arXiv:2601.03147v1 [math.DS] 6 Jan 2026

正规化流与 Poincar´e-Dulac 理论

A. O. Chernyshev

莫斯科国立罗蒙诺索夫大学

2026年1月7日

摘要

本文针对奇点附近的微分方程组，提出一种研究 Poincar´e–Dulac 正规形理论的新方法。利用连续平均法，我们构造了一种将向量场变换为其正规形的正规化流。我们证明，在形式向量场（由幂级数给出）的代数中，归一化过程能够实现完全正规化。考虑收敛性时，我们证明收敛半径存在一个阶为 $1/(1+A\delta)$ 的下界，其中 $A>0$，且 $\delta\to+\infty$。基于本文的方法以及 [17], 的方法，我们为关于正规化变换收敛性的 Siegel–Brjuno定理给出一种新的证明。

参考文献：16项。

1 引言与基本定义

考虑微分方程组

$$\dot z=\widehat u(z),\qquad z\in\mathbb{C}^n,\qquad \widehat u\colon(\mathbb{C}^n,0)\to(\mathbb{C}^n,0). \tag{1.1}$$

假设向量场的线性部分 $\widehat u$ 具有以下形式：

$$\frac{\partial\widehat u}{\partial z}(0)=\Lambda=\operatorname{diag}(\lambda),\qquad \lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{C}^n. \tag{1.2}$$

本文研究如何在奇点附近为系统 (1.1) 构造连续的正规化过程。对于微分方程组 (1.1)，Poincar´e 提出了逐步进行的正规化过程（见 [1, 7]）。Birkhoff 提出了哈密顿量版本的正规化（见 [4]）。设e_s为第 s 个标准基向量，$s=1,\dots,n$。我们使用如下记号：

$$\mathbf{k}=(k_1,\dots,k_n)\in\mathbb{Z}^n,\qquad |\mathbf{k}|=|k_1|+\ldots+|k_n|,\qquad \mathbf{z}^{\mathbf{k}}=z_1^{k_1}\cdots z_n^{k_n},$$
$$\mathbf{k}_s=\mathbf{k}-e_s,\qquad \langle\lambda,\mathbf{k}\rangle=\sum_{j=1}^n\lambda_jk_j.$$

[0]作者的研究得到了理论物理与数学进步基金会“BASIS”的资助。

此外，我们设

$$\mathbb{Z}^n_\diamond = \{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n_+ \colon |\mathbf{k}| \geq 2\}.$$

将向量场 $\widehat{u}$ 表示为

$$\widehat{u}(z) = \Lambda z + \widehat{u}_\diamond, \quad \widehat{u}^j_\diamond = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n_\diamond} \widehat{U}^j_{\mathbf{k}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}} e_j, \quad \widehat{U}_{\mathbf{k}} = (\widehat{U}^1_{\mathbf{k}}, \ldots, \widehat{U}^n_{\mathbf{k}})^T \in \mathbb{C}^n, \tag{1.3}$$

其中 $j = 1$，.....， n，且 e_j是第 j 个分量为 1 的单位向量 .

定义

$$\mathbf{L}_\lambda = \{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n_\diamond \colon \langle \lambda, \mathbf{k}_s \rangle = 0 \text{ for some } s \in \{1, \ldots, n\}\}. \tag{1.4}$$

如果 $\langle \lambda,\mathbf{k}_s \rangle = 0$，则称单项式 $\mathbf{z}^{\mathbf{k}} e_s$ 为共振单项式。任何确定共振单项式的整数向量 $\mathbf{k} \in \mathbf{L}_\lambda$ 称为共振向量。数值 $|\mathbf{k}|$ 称为共振阶数。根据庞加莱-杜拉克理论 [1, 7], ，利用适当的变量变换，可以消去向量场中任意有限个非共振单项式。若要消去所有非共振项，则需要使用泰勒级数通常会发散的坐标变换。通过归一化过程得到的向量场称为该向量场的正规形。本文考虑线性部分为恒等变换的变量变换。

在 $\widehat{u}$解析的假设下，正规化变换的收敛或发散是该理论中的一个核心问题。尽管如此，Eliasson 还提出了另一个更难的问题：正规化过程中产生的正规形的收敛或发散。在不存在共振的哈密顿情形下，有一条结论指出，如果归一化收敛，那么该系统就是局部完全可积的。文献 [18, 10, 9, 11]中提出了这一结论的若干种逆命题。

本文证明了关于向量场正规化的 Siegel-Brjuno 定理，该定理推广了 Siegel 定理。Siegel–Brjuno 定理的精确表述将在第6节给出。Siegel 定理（见 [1, 7, 3]）断言：如果特征值 (1.2) 满足丢番图条件，即存在 $C_0 > 0$ 和$\mu > 0$ ，使得对每个 $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n_\diamond$，

$$|\langle \lambda, \mathbf{k} \rangle - \lambda_j| \geq \frac{C_0}{|\mathbf{k}|^\mu}, \qquad 1 \leq j \leq n,$$

那么正规形是平凡的，并且方程 (1.1) 可通过解析变量变换化为 $\dot{z} = \Lambda z$ 。

该定理的经典证明方法有两种：研究定义共轭变换的形式级数，或采用迭代方法。Siegel 在 [13] 中使用了第一种方法。后来，Siegel 定理在 [5] 中得到推广（将丢番图条件替换为 Brjuno 条件）。第二种方法由 R¨ussmann [12] 采用，并在 [1, 6] 这些书中提出（假设特征值满足丢番图条件）。Brjuno 定理的一个较简短证明见[3]。

在哈密顿情形下，如果事先知道正规形是平凡的，即具有 $N = \sum_{j=1}^n w_j z_j \overline{z_j}$ 的形式，那么根据 Bruno–R¨ussmann 定理 [5, 12] （另见 [14]），在频率 ω满足 Brjuno 条件时，正规化是收敛的。

正规化过程是通过无穷多个变量变换的复合构造的，这些变量变换逐次按次数对系统进行正规化；参见 [1]。

D. V. Treschev 提出了一种基于连续平均法的新方法，用于哈密顿系统的正规化（见 [16]）。这一方法在 [15] 中得到了阐述。在 [15] 中，研究了非共振椭圆奇点附近所有哈密顿向量场构成的空间。在该空间上定义了一个特定的微分方程，它生成一个流，使哈密顿系统趋近其正规形。沿该流的平移对应于一次正则坐标变换。由此构造出一个连续的正规化过程。

本文提出一种基于连续平均法的新方法，用于对奇点附近的微分方程组进行正规化；参见 [16]。令 $\mathcal{F}$ 为形式级数构成的空间（实际上是一个李代数）：

$$u(z) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n_\diamond} U_{\mathbf{k}}\mathbf{z}^{\mathbf{k}}, \qquad u \in \mathcal{F}. \tag{1.5}$$

我们在 $\mathcal{F}$ 上赋予吉洪诺夫拓扑，即，若对任意 $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n_\diamond$ 以及任意 $m = 1, ..., n$，系数序列 $\{(U^m_{\mathbf{k}})^{(j)}\}_{j=1}^{\infty}$ 均收敛，则称序列 $\{u^{(j)}\}_{j=1}^{\infty}$ 收敛。

本文得到了以下结果：

1. 第 2 节中，我们构造了一个正规化流 ψ^δ： $\mathcal{F} \to \mathcal{F}, \delta \in \mathbb{R}_+$。考虑向量场空间上的交换子 $[,]$，使得对于任意 u， $v \in \mathcal{F}$：

$$[u, v]_i = \sum_{j=1}^{n} \left(u_j \frac{\partial v_i}{\partial z_j} - v_j \frac{\partial u_i}{\partial z_j} \right).$$

流 ψ^δ 由 $\mathcal{F}$ 上的某个微分方程定义：

$$\partial_\delta u = -[\xi u, \Lambda z + u], \qquad u\big|_{\delta=0} = \widehat{u}. \tag{1.6}$$

I在方程 (1.6) 中， ξ 是 $\mathcal{F}$ 上的某个线性算子，在第 2 节中定义。 .

2. 第 3 节研究正规化流 ψ^δ 的性质。特别地，我们证明哈密顿向量场子代数在沿流 ψ^δ 平移时保持不变。此外，本节还表明，流 ψ^δ 保持向量场的离散对称性。

3. 第 4 节中，我们证明沿流 ψ^δ 的平移

$$\Lambda z + \widehat{u}_\diamond \mapsto \Lambda z + \psi^\delta(\widehat{u}_\diamond), \qquad \widehat{u}_\diamond \in \mathcal{F}$$

将向量场 $\widehat{u}_\diamond$ 变换为相应的正规形 $\delta \to +\infty$。正规向量场空间 $\mathcal{N} \subset \mathcal{F}$ 定义为

$$\mathcal{N} = \{u \in \mathcal{F} \colon U^s_{\mathbf{k}} \neq 0 \text{ implies } \langle \lambda, \mathbf{k}_s \rangle = 0\}.$$

因此，$\lim_{\delta\to+\infty} \psi^\delta u \in \mathcal{N}$，其中极限是相对于 $\mathcal{F}$上的吉洪诺夫拓扑而言的。

4. 第5节讨论正规化理论的解析方面。我们将流 ψ^δ 限制在解析函数空间 $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$ 上：

$\mathcal{A} = \{u \in \mathcal{F}\colon \ \exists a,\ b$ 使得 $|U^m_{\mathbf{k}}| \le ae^{b|\mathbf{k}|}$ 对所有 $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n_\diamond$ 以及 $m = 1, \ldots\ldots, n\}$.

接下来，在 $\mathcal{A}$中我们引入一种更自然的拓扑，它比吉洪诺夫拓扑强得多。我们有 $\mathcal{A}=\cup_{\rho>0}\mathcal{A}^\rho$，其中 $\mathcal{A}^\rho$ 是一个带有范数的巴拿赫空间

$$\|u\|_\rho=\max_{m\in\{1,\dots,n\}}\sup_{\mathbf{z}\in\mathcal{D}_\rho}|u^m(\mathbf{z})|,\qquad \mathcal{D}_\rho=\{\mathbf{z}\in\mathbb{C}^n\colon |z_j|<\rho,\quad j=1,\dots,n\}.$$

本节证明，对于任意向量场 $\widehat{u}\in\mathcal{A}$，我们都有 $\psi^\delta(\widehat{u})\in\mathcal{A}$，对每个$\delta\geq 0$均成立。然而，随着 δ 增大，解析性多圆盘会缩小。文中给出了关于解析域宽度的估计；其数量级为 $1/\delta$。

5. 第6节专门证明关于正规化收敛性的 Siegel–Brjuno定理。证明基于连续平均法（见 [16]）。此外，为证明该定理，我们还使用了所谓的超收敛方法。证明基于 [17] 中提出的思想。

6. 第7节包含用于证明第4节中的解析域定理和 Siegel–Brjuno定理的技术性材料。

作者感谢 D.V. Treschev 进行的多次讨论并提出宝贵意见。作者还感谢审稿人和编辑委员会所提供的有益评论。

2 连续平均法

这里我们构造一个流 ψ^δ，$\delta\in\mathbb{R}$ 在 $\mathcal{F}$ 上，该流渐近地（在 $\delta\to+\infty$时的吉洪诺夫拓扑中）将向量场 $\widehat{u}\in\mathcal{F}$ 变为相应的正规向量场 $\psi^{+\infty}\widehat{u}\in\mathcal{N}$。

为构造这个流，我们采用 [16]中所表述的连续平均法。

除了系统（1.1）之外，我们还考虑系统

$$Z'=f(Z,\delta),\qquad Z(z,\delta)\big|_{\delta=0}=z,\qquad f(Z)=O(|Z|^2),\qquad Z'=\frac{d}{d\,\delta}Z,\qquad (2.1)$$

其中，$f(Z)=O(|Z|^2)$ 是某个函数，其级数从二次项开始。我们将在下文定义函数 $f(Z)$。我们将变量 Z 记为 z。系统（2.1）的解定义了一个变量变换族：$\mathbf{z}\mapsto\mathbf{z}_\delta$. 将这一变量变换代入（1.1），得到

$$\dot z=u(z,\delta),\qquad u(z,\delta)=\Lambda z+\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n_\diamond}U_{\mathbf{k}}(\delta)\mathbf{z}^{\mathbf{k}}.\qquad (2.2)$$

对（2.2）关于 δ 求导，并对（2.1）关于 t求导，再将一个方程减去另一个方程，得到

$$\partial_\delta u=-[f,u],\qquad u\big|_{\delta=0}=\widehat{u}.$$

连续平均法的主要思想是令 f 取形式 ξu，其中 ξ 是定义如下的 $\mathcal{F}$上的线性算子。因此我们得到

$$\partial_\delta u=-[\xi u,u],\qquad u\big|_{\delta=0}=\widehat{u}.\qquad (2.3)$$

算子 ξ 的选择取决于我们希望得到的目标正规形。在以下各节中，我们将证明，采用所选算子 ξ 后，方程 (2.3) 的解存在且唯一。

2.1 算子 ξ

对于每个 $u \in \mathcal{F}$，我们令

$$(\xi u)^m = -\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n_\diamond,\ \langle\lambda,\mathbf{k}_m\rangle\neq 0} e^{-i\arg\langle\lambda,\mathbf{k}_m\rangle}\, U^m_{\mathbf{k}}\mathbf{z}^{\mathbf{k}}, \qquad m\in\{1,\dots,n\}. \tag{2.4}$$

我们还设

$$u=\Lambda z+u_0+u_*, \qquad u_0^m=\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n_\diamond,\ \langle\lambda,\mathbf{k}_m\rangle=0} U^m_{\mathbf{k}}\mathbf{z}^{\mathbf{k}}, \qquad u_*^m=\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n_\diamond,\ \langle\lambda,\mathbf{k}_m\rangle\neq 0} U^m_{\mathbf{k}}\mathbf{z}^{\mathbf{k}}.$$

因此，我们得到 (2.3) 的一个更详细形式：

$$\begin{aligned} \partial_\delta u &= l(u)+v_0(u)+v_*(u), \qquad u\big|_{\delta=0}=\widehat{u},\\ l(u)&=-[\xi u,\Lambda z], \qquad v_0=-[\xi u,u_0], \qquad v_*(u)=-[\xi u,u_*]. \end{aligned} \tag{2.5}$$

对选择 (2.4) 的非正式解释是，在从 (2.5) 中去掉项v_0 和 v_* 之后，我们得到

$$\begin{aligned} \partial_\delta u &= l(u), \qquad u\big|_{\delta=0}=\widehat{u},\\ l^m(u)&=-\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n_\diamond,\ \langle\lambda,\mathbf{k}_m\rangle\neq 0} |\langle\lambda,\mathbf{k}_m\rangle|\, U^m_{\mathbf{k}}\mathbf{z}^{\mathbf{k}}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

方程 (2.6) 很容易求解：

$$U^m_{\mathbf{k}}=e^{-|\langle\lambda,\mathbf{k}_m\rangle|\delta}\,\widehat{U}^m_{\mathbf{k}}, \qquad \langle\lambda,\mathbf{k}_m\rangle\neq 0.$$

我们看到，当 $\delta\to+\infty$时，由 (2.6) 生成的流将向量场映射到正规形子空间 $\mathcal{N}$。

2.2 v_0 和 v_*的计算

对于每个$U=\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n_\diamond} U_{\mathbf{k}}\mathbf{z}^{\mathbf{k}}$，定义 $p^m_{\mathbf{s}}(U)=U^m{}_{\mathbf{s}}$，$m=1,\dots,n$。作变量代换

$$U^m_{\mathbf{k}}=\mathcal{U}^m_{\mathbf{k}}\, e^{-|\langle\lambda,\mathbf{k}_m\rangle|\delta}. \tag{2.7}$$

将 (2.7) 代入 (2.5)，得到

$$\partial_\delta\mathcal{U}^m_{\mathbf{d}}=\mathbf{v}^m_{0,\mathbf{d}}+\mathbf{v}^m_{*,\mathbf{d}}, \qquad \mathcal{U}_{\mathbf{d}}\big|_{\delta=0}=\widehat{U}_{\mathbf{d}}, \tag{2.8}$$

其中 $\mathbf{v}^m_{0,\,\mathbf{d}}$ 和$\mathbf{v}^m_{*,\,\mathbf{d}}$ 由以下公式给出。

如果 $\langle\lambda,\mathbf{d}_m\rangle\neq 0$:

$$\mathbf{v}^m_{0,\mathbf{d}}=e^{-i\arg\langle\lambda,\mathbf{d}_m\rangle}\sum_{p=1}^{n}\left(\sum_{\substack{\mathbf{k}+\mathbf{s}-\mathbf{d}=e_p,\\ \langle\lambda,\mathbf{k}_m\rangle=0,\\ \langle\lambda,\mathbf{s}_p\rangle\neq 0}} k_p\mathcal{U}^m_{\mathbf{k}}\mathcal{U}^p_{\mathbf{s}}-\sum_{\substack{\mathbf{k}+\mathbf{s}-\mathbf{d}=e_p,\\ \langle\lambda,\mathbf{s}_p\rangle=0,\\ \langle\lambda,\mathbf{k}_m\rangle\neq 0}} k_p\mathcal{U}^m_{\mathbf{k}}\mathcal{U}^p_{\mathbf{s}}\right). \tag{2.9}$$

如果 $\langle\lambda,\ \mathbf{d}_m\rangle=0$:

$$\mathbf{v}^m_{0,\mathbf{d}}=0. \tag{2.10}$$

(2.8) 中的第二项形式为

$$\mathbf{v}^m_{*,\mathbf{d}} = \sum_{p=1}^{n} \sum_{\substack{\mathbf{k}+\mathbf{s}-\mathbf{d}=e_p,\\ \langle\lambda,\mathbf{s}_p\rangle\neq 0,\\ \langle\lambda,\mathbf{k}_m\rangle\neq 0}} k_p \mathcal{U}^m_{\mathbf{k}} \mathcal{U}^p_{\mathbf{s}}\, e^{T_{\mathbf{k}_m,\mathbf{s}_p}\delta} \Big(e^{-i\arg\langle\lambda,\mathbf{k}_m\rangle} - e^{-i\arg\langle\lambda,\mathbf{s}_p\rangle} \Big). \tag{2.11}$$

在 (2.11) 中，我们记

$$T_{\mathbf{k},\mathbf{s}} = |\langle\lambda,\mathbf{k}\rangle + \langle\lambda,\mathbf{s}\rangle| - |\langle\lambda,\mathbf{k}\rangle| - |\langle\lambda,\mathbf{s}\rangle| \le 0. \tag{2.12}$$

首先，我们证明 (2.9)。设 $\langle\lambda,\mathbf{d}_m\rangle \neq 0$。那么，通过直接计算交换子（见 (2.5)），可得

$$\mathbf{v}^m_{0,\mathbf{d}} = \sum_{p=1}^{n} \left(\sum_{\substack{\mathbf{k}+\mathbf{s}-\mathbf{d}=e_p,\\ \langle\lambda,\mathbf{k}_m\rangle=0,\\ \langle\lambda,\mathbf{s}_p\rangle\neq 0}} k_p \mathcal{U}^m_{\mathbf{k}} e^{-i\arg\langle\lambda,\mathbf{s}_p\rangle} \mathcal{U}^p_{\mathbf{s}} - \sum_{\substack{\mathbf{k}+\mathbf{s}-\mathbf{d}=e_p,\\ \langle\lambda,\mathbf{s}_p\rangle=0,\\ \langle\lambda,\mathbf{k}_m\rangle\neq 0}} k_p e^{-i\arg\langle\lambda,\mathbf{k}_m\rangle} \mathcal{U}^m_{\mathbf{k}} \mathcal{U}^p_{\mathbf{s}} \right). \tag{2.13}$$

(2.13) 中的第一个求和遍历满足 $\langle\lambda,\mathbf{k}_m\rangle = 0$ 和 $\langle\lambda,\mathbf{s}_p\rangle \neq 0$ 的 $\mathbf{k}$,$\mathbf{s}$, $\mathbf{d}$。利用

$$\langle\lambda,\mathbf{k}_m\rangle + \langle\lambda,\mathbf{s}_p\rangle = \langle\lambda,\mathbf{d}_m\rangle, \tag{2.14}$$

可得 $0 \neq \langle\lambda,\mathbf{s}_p\rangle = \langle\lambda,\mathbf{d}_m\rangle$。类似地，对于 (2.13) 中的第二个求和，其中$\langle\lambda,\mathbf{k}_m\rangle \neq 0$ 和 $\langle\lambda,\mathbf{s}_p\rangle = 0$，可得 $0 \neq \langle\lambda,\mathbf{k}_m\rangle = \langle\lambda,\mathbf{d}_m\rangle$。因此

$$\mathbf{v}^m_{0,\mathbf{d}} = e^{-i\arg\langle\lambda,\mathbf{d}_m\rangle} \sum_{p=1}^{n} \left(\sum_{\substack{\mathbf{k}+\mathbf{s}-\mathbf{d}=e_p,\\ \langle\lambda,\mathbf{k}_m\rangle=0,\\ \langle\lambda,\mathbf{s}_p\rangle\neq 0}} k_p \mathcal{U}^m_{\mathbf{k}} \mathcal{U}^p_{\mathbf{s}} - \sum_{\substack{\mathbf{k}+\mathbf{s}-\mathbf{d}=e_p,\\ \langle\lambda,\mathbf{s}_p\rangle=0,\\ \langle\lambda,\mathbf{k}_m\rangle\neq 0}} k_p \mathcal{U}^m_{\mathbf{k}} \mathcal{U}^p_{\mathbf{s}} \right), \quad \langle\lambda,\mathbf{d}_m\rangle \neq 0. \tag{2.15}$$

若 $\langle\lambda,\mathbf{d}_m\rangle = 0$，则 $\mathbf{v}^m_{0,\mathbf{d}} = 0$。事实上，考察 (2.13) 中的第一个求和以及 (2.14)，每一项都满足 $\langle\lambda,\mathbf{k}_m\rangle = 0$ 且 $\langle\lambda,\mathbf{s}_p\rangle = \langle\lambda,\mathbf{d}_m\rangle = 0$，这与该求和中的 $\langle\lambda,\mathbf{s}_p\rangle \neq 0$ 矛盾。类似地，当 $\langle\lambda,\mathbf{d}_m\rangle = 0$ 时，(2.13) 中的第二个求和为零。

3 流 ψδ 的性质

3.1 流关于某些子空间的不变性 ψ^δ 关于某些子空间考虑

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_M &= \{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n \colon |\mathbf{k}| \le M\},\\ \mathcal{S}_M &= \{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n \colon \operatorname{Re}\langle\lambda,\mathbf{k}\rangle \le M\}, \qquad M \ge 0. \end{aligned}$$

考虑以下子空间:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\mathcal{B}_M} &= \{u\in\mathcal{F} \colon U^m_{\mathbf{k}} = 0 \text{ for every } m\in\{1,\dots,n\},\ \mathbf{k}\in\mathcal{B}_M\},\\ \mathcal{F}_{\mathcal{S}_M} &= \{u\in\mathcal{F} \colon U^m_{\mathbf{k}} = 0 \text{ for every } m\in\{1,\dots,n\},\ \mathbf{k}\in\mathcal{S}_M\}. \end{aligned}$$

引理 3.1. 流 ψ^δ 相对于 $\mathcal{F}_{\mathcal{B}_M}$ 和 $\mathcal{F}_{\mathcal{S}_M}$不变，即：

1. 若 $\widehat{u} \in \mathcal{F}_{\mathcal{B}_M}$，则对每个 $\delta \geq 0$，$\psi^\delta \widehat{u} \in \mathcal{F}_{\mathcal{B}_M}$。*2.*

若 $\widehat{u} \in \mathcal{F}_{\mathcal{S}_M}$，则对每个 $\delta \geq 0$，$\psi^\delta \widehat{u} \in \mathcal{F}_{\mathcal{S}_M}$。

证明。 我们对$\mathbf{d}$使用归纳法来证明第一个结论。令 $|\mathbf{d}| = 2 \leq M$。观察 (2.8)，并利用 $\mathbf{k} + \mathbf{s} - \mathbf{d} = e_p$，可得

$$\partial_\delta \mathcal{U}^m_{\mathbf{d}} = 0, \qquad \mathcal{U}^m_{\mathbf{d}}\big|_{\delta=0} = 0. \tag{3.1}$$

因此，由 (3.1) 可得，对每个 $\delta \geq 0$，$\mathcal{U}^m_{\mathbf{d}}(\delta) = 0$。现在假设对于所有满足 $|\mathbf{d}| \leq N-1$ 的$\mathbf{d}$，引理的第一个陈述都成立。取满足 $|\mathbf{d}| = N \leq M$ 的$\mathbf{d}$。由 $\mathbf{k} + \mathbf{s} - \mathbf{d} = e_p$，可得 $|\mathbf{k}| \leq N-1, |\mathbf{s}| \leq N-1$。在这种情况下，(2.8) 的形式为

$$\partial_\delta \mathcal{U}^m_{\mathbf{d}} = 0, \qquad \mathcal{U}^m_{\mathbf{d}}\big|_{\delta=0} = 0. \tag{3.2}$$

F由 (3.2) 可得，对于每个 $\delta \geq 0$，$\mathcal{U}^m\mathbf{d}(\delta) = 0$。因此 $\psi^\delta \widehat{u} \in \mathcal{F}_{\mathcal{B}_M}$.

第二个结论也可通过对$\mathbf{d}$作归纳法类似地证明。 □

3.2 对称性与流 ψ^δ

考虑对称性

$$\sigma\colon (z_1, z_2, \ldots, z_n) \mapsto (z_{\sigma(1)}, z_{\sigma(2)}, \ldots, z_{\sigma(n)}),$$

其中 σ 是集合 $\{1, \ldots, n\}$的一个置换。若向量场 $\Lambda z + u$(**z**),$u \in \mathcal{F}$ σ 满足 $\sigma \circ (\Lambda + u) = \Lambda + u$，则称其为不变的。

引理 3.2. 假设 $\Lambda z + \widehat{u}$ 是 σ-不变的。那么，对于每个 $\delta \geq 0$，沿流 $\Lambda z + \psi^\delta \widehat{u}$ 的平移是 σ-不变的。

证明。 对于（2.3）的左端，我们有

$$\sigma \circ \partial_\delta u = \partial_\delta (\sigma \circ u).$$

对于（2.3）的右端，我们得到

$$-\sigma \circ [\xi u, \Lambda z + u] = -[\sigma \circ (\xi u), \sigma \circ (\Lambda z + u)].$$

直接计算表明，$\sigma \circ (\xi u) = \xi(\sigma \circ u)$。因此，

$$\partial_\delta (\sigma \circ (\Lambda z + u)) = -[\xi(\sigma \circ (\Lambda z + u)), \sigma \circ (\Lambda z + u)], \qquad \sigma \circ u\big|_{\delta=0} = \widehat{u}.$$

因此，$\sigma \circ (\Lambda z + u)$ 和 $\Lambda z + u$ 是具有相同初始条件的 (2.3) 的解；从而 $\sigma \circ (\Lambda z + u) = \Lambda z + u$。 □

3.3 哈密顿量结构与流 ψ^δ

考虑哈密顿系统

$$\dot{x} = J\nabla \widehat{H}(x), \qquad x \in \mathbb{R}^{2n}, \tag{3.3}$$

其中， J 是标准辛矩阵， $\widehat{H}(x) = \sum_{|\mathbf{k}|\geq 3} \widehat{h}_{\mathbf{k}} \mathbf{x}^{\mathbf{k}}$ 是系统的哈密顿量。假设 $H_2(x) = (Ax, x)$，其中

$$A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, -\overline{\lambda}_1, \ldots, -\overline{\lambda}_n), \text{ where } \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}. \tag{3.4}$$

根据连续平均法，归一化变量变换（见（2.1））满足

$$x' = \xi J\nabla H(x, \delta). \tag{3.5}$$

令 $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}$ 为哈密顿向量场的李子代数。

引理3.3。 考虑哈密顿系统(3.3)。设其线性部分是(3.4)中定义的对角矩阵。则对于每个 $\delta \geq 0$ ，都有 $\psi^\delta J\nabla \widehat{H}(x) \in \mathcal{H}$。

证明。 为证明引理3.3，我们证明

$$\xi J\nabla H(x) = J\nabla\big(\theta H(x)\big), \qquad \theta\colon H(x) \mapsto \sum_{\langle\lambda,\mathbf{k}\rangle\neq 0} e^{-i\arg\langle\lambda,\mathbf{k}\rangle} h_{\mathbf{k}} \mathbf{x}^{\mathbf{k}}.$$

事实上，对于任意 $s \leq n$,

$$\begin{aligned}\big(\xi J\nabla H(x)\big)^s &= \left(\xi \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^{2n}_\diamond} k_{n+s}\, h_{\mathbf{k}}\, \mathbf{x}^{\mathbf{k}-e_{n+s}}\right)^s \\ &= -\sum_{\mathbf{k}\colon \langle\lambda,\mathbf{k}\rangle\neq 0} e^{-i\arg\langle\lambda,\mathbf{k}\rangle}\, k_{n+s}\, h_{\mathbf{k}}\, \mathbf{x}^{\mathbf{k}-e_{n+s}} = \frac{\partial}{\partial x_{n+s}}\, \theta H(x).\end{aligned}$$

类似地，对于任意 $s \leq n$,

$$\big(\xi J\nabla H(x)\big)^{s+n} = -\frac{\partial}{\partial x_s}\, \theta H(x).$$

因此，规范化变换满足哈密顿量为 $\theta H(x, \delta)$ 的哈密顿系统：

$$x' = J\nabla\big(\theta H(x, \delta)\big). \tag{3.6}$$

由此可知，满足 (3.6) 的规范化变量变换是正则的；特别是，它们保持哈密顿结构。 □

4 形式方面

本节研究该理论的形式方面。为了证明本节的主要结果，我们先证明以下引理。

引理 4.1. 假设 $\widehat{u}_\diamond \in \mathcal{F}$。那么对于每个$\mathbf{d} \in \mathbb{Z}_\diamond^n$，柯西问题(2.8) 的解具有如下形式

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{\mathbf{d}}^m(\delta) &= \widehat{U}_{\mathbf{d}}^m + \mathcal{Q}_{\mathbf{d}}^m(\widehat{u}_\diamond, \delta), \quad \textit{if } \langle \lambda, \mathbf{d}_m \rangle = 0, \\ \mathcal{U}_{\mathbf{d}}^m(\delta) &= \widehat{U}_{\mathbf{d}}^m + \mathcal{P}_{\mathbf{d}}^m(\widehat{u}_\diamond, \delta), \quad \textit{if } \langle \lambda, \mathbf{d}_m \rangle \neq 0, \qquad m \in \{1, \dots, n\}, \end{aligned} \tag{4.1}$$

其中，$\mathcal{Q}_{\mathbf{d}}^m$ 和 $\mathcal{P}_{\mathbf{d}}^m$ 是变量 $U_{\mathbf{m}}^m$ 的多项式，满足 $|\mathbf{m}| < |\mathbf{d}|$，其系数是形如 $\delta^s e^{-\nu\delta}$、$s \in \mathbb{Z}_+$、$\nu \geq 0$的项的有限线性组合。此外，在多项式 $\mathcal{Q}_{\mathbf{d}}^m$ 中，这些项 $\delta^s e^{-\nu\delta}$ 满足条件：若$\nu = 0$，则 $s = 0$。

证明。我们用归纳法证明。基础步骤。若 $|\mathbf{d}| = 2$，则 (2.8) 可写为

$$\partial_\delta \mathcal{U}_{\mathbf{d}}^m = 0, \qquad |\mathbf{d}| = 2.$$

因此，对于 $|\mathbf{d}| = 2$，我们有$\mathcal{U}_{\mathbf{d}}^m = U^m{}_{\mathbf{d}}$。现在假设 (4.1) 对所有满足 $|\mathbf{d}| < K$ 的向量$\mathbf{d} \in \mathbb{Z}_\diamond^n$ 都成立（归纳假设）。取$\mathbf{d} \in \mathbb{Z}_\diamond^n$，使得 $|\mathbf{d}| = K$ 且$\langle \lambda, \mathbf{d}_m \rangle \neq 0$。对 (2.8) 积分，得到

$$\mathcal{U}_{\mathbf{d}}^m = \widehat{U}_{\mathbf{d}}^m + I_1 + I_2, \qquad I_1 = \int_0^\delta \mathbf{v}_{0,\mathbf{d}}^m(\lambda)\, d\lambda, \qquad I_2 = \int_0^\delta \mathbf{v}_{*,\mathbf{d}}^m(\lambda)\, d\lambda.$$

利用 (2.9)、(2.11) 和归纳假设可得 (4.1)。若 $\langle \lambda, \mathbf{d}_m \rangle = 0$，则$\mathbf{v}_{0,\ \mathbf{d}} = 0$ （见 (2.10)），并且

$$\mathcal{U}_{\mathbf{d}}^m = \widehat{U}_{\mathbf{d}}^m + I_2, \qquad I_2 = \int_0^\delta \mathbf{v}_{*,\mathbf{d}}^m(\lambda)\, d\lambda.$$

由 (2.11) 可知，条件 $\nu = 0$ 蕴含 $s = 0$。 □

定理 4.2. 极限 $\lim_{\delta \to +\infty} \psi^\delta u$ 存在，且属于 $\mathcal{N}$，其中该极限是相对于 $\mathcal{F}$ 上的吉洪诺夫拓扑而言的。

证明. 证明基于引理 4.1。当$\langle \lambda, \mathbf{d}_m \rangle \neq 0$时，作变量代换 (2.7)。于是，当 $\delta \to \infty$ 时，我们有 $U_{\mathbf{d}}^m \to 0$。若 $\langle \lambda, \mathbf{d}_m \rangle = 0$，则多项式 $\mathcal{Q}_{\mathbf{d}}^m$ 的形式即可得出结论，因为其中不含形如 δ^s 且满足$s > 0$的项。 □

5 解析方面

5.1 收敛域

定理 5.1. 假设 $\widehat{u} \in \mathcal{A}^\rho \cap \mathcal{F}$。那么对于任意 $\delta \geq 0$和 $j \in \{1, \dots, n\}$,

$$u = \psi^\delta(\widehat{u}) = \sum_{\mathbf{k}} \mathcal{U}_{\mathbf{k}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}} \in \mathcal{A}^{g(\rho,\delta)} \cap \mathcal{F},$$

其中

$$g(\rho, \delta) \geq \frac{\rho^2}{2n(\rho + 8\|\widehat{u}\|_\rho n\delta)}.$$

此外，对于任意 $j \in \{1, \dots, n\}$,

$$|u^j| \le \frac{\rho^2 + 4n\delta \|\widehat{u}\|_\rho}{4n\delta \left(\rho + 4n\delta \|\widehat{u}\|_\rho\right)} + \frac{\rho^2}{8n^2\delta \left(\rho + 8n\delta \|\widehat{u}\|_\rho\right)},$$

在定义域中

$$\left\{ z \in \mathbb{C}^n \colon |z_1 + \ldots + z_n| \le \frac{\rho^2}{2n(\rho + 8\|\widehat{u}\|_\rho n\delta)} \right\}.$$

证明。 为证明该定理，我们使用主导方法。对于每个 $m \in \{1, \dots, n\}$，考虑 (2.8) 的主导方程:

$$\begin{aligned} \partial_\delta \mathbf{U}^m_{\mathbf{d}} &= \mathbf{V}^m_{\mathbf{d}}, \qquad \mathbf{V}^m_{\mathbf{d}}\big|_{\delta=0} = \widehat{\mathbf{U}}^m_{\mathbf{d}}, \\ \mathbf{V}^m_{\mathbf{d}} &= 4 \sum_{p=1}^{n} \sum_{\mathbf{k}+\mathbf{s}-\mathbf{d}=e_p} \mathbf{U}^m_{\mathbf{s}}\, s_p\, \mathbf{U}^p_{\mathbf{k}}. \end{aligned} \tag{5.1}$$

为得到 (5.1)，将$\mathbf{v}_{0,\mathbf{d}}$ 和$\mathbf{v}_{*,\mathbf{d}}$ 中的负号替换为正号，去掉指数因子，并添加若干正项。假设在 (5.1) 中，对于每个$\mathbf{d} \in \mathbb{Z}^n_\diamond$，我们有$\prec \qquad \prec |\mathcal{U}^m_{\mathbf{d}}| \le \mathbf{U}^m_{\mathbf{d}}$。则系统 (5.1) 可以更紧凑地写为

$$\partial_\delta \mathbf{U}^m = 4 \sum_{p=1}^{n} \mathbf{U}^p \partial_{z_p} \mathbf{U}^m, \qquad \mathbf{U}^m\big|_{\delta=0} = f(z_1, \dots, z_n).$$

我们将在下文选择 $f(z)$。我们取$\mathbf{U}$，使得对于每个 $m \in \{1, \dots, n\}$ 和每个$\mathbf{d} \in \mathbb{Z}^n_\diamond$，都有 $|\mathbf{U}^m_{\mathbf{d}}| \le \mathbf{U}_{\mathbf{d}}$。于是主导系统具有如下形式

$$\partial_\delta \mathbf{U} = 4 \sum_{p=1}^{n} \mathbf{U} \partial_{z_p} \mathbf{U}, \qquad \mathbf{U}\big|_{\delta=0} = f(z_1, \dots, z_n). \tag{5.2}$$

用$\mathbf{U}(z, \delta) \ll F(\zeta, \delta)$ 主导$\mathbf{U}$，其中 $\zeta = \sum_{j=1}^n z_j$。以下伯格斯方程主导 (5.2):

$$\partial_\delta F = 4nF\partial_\zeta F, \qquad F\big|_{\delta=0} = f(\zeta). \tag{5.3}$$

方程 (5.3) 的解 $F = F(\zeta, t)$ 满足

$$F = f(\zeta + 4ntF). \tag{5.4}$$

根据引理 7.3，取

$$f(\zeta) = a\zeta^2/(b - \zeta), \qquad a = \frac{\|\widehat{u}\|_\rho}{\rho^2}\,\rho, \quad b = \rho. \tag{5.5}$$

令 $\tau = 4n\delta$，得到

$$F = \frac{a(\zeta + \tau F)^2}{b - \zeta - \tau F}.$$

其解为

$$F = \frac{b - \zeta - 2a\tau\zeta - \sqrt{(b - \zeta - 2a\tau\zeta)^2 - 4a\tau\zeta^2(1 + a\tau)}}{2\tau(1 + a\tau)}. \tag{5.6}$$

$F(\zeta)$ 的分支点（式 (5.6) 中被开方数的零点）为

$$\zeta_{1,2} = \frac{b}{1 + 2a\tau \pm 2\sqrt{a\tau(1+a\tau)}}.$$

因此，只要满足条件，$F = F(\zeta)$ 就是解析的

$$|\zeta| \le \min\big(\zeta_1, \zeta_2\big) = \frac{b}{1 + 2a\tau + 2\sqrt{a\tau(1+a\tau)}}. \tag{5.7}$$

因此，$F(\zeta)$ 在较小的圆盘内是解析的

$$|\zeta| \le d(\tau) = \frac{b}{2(1+2a\tau)} < \min\big(\zeta_1, \zeta_2\big).$$

$F(\zeta) = F(z_1 + \cdots + z_n)$ 的解析多圆盘半径等于$R(\tau) = d(\tau)/n_\circ$ 事实上，若 $\mathbf{z} \in \mathcal{D}_{R(\tau)}$，则

$$|\zeta| = |z_1 + \ldots + z_n| \le |z_1| + \ldots + |z_n| \le d(\tau).$$

由于 $F(\zeta)$ 主控 $u = \psi^\delta(\widehat{u})$，我们得到 $u = \psi^\delta(\widehat{u})$ 的收敛多圆盘半径的下界：

$$g(\rho, \delta) \ge R(\tau) = \frac{b}{2n(1+2a\tau)} = \frac{\rho^2}{2n(\rho + 8\|\widehat{u}\|_\rho n\delta)}.$$

If

$$|\zeta| \le \frac{b}{2n(1+2a\tau)},$$

然后利用 (5.6) 得到

$$\begin{aligned} |u^j| \le |F| &\le \frac{b + |\zeta| + 2a\tau|\zeta| + \sqrt{|\zeta|^2 + 2|\zeta|b + b^2 + 4ab|\zeta|\tau}}{2\tau(a\tau+1)} \\ &\le \frac{b + |\zeta| + 2a\tau|\zeta| + \sqrt{(|\zeta| + b + 2a\tau)^2}}{2\tau(a\tau+1)} \\ &\le \frac{b + a\tau}{\tau(1+a\tau)} + \frac{b}{2n\tau(1+2a\tau)}, \qquad u^j = \big(\psi^\delta(\widehat{u})\big)^j, \quad j \in \{1, \ldots, n\}. \end{aligned}$$

□

在矩阵 Λ 的特征值满足某些条件时（例如它们位于 Siegel 域中，且存在共振），导向正规形的变换往往会发散（见 [1], §24）。因此，一般而言，不应期望$\psi^{+\infty}\widehat{u}$ 属于 $\mathcal{A} \cap \mathcal{F}$。

6 正规化的收敛性

6.1 Siegel–Bruno 定理的陈述

本节将通过连续平均法证明关于正规形归一化收敛性的 Siegel–Bruno 定理。为了陈述本节的主要定理，我们先介绍一些定义。

对于每个 $s \in \mathbb{N}$，令

$$\Omega_s = \max\left\{ \frac{1}{|\langle \lambda, \mathbf{k}\rangle|} : \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n \setminus \mathbf{L}_\lambda,\ 0 < |\mathbf{k}| \le s \right\}, \tag{6.1}$$

其中 $\mathbf{L}_\lambda$ 定义于 **(1.4)** 中。

定义 6.1。若序列 $\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}_+}$，$a_j \ge 1$ 是非递减的，且

$$\sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} \ln a_j < \infty.$$

定义 6.2。若向量 $\lambda \in \mathbb{C}^n$ 满足 *Bruno* 条件，则序列 $\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}_+}$，$a_j = \max\{1, \Omega_{2^j+1}\}$ 是 *Bruno* 数列，其中数值 Ω_s 如上所定义。

定理 6.3. *(Siegel–Bruno)*
假设 *(1)* $\lambda \in \mathbb{C}^n$ 满足 *Bruno* 条件，*(2)* $\widehat{u} \in \mathcal{A} \cap \mathcal{F}_\diamond$，*(3)* $\Lambda z + \widehat{u}$ 的正规形为 Λz。

那么，存在解析变量变换 $\mathbf{w} \mapsto \mathbf{z} = \nu(\mathbf{w})$，将向量场 $\Lambda z + \widehat{u}$ 变换为其正规形。

我们将在下面的各节中证明此定理。

6.2 归纳步骤

这里我们证明一个辅助引理，后续各节将用它来建立 Siegel–Bruno 定理。

定义 6.4。 如果序列 $\{b_s\}_{s=1}^{\infty}$ 满足 $\lim_{j\to\infty} b_j/j = 0.$，则称其为次线性序列

定义 6.5。 如果序列 $\{b_s\}_{s=1}^{\infty}$ 对每个 $j \in \mathbb{N}$都满足 $b_{j-1} - 2b_j + b_{j+1} \ge 0$，则称其为凸序列。

引理 6.6。 设向量场 $\Lambda z + \widehat{u}$满足 $\widehat{u} \in \mathcal{A}^\rho \cap \mathcal{F}_\diamond$，则 (1) $\widehat{u}^m = \sum \widehat{U}^m_{\mathbf{k}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}}$, $\quad |\widehat{U}^m_{\mathbf{k}}| \le c\, e^{b_{|\mathbf{k}|} + \alpha|\mathbf{k}|}$, $\quad \alpha \ge 0$, $\quad r \ge 2$,$|\mathbf{k}|\ge r$(2) Λ 的特征值向量满足 *Bruno* 条件（见定义 *6.2*）；(3) $\{b_j\}$ 是次线性、凸、非正且非增的；(4) $\Lambda z + \widehat{u}$ 的正规形是 Λz.

那么存在一个变量代换 $\mathbf{z} \mapsto \mathbf{w} = \nu(\mathbf{z})$，将向量场$\Lambda z + \widehat{u}$ 变为 $\Lambda z + g$，其中

$$g^m = \sum_{|\mathbf{k}|\geq 2r} G^m_{\mathbf{k}} \mathbf{w}^{\mathbf{k}}, \qquad |G^m_{\mathbf{k}}| \leq c\, e^{\,b_{\mathbf{k}} + (\alpha+\varepsilon)|\mathbf{k}|},$$

$$\varepsilon = c\,\Delta\,\Omega_{2r-2}, \qquad \Delta = (2r)^n e^{\alpha} n \exp(2b_r - b_{2r-1}). \tag{6.2}$$

此外，对于任意 $0 < \rho \leq e^{-\alpha}$ 以及任意满足以下条件的 ρ'

$$0 < \rho' \leq \rho - \frac{1}{e^{\alpha} n}\, \varepsilon\, (e^{\alpha}\rho)^r, \tag{6.3}$$

以下结论成立：

1. 存在一个解析映射 $\nu\colon\ D_{\rho'} \to \nu(D_{\rho'}) \subseteq D_{\rho}$。 *2.*

对于雅可比矩阵 $D\nu(\mathbf{z})$，若 $\mathbf{z} \in D_{\rho'}$，则有

$$\begin{aligned}
&(i) \quad \exp\bigl(-\varepsilon'(\rho e^{\alpha})^{r-1}\bigr) \leq \det D\nu(\mathbf{z}) \leq \exp\bigl(\varepsilon'(\rho e^{\alpha})^{r-1}\bigr),\\
&(ii) \quad \|D\nu - I\|_{\rho'} \leq \varepsilon'(\rho e^{\alpha})^{r-1} \exp\bigl(\varepsilon'(\rho e^{\alpha})^{r-1}\bigr),\\
&(iii) \quad \|D\nu\|_{\rho'} \leq \exp\bigl(\varepsilon'(\rho e^{\alpha})^{r-1}\bigr).
\end{aligned}$$

其中

$$\Delta' = (2r)^{n+1} e^{\alpha} n \exp(2b_r - b_{2r-1}), \qquad \varepsilon' = c\,\Delta'\,\Omega_{2r-2}.$$

3. 映射 ν 可逆，且 $\nu^{-1} : \nu(D_{\rho'}) \to D_{\rho'}$ 是解析的。

4. 变换后的向量场 $\Lambda z + g$ 的正规形为 Λz。

证明。 我们使用算子 ξ_r，通过连续平均法构造一个变量代换

$$(\xi_r u)^m = -\sum_{\mathbf{k}\in\mathcal{Z}_r} e^{-i \arg\langle\lambda,\mathbf{k}_m\rangle} U^m_{\mathbf{k}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}}, \qquad \mathcal{Z}_r = \{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n_{\diamond} \colon r \leq |\mathbf{k}| \leq 2r-2\}.$$

注意，根据引理 6.6 的假设 (4)，我们有 $\langle\lambda,\mathbf{k}_m\rangle \neq 0$。与 ξ_r 相关联的流 ψ^{δ}由下式给出

$$\partial_{\delta} u = -[\xi_r u, \Lambda z + u], \qquad u\big|_{\delta=0} = \widehat{u}. \tag{6.4}$$

逐分量考察 (6.4)。利用引理 6.6 的假设 (1)，对于满足 $|\mathbf{d}| < r$ 的分量 $U^m_{\mathbf{d}}$，我们得到

$$\partial_{\delta} U^m_{\mathbf{d}} = 0, \qquad U^m_{\mathbf{d}}\big|_{\delta=0} = 0, \qquad m \in \{1,\dots,n\}.$$

He由于向量场 $u = \psi^{\delta}(\widehat{u})$ 可写为 $u = \Lambda z + u_r + u_*$，其中

$$u^m_r = \sum_{\mathbf{k}\in\mathcal{Z}_r} U^m_{\mathbf{k}}(\delta)\mathbf{z}^{\mathbf{k}}, \qquad u^m_* = \sum_{|\mathbf{k}|\geq 2r-1} U^m_{\mathbf{k}}(\delta)\mathbf{z}^{\mathbf{k}}.$$

我们逐分量求解（6.4）。收集$\mathbf{z}^{\mathbf{d}} e_m$ 中$\mathbf{d} \in \mathcal{Z}_r$的所有项。于是（6.4）变为

$$\partial_{\delta} U^m_{\mathbf{d}} = -|\langle\lambda, \mathbf{d}_m\rangle| U^m_{\mathbf{d}} - [\xi_r u, u_r]^m_{\mathbf{d}}, \tag{6.5}$$

其中第二项是$\mathbf{z}^{\mathbf{d}}e_m$ 中以下形式的项的求和

$$[\xi_r u, u_r]^m_{\mathbf{d}} = \sum_{p=1}^{n} \left(\sum_{\substack{\mathbf{k}+\mathbf{s}-\mathbf{d}=e_p,\\ \mathbf{s},\mathbf{k}\in\mathcal{Z}_r}} s_p U^p_{\mathbf{k}} U^m_{\mathbf{s}} - \sum_{\substack{\mathbf{k}+\mathbf{s}-\mathbf{d}=e_p,\\ \mathbf{s},\mathbf{k}\in\mathcal{Z}_r}} s_p U^m_{\mathbf{s}} U^p_{\mathbf{k}} \right).$$

在 (6.5) 中，求和变量 $\mathbf{s},\mathbf{k} \in \mathcal{Z}_r$ 必须满足

$$r+1 \le |\mathbf{k}| + |\mathbf{s}| \le 2r-1. \tag{6.6}$$

但是，当 $\mathbf{s},\mathbf{k} \in \mathcal{Z}_r$ 时，(6.6) 不成立。因此 (6.5) 等价于

$$\partial_\delta U^m_{\mathbf{k}} = -|\langle \lambda, \mathbf{k}_m\rangle| U^m_{\mathbf{k}}, \qquad \mathbf{k}\in\mathcal{Z}_r. \tag{6.7}$$

方程 (6.7) 很容易求解:

$$U^m_{\mathbf{k}}(\delta) = e^{-|\langle\lambda,\mathbf{k}_m\rangle|\delta} \widehat{U}^m_{\mathbf{k}}, \qquad \mathbf{k}\in\mathcal{Z}_r. \tag{6.8}$$

现在考虑 (6.4)，并收集所有含有 $\mathbf{z}^{\mathbf{d}}e_m$ 且次数为 $|\mathbf{d}| \ge 2r-1$ 的项。将 (6.8) 代入 (6.4)，得到

$$\begin{aligned} &\partial_\delta U^m_{\mathbf{d}} = \sum_{p=1}^{n} \left(\sum_{\substack{\mathbf{k}+\mathbf{s}-\mathbf{d}=e_p,\\ \mathbf{k}\in\mathcal{Z}_r}} s_p e^{-|\langle\lambda,\mathbf{k}_p\rangle|\delta} \widehat{U}^p_{\mathbf{k}} U^m_{\mathbf{s}} - \sum_{\substack{\mathbf{k}+\mathbf{s}-\mathbf{d}=e_p,\\ \mathbf{s}\in\mathcal{Z}_r}} s_p e^{-|\langle\lambda,\mathbf{s}_m\rangle|\delta} \widehat{U}^m_{\mathbf{s}} U^p_{\mathbf{k}} \right), \\ &U^m_{\mathbf{k}}(0) = \widehat{U}^m_{\mathbf{k}}. \end{aligned} \tag{6.9}$$

为 (6.9) 配上主控函数

$$\mathbf{U} = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n_\diamond} \mathbf{U}_{\mathbf{k}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}}, \quad |U^m_{\mathbf{k}}| \le \mathbf{U}_{\mathbf{k}}, \qquad \widehat{\mathbf{U}} = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n_\diamond} \widehat{\mathbf{U}}_{\mathbf{k}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}}, \quad |\widehat{U}^m_{\mathbf{k}}| \le \widehat{\mathbf{U}}_{\mathbf{k}} = c\, e^{\,b_{|\mathbf{k}|}+\alpha|\mathbf{k}|}. \tag{6.10}$$

在 (6.10) 中，我们可以取 $\mathbf{U}_{\mathbf{k}} = \max_{1\le m\le n} |U^m_{\mathbf{k}}|$。利用 Bruno 条件 (6.2) 和主控函数 (6.10)，并将 (6.9) 中的负号替换为正号，得到主导系统

$$\partial_\delta \mathbf{U}_{\mathbf{d}} = 2e^{-\delta/\Omega_{2r-2}} |\mathbf{d}| \sum_{p=1}^{n} \sum_{\substack{\mathbf{k}+\mathbf{s}-\mathbf{d}=e_p,\\ \mathbf{k}\in\mathcal{Z}_r}} \widehat{\mathbf{U}}_{\mathbf{k}}\, \mathbf{U}_{\mathbf{s}}, \qquad \mathbf{U}_{\mathbf{d}}(0) = \widehat{\mathbf{U}}_{\mathbf{d}}, \tag{6.11}$$

其中 Ω_{2r-2} 定义见式 (6.1)。

将 $\mathbf{U}_{\mathbf{k}} = c\, e^{\,b_{|\mathbf{k}|}+\alpha|\mathbf{k}|} \mathbf{u}_{\mathbf{k}}$ 代入式 (6.11)，得到

$$\begin{aligned} &\partial_\delta \mathbf{u}_{\mathbf{d}} = e^{-\delta/\Omega_{2r-2}} \Sigma(\mathbf{d}), \qquad \mathbf{u}_{\mathbf{d}}(0) = 1, \text{ where} \\ &\Sigma(\mathbf{d}) := 2|\mathbf{d}| c \sum_{p=1}^{n} \sum_{\substack{\mathbf{k}+\mathbf{s}-\mathbf{d}=e_p,\\ \mathbf{k}\in\mathcal{Z}_r}} \exp\big(b_{|\mathbf{k}|} + b_{|\mathbf{s}|} - b_{|\mathbf{d}|}\big)\, e^{\alpha}\, \mathbf{u}_{\mathbf{s}}. \end{aligned} \tag{6.12}$$

我们使用以下记号

$$\chi_K(\delta) = \max_{|\mathbf{d}|\le K} \mathbf{u}_{\mathbf{d}}(\delta), \qquad \delta \ge 0.$$

引理 6.7。 设序列 $\{b_j\}_{j=0}^n$ 是凸且非增的。那么，对于任意$\mathbf{d}$ 满足 $|\mathbf{d}| \geq 2r-1$，以下不等式成立：

$$\Sigma(\mathbf{d}) \leq c\,|\mathbf{d}|\,\Delta\,\chi_{|\mathbf{d}|}, \quad \textit{where } \Delta \textit{ is defined in } (6.2).$$

我们将在本节末证明引理 6.7。考虑以下方程：

$$\partial_\delta \chi_{|\mathbf{d}|} = c\,|\mathbf{d}|\,\Delta\, e^{-\delta/\Omega_{2r-2}}\chi_{|\mathbf{d}|}, \qquad \chi_{|\mathbf{d}|}(0) = 1. \tag{6.13}$$

方程 (6.13) 的解为

$$\chi_{|\mathbf{d}|}(\delta) = \exp\Big(c\Delta|\mathbf{d}|\int_0^\delta e^{-\widetilde{\delta}/\Omega_{2r-2}}\,d\widetilde{\delta}\Big).$$

利用引理 6.7，我们得到

$$\partial_\delta\big(\chi_{|\mathbf{d}|} - \mathbf{u}_\mathbf{d}\big) = e^{-\delta/\Omega_{2r-2}}\left(c\,|\mathbf{d}|\,\Delta\,\chi_{|\mathbf{d}|} - \Sigma(\mathbf{d})\right) \geq 0, \qquad \chi_{|\mathbf{d}|}(0) - \mathbf{u}_\mathbf{d}(0) = 0. \tag{6.14}$$

由 (6.14) 可得

$$0 \leq \mathbf{u}_\mathbf{d}(\delta) \leq \chi_{|\mathbf{d}|}(\delta) = \exp\Big(c\Delta|\mathbf{d}|\int_0^\delta e^{-\widetilde{\delta}/\Omega_{2r-2}}\,d\widetilde{\delta}\Big).$$

在 $\delta = +\infty$ 处，我们得到

$$\mathbf{u}_\mathbf{d}(+\infty) \leq \exp\big(c\Delta|\mathbf{d}|\Omega_{2r-2}\big).$$

因此，对于变换后的向量场 $\Lambda z + g$，泰勒系数满足以下估计：

$$|G_\mathbf{k}^m| \leq \mathbf{U}_\mathbf{d}(+\infty) \leq c\,\exp\left(b_{|\mathbf{d}|} + |\mathbf{d}|(\alpha+\varepsilon)\right).$$

注意，变换后的向量场 $\Lambda z + g$ 的线性部分保持不变。因此，在初始向量场的变换过程中，集合 $\mathbf{L}_\lambda$ 不会改变（且仍为空）。因此，引理的第 4 条成立。

设 $g_{0,\delta}$ 为系统沿解的 δ–平移：

$$\begin{aligned} &\dot{z}_j(\delta) = (\xi_r u)^j, \quad (\xi_r u)^j = -\sum_{\mathbf{k}\in\mathcal{Z}_r} e^{-i\arg\langle\lambda,\mathbf{k}_j\rangle}e^{-|\langle\lambda,\mathbf{k}_j\rangle|\delta}\widehat{U}_\mathbf{k}^j\mathbf{z}^\mathbf{k}, \\ &z_j(0) = z_j, \quad j = 1,\dots,n. \end{aligned} \tag{6.15}$$

我们估计 ρ'，使得对于每个 $\mathbf{z} = \mathbf{z(0)} \in D_{\rho'}$ 以及所有 $\delta \in [0,+\infty]$，点 $\mathbf{z}(\delta) = g_\delta(\mathbf{z})$ 不会离开 D_ρ。只要 $\mathbf{z}(\delta) = (z_1(\delta)\dots, z_n(\delta)) \in D_\rho$，我们就估计

$$\begin{aligned} |\dot{z}_j(\delta)| &\leq \sum_{\mathbf{k}\in\mathcal{Z}_r}|U_\mathbf{k}^j(\delta)|\rho^{|\mathbf{k}|} = \sum_{\mathbf{k}\in\mathcal{Z}_r} e^{-|\langle\lambda,\mathbf{k}_j\rangle|\delta}|\widehat{U}_\mathbf{k}^j|\rho^{|\mathbf{k}|} \\ &\leq c\,e^{-\delta/\Omega_{2r-2}}\sum_{\mathbf{k}\in\mathcal{Z}_r} e^{b_\mathbf{k}+\alpha|\mathbf{k}|}\rho^{|\mathbf{k}|} \leq c\,e^{-\delta/\Omega_{2r-2}}e^{b_r}\sum_{\mathbf{k}\in\mathcal{Z}_r}(e^\alpha\rho)^{|\mathbf{k}|} \\ &\leq c\,e^{-\delta/\Omega_{2r-2}}e^{b_r}(2r)^n(\rho e^\alpha)^r. \end{aligned} \tag{6.16}$$

这里我们用到了序列 $\{b_s\}$ 是非增的，$|\mathbf{k}| \le 2r$，$\rho e^{\alpha} \le 1$，以及求和中的项数少于 $(2r)^n$。因此我们得到

$$|z_j(\delta) - z_j(0)| \le c\,\Omega_{2r-2}(2r)^n e^{b_r}(\rho e^{\alpha})^r.$$

由于序列 $\{b_s\}_{s=1}^{\infty}$ 是非增的，我们有 $b_r - b_{2r-2} \ge 0$。因此

$$|z_j(\delta) - z_j(0)| \le c\,\Omega_{2r-2}(2r)^n e^{2b_r - b_{2r-1}}(\rho e^{\alpha})^r = \frac{1}{e^{\alpha} n}\varepsilon(\rho e^{\alpha})^r. \tag{6.17}$$

If

$$|z_j(0)| = |z_j| < \rho' \le \rho - \frac{1}{e^{\alpha} n}\varepsilon(\rho e^{\alpha})^r,$$

于是由（6.17）可知，对于任意 $\delta \ge 0$,

$$|z_j(\delta)| \le |z_j(0)| + \frac{1}{e^{\alpha} n}\varepsilon(\rho e^{\alpha})^r < \rho. \tag{6.18}$$

因此，我们有一个永不离开多圆盘 D_ρ 的 a δ–平移:

$$g_{0,\delta}\colon D_{\rho'} \to g_{0,\delta}(D_{\rho'}) \subseteq D_\rho, \qquad g_{0,\delta}(\mathbf{z}) = \mathbf{z}_\delta, \qquad \delta \ge 0.$$

由于（6.15）的右端是 $\mathbf{z}$ 中次数为 $2r-2$ 的多项式，并且连续依赖于 δ，因此 δ–平移 g_δ 在 $D_{\rho'}$ 中是解析的。

取（6.15）的解 $\mathbf{z}_\delta = g_{0,\,\delta}(\mathbf{z})$。我们证明，解析函数 $\mathbf{z}_\delta = g_{0,\,\delta}(\mathbf{z})$ 的雅可比矩阵在 $\mathbf{z} \in D_{\rho'}$ 处是非退化的。关于初始条件 $\mathbf{z} \in D_{\rho'}$ 的雅可比矩阵为

$$X(\delta) = \partial_{\mathbf{z}}\left(g_{0,\delta}(\mathbf{z})\right), \qquad X(0) = E,$$

其中 E 是单位矩阵。对（6.15）关于 $\mathbf{z}$ 求导，我们得到变分系统（见 [2] 中的 §32）：

$$\dot{X} = -\partial_{\mathbf{z}}\left(\xi_r u(g_{0,\delta}(\mathbf{z}))\right) X, \qquad X(0) = E. \tag{6.19}$$

根据刘维尔公式,

$$\det X(\delta) = \exp\left(-\int_0^{\delta} \operatorname{tr}\,\partial_{\mathbf{z}}\left(\xi_r u(g_{0,\delta}(\mathbf{z}))\right)\right) \ne 0, \qquad \delta \ge 0. \tag{6.20}$$

我们对矩阵 $\partial_{\mathbf{z}}(\xi_r u(g_{0,\delta}(\mathbf{z})))$ 的对角元模长进行界定。我们将利用（6.16）中的估计来估计矩阵 $\partial_{\mathbf{z}}(\xi_r u(g_{0,\delta}(\mathbf{z})))$ 的各个元素:

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial(\xi_r u)^i}{\partial z_j}\right| &\le c\,e^{-\delta/\Omega_{2r-2}} e^{2b_r - b_{2r-1}}(2r)^{n+1} e^{\alpha}(\rho e^{\alpha})^{r-1} \\ &\le \frac{\varepsilon'(\rho e^{\alpha})^{r-1}}{n}\frac{1}{\Omega_{2r-2}} e^{-\delta/\Omega_{2r-2}}.\end{aligned} \tag{6.21}$$

利用 (6.20)，我们推导得出

$$\det X(\delta) \le \exp\left(\varepsilon'(\rho e^{\alpha})^{r-1}\int_0^{\delta}\frac{1}{\Omega_{2r-2}} e^{-\tilde{\delta}/\Omega_{2r-2}}\,d\tilde{\delta}\right),$$

$$\det X(\delta) \ge \exp\left(-\varepsilon'(\rho e^{\alpha})^{r-1}\int_0^{\delta}\frac{1}{\Omega_{2r-2}} e^{-\tilde{\delta}/\Omega_{2r-2}}\,d\tilde{\delta}\right) > 0, \qquad \delta \ge 0,$$

其中 Δ' 和 ε' 如引理陈述所述。由此可得，当 $\delta \to +\infty$时，$\exp\bigl(-\varepsilon'(\rho e^{\alpha})^{r-1}\bigr) \le \det X(+\infty) \le \exp\bigl(\varepsilon'(\rho e^{\alpha})^{r-1}\bigr)$，$X(+\infty) = \nu(\mathbf{z}) = Dg_{0,\,+\infty}(\mathbf{z})$。

这证明了 (i)。为证明 (iii)，利用 (6.19) 和 (6.21) 可得

$$\begin{aligned}\|X(\delta)\|_{\rho'} &\le 1 + \int_0^{\delta} \bigl\|\partial_{\mathbf{z}}\left(\xi_r u(g_{0,s}(\mathbf{z}))\right)\bigr\|_{\rho'} \|X(s)\|_{\rho'}\, ds \\ &\le 1 + \varepsilon'(\rho e^{\alpha})^{r-1} \int_0^{\delta} \frac{1}{\Omega_{2r-2}} e^{-s/\Omega_{2r-2}} \|X(s)\|_{\rho'}\, ds.\end{aligned}$$

由 Gr¨onwall 引理，

$$\|X(\delta)\|_{\rho'} \le \exp\left(\varepsilon'(\rho e^{\alpha})^{r-1}\right).$$

令 $\delta \to +\infty$ 即得 (iii)。为证明 (ii)，由 (6.19) 可得

$$X(\delta) - I = -\int_0^{\delta} \partial_{\mathbf{z}}\left(\xi_r u(g_{0,s}(\mathbf{z}))\right) ds - \int_0^{\delta} \partial_{\mathbf{z}}\left(\xi_r u(g_{0,s}(\mathbf{z}))\right)\bigl(X(s) - I\bigr)\, ds.$$

因此

$$\|X(\delta) - I\|_{\rho'} \le \int_0^{\delta} \bigl\|\partial_{\mathbf{z}}\left(\xi_r u(g_{0,s}(\mathbf{z}))\right)\bigr\|_{\rho'} ds + \int_0^{\delta} \bigl\|\partial_{\mathbf{z}}\left(\xi_r u(g_{0,s}(\mathbf{z}))\right)\bigr\|_{\rho'} \|X(s)\|_{\rho'}\, ds.$$

应用 Gr¨onwall 引理可得 (ii)。综上：

1) 平移 $\mathbf{z}_\delta = g_{0,\,\delta}(\mathbf{z})$ 关于 $D_{\rho'}$ 是解析的；

2) 对于所有 $\delta \in [0, +\infty]$，$g_{0,\delta}(\mathbf{z})$ 的雅可比矩阵在每个 $\mathbf{z} \in D_{\rho'}$ 处均非退化。

由反函数定理，逆映射（反向平移）$g_0^{-1}{}_{,\delta} = g_{\delta,0}$: $g_{0,\delta}(D_{\rho'}) \to D_{\rho'}$ 在 $g_{0,\delta}(D_{\rho'}) \subseteq D_{\rho}$上是解析的。令 $\nu = g_{+\infty,0}$。引理 6.7。我们证明下面的不等式成立：

$$b_{|\mathbf{k}|} + b_{|\mathbf{s}|} - b_{|\mathbf{d}|} \le 2b_r - b_{2r-1}. \tag{6.22}$$

将引理 7.9 中的第二个不等式用于 $m = |\mathbf{k}| - r$, $k = |\mathbf{k}|$, $l = |\mathbf{s}|$，得到

$$b_{|\mathbf{k}|} + b_{|\mathbf{s}|} \le b_r + b_{|\mathbf{d}|+1+r}, \quad |\mathbf{d}| + 1 = |\mathbf{k}| + |\mathbf{s}|, \quad |\mathbf{d}| > 2r - 2. \tag{6.23}$$

由于序列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是凸且非增的，我们有

$$b_{|\mathbf{d}|+1-r} - b_{|\mathbf{d}|} \le b_r - b_{2r-1}. \tag{6.24}$$

将 (6.23) 与 (6.24) 相加，得到 (6.22)。利用 (6.22)，我们可以由 (6.12) 估计 $\Sigma(\mathbf{d})$:

$$\Sigma(\mathbf{d}) \le 2|\mathbf{d}|\, c\, \exp(2b_r - b_{2r-1}) e^{\alpha} \chi_{|\mathbf{d}|} \sum_{p=1}^{n} \sum_{\substack{\mathbf{k}+\mathbf{s}-\mathbf{d}=e_p,\\ \mathbf{k}\in\mathcal{Z}_r}} 1. \tag{6.25}$$

此外，我们有

$$\#\{\mathbf{k}' \in \mathbb{Z}_{\diamond}^{n} \colon |\mathbf{k}'| = |\mathbf{k}|, \quad k \in \mathcal{Z}_r\} < (2r)^{n-1}. \tag{6.26}$$

将 (6.26) 应用于 (6.25)，我们得到

$$\Sigma(\mathbf{d}) \le 2|\mathbf{d}|\, c\, \exp(2b_r - b_{2r-1}) e^{\alpha} \chi_{|\mathbf{d}|}\, n(2r)^{n-1} \le c\,|\mathbf{d}|\,\Delta\,\chi_{|\mathbf{d}|},$$

其中 Δ 在 (6.2) 中定义。由此证明了引理 6.7。 □

6.3 Siegel–Bruno定理的证明

本节证明 Siegel–Bruno 定理。在给出证明之前，我们先陈述一个辅助事实。考虑向量场 $\Lambda z + \widehat{u}$。设 $\lambda \in \mathbb{C}^n$ 为矩阵 Λ的特征值向量。利用引理 7.4，我们得到

$$\widehat{u}^m = \sum_{|\mathbf{k}|\geq 2} \widehat{U}^m_{\mathbf{k}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}}, \qquad |\widehat{U}^m_{\mathbf{k}}| \leq \widehat{c}\, e^{\,b_{|\mathbf{k}|} + \widehat{\alpha}_0 |\mathbf{k}|}, \qquad m = 1, \ldots, n.$$

选取 $\alpha_0 \geq \widehat{\alpha}_0$，我们得到

$$|\widehat{U}^m_{\mathbf{k}}| \leq c\, e^{\,b_{|\mathbf{k}|} + \alpha_0 |\mathbf{k}|}, \qquad |\mathbf{k}| \geq 2, \tag{6.27}$$

wh其中 $c = \widehat{c}\, e^{\,2(\widehat{\alpha}_0 - \alpha_0)}$。因此，取足够大的 α_0s，我们可以假设

$$c\, e^{\alpha_0} \leq \tfrac{1}{8}, \qquad n\, e^{\alpha_0} \geq 2. \tag{6.28}$$

定理 6.8。假设

(1) $\lambda \in \mathbb{C}^n$ 满足 *Bruno* 条件；*(2)* $\widehat{u} \in \mathcal{A}^{\rho_0} \cap \mathcal{F}_\diamond$ 满足 $\rho_0 = e^{-\alpha_0}$，其中 α_0 如(6.28)所示；*(3)* $\Lambda z + \widehat{u}$ 的正规形等于 $\Lambda z + O_{r-1}(z)$。

那么存在一个解析变量变换

$$\nu \colon D_{\rho_0} \to D_{\rho_*}, \qquad \mathbf{w} \mapsto \mathbf{z} = \nu(\mathbf{w}), \qquad \rho_* = \rho_0 e^{-1/2}, \tag{6.29}$$

它将向量场 $\Lambda z + \widehat{u}$ 变换为向量场 $\Lambda z + g$，其中

$$g^m(\mathbf{w}) = \sum_{|\mathbf{k}|\geq r} G^m_{\mathbf{k}} \mathbf{w}^{\mathbf{k}} = O_r(\mathbf{w}), \qquad |G^m_{\mathbf{k}}| \leq c\, e^{\,b_{|\mathbf{k}|} + \beta |\mathbf{k}|}, \qquad \beta \leq \alpha_0 + \tfrac{1}{2}. \tag{6.30}$$

定理 *6.8* 的我们对引理 6.6 作归纳应用。令

$$N = \max\{m \in \mathbb{N} \colon 2^{m-1} + 1 < r\}.$$

那么，引理 6.6 中的 r 的取值遍历

$$r_1, r_2, \ldots, r_N, \qquad r_m = 2^{m-1} + 1.$$

由此，我们得到控制系统第 m 步的序列 α_0，α_1，……，α_N，ε_1，……，ε_N，Δ_1，……，Δ_N，ε'_1，……，ε'_N，Δ'_1，……，Δ'_N：

$$\begin{aligned} &\alpha_{m+1} = \alpha_m + \varepsilon_{m+1}, \\ &\varepsilon_m = c\, \Delta_m\, \Omega_{r_m}, \quad \Delta_m = (2r_m)^n e^{\alpha_{m-1}} n\, \exp\bigl(2b_{r_m} - b_{r_{m+1}}\bigr), \\ &\varepsilon'_m = c\, \Delta'_m\, \Omega_{r_m}, \quad \Delta'_m = (2r_m)^{n+1} e^{\alpha_{m-1}} n\, \exp\bigl(2b_{r_m} - b_{r_{m+1}}\bigr). \end{aligned} \tag{6.31}$$

Set

$$a_m = \exp\bigl(b_{r_{m+1}} - 2b_{r_m}\bigr). \tag{6.32}$$

利用引理 7.10，我们得到一个满足以下条件的序列 b_s

$$n\,2^m(2r_m)^{n+1}\Omega_{r_m} = \exp\bigl(b_{r_{m+1}} - 2b_{r_m}\bigr). \tag{6.33}$$

由 (6.33) 得到

$$\varepsilon_m = c(2r_m)^n e^{\alpha_{m-1}} n \exp\bigl(2b_{r_m} - b_{r_{m+1}}\bigr)\Omega_{r_m} = \frac{c\,e^{\alpha_{m-1}}}{2^{m+1}r_m} = \frac{c\,e^{\alpha_0+\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_{m-1}}}{2^{m+1}r_m}.$$

我们用归纳法证明：若 $ce^{\alpha_0} \le 1/8$，则 $\varepsilon_m \le 2^{-m-2}$。事实上，对于 $m = 1$，有 $\varepsilon_1 < \frac{ce^{\alpha_0}}{2} \le \frac{1}{16} < 2^{-3}$. 假设该界对 $m \le m_0$成立。于是

$$\varepsilon_m \le \frac{1}{8}\,e^{2^{-3}+\cdots+2^{-m-1}}\,\frac{1}{2^m} \le \frac{e^{1/2}}{8}\,\frac{1}{2^m} < 2^{-m-2}.$$

利用 (6.33) 还可得到

$$\varepsilon'_m = c(2r_m)^{n+1}e^{\alpha_{m-1}} n \exp\bigl(2b_{r_m} - b_{r_{m+1}}\bigr)\Omega_{r_m} = \frac{ce^{\alpha_{m-1}}}{2^m} \le \varepsilon_m \le \frac{1}{2^{m+2}}. \tag{6.34}$$

令 $\beta = \alpha_N$，得到 $\beta - \alpha_0 = \sum_{j=1}^N \varepsilon_j < 1/2$，从而得到 (6.30)。

为估计 ρ_*，定义映射序列 $\nu_1, \dots, \nu_N$，其中 ν_m 是引理 6.6 在第 m 步给出的映射。定义

$$\rho_0, \dots, \rho_N, \qquad \rho_0 = e^{-\alpha_0}, \quad \rho_N = \rho_*, \quad \rho_{m+1} = \rho_m e^{-\varepsilon_{m+1}}.$$

于是 $\rho_m e^{\alpha_m} = \rho_{m-1}e^{-\varepsilon_m+\alpha_m} = \rho_{m-1}e^{\alpha_{m-1}}$，因此 $\rho_m e^{\alpha_m} = \rho_0 e^{\alpha_0} = 1$ 和 $\rho_\star = \rho_N = \rho_0 e^{-\sum_{j=1}^N \varepsilon_j} \ge \rho_0 e^{-1/2}$. 在第 m 步，不等式 (6.3)，

$$\rho_{m+1} \le \rho_m - \frac{1}{e^{\alpha_m} n}\,\varepsilon_{m+1},$$

当且仅当

$$e^{-\varepsilon_{m+1}} \le 1 - \frac{\varepsilon_{m+1}}{n}, \qquad \varepsilon_{m+1} \le 2^{-m-3}.$$

根据引理 6.6，我们有 ν_m：$D_{\rho_m} \to \nu_m(D_{\rho_m}) \subseteq D_{\rho_{m-1}}$，并且对于每个 ν_m：

1. ν_m 在 D_{ρ_m} 上是解析且单射的；
2. ν_m 的雅可比矩阵在每个 $\mathbf{z} \in D_{\rho_m}$ 处都是非退化的，其中

$$\exp(-\varepsilon'_m) \le \det D\nu_m(\mathbf{z}) \le \exp(\varepsilon'_m); \tag{6.35}$$

3. $\nu_m(D_{\rho_m}) \subseteq D_{\rho_{m-1}}$。

因此，该映射

$$F_N = \nu_1 \circ \cdots \circ \nu_N \colon D_{\rho_N} \to F_N(D_{\rho_N}) \subseteq D_{\rho_0} \tag{6.36}$$

是定义良好的。估计 F_N 的雅可比行列式，并利用 (6.35) 和 (6.34)，我们得到

$$\begin{aligned}
\det DF_N(\mathbf{z}) &\le \exp\left(\sum_{m=1}^{N} \varepsilon'_m\right) \le \exp\left(\sum_{m=1}^{N} 2^{-m-2}\right) < e^{1/4}, \\
\det DF_N(\mathbf{z}) &\ge \exp\left(-\sum_{m=1}^{N} 2^{-m-2}\right) > e^{-1/4}.
\end{aligned} \tag{6.37}$$

由于 $D_{\rho_*} \subseteq D_{\rho_N}$，我们可以在多圆盘 D_{ρ_*} 上定义映射 F_N。由于 F_N 的雅可比矩阵非退化，其逆映射 $F_N^{-1}\colon\ F_N(D_{\rho_*}) \to D_{\rho_*}$ 是解析的。令 $\nu = F_N^{-1}$。 □

定理 *6.3* 的证明。我们将证明，解析映射序列 $\{F_N\}_{N=1}^{+\infty}$ 在 D_{ρ_*} 上被某个统一常数有界。对于每个映射 ν_m，都有以下不等式成立：

$$\|\nu_m\|_{\rho_m} \le \varepsilon_m + \exp(\varepsilon_m). \tag{6.38}$$

为证明 (6.38)，我们使用牛顿–莱布尼茨公式和中值定理。令 $\gamma(t) = t\mathbf{z}$，$\mathbf{z} \in D_{\rho_m}$。于是

$$\nu_m(\mathbf{z}) - \nu_m(0) = \int_0^1 D\nu_m(\gamma(t))\,\mathbf{z}\,dt.$$

利用 (6.18)、(6.34) 以及引理 6.6 中的估计 (iii)，我们得到

$$\|\nu_m\|_{\rho_m} \le \frac{\rho_m \varepsilon_m}{n} + \rho_{m-1}\exp(\varepsilon'_m) \le \varepsilon_m + \exp(\varepsilon_m).$$

不等式 (6.38) 给出

$$\|F_N\|_{\rho_*} \le \prod_{j=1}^{N}\big(\varepsilon_j + \exp(\varepsilon_j)\big) \le \prod_{j=1}^{+\infty}\big(\varepsilon_j + \exp(\varepsilon_j)\big) =: L > 0. \tag{6.39}$$

(6.39) 中的无穷乘积收敛。因此，序列 $\{F_N\}$ 在多圆盘 D_{ρ_*} 上被 $L > 0$ 一致有界。根据蒙泰尔定理（参见 [8]，第 188 页），从 $\{F_N\}$ 中可以提取出一个收敛到解析映射 F 的子序列。接下来我们证明整个序列 $\{F_N\}_{N=1}^{+\infty}$ 关于 $\|\cdot\|_{\rho_*}$ 是柯西序列。令 $M > N$。考虑映射 F_N、F_M 的差的范数，并利用 (6.39)：

$$\begin{aligned}
\|F_M - F_N\|_{\rho_*} &= \big\|F_N \circ \big(\nu_{N+1} \circ \cdots \circ \nu_M - I\big)\big\|_{\rho_*} \\
&\le L\,\big\|\nu_{N+1} \circ \cdots \circ \nu_M - I\big\|_{\rho_*}.
\end{aligned}$$

引理 6.9。设 $M > N$，其中 $M, N \in \mathbb{N}$。考虑引理 *6.6* 中在第 s 步定义的映射序列 ν_s。那么

$$\big\|\nu_{N+1} \circ \cdots \circ \nu_M - I\big\|_{\rho_*} \le \sum_{j=M}^{N} \varepsilon_j \exp\varepsilon_j + \sum_{j=M}^{N} \|\nu_j(0)\|_\infty,$$

其中 $\|z\|_\infty = \max_{j=1,\dots,n} |z_j|$，$z \in \mathbb{C}^n$，序列 ε_s 定义于 (6.31)，而 ρ_* 与定理 *6.8* 中相同。

我们将在下面证明这个引理。利用它，我们得到

$$\|F_M - F_N\|_{\rho_*} \le L\left(\sum_{j=M}^{N} \varepsilon_j \exp\varepsilon_j + \sum_{j=M}^{N} \|\nu_j(0)\|_\infty\right).$$

由 (6.18) 和 (6.34),

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \|\nu_j(0)\|_\infty \le \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\rho_j\varepsilon_j \le \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{j+2}} < +\infty, \qquad \sum_{j=1}^{+\infty} \varepsilon_j \exp\varepsilon_j < +\infty.$$

因此 $\{F_N\}$ 是柯西列，故 $F = \lim_{N\to\infty} F_N$ 是解析的。在 (6.37) 中取极限，得到 F 的雅可比矩阵非退化：

$$\exp(-1/4) \le \det DF(\mathbf{z}) \le \exp(1/4), \qquad \mathbf{z} \in D_{\rho_*}.$$

我们得到所需的解析映射 $\nu := F^{-1}$。

引理 *6.9* 的证明。 固定 $N \in \mathbb{N}$。对 M 使用归纳法。考虑 $M = 1$ 的情形。考虑

$$\nu_m(\mathbf{z}) - \mathbf{z} = h_m(\mathbf{z}) + \nu_m(0), \qquad h_m(\mathbf{z}) = \nu_m(\mathbf{z}) - \nu_m(0) - \mathbf{z}, \qquad \mathbf{z} \in D_{\rho_*}. \quad (6.40)$$

我们将使用中值定理和牛顿–莱布尼茨公式，其中$\gamma(t) = \mathbf{z}t$, $t \in [0,1]$:

$$h_m(\mathbf{z}) = \int_0^1 Dh_m(\gamma(t))\mathbf{z}\, ds, \qquad Dh_m(\mathbf{w}) = D\nu_m(\mathbf{w}) - \mathbf{w}.$$

利用引理 6.6 的不等式 (ii) 和不等式 (6.34)，我们得到

$$\|h_m\|_{\rho_*} \le \varepsilon'_m \exp\varepsilon'_m \le \varepsilon_m \exp\varepsilon_m.$$

然后，考虑到 (6.40)，我们得到:

$$\|\nu_m - I\|_{\rho_*} \le \|\nu_m(0)\|_{\rho_*} + \varepsilon_m \exp(\varepsilon_m). \quad (6.41)$$

将 $m = N+1$ 代入 (6.41)，得到归纳法的基础情形。假设该引理对所有 $M < K$ 都成立。令 $M = K$；利用归纳假设和 (6.41)，我们得到:

$$\begin{aligned}
\|\nu_{N+1} \circ \ldots \circ \nu_K - I\|_{\rho_*} &= \|\nu_{N+1} \circ \ldots \circ \nu_{K-1} \circ \nu_K - I\|_{\rho_*} \\
&= \|\nu_{N+1} \circ \ldots \circ \nu_{K-1} \circ \nu_K - \nu_K + \nu_K - I\|_{\rho_*} \\
&\le \|\nu_{N+1} \circ \ldots \circ \nu_{K-1} \circ \nu_K - \nu_K\|_{\rho_*} + \|\nu_K - I\|_{\rho_*} \\
&\le \sum_{j=N}^{K-1} \varepsilon_j \exp\varepsilon_j + \sum_{j=N}^{K-1} \|\nu_j(0)\|_\infty + \varepsilon_K \exp\varepsilon_K + \|\nu_K(0)\|_\infty.
\end{aligned}$$

□

7 技术部分

7.1 主控函数

对于任意 $F,\ G \in \mathcal{F}$，我们称 $F \ll G$ 当且仅当对于相应的泰勒系数，有以下不等式$|F^m{}_{\mathbf{k}}| \le G^m_{\mathbf{k}},\ \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n_\diamond, \qquad m \in \{1,\dots,n\}.$

引理 7.1。设 $F \ll G,\ \ F \ll G$。则

1. $F^m + F^s \ll G^m + G^s, \quad F^m F^s \ll G^m G^s, \quad \partial_\delta F^m \ll \partial_\delta G^m, \quad m, s \in \{1,\dots,n\},$

2。若 F 和 G 依赖于参数 $\delta \in [\delta_1, \delta_2]$，则

$$\int_{\delta_1}^{\delta_2} F^m \, d\delta \ll \int_{\delta_1}^{\delta_2} G^m \, d\delta.$$

证明。 此陈述可通过直接计算证明。 □

引理 7.2。设 $\|F\|_\rho \le c$。那么

$$|F^m_{\mathbf{k}}| \le c\rho^{-|\mathbf{k}|}, \qquad \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n_\diamond, \qquad m \in \{1,\dots,n\}.$$

证明。任取一个 $\rho_0 < \rho$。利用柯西积分公式，

$$F^m_{\mathbf{k}} = \frac{1}{(2\pi i)^n} \oint_{|z_1|=\rho_0} dz_1 \dots \oint_{|z_n|=\rho_0} \frac{F^m(\mathbf{z})}{\mathbf{z}^{\mathbf{k}+\mathbf{1}}} \, dz_n, \qquad \mathbf{1} = (1,\dots,1).$$

因此，我们得到

$$|F^m_{\mathbf{k}}| \le c\rho_0^{-|\mathbf{k}|} \text{ for any } \rho_0 < \rho.$$

□

引理 7.3。设 $F \in \mathcal{A}^\rho,\ F = O_s(\mathbf{z}),\ a = a(\rho), F = \sum_{|\mathbf{k}|\ge s} F_{\mathbf{k}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}}$. 那么

$$F \ll \frac{a\rho\zeta^s}{\rho - \zeta}, \qquad \zeta = \sum_{j=1}^n z_j.$$

证明。取 $m \in \{1,\dots,n\}$。利用引理 7.2，我们有

$$F^m = \sum_{|\mathbf{k}|\ge s} F^m_{\mathbf{k}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}}, \qquad |F^m_{\mathbf{k}}| \le a\rho^{s-|\mathbf{k}|}, \qquad \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n_\diamond.$$

因此，

$$F^m \ll \sum_{j=s}^\infty \sum_{|\mathbf{k}|=j} a\rho^{s-|\mathbf{k}|}\mathbf{z}^{\mathbf{k}} = \sum_{j=s}^\infty a\rho^{s-j} \sum_{|\mathbf{k}|=j} \mathbf{z}^{\mathbf{k}}.$$

因此，$\sum_{|\mathbf{k}|=j}\mathbf{z}^{\mathbf{k}} \ll \zeta^j$，我们得到

$$F^m \ll \sum_{j=s}^\infty a\rho^{s-j}\zeta^j = \frac{a\rho\zeta^s}{\rho - \zeta}.$$

□

引理 7.4。 设 $u \in \mathcal{A}^\rho$、 $\|u\|_\rho = c$ 和 $\{b_j\}_{j=1}^\infty$ 是一个次线性序列。那么对于任意 $\alpha > -\ln \rho$，存在 $c > 0$ 使得

$$|U_{\mathbf{k}}^m| \le c e^{b_{|\mathbf{k}|}+\alpha|\mathbf{k}|}. \tag{7.1}$$

证明。 利用引理 7.2，我们有 $|F_{\mathbf{k}}^m| \le c_F \rho^{-|\mathbf{k}|}$。在（7.1）中取 c，使得

$$c_F e^{-b_q-(\alpha+\ln\rho)q} < c, \qquad q \in \mathbb{Z}_+.$$

对于任意 $\alpha > -\ln \rho$，函数 $q \mapsto e^{-b_q-(\alpha+\ln\rho)q}$有界，因为 b_q是次线性的。 □

7.2 主导原理

定义 7.5。 常微分方程组

$$\partial_\delta F^m = \Phi^m(F^1, \dots, F^n), \qquad F^m = \sum_{|\mathbf{k}|\ge 3} F_{\mathbf{k}}^m \mathbf{z}^{\mathbf{k}}, \qquad m \in \{1, \dots, n\}$$

在 $\mathcal{F}$ 上具有幂零形式，如果对于每个 $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_\diamond^n$，都有 $\partial_\delta F^m{}_{\mathbf{k}} = \Phi_{\mathbf{k}}^m$，其中 $\Phi_{\mathbf{k}}^m$是一个依赖于 $F^1{}_{\mathbf{p}_1}$、$F^2_{\mathbf{p}_2}$、……、$F^n{}_{\mathbf{p}_n}$的函数，并且对于每个 $s \in \{1, \dots, n\}$，都有 $|\mathbf{p}_s| < |\mathbf{k}|$。

考虑常微分方程组

$$\partial_\delta F^m = \Phi^m(F, \delta), \qquad F\big|_{\delta=0} = \widehat{F}, \qquad F = (F^1, \dots, F^n). \tag{7.2}$$

这里 $F \in \mathcal{F}$ 取决于参数 δ，而 Φ 是从 $\mathcal{F} \times \mathbb{R}_+$ 到$\mathcal{F}$的映射。

为系统 (7.2) 配上所谓的主导系统

$$\partial_\delta \mathbf{F}^m = \Psi^m(\mathbf{F}, \delta), \qquad \mathbf{F}\big|_{\delta=0} = \widehat{\mathbf{F}}, \qquad \mathbf{F} = (\mathbf{F}^1, \dots, \mathbf{F}^n). \tag{7.3}$$

令 $\Phi_{\mathbf{k}}^m = p_{\mathbf{k}}^m \circ \Phi$ 和 $\Psi_{\mathbf{k}}^m = p_{\mathbf{k}}^m \circ \Psi$。

定义 7.6. 若系统 *(7.2)* 满足以下两个性质，则称其为 *(7.3)* 的主导系统:

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$$(a)$. $F \ll \mathbf{F}$,(b). 对任意 $F \ll G$ 和 $\delta \ge 0$，有 $\Psi_{\mathbf{k}}^m(F, \delta) \ll \Phi_{\mathbf{k}}^m(\mathbf{F}\ \delta)$ 对任意 $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^n$.

定理 7.7 （（主导原理））。 假设系统 *(7.3)* 在区间 $\delta \in [0, \delta_0]$上存在一个解 $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\cdot, \delta) \in \mathcal{A}$ 。那么，*(7.2)* 在 $[0, \delta_0]$上有唯一的解析解 F，并且 $F(\cdot, \delta) \ll \mathbf{F}(\cdot, \delta)$。

定理 7.8。假设系统 *(7.2)* 和 *(7.3)* 具有幂零形式。则主导原理成立。

证明。 我们针对系统 (2.8) 证明这一陈述。对于系统 (2.8)，我们有 $|\mathbf{k}_0| = 2$。(7.2) 的幂零形式意味着

$$0 = \partial_\delta F_{\mathbf{k}_0}^m \ll \partial_\delta \mathbf{F}_{\mathbf{k}_0}^m, \qquad m \in \{1, \dots, n\}.$$

因此，对于 $\delta \geq 0$，有 $F_{\mathbf{k}_0}(\delta) \ll \mathbf{F}^{\mathbf{k}_0}(\delta)$。

我们对 $|\mathbf{k}|$ 使用归纳法来证明定理。设当 $\delta \geq 0 \mathbf{k}| < K$ 时， $F_{\mathbf{k}}(\delta) \ll \mathbf{F}_{\mathbf{k}}(\delta)$。对于任意满足 $|\mathbf{k}| = K$ 的 $\mathbf{k}$ ，由归纳假设和定义 7.6 中的性质 (b)，可得

$$\partial_\delta(\mathbf{F}_{\mathbf{k}}^m - F_{\mathbf{k}}^m) = \Psi_{\mathbf{k}}^m(\mathbf{F}(\cdot,\delta),\delta) - \Phi_{\mathbf{k}}^m(F(\cdot,\delta),\delta) \gg 0.$$

因此，

$$\mathbf{F}_{\mathbf{k}}^m(\delta) = \widehat{\mathbf{F}}_{\mathbf{k}}^m(\delta) + \int_0^\delta \Psi_{\mathbf{k}}^m(\mathbf{F}(\cdot,\lambda),\lambda)\,d\lambda \gg F_{\mathbf{k}}^m(\delta) + \int_0^\delta \Phi_{\mathbf{k}}^m(F(\cdot,\lambda),\lambda)\,d\lambda.$$

这里我们用到了归纳假设已知 $\Psi_{\mathbf{k}}^m$ 和 $\Phi_{\mathbf{k}}^m$ 的自变量。

□

7.3 辅助估计

引理 7.9. 设序列 $\{b_j\}_{j\in\mathbb{Z}_+}$ 为凸序列。则

(1) 对任意 $1 \leq m < k < l$,

$$(l-k)b_m + (m-l)b_k + (k-m)b_l \geq 0. \tag{7.4}$$

(2) 对任意 $1 \leq m < k \leq l$,

$$b_k + b_l \leq b_{k-m} + b_{l+m}. \tag{7.5}$$

证明。 我们证明该引理的第一个断言。首先，考虑 $l-k=1$ 的情形。如果 $k-m=1$, 那么不等式 (7.4) 与凸性条件一致。我们将对 $k-m$ 使用归纳法来证明该引理。假设 (7.4) 对 $k-m=q$ 成立。那么，只要将以下不等式相加，即可得到 (7.4)

$$\begin{aligned}(l-k)b_m + (m-l+1)b_{k-1} + (k-1-m)b_{l-1} &\geq 0,\\ -(m-l+1)b_{k-1} + 2(m-l+1)b_{l-1} - (m-l+1)b_l &\geq 0,\end{aligned}$$

这些不等式根据归纳假设成立。 $l-k>1$ 的情形可通过类似的归纳法由 $l-k=1$ 的情形推出。

我们证明第二个不等式。由 (7.4) 可得

$$(l-k)b_{k-m} + (k-m-l)b_k + mb_l \geq 0,$$

$$mb_k + (k-l-m)b_l + (l-k)b_{l+m} \geq 0,$$

由此可得 (7.5)。 □

引理 7.10. *1.* 对于任意凸次线性序列 $\{b_s\}$，满足 *(6.32)* 的序列 $\{a_j\}$ 是 *Bruno* 数列。

2. 对于任意满足 *(6.32)* 的 *Bruno* 数列 $\{a_j\}$，都存在一个次线性、凸、负的非增数列 $\{b_j\}$。

证明。 我们证明第一个断言。注意到

$$\ln a_j - \ln a_{j-1} = b_{r_{m+1}} - 3b_{r_m} + 2b_{r_{m-1}}, \qquad r_m = 2^{m-1} + 1.$$

利用引理 7.9 的第一条断言，我们得到

$$\ln a_j - \ln a_{j-1} \geq 0,$$

因此，序列 $\{a_j\}$ 单调不减。由于 (6.32) 成立，我们有

$$\sum_{j=1}^{J} 2^{-j} \ln a_j = -2b_{r_1} + 2^{-J} b_{r_{J+1}}.$$

由该序列的次线性性可知，级数 $\sum_{j=1}^{+\infty} 2^{-j} \ln a_j$ 收敛。

我们证明第二条断言。令 $A = 2^n n\Omega_{2r-1}$。首先，我们证明该序列为负。定义

$$b_{r_{j+1}} = 2^j b_{r_1} + \sum_{s=1}^{j} 2^{j-s} \ln\left(2^{-s} r_{j-s}^n A\right).$$

最后一个方程等价于

$$\frac{b_{r_{j+1}}}{2^j} = b_{r_1} + \sum_{s=1}^{j} 2^{-s} \ln\left(2^{-s} r_{j-s}^n A\right).$$

取 $b_{r_1} = \sum_{s=1}^{+\infty} 2^{-s} \ln(2^{-s} r_{j-s}^n A)$，得到

$$b_{2^j+1} = -2^j \sum_{s=j+1}^{+\infty} 2^{-s} \ln\left(2^{-s}(2^{j-s-1}+1)^n A\right) < 0. \tag{7.6}$$

利用 (7.6)，序列 $\{b_{2^j+1}\}_{j=1}^{\infty}$ 是次线性的。要证明该序列是非增的，考虑

$$\begin{aligned} b_{r_j} - b_{r_{j-1}} &= -2^{j+1} \sum_{s=j+2}^{+\infty} 2^{-s} \ln\left(2^{-s} r_{j-s}^n A\right) + 2^j \sum_{s=j+1}^{+\infty} 2^{-s} \ln\left(2^{-s} r_{j-s}^n A\right) \\ &= -2^j \sum_{s=j+2}^{+\infty} 2^{-s} \ln\left(2^{-s} r_{j-s}^n A\right) + 2^{-1} \ln\left(2^{j+1} r_{j+1}^n A\right) \\ &\leq -2^{-1} \ln\left(2^{-s} r_{j-s}^n A\right) + 2^{-1} \ln\left(2^{-s} r_{j-s}^n A\right) = 0. \end{aligned}$$

要证明凸性，验证不等式

$$b_{r_{j+1}} \leq \frac{b_{r_{j+2}} - b_{r_j}}{2^j + 2^{j-1}} (2^j - 2^{j-1}) + b_{r_j},$$

这等价于

$$2^{j-1}(b_{r_{j+1}} - 2b_{r_j}) - 2^{j-1}(b_{r_{j+2}} - 2b_{r_{j+1}}) \leq 0.$$

利用 (6.32) 和 Bruno 数列条件，可得后者等价于

$$2^{j-1}(a_j - a_{j+1}) \leq 0.$$

□

参考文献

[1] V. I. Arnol’d, 《常微分方程理论补充篇》, 莫斯科, 1978。[2] V. I. Arnol’d, 《常微分方程》, MCCME（莫斯科连续数学教育中心）, 2012。[3] Bernard, P.《Siegel–Bruno线性化定理》。Regul. Chaot. Dyn. 28, 756-762 (2023). https://doi.org/10.1134/S1560354723040147[4] G.D. Birkhoff, 《动力系统》, A.M.S., 普罗维登斯, 罗得岛州, 1927[5] A. D. Bruno, 《微分方程的解析形式》, Trans. Mosc. Math. Soc. 25(1971), 131-288。[6] Careson L., Gamelin T. W.《复动力学》, Springer Verlag, 1993。[7] S. N Chow, C. Li, D. Wang, 《平面向量场正规形与分岔》, 剑桥大学出版社, 1994[8] A. V. Domrin, A. G. Sergeev, 《复分析讲义。第二部分：第二学期》。莫斯科：斯捷克洛夫数学研究所（MIAN）, 2004。136页。ISBN 5-98419-008-7。[9] L.H. Eliasson, 《具有泊松对易积分的哈密顿系统的正规形——椭圆情形》, Comment. Math. Helv. 65(1990), 4-35。[10] H. Ito, 《可积系统的 Birkhoff 正规形的收敛性》。Commentarii Mathematici Helvetici 64, (1989), 412-461。[11] T. Kappeler, Y. Kodama, A. Nemethi, 《共振不动点附近完全可积哈密顿系统的 Birkhoff 正规形》。Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa - Classe di Scienze, Serie 4, Volume 26 (1998) no. 4, pp. 623-661。[12] H. Russmann, 《解析函数的迭代》, J. Math. Mech. 17, No 6 (1967), 523-532。[13] C. L. Siegel, 《解析函数的迭代》, Ann. Maths 43 (1942) 607-612。[14] L. Stolovitch, 《奇异完全可积性》。Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math.91 (2000), 133-210 (2001)。[15] D. V. Treschev, 《正规化流》, Regul. Chaotic Dyn., 28:4-5 (2023), 781-804[16] D. Treschev, O. Zubelevich, 《哈密顿系统扰动理论导论》。Springer-Verlag, 柏林, x+211 页。(2010)[17] D. V. Treschev, “共振情形下的正规化流”, Изв. РАН. Сер. матем., 89:1 (2025), 184–207；Izv. Math., 89:1 (2025), 172–195

[18]J. Vey, 《关于某些可分动力系统》。《美国数学杂志》100(1978), 591-614.