□

3.4. **实现 Fine Q-余次数分子**。固定维数 $d \in \mathbb{Z}_{>0}$，并取定矩阵 A，其各行是正生成向量 $a_1, \ldots\ldots, a_{d+1} \subseteq \mathcal{A}$，构成定理 3.8 陈述中的 Fine 核心正规构型。现在，我们研究如何在实践中将行列式 $\det\begin{bmatrix} A & -\mathbb{1} \end{bmatrix}$ 实现为格多面体 P 的 Fine 数 $n^F(P)$，其中的格多面体如（4）所示，并且可以假设其相对内部包含原点。为此，我们使用（混合整数线性规划 $\frac{+}{A}(L, U)$），并将此表述为一条备注。

注 3.9. 给定这样的矩阵 A，在 (混合整数线性规划 $\frac{+}{A}(L, U)$) 中最小化 n^F，其中 A 的各行是 Fine 核心正规构型中的向量 $a_1, \ldots, a_{d+1}$，这等价于最小化 $\det\begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix}$。根据构造，混合整数线性规划将输出一个格多面体 P，其 Fine 数使 $\det\begin{bmatrix} A & -\mathbb{1} \end{bmatrix}$ 成为其 Fine Q-余次数的分子，从而找到一个适当的向量 b，该向量描述所需的多面体。

3.5. **格棱锥**。现在我们给出一些关于格棱锥及其 Fine Q-余次数性质的结果。这里需要以下定义，其表述方式与 [Nil24] 中的定义类似。

定义 3.10. 设 P 是一个 d 维格多面体。若 P 是一个格点，或者存在一个格多面体 $P' \subset \mathbb{R}^{d-1}$ 使得 $P \cong \mathrm{conv}(P' \times \{1\}, \{0\}) \subset \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}$，则称 P 为**格棱锥**。例如，标准单形 Δ_d 是一个格棱锥。

通过具体示例获得表中所列数据后，我们观察到，存在某些格多面体 P，其 Fine Q-余次数 $\mu^F(P) > 1$，使得格棱锥在 P 上取值 $\mu^F(P) + 1$。注意，若 $\mu^F(P) < 1$，则在 P 上的格棱锥的 Fine Q-余次数为 2。然而，描述格棱锥的 Fine Q-余次数并非易事，以下示例便说明了这一点。

例 3.11. 考虑在有理线段 $S_1 = [-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}]$ 和 $S_2 = [\frac{1}{5}, \frac{4}{5}]$ 上的格棱锥，可得 $\mu^F(S_1) = \frac{10}{3} = \mu^F(S_2)$，但 $\bar{\mu}^F(\mathrm{Pyr}(S_1)) = \frac{10}{3}$ 且 $\mu^F(\mathrm{Pyr}(S_2)) = 3$。 —

这一观察引出了一个结果，该结果将在下文的主要分类定理中使用。

定理 3.12。设 P d 维格多面体，且 $\mathrm{Pyr}(P)$ 是以 P 为底的格棱锥。那么

$$\mu^F(\mathrm{Pyr}(P)) = \max\{2, \mu^F(P) + 1\}.$$

证明。为方便起见，记 $\mu := \mu^F(P)$。我们首先证明下界。$\mathrm{Pyr}(P)$ 的有效不等式 $0 \leq x_{d+1} \leq 1$ 表明，对于 $s > 1/2$，$\mathrm{Pyr}(P)^{F(s)} = \varnothing$。因此，$\mu^F(\mathrm{Pyr}(P)) \geq 2$。

为了证明 $\mu^F(\mathrm{Pyr}(P)) \geq \mu+1$，我们证明：若 $\mathrm{Pyr}(P)^{F(t)} \neq \varnothing$，则对于$s = \frac{t}{1-t}$， $P^F(s) \neq \varnothing$。因此，设 $(p,h) \in \mathrm{Pyr}(P)^{F(t)}$。我们断言 $p/h \in P^F(s)$。考虑 P 的一个有效不等式 $\langle a, x\rangle \geq b$。那么，对于每个 $(x, x_{d+1}) \in \mathrm{Pyr}(P)$， $\langle a, x\rangle - b x_{d+1} \geq 0$ 都是有效的。接着，由 $(p,h) \in \mathrm{Pyr}(P)^{F(t)}$ 可得 $\langle a, p\rangle - bh \geq t$。我们得到$\langle a, p/h\rangle \geq b + t/h \geq b + s$，其中我们使用 $h \leq 1-t$，因为 $(p,h) \in \mathrm{Pyr}(P)^{F(t)}$。

对于 $\mu^F(\mathrm{Pyr}(P))$ 的上界，令 $p \in \mathrm{relint}(\mathrm{core}^F(P))$。我们要证明，对于 $s = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{\mu+1}\right\}$，有 $(\hat{p}, \hat{h}) := (1-s)(p, 1) \in \mathrm{Pyr}(P)^{F(s)}$。

设 $\langle a, x\rangle + \alpha x_{d+1} \geq b$ with 是一个对所有 $(x, x_{d+1}) \in \mathrm{Pyr}(P)$ 都成立的不等式。考虑 P 的一个 $\mathbb{Z}^d$-平移（这对应于对 $\mathrm{Pyr}(P)$ 应用一个保持函数 a 不变的单模变换），我们可以假设 a 在 P 上于 0 处取得最小值。于是 $\langle a, p\rangle \geq 1/\mu \geq \frac{s}{1-s}$。

首先，假设 $\alpha \leq 0$。在这种情况下，函数 (a, α) 在顶点 $e_{d+1} = (0, \ldots, 0, 1)$ 处沿 $\mathrm{Pyr}(P)$ 取得最小值，且该最小值为 α。于是

$$\langle (a,\alpha), (\hat{p}, \hat{h})\rangle = (1-s)\,\langle (a,\alpha), (p,1)\rangle \geq (1-s)\left(\frac{s}{1-s} + \alpha\right) \geq s + \alpha\,.$$

如愿。

另一方面，若 $\alpha \geq 1$，则线性泛函 (a, α) 在 $\mathrm{Pyr}(P)$ 上的最小值于原点处取得，且该最小值为 0。因此

$$\langle (a,\alpha), (\hat{p}, \hat{h})\rangle = (1-s)\langle (a,\alpha), (p,1)\rangle \geq (1-s)\,\left(\frac{s}{1-s} + \alpha\right) \geq s + 0$$

□

4. 分类结果

在本节中，我们将了解 Fine 谱 $\mathcal{S}^F(d)$。对于格线段，这很容易：

$$\mathcal{S}^F(1) = \left\{ \frac{2}{k} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}_{>0} \right\}, \tag{5}$$

但对于多边形而言，问题已经并非平凡（参见 §4.1），在那里我们将得到完整的刻画。在 §3.1 和 §3.3 中发展了一些方法，并在 §3.2 中介绍了一些计算工具之后，我们将范围缩小到 $\mathcal{S}^F(3)$（§ 4.2），并在 §4.3 中确定所有 d 的有限集合 $\mathcal{S}^F(d) \cap \mathbb{Q}_{\geq d-1}$。

4.1. $d = 2$。

要对二维中的 Fine 谱进行分类，我们首先需要描述所有可能的 Fine 核心正规构型。这些构型对应于以原点为唯一内部格点的二维格多面体；在这种情况下，它们对应于 16 个自反多面体，见 [PRV00, KOS20]。

根据引理 3.5 对这 16 种构型进行筛选后，我们只得到一种不含对置顶点的构型。我们将此作为一条注记陈述。

注 4.1. 唯一不含对置顶点的二维 Fine 核核心法向量构型由以下向量给出： $\mathcal{A} = \{(1, 0), (0, 1), (-1, -1)\}$。

另一种方法是采用 Kasprzyk 和 Nill 对指标$l = 1$ 为正整数的环面 l-反射曲面的分类，该分类收录于分次环数据库 [BK]中；也可以采用 [Oda78] 中的分类。在这里，我们只关注这样一种二维多面体：其 Fine 核核心法向量构型对应于射影空间 $\mathbb{P}^2$ 作为环面簇的正规扇。现在陈述我们的分类结果。

定理 4.2. 二维精细 $\mathbb{Q}$-余次数谱具有如下形式

$$S^F(2) = \left\{ \frac{2}{k} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}_{>0} \right\} \cup \left\{ \frac{3}{k} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}_{>0} \right\}.$$

证明。 由引理 3.5 和第 3.1 节可知，若一个二维格多面体 P 含有对置顶点，则对于某个 $k \in \mathbb{Z}_{>0}$，有 $\mu^F(P) = \frac{k}{2}$，这适用于 16 个自反多面体中的 15 个。此外，对于给定的这类 $k \in \mathbb{Z}_{>0}$，根据 (5) 以及相同的投影和提升论证，我们可以找到一个满足 $\mu^F(P) = \frac{k}{2}$ 的多面体 P。

因此，我们感兴趣的唯一 Fine 核心正规构型是 $\mathcal{A}$，如注 4.1 所示。对于标准单形，有 $\mu^F(\Delta_2) = 3$，因此利用齐次性 (2)，我们可以通过将 Δ_2 缩放任意 $k \in \mathbb{Z}_{>0}$，找到一个多面体 P，使得 $\mu^F(P) = \frac{k}{3}$ 具有这一 Fine 核心正规构型，正如所需。□

注 4.3. 按照定义 3.7 的记号，我们得到 $\mathcal{I}_2 = \{2, 3\}$。

4.2. $d = 3$。 为了研究更高维的情形，我们再次需要对以原点为唯一内部格点的格多面体进行分类。即使在维数为 3 时，这也颇具挑战性。为此，我们采用了 Kas 10|在|中整理的环面正则 Fano 三维簇分类，该分类来自分次环数据库。这个数据库包含 674,688 个此类多面体。直观上，我们可以尝试通过讨论 (MILP$_A^{\pm}(L,\ U)$) 后提到的谱探索过程来确定 μ^F 的所有取值，但我们将说明如何改为筛选这个数据库。

命题 4.4. 当 $\mu^F(P)$ 中的 P遍历所有三维格多面体时，这些有理数的分子的集合为

$$\mathcal{I}_3 \subseteq \mathcal{I}_2 \cup \{4, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 20\}.$$

证明. 根据分次环数据库的分类，三维情况下共有 674,688 种可能的 Fine 核核心法向量构型。利用引理 3.5 和注 4.3，我们知道 $\mathcal{I}_2 = \{2, 3\} \subset \mathcal{I}_3$，从这里开始，我们只关注 4,979 种构型。根据推论 3.8，我们只需考虑顶点构成单形的 Fine 核核心法向量构型。筛选后，只剩下 8 种这样的构型，即

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{19} &= \{[1,-2,-5],[-2,2,7],[0,1,0],[1,0,0]\} \\
\mathcal{A}_{17} &= \{[-1,1,-5],[1,-2,7],[0,1,0],[1,0,0]\} \\
\mathcal{A}_{11} &= \{[1,0,0],[0,1,0],[-2,1,5],[1,-1,-3]\} \\
\mathcal{A}_{13} &= \{[-1,1,-4],[1,-2,5],[0,1,0],[1,0,0]\} \\
\mathcal{A}_{20} &= \{[-2,2,-5],[1,-3,5],[0,1,0],[1,0,0]\} \\
\mathcal{A}_{7} &= \{[-1,1,-2],[1,-2,3],[0,1,0],[1,0,0]\} \\
\mathcal{A}_{5} &= \{[-1,1,-1],[1,1,2],[0,1,0],[1,0,0]\} \\
\mathcal{A}_{4} &= \{[-1,-1,-1],[0,0,1],[0,1,0],[1,0,0]\}
\end{aligned} \tag{6}$$

其对应的分子分别为 19、17、11、13、20、7、5 和 4。根据定理 3.8，结论得证。□

根据前面的讨论和结果，我们可以得出三维情况下 Fine 谱的分类。

定理 4.5。 三维 *Fine* $\mathbb{Q}$-余次数谱的形式为

$$S^F(3) = \left\{ \frac{q}{k \cdot \ell} \middle| q \in \{2, 3, 4, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}, \ell \in S_q \text{ and } k \in \mathbb{Z}_{>0} \right\}.$$

其中 S_q 是一个非空正整数集合，取决于 q。

证明。 根据命题 4.4，若三维 Fine 核心正规构型的顶点中有 2 个或 3 个满足存在系数为正的线性关系，则根据定理 4.2，对于某个 $k \in \mathbb{Z}_{>0}$，$\mu^F(P) = \frac{k}{2}$ 或 $\mu^F(P) = \frac{k}{3}$。

对于给定的此类 $k \in \mathbb{Z}_{>0}$，根据 §3.1 中的论证，我们可以找到一个三维多面体 P，使得 $\mu^F(P) = \frac{k}{2}$ 或 $\mu^F(P) = \frac{k}{3}$。这意味着 $S_2 = S_3 = \{1\}$。因此，若 P 是一个 Fine 核为零维的三维格多面体，则 $\mu^F(P)$ 的分子只能属于集合

$$\{4, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 20\},$$

由 (6) 中的 Fine 核心正规构型得到。通过找出其 Fine Q-余次数具有此类分子的多面体，再利用 (2) 确定 S_q，我们的分类便告完成。

我们设 $S_4 = \{1\}$，因为 $\mu^F(\Delta_3) = 4$。
根据表 1 中给出的低体积多面体的 Fine Q-余次数计算，对于 $q = 5$，我们得到

$$P_5 = \operatorname{conv}([0,0,0],[1,0,0],[1,2,0],[1,0,2]), \quad \mu^F(P_5) = \frac{5}{2}$$

因此我们看到 $2 \in S_5$，但 $1 \notin S_5$。类似地，对于 $q = 7$，我们得到

$$P_7 = \operatorname{conv}([0,0,0],[1,0,0],[0,1,0],[3,8,15]), \quad \mu^F(P_7) = \frac{7}{6}.$$

因此 $6 \in S_7$。
对于 $q \in \{11, 13, 17, 19, 20\}$，我们按照上述过程构造一个多面体，并得到 $q = 11$ 对应的格多面体

$$P_{11} = 5 \cdot \operatorname{conv}\left([10,-1,4], \left[-2,-1,-\frac{4}{5}\right], [-2,-1,0], [-2,5,-2]\right),$$

使得 $\mu^F(P_{11}) = \frac{11}{60}$ 和 $60 \in S_{11}$。对于 $q = 13$，我们得到

$$P_{13} = 15 \cdot \operatorname{conv}\left([15,-2,-4], [-1,-2,0], \left[-1,-2,-\frac{4}{5}\right], \left[-1,\frac{10}{3},\frac{4}{3}\right]\right),$$

使得 $\mu^F(P_{13}) = \frac{13}{240}$，因此 $240 \in S_{13}$。对于 $q = 17$，类似地，我们得到

$$P_{17} = 21 \cdot \operatorname{conv}\left([9,-2,-2], [-1,-2,0], \left[-1,-2,-\frac{4}{7}\right], \left[-1,\frac{14}{3},\frac{4}{3}\right]\right),$$

其中 $\mu^F(P_{17}) = \frac{17}{420}$，因此 $420 \in S_{17}$。取 $q = 19$，我们得到多面体

$$P_{19} = 21 \cdot \operatorname{conv}\left(\left[\frac{37}{3},-2,\frac{11}{3}\right], \left[-1,-2,-\frac{1}{7}\right], [-1,-2,-1], [-1,8,-3]\right),$$

对于该情形，$\mu^F(P_{17}) = \frac{19}{840}$。因此 $840 \in S_{19}$。最后，在 $q = 20$ 的情形下，我们注意到 $\begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix}$ 的行列式是 5 的倍数，且与 b 的选择无关。因此，只需考察 Fine Q-余次数的分子为 4 的多面体，即 $20 \notin \mathcal{I}_3$，便可得到 $q = 20$ 的取值，从而完成证明。□

值得指出的是，在三维 Fine 谱的分类中，定理 4.5 的陈述里关于 $q \geq 5$ 的集合 S_q 尚未完全确定。

4.3. 维数为 *d*中的分类结果。到目前为止，我们研究了低维情形下的 Fine 谱。根据上述结果，我们很容易推断，研究维数大于 3 时的 Fine 谱，需要处理规模相差若干数量级的多个混合线性规划。回想一下，谱的分类是通过分别求解每个混合线性规划（针对若干个固定的 $\varepsilon > 0$），并列出所有不同的取值而得到的。因此，在维数为 4 时就采用这一过程并不可行。不过，由于我们关注的是适用于任意维数 d的一般分类结果，因此能够陈述一些在任何维数下都成立的一般事实。为此，Victor Batyrev 和 Benjamin Nill 于 2006年提出的一次格

多面体分类将非常有用，参见 [BN06]。

d 维多面体的次数 P满足 deg(P) $= d+1-$ cd(P)。为了得到我们的分类，我们首先需要陈述一些定义。

定义 4.6。给定 $\mathbb{R}^k$ 中的格多面体 P_0、……、P_t，其 *Cayley* 和 $P_0 \star \cdots \star P_t$是以下集合的凸包：

$$(P_0 \times 0) \cup (P_1 \times e_1) \cup \cdots \cup (P_t \times e_t) \subseteq \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^t$$

其中 e_1、……、e_t 是 $\mathbb{R}^t$ 的标准基。

定义 4.7。如果一个 d 维格多面体 P 是线段 $[0, h_1]$、……、$[0, h_d]$的 Cayley 和，则称其为高度为 h_1、……、h_d 的 Lawrence 棱柱。

定义 4.8。对于 $d \geq 2$，P 维格多面体 d 被称为例外的，如果它是一个以二维标准三角形的 2 倍 $d-2$ 重棱锥，其顶点为 $2\Delta_2 :=$ conv{(0，0)、(2，0)、(0，2)}。

我们还需要以下命题。

命题 4.9. 设 P 是一个关于 $d \geq 2$ 的 d 维例外单形。那么

$$\mu^F(P) = d - \frac{1}{2}.$$

证明。P 的相关有效不等式由 $x_1 \geq 0$、$x_2 \geq 0$ 和 $-x_1 - x_2 \geq -2$ 给出。因此，点 $p = (p_1, p_2) \in$ 核心$^F(P)$ 满足 $p_1 = n^F(P)$、$p_2 = n^F(P)$ 和 $-p_1 - p_2 = -2 + n^F(P)$。解出 Fine 数可得 $n^F(P) = \frac{2}{3}$。由定理 3.12，因 $\mu^F(P) > 1$，结论由归纳法得出。□

一次格多面体的主要分类定理可表述如下。

定理 4.10. [BN06, 定理 2。5] 设 P 是一个维数任意的格多面体，维数为 d。那么 $\deg(P) \leq 1$ 当且仅当 P 是一个例外单形或 *Lawrence* 棱柱。

此外，根据 [BN06, 命题 1.4]，我们得到：d维格多面体 P 的 deg(P) $= 0$，当且仅当 P 是一个单形，即其顶点构成一个仿射格基。我们还知道，对于高度为h_1，……，h_d 的 Lawrence 棱柱 P，若这些高度满足 $\sum_{i=1}^{d} h_i \geq 2$，则 deg($P$) $= 1$。

现在我们可以陈述主要的分类定理。

定理 4.11。设 P 是一个维数为 $d \geq 2$的格多面体。那么：

i) $\mu^F(P) \cong d+1$，当且仅当在幺模等价意义下 $P \cong \Delta_d$。否则：*ii)* $\mu^F(P) = d$，当且仅当 P 投影到维数为 $d-1$的标准单形 Δ_{d-1} 上。若非如此：*iii)* $\mu^F(P) = d - \frac{1}{2}$，当且仅当 P是一个例外单形。最后：*iv)* $\mu^F(P) = d-1$，若 P投影到 Δ_{d-2}，且 P不满足前述任何一种情形的条件。

此外，*Fine* $\mathbb{Q}$-余次数在范围 $d-1 \leq \mu^F(P) \leq d+1$ 内不能取除上述值以外的其他值。

证明。首先，对于一个 a d 维格多面体 P，我们有

$$\mu(P) \leq \mu^F(P) \leq \mathrm{cd}(P) \leq d+1.$$

为证明 i)，我们利用这样一个事实：$\mu(P)$ 和 cd(P) 等于 $d+1$，当且仅当 deg(P) $= 0$ 且 $P \cong \Delta_d$；这一点已在 [DRHNP14] 中证明。因此，我们可以得出结论：$\mu^F(P) = d+1$，当且仅当 $P \cong \Delta_d$。

现在回想一下，在任意投影 π 下，我们有

$$\mu^F(\pi(P)) \leq \mu^F(P).$$

为证明 ii)，我们首先假设 $\mu^F(P) = d$，即 $\deg(P) = 1$。由命题 4.9 可知，由于 P 不是例外单形，因此它必定是 Lawrence 棱柱，或者等价地说，是一维线段的 Cayley 和。因此， P 投影到 Δ_{d-1}。反过来，若现在假设存在一个投影 π，将 P 映射到 Δ_{d-1}，根据上文的评述，我们有 $d \leq \mu^F(P)$。但由于 $\mathrm{cd}(P) = d$，因此必有 $\mu^F(P) = d$，由此证明 ii)。

为证明 iii)，首先假设 $\mu^F(P) = d - \frac{1}{2}$。与前一种情况一样，我们有 $\deg(P) = 1$，因此由定理 4.10 可知，由于我们知道 P 不是 Lawrence 棱柱，它必定是例外单形。为证明其逆命题，我们使用命题 4.9 得出 $\mu^F(P) = d - \frac{1}{2}$，正如所需。

最后，为了证明 iv），如果 P 投影到 Δ_{d-2}，我们知道 $d-1 = \mu^F(\Delta_{d-2}) \leq \mu^F(P)$。但由于我们不属于前面讨论的任何一种情况，根据定理 4.10，我们知道一次格多面体的分类已完成，因此必有 $\deg(P) \geq 2$，这意味着 $\mathrm{cd}(P) \leq d-1$，从而迫使 $\mu^F(P) = d-1$。

为了证明 $\mu^F(P)$ 在 $d-1$ 和 $d+1$ 之间没有其他取值，注意如果情况如此，那么 $\mu^F(P) > d-1$ 会迫使 $\mathrm{cd}(P) > d-1$，或者等价地，$\deg(P) < 2$。鉴于我们已经完整分类了 $\deg(P)$ 为 0 或 1 的情况，Fine Q-余次数在此区间内不会有其他取值。□

因此，利用此定理，我们可以确定 P 个 d 维多面体的 Fine Q-余码谱具有如下形式：

$$\mathcal{S}^F(d) = \left\{ d+1, d, d-\frac{1}{2}, d-1, \ldots \right\}$$

其中，从 $d-1$ 到谱中下一个值之间的间隔终点仍有待确定。

问题 4.12. 确定下一个间隔的终点将很有意思：

$$\max\left(\mathcal{S}^F(d) \cap \mathbb{Q}_{<d-1}\right).$$

问题 4.13. 我们的定理意味着，整体 Fine 谱

$$\mathcal{S}^F \coloneqq \bigcup_{d \geq 1} \left(\mathcal{S}^F(d) - d - 1\right) \subset \mathbb{Q}_{\leq 0}$$

从离散部分 0，-1，$-3/2$，-2，.....开始。它在 -2 之后仍然是离散的吗？第一个聚点在哪里？从哪个点开始变得稠密？

参考文献

[AGH+17] Benjamin Assarf、Ewgenij Gawrilow、Katrin Herr、Michael Joswig、Benjamin Lorenz、Andreas Paffenholz 和 ThomasRehn。使用 polymake 计算凸包并统计格点。《数学规划计算》，9：1–38，2017年。[Bal18] Gabriele Balletti。格多面体的分类、体积界与普适埃尔哈特不等式。博士论文，斯德哥尔摩大学数学系，2018年。[BK] Gavin Brown 和 Alexander Kasprzyk。分次环数据库。http://www.grdb.co. uk/Index。[BN06] Victor Batyrev 和 Benjamin Nill。没有内部格点的格多面体的倍数。《莫斯科数学杂志》，7，2006年2月。[BN07] Victor Batyrev 和 Benjamin Nill。没有内部格点的格多面体的倍数。《莫斯科数学杂志》，7：195–207，2007年。[DC17] Gabriele Di Cerbo。关于藤田谱猜想。《数学进展》，311：238–248，2017年。

[DRHNP14] Sandra Di Rocco、Christian Haase、Benjamin Nill 和 Andreas Paffenholz。多面体伴随理论。代数与数论，7(10)：2417–2446，2014年。 [Fuj92] Takao Fujita。关于极化流形的 Kodaira 能量与伴随约化。《数学手稿》，76(1)：59–84，1992年。 [Fuj95] Takao Fujita。关于极化簇的 Kodaira 能量与分类。《数学展望》，8(2)：183–196，1995年。 [GH23] Sofía Garzón 和 Christian Haase。Fine 多面体伴随理论。《洛塔尔组合学研讨会》，89B：第62篇，12页，2023年。[GJ00] Ewgenij Gawrilow 和 Michael Joswig。Polymake：用于分析凸多面体的框架。载于《多面体——组合学与计算》，第43–73页。施普林格，2000年。[Kas10] Alexander Mieczyslaw Kasprzyk。典范托里克 Fano 三维簇。62 1309，2010 6 1293( ): – 。[KN11] Alexander Mieczyslaw Kasprzyk 和 Benjamin Nill。高指标自反多面体与数字12。*arXiv* 预印本 *arXiv:1107.4945*，2011年7月。 [KOS20] Florian Kohl、McCabe Olsen 和 Raman Sanyal。无条件反射多面体。《离散与计算几何》，64(2)：427–452，2020年。 [LZ91] Jeffrey C Lagarias 和 Günter M Ziegler。含有固定数量子格内部点的格多面体的界。《加拿大数学杂志》，43(5)：1022–1035，1991年。 [Nil24] Benjamin Nill。Batyrev 与 Juny 关于 Gorenstein 多面体的猜想之证明。《离散与计算几何》，72(4)：1519–1529，2024年。[Oda78] Tadao Oda。环面嵌入及其应用，塔塔基础研究院数学与物理讲义第57卷。塔塔基础研究院，孟买；施普林格出版社，柏林—纽约，1978年。基于与 Katsuya Miyake 的合作研究。[Paf15] Andreas Paffenholz。多面体 Q-余维谱的有限性。《美国数学会会刊》，143(11)：4863–4873，2015年。 [PRV00] Bjorn Poonen 和 Fernando Rodriguez-Villegas。格多边形与数字12。《美国数学月刊》，107(3)：238–250，2000年。

Sofía Garzón Mora ，数学系 ，柏林自由大学 ，14195 柏林 ，德国。
电子邮箱地址： sofia.garzon.mora@fu-berlin.de

Christian Haase，数学系，柏林自由大学，14195 德国柏林。电子邮箱地址：haase@math.fu-berlin.de