arXiv:2601.03150v1 [cond-mat.str-el] 6 Jan 2026

通过高阶上同伦实现高维任意子

SADOK KALLEL、HISHAM SATI 和 URS SCHREIBER

CENTER FOR QUANTUM & TOPOLOGICAL SYSTEMS

摘要。我们强调，层级为 2 的整数海森堡群是拓扑量子现象的基础：它们的群代数与闭曲面上的分数量子霍尔（FQH）系统中阿贝尔任意子的量子可观测量代数相同。数十年前，人们已证明这些群是从曲面到 2-球面的映射空间的基本群；近来，这一结果被理解为反映了 2-上同伦中的有效分数量子霍尔磁通量子化。在此，我们利用 H- 群的同伦论简化并推广这一结论，证明对于 $k \in \{1, 2, 4\}$，$\pi_1 \mathrm{Map}\big((S^{2k-1})^2, S^{2k}\big)$ 的非挠部分是层级为 2 的整数海森堡群；其中，我们将该层级认定为 2 除以 $\pi_{4k-1}(S^{2k})$ 的生成元的霍普夫不变量。该结果意味着，在 11维超引力的上同伦完备化中，存在分数量子霍尔任意子的高维类比（“假设 H”）。

目录

1. 引言 21.1. 背景 21.2. 概述 42. 预备知识 52.1. 群论 52.2. H-群理论 63. 定理 73.1. 第二层级 83.2. 普朗克常数 114. 推广 135. 应用 165.1. 通过 2-上同伦描述普通分数量子霍尔任意子 175.2. 通过 4-余同伦描述二维任意子 20附录 A. 一些拓扑学 22附录 B. 一些同伦论 23参考文献 25

日期：2026年1月7日。2020 数学学科分类主要分类：55Q55、20F18、55Q15、55Q25、81V27；次要分类：81V70、55P35。关键词和短语整数海森堡群、上同伦、Samelson/Whitehead 乘积、任意子、分数量子霍尔系统、磁通量子化、假设 H。资助由阿联酋 Tamkeen 通过纽约大学阿布扎比分校研究院项目资助 CG008。

1. 引言

我们在此证明初等同伦论中的一个有趣结果（关于后者，参见 [Whi78]），它与当代量子材料研究中的一些问题有着显著联系，具体而言，是分数量子霍尔系统（关于后者，参见[Sto99；Ton16；nLa26d]）中的问题；这些问题与拓扑量子计算相关（关于后者，参见 [Fre+03；Nay+08；Sta20；SV25a]）。

1.1. 背景。

1.1.1. 原始定理。 早在 1974 年，汉森 [Han74] 就研究了从环面 $T^2 = (S^1)^2$到 2-球面 S^2的映射空间 $\mathrm{Map}(-,-)$（见（49））的基本群。在绕数为 $n \in \mathbb{Z}$ 的连通分支 $\mathrm{Map}_n(-,-)$ 中，他发现这些基本群是由循环群 $\mathbb{Z}_{/2n}$对 $\mathbb{Z}^2$ 作中心扩张得到的：

$$1 \to \mathbb{Z}_{/2n} \longrightarrow \pi_1 \mathrm{Map}_n\big(T^2, S^2\big) \xleftarrow{\quad} \mathbb{Z}^2 \to 1\,. \tag{1}$$

由于这类中心扩张由上同调群分类，

$$H^2_{\mathrm{grp}}(\mathbb{Z}^2; \mathbb{Z}_{/n}) \simeq H^2(T^2; \mathbb{Z}_{/n}) \simeq \mathbb{Z}_{/n}\,, \tag{2}$$

汉森的结果将这些基本群确定到一个 层级 $\ell_n \in \mathbb{Z}_{/2n^\circ}$ 以这种方式得到的群（通常只考虑单位层级 $\ell = 1$）也称为 整数海森堡群 （参见 [nLa26b] 和§ 2.1 下文）。

1980 年，拉莫尔与托马斯接手了这个问题，并证明了[LT80，定理 1] 在所有分支中，式（1）中的层级实际上等于 $\ell = 2$。2001 年，其中一位作者又给出了这一结论的另一种证明 [Kal01，命题 1.5，推论 6。14]。 [1]

1.1.2. 量子物理的一点启示。 我们可以对这一结果作如下观察：

抽象群论文献通常讨论层级为 $\ell = 1$的整数海森堡群，而整数海森堡群是实际的海森堡群 $\mathrm{Heis}_3(\mathbb{R},\ h)$ 的子群——这类群是量子力学的标志性结构（参见 [Ros04，第 7]页），其普朗克常数为 普朗克常数 $h \in \mathbb{R}$(参见下文定义 2.1 ）；海森堡之名在此所指的正是这一层级 $\ell = 2$。此处对中心扩张进行分类的余循环，是典范辛形式 ω 在 $\mathbb{R}^2$上的整数限制：

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\quad\omega\quad} & \mathbb{R} \\ \big((q,p),(q',p')\big) & \longmapsto & qp' - pq'. \end{array} \tag{3}$$

正是（3）右侧的两个加项，在将 ω 限制为 $\mathbb{Z}_{/n}$-值群二余循环 $\mathbb{Z}^2$时，使其上同调类成为（2）中生成类的两倍。

[1] 这些作者更一般地考察了从亏格为 g（例 4.2）的任意闭定向曲面出发的映射空间。不过，这实际上只是环面情形一个相当直接的推广，$g = 1$；我们在§4中的例4.6恢复了这一结果（其中的陈述还进一步推广到了更高维度）。聚焦于环面情形（$g = 1$）也受到物理学应用的启发（详见§ 5.1）：对于更高的 g，实验实现分数量子霍尔任意子将变得不可行；而分数量子反常霍尔系统必然具有 $g = 1$（晶体动量的布里渊环面）。

对于整数海森堡群而言，这个在量子力学上自然的层级 $\ell = 2$ 是我们在此默认考虑的情形，因此 [LT80; Kal01]的结果用我们的记号表示为（参见定义 2.2和下文定理 3.5 ）：

$$\pi_1 \operatorname{Map}_n(T^2, S^2) \simeq \operatorname{Heis}_3(\mathbb{Z}, 2n) \subset \operatorname{Heis}_3(\mathbb{R}, 2n). \tag{4}$$

在§ 3中，我们给出了这一结果的一种新证明（4），比先前的论证（依据下文的定理 3.3 ，运用经典的萨梅尔森括号理论，参见§ 2.2）更简短、更清晰，并将这一结论推广到更高维度。

1.1.3. 与分数量子霍尔任意子的关系。 值得进一步探讨代数拓扑和同伦论中这种引人注目的量子力学结构现象（参见 [SS25d; SS25f]）：

我们回顾一下，普通海森堡群 $\mathrm{Heis}_3(\mathbb{R},\ h)$ 的群 C^*-代数，本质上就是一维量子系统上的量子可观测量的外尔代数（参见[Der06，(3)]）——例如著名但理想化的“直线上的粒子”（或者更贴近现实的例子：处于*Transmon* 区域的超导体之间的约瑟夫森结，其中 q 是结两侧超导序参量之间实际近乎连续的相位差）。

同样，层级为 $\ell = 2$ 的整数海森堡群 $\mathrm{Heis}_3(\mathbb{Z},\ h)$ 的群代数，本质上是这样一种量子系统的可观测量代数：其正则坐标 q 和正则动量 p 被限制为离散值。

任意子在环面上的分数量子霍尔系统中的量子可观测量尤其如此（参见 [WN90，（4.9）；Ien92，（4.14）；Ton16，（5.28）]）。这些分数量子霍尔系统是处于横向磁场中的二维电子气；该磁场强度足够高，并经过精细调节，使得每个电子对应的磁通量子数恰好为整数（通常为有理数）的倍数（其倒数即填充因子）。在这样的背景下，分数量子霍尔任意子是电子气中的基本涡旋，与超出精确填充因子的过剩磁通量子相关。这里，使相关海森堡群成为离散群的是磁通量的量子化（此处意为离散化，参见 [SS25e]）。

此处的离散海森堡群所表达的是一种内禀的量子力学编织相位 ζ，它由量子态 $|\psi\rangle$ 在任意子彼此绕行时获得（参见图1）。

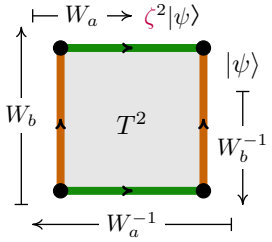


图 1。展示整数海森堡群 Heis 中非平凡的群交换子 $[W_a, W_b] = \zeta^2$ $(11)_3(\mathbb{Z}, h)$，层级为 $\ell = 2$ （定义 2.2）。将群元素视为分数量子霍尔量子系统上的可观测量（参见§ 5.1），中心元素 ζ 在其量子态 $|\psi\rangle$ 上的表示，是通过乘以一个称为任意子编织相位的复单位根实现的（参见 [Ton16，（5.28）；SS25h，图 4]）。

值得注意的是，分数量子霍尔任意子编织相位 ζ 近年来已由多个群组通过实验观测到（不过目前观测到的并非环面电子气，而是平面电子气；相关工作始于 [Nak+20; Bar+20]；关于进一步发展，参见 [Vei+24; Gho+25]）。这具有相当重要的技术意义，因为这是目前观测到的首个、也是唯一一个基本任意子拓扑量子

现象（参见 [Sta20；Sim23]）。这些现象很可能是（参见 [Das22]）未来构建量子计算机（参见 [BG25]）所必需的，而构建具有实用规模的量子计算机需要进行拓扑量子门（参见 [Fre+03；MSS24，§3；SV25a]），而这些量子门将内在地免受危及所有量子电路的退相干噪声影响。

然而，即使从理论角度来看，关于分数量子霍尔任意子的本质（参见 [SS25f，§A.1]）仍有一些未解的问题。与同伦论的非凡关联（4）或许能为这些问题带来一些启示：

1.1.4. 上同伦中的磁通量子化。 上述情形 §1.1.3揭示了一种奇特的物理解读 [SS25f]，适用于结果（4）：

如果我们将 $S^2 \subset B\mathrm{U}(1)$ 理解为通常分类空间 $B\mathrm{U}(1) \simeq B^2\mathbb{Z}$ 关于磁荷的一种变形（即其 3-骨架），那么（4）表明，分数量子霍尔系统中的任意子可以理解为过剩磁通量子；它们与二维电子气的相互作用，实际上将磁通量子化定律[SS25e，§3] 从普通上同调 $H^n(-;\ \mathbb{Z})$ 变形为上同伦 $\pi^n(-)$（参见 [Hu59，§VII；FSS23，例 2。7]），其度为 $n = 2$：

$$\begin{aligned} H^n(-;\mathbb{Z}) &\simeq \pi_0 \operatorname{Map}(-, B^n\mathbb{Z}) \\ \pi^n(-) &\equiv \pi_0 \operatorname{Map}(-, S^n)\,. \end{aligned}$$

这表明，分数量子霍尔任意子或许通常可以理解为在 2-上同伦中量子化的过剩磁通（“假设 h”，[SS26；SS25k；SS25f]），这为分数量子霍尔任意子的有效行为提供了一种新的代数拓扑理论。例如，它预测 [SS25f，图 D 和§3。8] 分数量子霍尔材料中的超导岛可能支持非阿贝尔缺陷任意子；实现这种任意子是拓扑量子材料研究的终极目标。

事实上，在上同伦中的磁通量子化最初是在高维量子场论中被认识为一种物理可能性，具体而言是在 11 维超引力中，其中“C场”磁通允许在 4-余同伦中量子化（“假设 H”，[Sat18，§2.5；FSS20；FSS21；SS23b]）。我们将在最后的§5中进一步讨论这些问题。

1.2. **概述**。 这促使我们思考，式（4）是否存在高维类比。在 § 2 中简要介绍相关背景后，我们将在§ 3（定理3.5）中证明：

$$\pi_1 \operatorname{Map}_{[n]}\big((S^3)^2,\, S^4\big) \simeq \mathrm{Heis}_3(\mathbb{Z}, 0) \times \mathbb{Z}_{/12}\,, \tag{5}$$

以及

$$\pi_1 \operatorname{Map}_{[n]}\big((S^7)^2,\, S^8\big) \simeq \mathrm{Heis}_3(\mathbb{Z}, 0) \times \mathbb{Z}_{/120} \tag{6}$$

（两种情况下，各分量均由 $[n] \in \mathbb{Z}_{/2}$ 标记。）

我们在证明中的创新之处，是引入了中间定理 3.3，将经典的 Samelson 乘积理论应用于这一问题（参见命题 2.8）。

这一证明策略可立即推广到其他情形，详见 § 4。

我们将在§ 5 中进一步探讨这一结果对当代任意子量子材料物理学与工程学问题的潜在影响。

2. 预备知识

在介绍§ 3中的主定理之前，我们先在此简要铺陈相关背景。

2.1. **群论**。普通海森堡群因其在基础量子力学中扮演基石角色而得名（参见 [Ros04，第 7] 页），它反映了这样一个事实：初等相空间 $\mathbb{R}^2$ 及其典范辛形式（3）变得“非交换”：

定义 2.1（普通海森堡群）。对于 $h \in \mathbb{R}$ （“普朗克常数”），其底层光滑流形为

$$\mathrm{Heis}_3(\mathbb{R},h) :=_{\mathrm{SmthMfd}} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_{/h}\,, \tag{7}$$

其生成元记作

$$\left.\begin{aligned} W_a^q &:= \big((q,0),[0]\big) \\ W_b^p &:= \big((0,p),[0]\big) \\ \zeta^z &:= \big((0,0),[z]\big) \end{aligned}\right\} \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_{/h}\,,$$

其中唯一非平凡的群交换子为

$$[W_a^q\,,\, W_b^p] \;=\; \zeta^{2qp}.$$

类似地，还有高维海森堡群，对于 $g \in \mathbb{N}_{\geq 1}$，

$$\mathrm{Heis}_{2g+1}(\mathbb{R},h) :=_{\mathrm{SmthMfd}} \mathbb{R}^{2g} \times \mathbb{R}_{/h}\,, \tag{8}$$

其生成元为$\big(W_{a_i}^q,\ W_{b_i}^p\big)_{i=1}^g$ 以及 ζ^z，其中唯一非平凡的群交换子为

$$\big[W_{a_i}^q, W_{b_i}^p\big] \;=\; \zeta^{2qp}\,, \qquad \text{for } 1 \leq i \leq g.$$

定义 2.2（层级为 $\ell = 2$ 的整数海森堡群）。对于 $h \in \mathbb{Z}$，其底集为

$$\mathrm{Heis}_3(\mathbb{Z},h) :=_{\mathrm{Set}} \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}_{/h}\,, \tag{9}$$

其生成元为

$$\left.\begin{aligned} W_a &:= \big((1,0),[0]\big) \\ W_b &:= \big((0,1),[0]\big) \\ \zeta &:= \big((0,0),[1]\big) \end{aligned}\right\} \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}_{/h}\,, \tag{10}$$

其中唯一非平凡的群交换子为

$$[W_a, W_b] \;=\; \zeta^2. \tag{11}$$

类似地，还有高维整数海森堡群，对于 $g \in \mathbb{N}_{\geq 1}$，

$$\mathrm{Heis}_{2g+1}(\mathbb{Z},h) :=_{\mathrm{SmthMfd}} \mathbb{Z}^{2g} \times \mathbb{Z}_{/h}\,, \tag{12}$$

其生成元为 $(W_{a_i}、W_{b_i})_{i=1}^g$ 以及 ζ，其中唯一的非平凡群交换子为

$$\big[W_{a_i}, W_{b_i}\big] \;=\; \zeta^2\,, \qquad \text{for } 1 \leq i \leq g.$$

注记 2.3（其他层级）。 在整数上，若将上述群交换子（11）改为以下形式，则可得到非同构的群

$$[W_a, W_b] \;=\; \zeta^n,$$

对于某个

$$n \in \mathbb{Z} \simeq H^2_{\mathrm{Grp}}(\mathbb{Z}^2; \mathbb{Z}),$$

我们称之为层级，因为它是中心扩张类。群论作者通常关注以下情形 $n = 1$（参见 [nLa26b]）；但对我们的目的而言，情形 $n = 2$ 至关重要，因此默认将其视为已知（11）。

2.2. **H-群论**。 我们需要以下关于同伦群的概念和结果（背景参见§ B），这些内容虽属经典，但并非总能轻易找到可引用的出处（例如下文关键的命题2.8 ）。

定义 2.4（参见 [Whi78，§X。5]）。 环空间 Ω 上的*Samelson* 乘积 $[-,-]_{\mathrm{Sam}}$（例*X* B.4，一般而言也定义在 H-群上，定义见B.3，并由此诱导到其同伦群上）是（在同伦意义下）由笛卡尔积下降到楔积上的*H*-群交换子：

$$\begin{array}{ccc} (\ell_2,\ \ell_1) & \longmapsto & (\ell_2 \star \ell_1) \star (\overline{\ell_2} \star \overline{\ell_1}) \\ (\Omega X) \times (\Omega X) & \xrightarrow{\;[-,-]\;} & \Omega X\,. \\ \downarrow & \nearrow & \\ (\Omega X) \wedge (\Omega X) & & \end{array} \tag{13}$$

定义 2.5 (参见 [FHT00，第 176-7])。 对于 $X \in \mathrm{TopSp}^*$，其同伦群（度数 n_1, $n_2 \in \mathbb{N}_{\geq 1}$）上的 Whitehead 积，

$$\pi_{n_1}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \pi_{n_2}(X) \xrightarrow{\;[-,-]_{\mathrm{Wh}}\;} \pi_{n_1+n_2-1}(X)\,,$$

定义在一对代表元上

$$[\phi_i : S^{n_i} \longrightarrow X] \in \pi_{n_i}(X)\,, \quad i \in \{1,2\}$$

由以下图表中顶部复合映射的同伦类给出：

$$\begin{array}{ccccc} & & \overset{[\phi_1,\phi_2]_{\mathrm{Wh}}}{\frown} & & \\ S^{n_1+n_2-1} & \xrightarrow{f_{n_1,n_2}} & S^{n_1} \vee S^{n_2} & \xrightarrow{(\phi_1,\phi_2)} & X \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ D^{n_1+n_2} & \longrightarrow & S^{n_1} \times S^{n_2}\,, & & \end{array}$$

其中 $f_{n_1,\ n_2}$ 是将球面的楔和粘附为胞腔、从而得到如图所示的球面乘积的粘附映射。

命题 2.6（参见 [Whi78，第 476] 页定理 7.10）。对于 $X \in \mathrm{TopSp}^*$，怀特海德括号 $[-,-]_{\mathrm{Wh}}$ 在 $\pi_{\bullet+1}(X)$（定义 2.5）由 $\pi_\bullet(\Omega X)$（定义2.4）上的 *Samelson* 乘积给出：

$$\widetilde{[\alpha, \alpha_2]}_{\mathrm{Wh}} \;=\; (-1)^{\deg(\alpha_1)} [\widetilde{\alpha}_1,\, \widetilde{\alpha}_2\,]_{\mathrm{Sam}}\,, \tag{14}$$

where $\pi_{\bullet+1}(X) \underset{\sim}{\overset{\widetilde{(-)}}{\leftrightarrows}} \pi_\bullet(\Omega X)$ *is induced from the hom-isomorphism* (57)*:*

$$\begin{array}{ccc} \pi_0\operatorname{Map}^*(S^{n_1},\,\Omega X)\times\pi_0\operatorname{Map}^*(S^{n_2},\,\Omega X) & \xrightarrow{[-,-]_{\mathrm{Sam}}} & \pi_0\operatorname{Map}^*\big(S^{n_1+n_2},\,\Omega X\big) \\ \updownarrow{\scriptstyle \widetilde{(-)}\times\widetilde{(-)}} & & \updownarrow{\scriptstyle \widetilde{(-)}} \\ \pi_0\operatorname{Map}^*(S^{n_1+1},\,X)\times\pi_0\operatorname{Map}^*(S^{n_2+1},\,X) & \xrightarrow{\pm[-,-]_{\mathrm{Wh}}} & \pi_0\operatorname{Map}^*(S^{n_1+n_2+1},\,X). \end{array}$$

引理 2.7 （参见 [Whi78，第 485][2] 页定理 8.20）。任意怀特海德括号 （54）的悬挂（14）均为零:

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(S^m) & \xrightarrow{\Sigma} & \pi_{n+1}(S^{m+1}) \\ [\alpha,\beta]_{\mathrm{Wh}} & \longmapsto & 0\,. \end{array} \tag{15}$$

命题 2.8. 对于 $k\in\mathbb{N}$，下图在同伦意义下交换:

$$\begin{array}{ccccc} & & (\Omega S^{2k})\wedge(\Omega S^{2k}) & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ S^{4k-2} & & \xrightarrow{2\,\widetilde{h_{\mathbb{K}}}} & & \Omega S^{2k}. \end{array} \tag{16}$$

证明。 生成元的怀特海德括号 $[\mathrm{id}_{2k}] := 1\in\mathbb{Z}\simeq\pi_n(S^{2k})$ 与自身的霍普夫不变量为 2（参见 [Whi78，第 495] 页定理 2.5）：

$$H\big([\mathrm{id}_{2k},\mathrm{id}_{2k}]_{\mathrm{Wh}}\big) = 2\,.$$

但对于 $k\in\{1、2、4\}$ 在 $\pi^{4k-1}(S^{2k})$ 中，霍普夫不变量为 2 的唯一元素是对应霍普夫纤维化的类的两倍 $h_{\mathbb{K}}$。（这是因为 $H(h_{\mathbb{K}}) = 1$；而由于 [Hop35]的同态性，挠元的霍普夫不变量为零，参见$H(–)$，见 [Whi78，第 495] 页式 (2.1)。）因此:

$$\begin{array}{rcl} \big[[\mathrm{id}_2],[\mathrm{id}_2]\big]_{\mathrm{Wh}} &=& 2[h_{\mathbb{C}}] \\ \big[[\mathrm{id}_4],[\mathrm{id}_4]\big]_{\mathrm{Wh}} &=& 2[h_{\mathbb{H}}] \\ \big[[\mathrm{id}_8],[\mathrm{id}_8]\big]_{\mathrm{Wh}} &=& 2[h_{\mathbb{O}}]\,. \end{array} \tag{17}$$

由 (14) 和 (17) 可证得该结论。 □

备注 2.9。 我们将看到，式（17）中出现的因子 2，既是海森堡群的层级为 2 的根源（这正是我们的新证明定理 3.3 的内容），也是其“普朗克常数”为 $2n$ （当 $k=1$ 时；见下文引理 3.8，此前已有观察）。

3. 定理

我们将在此计算从（S^{2k-1}）[2]到 S^{2k}的映射空间的基本群，其中 $k\in\{1、2、4\}$，利用 §2.2 中的 H-群论，并发现它们本质上就是 § 2.1中的整数海森堡群。

[2]请注意， [Whi78] 用“E”表示悬挂函子；这一记号是在该书第 369 页引入的。

3.1. **第二层。** 本节包含我们最新的主要观察（下文定理 3.3 的证明）。首先，我们作出以下基本观察：

注 3.1（平方球面的胞腔结构）。

(i) $(S^{2k-1})^2$ 的典范 CW 复形结构除了一个 0-胞腔外，还包含两个 $(2k-1)$-胞腔和一个 $(4k-2)$-胞腔；后者通过它们的恒等映射的怀特海德积附着（根据定义 2.5），如下方左侧的推出方块所示：

$$\begin{array}{ccccc} S^{4k-3} & \xrightarrow{[\mathrm{id}_{2k-1},\mathrm{id}_{2k-1}]_{\mathrm{Wh}}} & S^{2k-1}\vee S^{2k-1} & \longrightarrow & * \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ D^{4k-2} & \xrightarrow{i_{4k-2}} & S^{2k-1}\times S^{2k-1} & \xrightarrow{\mathrm{pr}_c} & S^{4k-2} \\ & & {\scriptstyle \mathrm{pr}_a}\downarrow\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{pr}_b} & & \\ & & S^{2k-1}. & & \end{array} \tag{18}$$

右侧的推出方块构成两个 $(2k-1)$-胞腔的楔积，由此给出一个记作 pr_c 的典范映射。上述图表底部显示了到 $(2k-1)$-球面因子的两个投影，分别记作 pr_a 和 pr_b。

(ii) 注意，下图是交换图：

$$\begin{array}{ccccc} & & (S^{2k-1})^2\wedge(S^{2k-1})^2 & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ (S^{2k-1})^2 & & \xrightarrow{\mathrm{pr}_c} & & S^{4k-2}. \end{array} \tag{19}$$

（观察即可得出；或者，这是下文引理 4.3的一个特例。）**(iii)** 这些投影映射的悬挂给出了平方球面稳定分裂的三个余投影（利用引理 2.7 或 [Hat02，命题 4I。1]）：

$$\Sigma(S^{2k-1})^2 \underset{\mathrm{hmtp}}{\simeq} \begin{array}{ccccc} S^{2k}_a & \vee & S^{2k}_b & \vee & S^{4k-1} \\ {\scriptstyle \Sigma\mathrm{pr}_a}\downarrow & & {\scriptstyle \Sigma\mathrm{pr}_b}\downarrow & & {\scriptstyle \Sigma\mathrm{pr}_c}\downarrow \\ S^{2k}_a & & S^{2k}_b & & S^{4k-1}. \end{array} \tag{20}$$

请注意，这个同伦等价并不保持悬挂上的 H-余群结构（见例 B.4）。

命题 3.2. 带基点映射空间的连通分支为：

$$\pi_0\,\mathrm{Map}^*\big((S^{2k-1})^2,\,S^{2k}\big) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{if } k=1 \\ \mathbb{Z}_{/2} & \text{if } k=2 \\ \mathbb{Z}_{/2} & \text{if } k=4\,. \end{cases} \tag{21}$$

证明。一般来说，映射到（$2k-1$）连通空间（如 S^{2k}）会经由将定义域对其（$2k-1$）骨架取商空间而分解。但根据 CW-结构（18），我们有：

$$(S^{2k-1})^2/\mathrm{sk}_{2k-1}(S^{2k-1})^2 \;\simeq\; (S^{2k-1})^2/(S^{2k-1}\vee S^{2k-1}) \;\simeq\; S^{4k-2}\,,$$

由此可得:

$$\pi_0 \operatorname{Map}^*\big((S^{2k-1})^2,\, S^{2k}\big) \simeq \pi_0 \operatorname{Map}^*\big(S^{4k-2},\, S^{2k}\big) \equiv \pi_{4k-2}(S^{2k})\,.$$

借助标准球面同伦群（62），这就证明了该论断。 □

我们现在的核心观察是对以下内容的证明:

定理 3.3. 对于 $k \in \{1, 2, 4\}$，我们有一个群同构

$$\pi_1 \operatorname{Map}_0^*\big((S^{2k-1})^2,\, S^{2k}\big) \simeq \operatorname{Heis}_3(\mathbb{Z}, 0) \times \begin{cases} 1 & \text{if } k = 1 \\ \mathbb{Z}_{/12} & \text{if } k = 2 \\ \mathbb{Z}_{/120} & \text{if } k = 4\,. \end{cases} \tag{22}$$

证明。 首先，我们注意到底层集合之间存在双射（22）：

$$\begin{aligned} \pi_1 \operatorname{Map}_0^*\big((S^{2k-1})^2,\, S^{2k}\big) &\simeq \pi_0 \operatorname{Map}^*\big(\Sigma(S^{2k-1})^2,\, S^{2k}\big) && \text{by (67)} \\ &\simeq \pi_0 \operatorname{Map}^*\big(S^{2k} \vee S^{2k} \vee S^{4k-1},\, S^{2k}\big) && \text{by (20)} \\ &\simeq \pi_{2k}(S^{2k})^2 \times \pi_{4k-1}(S^{2k}) && \text{by (59) and (60)} \\ &\simeq \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z} \times \begin{cases} 1 & \text{if } k = 1 \\ \mathbb{Z}_{/12} & \text{if } k = 2 \\ \mathbb{Z}_{/120} & \text{if } k = 4 \end{cases} && \text{by (62)}\,. \end{aligned}$$

（这是一系列集合之间的双射，但不是群同态之间的双射，因为第二步中使用的稳定分裂不是 H-余群同态。）因此，候选海森堡群生成元（10）由投影算子（20）和同伦群生成元（62）表示为:

$$\begin{aligned} W_{a/b} &:= \big[\Sigma(S^{2k-1})^2 \xrightarrow{\Sigma\,\mathrm{pr}_{a/b}} S^{2k} \xrightarrow{\mathrm{id}} S^{2k}\big] \\ \zeta &:= \big[\Sigma(S^{2k-1})^2 \xrightarrow{\Sigma\,\mathrm{pr}_{c}} S^{4k-1} \xrightarrow{h_{\mathbb{K}}} S^{2k}\big]\,, \end{aligned} \tag{23}$$

并且其伴随表示为:

$$\begin{aligned} \widetilde{W}_{a/b} &= \big[(S^{2k-1})^2 \xrightarrow{\mathrm{pr}_{a/b}} S^{2k-1} \xrightarrow{\widetilde{\mathrm{id}}} \Omega S^{2k}\big] \\ \widetilde{\zeta} &= \big[(S^{2k-1})^2 \xrightarrow{\mathrm{pr}_{c}} S^{4k-2} \xrightarrow{\widetilde{h_{\mathbb{K}}}} \Omega S^{2k}\big]\,, \end{aligned} \tag{24}$$

而进一步的挠群因子的生成元表示为:

$$R := \big[\Sigma(S^{2k-1})^2 \xrightarrow{\Sigma\,\mathrm{pr}_{c}} S^{4k-1} \xrightarrow{r_{\mathbb{K}}} S^{2k}\big]\,.$$

那么，根据备注 B.6 和定义 2.4，群交换子 $[W_a, W_b]$ 由下图的外部部分表示:

$$\begin{array}{ccccc} (S^{2k-1})^2 & & \xrightarrow{\widetilde{[W_a, W_b]}} & & \Omega S^{2k} \\ {\scriptstyle\Delta}\downarrow & \searrow^{\mathrm{pr}_c} & & \nearrow_{2\widetilde{h_{\mathbb{K}}}} & \uparrow{\scriptstyle [-,-]_{\mathrm{Sam}}} \\ (S^{2k-1})^2 \wedge (S^{2k-1})^2 & \xrightarrow[\mathrm{pr}_a \wedge \mathrm{pr}_b]{} & S^{2k-1} \wedge S^{2k-1} & \xrightarrow[\widetilde{\mathrm{id}_{2k}} \wedge \widetilde{\mathrm{id}_{2k}}]{} & (\Omega S^{2k}) \wedge (\Omega S^{2k})\,. \\ & \searrow_{\widetilde{W}_a \wedge \widetilde{W}_b} & & & \nearrow \end{array} \tag{25}$$

在此图表中，我们（如图所示）标出

(i) 左侧对角映射（19），**(ii)** 右侧对角映射（16）。

因此，图表中的顶部内三角形可交换，并证明了 $[W_a, W_b] = \zeta^2$。类似地，$[W_{a/b}, \zeta]$ 由下图的外部部分表示

(26)
$$\begin{array}{ccccccc}
(S^{2k-1})^2 & & \xrightarrow{\widetilde{[W_{a/b},\zeta]}} & & & & \Omega S^{2k} \\
\Delta\downarrow & \searrow^{0} & & & & & \uparrow{\scriptstyle [-,-]_{\mathrm{Sam}}} \\
(S^{2k-1})^2 \wedge (S^{2k-1})^2 & & \xrightarrow[\mathrm{pr}_{a/b}\wedge \mathrm{pr}_c]{} & S^{2k-1}\wedge S^{4k-2} & \xrightarrow[\widetilde{\mathrm{id}_{2k}}\wedge \widetilde{h_{\mathbb{K}}}]{} & (\Omega S^{2k}) \wedge (\Omega S^{2k}) & \text{。}
\end{array}$$
$$\widetilde{W}_{a/b}\wedge\widetilde{\zeta}$$

但如图所示，左侧的对角映射是零伦的，这一点仅由次数原因即可得出。这说明 $[W_{a/b}, \zeta] = \mathsf{e}$，从而完成证明。□

以下论证将这一结果推广到其他连通分支，改编自 [Han74，命题 1]：

引理 3.4。 $\mathrm{Map}^*\big((S^{2k-1})^2, S^{2k}\big)$ 的各个连通分支均同伦等价。

证明。 考虑 H-群 $\mathrm{Map}^*(S^{4k-2}, S^{2k})$（例 B.5）对映射空间的 H-作用，该作用由捏缩映射（见例 B.7）诱导：

$$\mathrm{Map}^*\big(S^{4k-2}, S^{2k}\big) \times \mathrm{Map}^*\big((S^{2k-1})^2,\, S^{2k}\big) \xrightarrow{\Theta} \mathrm{Map}^*\big((S^{2k-1})^2,\, S^{2k}\big). \tag{27}$$

作为 H-群作用，每个 $\Theta(f,\ -)$ 都是映射空间的同伦自等价。但对于 $[f]$ 的一个生成元 $\pi_{4k-2}(S^{2k})$，命题 3.2 表明 $\Theta(f,\ -)$ 将其限制为连接所有连通分支的一列同伦等价。□

最后，我们将这些结果推广到无基点映射空间：

定理 3.5。 从 $(S^{2k-1})^2$ 到 S^{2k} 的无基点映射空间的基本群是层级为 $\ell = 2$（定义2.2）的整数海森堡群，具体如下：

$$\pi_1 \mathrm{Map}_n\big((S^1)^2,\, S^2\big) \simeq \mathrm{Heis}_3(\mathbb{Z}, 2n)\,, \tag{28a}$$
$$\pi_1 \mathrm{Map}_{[n]}\big((S^3)^2,\, S^4\big) \simeq \mathrm{Heis}_3(\mathbb{Z}, 0) \times \mathbb{Z}_{/12}\,, \tag{28b}$$
$$\pi_1 \mathrm{Map}_{[n]}\big((S^7)^2,\, S^8\big) \simeq \mathrm{Heis}_3(\mathbb{Z}, 0) \times \mathbb{Z}_{/120}\,, \tag{28c}$$

对所有 $n \in \mathbb{Z}$ 以及 $[n] \in \mathbb{Z}_{/2}$，分别有 (21)。

证明。 对于 $k \geq 2$，基点求值纤维化的同伦长正合列截断为：

(29)
$$\begin{array}{ccccccc}
\mathrm{Map}^*_{[n]}\big((S^{2k-1})^2,\, S^{2k}\big) & \xrightarrow{\mathrm{fib}_*} & \mathrm{Map}_{[n]}\big((S^{2k-1})^2,\, S^{2k}\big) & \xrightarrow{\mathrm{ev}_*} & S^{2k} & & \\
& & & & \overbrace{\pi_2 S^{2k}}^{1} & & \\
\hookrightarrow \pi_1 \mathrm{Map}^*_{[k]}\big((S^{2k+1})^2,\, S^{2k}\big) & \xrightarrow{\sim} & \pi_1 \mathrm{Map}_{[n]}\big((S^{2k-1})^2,\, S^{2k}\big) & \xrightarrow{\mathrm{ev}_*} & \underbrace{\pi_1 S^{2k}}_{1} & , &
\end{array}$$

因此，关于 $k \geq 2$ 的结论由定理3.3 和引理3.4立即得出。在 $k = 1$的情形下， $\pi_2(S^2) \simeq \mathbb{Z}$ 的存在妨碍了这一直接论证，而我们的定理3.3 和引理3.4 给出了（28a），但没有确定普朗克常数为 $2n$。不过，这个值由下文的命题3.9 确定。□

注 3.6. 熟悉有理同伦论 的读者（参见 [FHT00；FSS23，§III]）不妨尝试在极小苏利文模型层面上重述定理 3.5 ：对于一个 X 有限有理型的连通幂零空间，我们将其极小苏利文模型（取值于某个有理基域 $\mathbb{K}$）记作：

$$\mathrm{CE}(\mathfrak{l}X) \in \mathrm{dgCAlg}_{\mathbb{K}} \tag{30}$$

（它是切瓦利-埃伦伯格代数 $\mathrm{CE}(-)$，对应于有理怀特海德括号L_∞-代数 $\mathfrak{l}X$ 的 X，参见 [FSS23，命题 5.11 和注 5.4]）。

正偶维球面的极小模型为（参见 [Men15，§1.2]） [3]

$$\mathrm{CE}(\mathfrak{l}S^{2k}) \simeq \mathbb{K}_{\mathrm{d}}\begin{bmatrix} f \\ h \end{bmatrix} \Big/ \begin{pmatrix} \mathrm{d}\, f = 0 \\ \mathrm{d}\, h = \tfrac{1}{2} f \wedge f \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} \deg(f) = 2k \\ \deg(h) = 4k-1\,, \end{array}$$

而从奇维球面的平方出发的映射空间之极小模型的生成元为（参见 环面化 见 [SV25b，第 9 页；GSS25，第 35]页）：

$$\mathrm{CE}\Big(\mathfrak{l}\mathrm{Map}\big((S^{2k-1})^2, S^{2k}\big)\Big) \simeq \mathbb{K}_{\mathrm{d}}\begin{bmatrix} f \\ h \\ \overset{a}{\mathrm{s}} f \\ \overset{b}{\mathrm{s}} f \\ \overset{a}{\mathrm{s}} h \\ \overset{b}{\mathrm{s}} h \\ \overset{ab}{\mathrm{ss}} h \end{bmatrix} \Big/ \begin{pmatrix} \mathrm{d}\, f = 0 \\ \mathrm{d}\, h = \tfrac{1}{2} f \wedge f \\ \mathrm{d}\overset{a}{\mathrm{s}} f = 0 \\ \mathrm{d}\overset{b}{\mathrm{s}} f = 0 \\ \mathrm{d}\overset{a}{\mathrm{s}} h = f \wedge \overset{a}{\mathrm{s}} f \\ \mathrm{d}\overset{b}{\mathrm{s}} h = f \wedge \overset{b}{\mathrm{s}} f \\ \mathrm{d}\overset{ab}{\mathrm{ss}} h = \overset{a}{\mathrm{s}} f \wedge \overset{b}{\mathrm{s}} f \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} \deg\big(\overset{\bullet}{\mathrm{s}}(\text{-})\big) = \\ \deg(\text{-}) - 2k + 1. \end{array}$$

这些余二元微分对偶地展示了 $\mathbb{K}$ 上的怀特海德括号（参见[AA78，定理 6.1；FHT00，命题 13。16]）。特别是，最后一行对偶地给出了上文（25）中所示的怀特海德括号，此处是在 $\mathbb{K}$上。对于 $\mathbb{K} \equiv \mathbb{R}$，这是普通海森堡群李代数的非平凡李括号（定义 2.1）。当然，我们在上文确立的这个怀特海德括号的关键层级 $\ell = 2$ 无法从有理同伦论中辨别出来（在有理同伦论中，所有非零因子都对应于同构模型）。

3.2. **普朗克常数**。为求完整，我们以精简形式回顾论证（沿用 [Han74]），说明整数海森堡群扩张的阶 $2n$（在*§2.1*中称为普朗克常数）在情形 $k = 1$下的取值，即定理 28a中的式（3.5）。

引理 3.7. 以下遗忘映射（从带基点映射空间的基本群到不带基点映射空间的基本群）是一个同构：

$$\underbrace{\pi_1 \mathrm{Map}^*\big(S^1 \vee S^1, S^2\big)}_{\mathbb{Z}^2} \xrightarrow{\sim} \pi_1 \mathrm{Map}\big(S^1 \vee S^1, S^2\big).$$

[3]这里的 $\mathbb{K}_{\mathrm{d}}[L]$ 表示由一列 L 分次生成元生成的自由微分分次交换代数，而商空间则除去了所示的微分理想。

证明。 求值纤维列有一个截面（其像落在 $\mathbf{Map}(S^1 \vee S^1, S^2)$ 的唯一连通分支中），因此连接同态为零，

$$\begin{array}{c} \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow\ \pi_2 S^2 \\ \hookrightarrow \pi_1\mathrm{Map}^*\big(S^1 \vee S^1, S^2\big) \xrightarrow{\ \sim\ } \pi_1\mathrm{Map}\big(S^1 \vee S^1, S^2\big) \longrightarrow \underbrace{\pi_1 S^2}_{1}\,, \end{array} \qquad 0$$

因为前一个映射因此是分裂满射。 □

引理 3.8 ([Hu46，定理 5.3(i)；Koh60，引理 3.9])。 对于所有 $n \in \mathbb{Z}$，我们有

$$\pi_1\mathrm{Map}_n\big(S^2, S^2\big) \simeq \mathbb{Z}_{/2n}\,.$$

证明。 求值同伦纤维列给出如下同伦长正合列：

$$\begin{array}{c} \mathrm{Map}^*_n\big(S^2, S^2\big) \longrightarrow \mathrm{Map}_n\big(S^2, S^2\big) \xrightarrow{\mathrm{ev}_*} S^2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \overbrace{\pi_2(S^2)}^{\mathbb{Z}} \\ \hookrightarrow \underbrace{\pi_1\mathrm{Map}^*_n\big(S^2, S^2\big)}_{\pi_3(S^2)\simeq\mathbb{Z}} \longrightarrow \pi_1\mathrm{Map}_n\big(S^2, S^2\big) \longrightarrow \underbrace{\pi_1(S^1)}_{1}\,, \end{array} \qquad [[n\cdot \mathrm{id}_2], -]_{\mathrm{Wh}}$$

其中，连接同态由与 $n\cdot\mathrm{id}_2$, 的怀特海德括号给出，依 [Whi46, $(3.4)^*$]。但是，由于怀特海德括号的线性，并根据（17），这意味着连接同态由乘以 $2n$ 给出：

$$\begin{aligned} 1 = [\mathrm{id}_2] \quad \longmapsto \quad \big[[n\cdot \mathrm{id}_2], [\mathrm{id}_2]\big]_{\mathrm{Wh}} &= n\cdot\big[[\mathrm{id}_2], [\mathrm{id}_2]\big]_{\mathrm{Wh}} \\ &= n\cdot[2h_{\mathbb{C}}] \\ &= 2n \quad \in \mathbb{Z} \simeq \pi_3(S^2)\,. \end{aligned}$$

由此，根据上述序列的正合性即可得出结论。 □

命题 3.9 (以下 [Han74，命题 2])。 对于 $n \in \mathbb{Z}$，我们有一个如下形式的群短正合列：

$$1 \to \mathbb{Z}_{/2n} \longrightarrow \pi_1\mathrm{Map}_n\big((S^1)^2, S^2\big) \longrightarrow \mathbb{Z}^2 \to 1\,.$$

证明。 首先注意到 $(S^1)^2$ 上的典范 CW 复形结构导出了一个如下形式的同伦余纤维序列

$$S^1 \xrightarrow{[\alpha,\beta]} S^1 \vee S^1 \longrightarrow (S^1)^2 \longrightarrow S^2, \tag{31}$$

其中 α 和 β 表示 $\pi_1(S^1 \vee S^1$的一对生成元的代表元，因此它们的群交换子 $[\alpha, \beta]$ 是环面的基本多边形（如图 1所示）。

接下来考虑通过从（31）映射得到的同伦纤维序列所诱导的同伦长正合列：

$$\begin{array}{l}\pi_2\mathrm{Map}\big(S^1\vee S^1, S^2\big)\\ \hookrightarrow\ \underbrace{\pi_1\mathrm{Map}_n\big(S^2,S^2\big)}_{\mathbb{Z}_{/2n}} \longrightarrow \pi_1\mathrm{Map}_n\big((S^1)^2,S^2\big) \longrightarrow \underbrace{\pi_1\mathrm{Map}\big(S^1\vee S^1,S^2\big)}_{\mathbb{Z}^2}\\ \hookrightarrow\ \pi_0\mathrm{Map}_n\big(S^2,S^2\big),\end{array}$$

大括号下方我们使用引理 3.7 和 3.8。但连接同态均为零，因为根据（31），它们由群交换子与 阿贝尔 群中元素的代表元复合而成。因此，图中所示的中间部分是短正合列，如所述。□

4. 推广

我们可以将§ 3 中关于“平方球面”（S^{2k-1}）^{2} 的情形推广到更一般的 CW复形 M （例如高亏格曲面，例 4.2），其中怀特海德积粘附映射（ 18 ）允许包含更多项并具有重数（下文定义 4.1 ）。下文引理 4.3 成立后，这种一般情形下的证明遵循与§ 3中相同的思路，因此我们可以简略一些。

定义 4.1。对于 $k\in\mathbb{N}_{\geq 1}$ 和 $i,\ j$ 遍历某个有限集合 I，令 M 为由左侧如下推出方块给出的 CW复形

$$\begin{array}{ccccc} S^{4k-3} & \xrightarrow{\phi} & \bigvee_i S^{2k-1} & \longrightarrow & * \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ D^{4k-2} & \longrightarrow & M & \xrightarrow[\mathrm{pr}_c]{} & S^{4k-2} \\ & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{pr}_j} & & \\ & & S^{2k-1}, & & \end{array} \tag{32}$$

其中粘附映射是一个乘积

$$\phi := \prod_{i<j}\big([\iota_i,\iota_j]_{\mathrm{Wh}}\big)^{\lambda_{ij}},\qquad \lambda_{ij}\in\mathbb{N}, \tag{33}$$

怀特海德积：

$$\begin{array}{ccccc} S^{4k-3} & \xrightarrow{\quad [\iota_i,\iota_j]_{\mathrm{Wh}}\quad} & S^{2k-1}\vee S^{2k-1} & \xrightarrow{(i_i,i_j)} & \bigvee_i S^{2k-1} \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ D^{4k-2} & \longrightarrow & S^{2k-1}\times S^{2k-1}, & & \end{array}$$

且映射 pr_j 由显然的投影到 j第 $(2k-1)$ 个细胞所诱导，这是因为 ϕ (33) 在此投影下变为零伦的：

$$\begin{array}{ccc} S^{4k-3} & \xrightarrow{\phi} & \bigvee_i S^{2k-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ D^{4k-2} & \longrightarrow & M \end{array} \qquad (\delta_i^j)_{i\in I}, \quad \mathrm{pr}_j, \quad * \to S^{2k-1}. \tag{34}$$

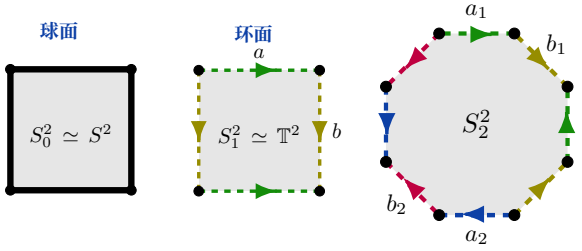


图 2。 定向曲面通过识别其边界线段而得到，这些线段构成基本多边形，并且其 2-胞腔粘附映射是迭代的怀特海德积（35）。

例 4.2。 闭定向曲面 S_g^2 的亏格为 $g \in \mathbb{N}$，是定义 4.1 在 $k = 1$下的一个实例，其中推出反映了通过基本多边形边界线段之间的识别来构造 S_g^2 的经典构造（参见 [Gib77，定理 2。8] 和图 2 ）：

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \xrightarrow{[\iota_1,\iota_{g+1}]\cdots[\iota_g,\iota_{2g}]} & \bigvee^{2g} S^1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ D^2 & \longrightarrow & S_g^2 . \end{array} \tag{35}$$

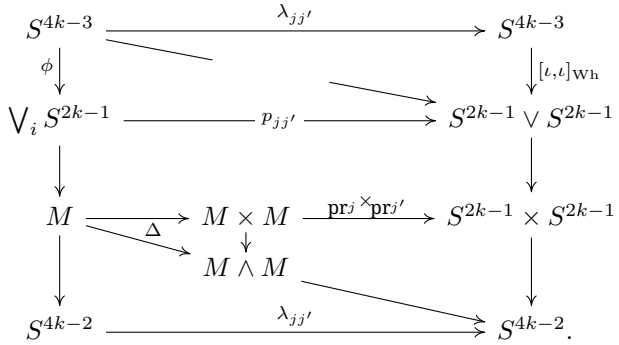
将§3 中的定理推广的关键在于以下观察，即对（19）的推广：

引理 4.3。 按照定义 M 中的*4.1*，下列图表对同伦交换，其中 $j < j' \in I$：

$$\begin{array}{ccc} & M \wedge M & \\ \nearrow & & \searrow \\ M & \xrightarrow{\lambda_{jj'}\cdot \mathrm{pr}_c} & S^{4k-2}. \end{array} \tag{36}$$

证明。 根据霍普夫–惠特尼定理 (参见 [Whi78，第 244]页上的（6.19）)，只需证明此图表中的顶端映射和底端映射具有相同的度，从而顶端复合映射的度为 $\lambda_{jj'}$，因为体积类 $1 \in \mathbb{Z} \simeq H^{4k-2}(S^{4k-2};\ \mathbb{Z})$ 的拉回是 $\lambda_{jj'}$倍于 $H^{4k-2}(M;\ \mathbb{Z})$ 的生成元。

为此，考虑以下图表：



这里：

(i) 竖直部分是同伦余纤维列（“Puppe列”）。**(ii)** 映射 $p_{jj'}$ 表示到 j 和 j' 个楔和项上的投影，因此根据定义，顶部的方块是交换的 $\phi(33)$。**(iii)** 中间的方块由（34）可交换。**(iv)** 由推出的函子性可知，底部映射是顶部映射的悬挂，因此其度相同 $\lambda_{jj'}$，如图所示。

但这样一来，底部方块右上方的三角形根据定义是交换的，因此左下方的三角形表明，对角映射的度正如所述。□

有了这一点，我们便可立即将定理3.3推广如下：

定理4.4。 设 M 如定义 *4.1* 中所述，且对于 $k \in \{1、2、4\}$，我们有：

$$\pi_1 \operatorname{Map}_0^*\big(M,\, S^{2k}\big) \simeq \Big\langle (W_i)_{i\in I},\, \zeta \,\Big|\, [W_i, W_j] = \zeta^{2\lambda_{ij}},\, [W_i, \zeta] = \mathrm{e} \Big\rangle \times T\,, \tag{37}$$

其中 T 表示与 (22) 中相同的挠群。

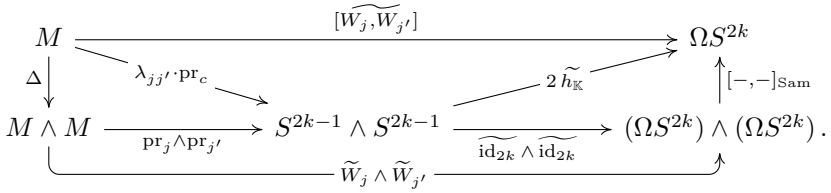
证明。 由于怀特海德积的悬挂为零（由引理 2.7），由（32）和（33）可得，我们一般有如下对（*20*）的推广：

$$\Sigma M \xrightarrow[\sim]{((\Sigma \mathrm{pr}_i)_{i\in I}, \Sigma \mathrm{pr}_c)} \big(\textstyle\bigvee_i S^{2k}\big) \vee S^{4k-1}.$$

这给出了（37）中所述的生成元集。

为验证它们的群交换子如所述，考虑图表（25）的直接类比，其中左侧的内三角形现在由引理 4.3给出：

(38)



同样，图表（26）也可直接推广，证明至此完成。 □

此外，现在很容易从定理 4.4 推广到定理 3.5：

定理 4.5。 对于 M 如定义 *4.1*，我们有：

$$\pi_1 \operatorname{Map}_n\big(M,\, S^2\big) \simeq \Big\langle (W_i)_{i\in I},\, \zeta \,\Big|\, [W_i, W_i] = \zeta^{2\lambda_{ij}},\, [W_i, \zeta] = \mathrm{e}\,, \zeta^{2n} = \mathrm{e} \Big\rangle, \tag{39a}$$

$$\pi_1 \operatorname{Map}_{[n]}\big(M,\, S^4\big) \simeq \Big\langle (W_i)_{i\in I},\, \zeta \,\Big|\, [W_i, W_i] = \zeta^{2\lambda_{ij}},\, [W_i, \zeta] = \mathrm{e} \Big\rangle \times \mathbb{Z}_{/12}\,, \tag{39b}$$

$$\pi_1 \operatorname{Map}_{[n]}\big(M,\, S^8\big) \simeq \Big\langle (W_i)_{i\in I},\, \zeta \,\Big|\, [W_i, W_i] = \zeta^{2\lambda_{ij}},\, [W_i, \zeta] = \mathrm{e} \Big\rangle \times \mathbb{Z}_{/120}\,. \tag{39c}$$

证明。 有了定理4.4 之后，剩下的论证与定理3.5的证明完全相同，只需将 M 替换为 $(S^{2k-1})^{\,2}$。 □

特别是：

例 4.6。 对于 $k = 1$ 且在 $M = S^2_g$ 是亏格为 g （例 4.2）的闭定向曲面这一情形下，定理 4.5 给出了高维整数海森堡群（12）：

$$\pi_1 \operatorname{Map}_n\big(S^2_g,\, S^2\big) \simeq \operatorname{Heis}_{2g+1}(\mathbb{Z}; 2n)\,. \tag{40}$$

这正是 [Han74最初讨论的情形的一般形式； LT80，定理 1；Kal01，命题 1。5]。

5. 应用

这里我们将进一步阐述（承接§ 1.1.3中的提示），说明§ 3 的结果如何可理解为：环面上的（阿贝尔）任意子的量子可观测量（图 *1*）等价于悬垂环面的 2-上同伦群代数，事实上也等价于悬垂的三维球面平方的 4-余同伦群代数，以及悬垂的七维球面平方的 8-余同伦群代数。

单就这一点而言，它只是一个数学事实（定理 3.5，28a）。但我们在此回顾，以余同伦量子化的磁通量 [SS25e]若能在物理上实现（“假设 H” [SS25f], 下文将在§ 5.1中回顾），便赋予这一数学事实以物理意义，使其不再只是巧合，而成为一种新型任意子代数拓扑有效理论的实例——该理论能够作出预测，而这些预测或许与当代材料研究相关，且为以往理论所未能揭示。

这似乎为（低维）代数拓扑和同伦论与前沿且具有产业相关性的研究（量子材料、拓扑量子计算）开展互动提供了一个非凡的新机遇，其潜在影响力或可媲美人们曾期望拓扑数据分析（TDA）所带来的影响（在拓扑数据分析中，人们希望借助代数拓扑和同伦论的方法，识别复杂数据集中的隐藏结构）。

此外，我们解释了（见下文 §5.2 ，遵循 [SS25c]），我们的定理 3.5 的推广结果如何确立这一点：阿贝尔分数量子霍尔任意子的量子可观测量（即近年来实验中已经观测到的那类量子可观测量）通过 4-余同伦中的磁通量子化（“假设 H”，如今以大写“H”表示），产生为 ***11*** 维超引力 （11维超引力）完备化中的拓扑可观测量。

如前所述，这本身只是一个数学事实（定理 3.5，28b），尽管听起来可能令人惊讶。不过，这让人联想到备受讨论的 11维超引力与凝聚态物质理论之间的“全息”关系 [Her+07；Zaa+15；HLS18；nLa26a] 并且可以将其理解为规范/引力对偶

对偶 的一个新例证：强耦合量子系统（对此几乎没有可用的传统理论）被认为可映射为膜在高维辅助时空中涨落所产生的、更易处理的动力学。

尽管过去几十年来这一方法受到广泛关注，但它以缺乏精确定义和可证明定理而著称。我们的结果或可为完备量子11维超引力（“M理论” [Duf99]）与拓扑量子材料之间一种新的、以数学为依据的相互作用形式打开大门（相关研究见 [SS23a；SS25b；SS25l；SS25d]）。

5.1. **通过2-上同伦构造普通分数量子霍尔任意子**。鉴于我们在§§ 3 和4中的定理，这里简要回顾通过2-上同伦中的（磁通或贝里）磁通量子化来理解分数量子霍尔任意子 [SS26；SS25f]以及分数量子反常霍尔任意子 [SS25h；SS25g] （更多综述见 [SS25a]）。

5.1.1. **普通磁通量。** 设想一块薄板，其形状为闭定向曲面 S^2_g (例如4.2)，具有一定厚度 $2\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ ，并有磁场横向贯穿其中。狄拉克电荷量子化现象（参见 [Alv85；Fra11，§16.4e]）意味着（参见 [SS24，§3.1；SS25c，推论 2.3]），穿过该材料的孤子磁通构型的拓扑扇区，构成从其一点紧化空间 $(-)_{\cup\{\infty\}}$ （要求孤子通量在无穷远处消失）到（“规范”）群 U(1) 的分类空间的映射的同伦类集合：

$$\begin{aligned} \text{Magnetic flux sectors} &= \pi_0 \operatorname{Map}^*\Big(\big(S^2_g \times (-\epsilon, +\epsilon)\big)_{\cup\{\infty\}}, B\mathrm{U}(1)\Big) \\ &\simeq \pi_0 \operatorname{Map}^*_0\Big((S^2_g)_+ \wedge S^1, B\mathrm{U}(1)\Big) \\ &\simeq \pi_1 \operatorname{Map}_0\Big(S^2_g, B\mathrm{U}(1)\Big). \end{aligned} \tag{41}$$

这是映射空间的基本群，正如我们在 §4 中一直讨论的那样，只不过这里的系数是 $B\mathrm{U}(1) \simeq \mathbb{C}P^\infty$，而不是 $S^2 \simeq \mathbb{C}P^1$。有了这个“稳定”系数，基本群便可直接计算为：

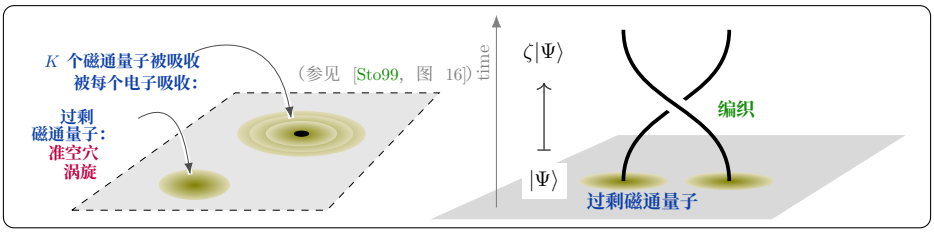
$$\begin{aligned} \cdots &\simeq \pi_0 \operatorname{Map}_0\Big(S^2_g, \Omega B\mathrm{U}(1)\Big) \\ &\simeq \pi_0 \operatorname{Map}_0\Big(S^2_g, B\mathbb{Z}\Big) \\ &\simeq H^1\Big(S^2_g; \mathbb{Z}\Big) \\ &\simeq \mathbb{Z}^{2g}\,. \end{aligned}$$

这是 $\mathrm{Heis}_{2g+1}(\mathbb{Z})$ （定义 2.2）所扩张出的非阿贝尔扩张的阿贝尔基群。这些磁通量扇区上的拓扑量子可观测量构成了 $\mathbb{Z}^2$ （依据 [SS25j，§1；SS25c，（132）]）的群代数。

5.1.2. 作为过剩分数量子霍尔磁通的任意子。 接下来设想，我们的材料薄片中充满了极冷的电子气，并且有磁场穿过；该磁场强度极高且经过精细调节，使得每个电子恰好对应某个数量的 K 磁通量子。这称为在填充因子 $1/K$ 下的分数量子霍尔系统（参见 [Sto99；Ton16]）。

在这样的背景下，每一个过剩的磁通量子都表现为缺少$1/K$个电子，因此被称为分数准空穴。正是这些准空穴 表现得像任意子：当它们彼此绕行时，整个系统的量子态会获得一个复数编织相位 ζ (参见图3)。

图 3. 分数量子霍尔系统中的任意子，是二维电子气中的涡旋，由精确有理填充因子之上过剩的磁通量子诱发；每个电子对应 K 个磁通量子。每当它们的世界线发生编织 时，量子态 $|\psi\rangle$ 就会乘以一个编织相位 $\zeta = \exp(\pi \mathrm{i}/K)$。



这意味着，与电子气的相互作用使分数量子霍尔系统中的过剩磁通实际上 表现得不同于 §5.1.1节中普通狄拉克电荷量子化所预言的情形。因此，有理由认为，有效分数量子霍尔磁通的量子化（广义而言，即磁通量子化 [SS25e]）取决于通常分类空间 $B\mathrm{U}(1)$ 的一种变形。不过，我们的例4.6 表明，这种变形必定是它的 3-骨架

$$S^2 \simeq \mathbb{C}P^1 \xhookrightarrow{i} \mathbb{C}P^\infty \simeq B\mathrm{U}(1)\,, \tag{42}$$

因为如果我们在上述计算中用它替换 $B\mathrm{U}(1)$（41），那么实验观测到的编织相位 ζ 确实会如预期那样出现（根据定理 4.5，39a）（参见 [Ton16，（5.28）]）：

$$\begin{aligned} \text{FQH surplus flux sectors} &\equiv \pi_1 \mathrm{Map}^*_n\big(S^2_g, S^2\big) \\ &\simeq \mathrm{Heis}_{2g+1}(\mathbb{Z}; 2n)\,. \end{aligned} \tag{43}$$

因此，这一对应关系表明，2-上同伦是有效任意子分数量子霍尔过剩磁通量子的正确全局磁通量子化定律这一假设（在 [SS25f]中称为“假设 H”）。

除了能够准确再现孤子型分数量子霍尔磁通量的量子可观测量（43）之外，这一假设 H还预言了具有实验意义的现象，例如可能将非阿贝尔缺陷任意子附着在二维电子气中的超导岛上（参见 [SS25f，图 D 和§3。8]）。

5.1.3. 分数量子霍尔任意子编织。要更具体地了解这一描述中任意子的实际编织过程，请注意（如图4所示），庞特里亚金定理（参见[Bre93，§II.16；SS23b，§3。2]）将 $\pi_0 \mathrm{Map}\big(S^2_g, S^2\big)$对应于（配边类）正常框架化的余维=2子流形 S^2_g，进而对应于中的带符号点 S^2_g，这些点可与图3中看到的任意子核相对应。

沿着这一思路，仔细分析表明 [SS26]，环空间 $\Omega\mathrm{Map}^*\big(\mathbb{R}^2_{\cup\{\infty\}} S^2\big)$可被视为受框架化链环配边约束的框架链环 L （任意子世界线）空间；在这一对应关系下，这些环/世界线的拓扑等价类可与它们的扭数$\#L$ 相对应，

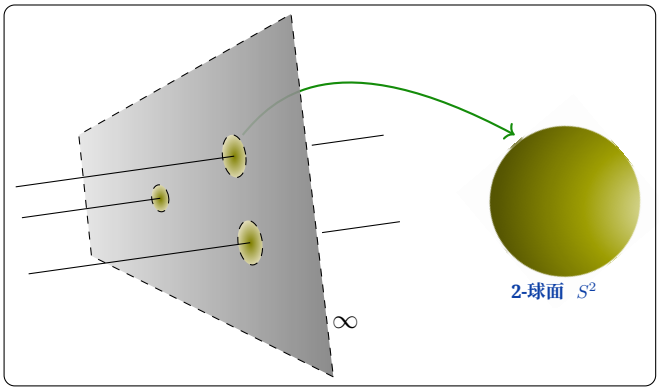


图 4. 不稳定庞特里亚金定理将映射到 n-球面的同伦类与法向框架化余维$=n$ 子流形的配边类对应起来。后者可理解为通量密度量子的核心：它们是从支撑在 $0 \in S^n$周围、权重为单位的托姆形式 th_n拉回而得。

相应链环的 总交叉数，即其任一链环图中的交叉总数：

$$\begin{array}{ccc} \Omega \operatorname{Map}^*\left(\mathbb{R}^2_{\cup\{\infty\}}, S^2\right) & \twoheadrightarrow & \pi_1 \operatorname{Map}^*\left(\mathbb{R}^2_{\cup\{\infty\}}, S^2\right) \simeq \mathbb{Z} \\ L & \longmapsto & \#L\,. \end{array} \tag{44}$$

但这恰好表明，每当任意子世界线发生一次交叉时，就会获得一个 编织相位 生成元 ζ 的幂，如图 3 所示（参见 [SS26， 第3]节）。

5.1.4. 识别分数量子反常霍尔任意子。分数量子霍尔系统（第 5.1.2 节和第 5.1.3 节）因此构成了首个（也是目前唯一）经实验验证的真正拓扑量子硬件候选平台，但其所需的极低温度和强磁场妨碍了它们在这方面的实际应用。因此，最近实验上在多种材料中实现了分数量子霍尔系统的一种“反常”版本（FQAH，由 [TMW11 预测；Sun+11；Neu+11]，并在 [PRS13；Roy14], 中进一步发展，最近由 [Ju+24；MSM24；Zha+25]综述）：[Cai+23；Zen+23；Par+23；Lu+24]

在这些晶体分数量子反常霍尔系统中，“实空间”里磁场所发挥的作用，转而由晶体电子“动量空间”的一种内禀属性承担，这种属性称为贝里曲率 (参见 [Sta20、§2；SS25h，图 3])。因此，若能识别并控制分数量子反常霍尔材料中的任意子态，就有望实现切实可行的室温拓扑量子硬件。

尽管传统理论在识别潜在分数量子反常霍尔任意子的性质及其特征方面，或许始终未能得出定论，但此时§ 3中的讨论仍然适用，因为：

(i) 由于晶格的平移对称性，晶体动量空间始终是一个环面——称为布里渊环面 $\widehat{T}^d$ （参见 [Thi25，§2.1]），对于有效二维的分数量子反常霍尔系统，它是二维的： $\widehat{T}^2 \simeq T^2$。(ii) 对于最具代表性的、具有 2 条相关电子能带的分数量子反常霍尔系统，在每个动量 $[k] \in \widehat{T}^2$ 处，价电子态的可选空间是由价电子态和导带电子态组成的二维空间中的一维复子空间所构成的空间，因此是格拉斯曼流形 $\mathbb{C}P^1 \simeq S^2$ （参见 [Ser23，(8.3-4)；SS25h，(4)；SS25i，引理 4。1]）。

但这意味着，这些晶体的拓扑参数的模空间，正是§3中所讨论的那类映射空间：

$$\text{Crystal parameter space} \simeq \mathrm{Map}\big(\widehat{T}^2, \mathbb{C}P^1\big) = \mathrm{Map}\big(T^2, S^2\big). \tag{45}$$

特别是，分数量子反常霍尔系统所允许的拓扑相构成了这个空间的连通分支；该空间是由整数构成的集合，这些整数称为陈数，即价带丛的陈数（参见 [SS25h，(8)]）：

$$\pi_0 \,\mathrm{Map}\big(T^2, S^2\big) \xrightarrow[i_*]{\sim} \pi_0 \,\mathrm{Map}\big(T^2, B\mathrm{U}(1)\big) \simeq \mathbb{Z}\,,$$

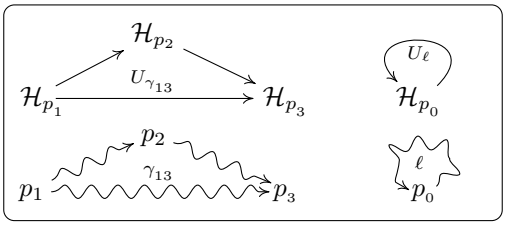
因此，这些拓扑量子相被称为（分数）陈绝缘体（参见 [Ser23，§8；Neu+11]）。

此外，结合 [SS25h；SS25g]，我们现在可以观察到，量子绝热定理意味着（参见图 5），量子材料的任意子拓扑序由参数空间上的希尔伯特空间（有能隙基态）的局部系统分类，因此在此由参数空间基本群的线性表示分类（45）：

$$\begin{array}{c}\text{Category of anyonic topological orders}\\ \text{in topol. phase with Chern number } C\end{array} = \big(\pi_1 \,\mathrm{Map}_C\big(T^2, S^2\big)\big)\mathrm{Rep}\,. \tag{46}$$

但这恰恰是定理 3.5 （28a）所适用的情形；定理指出，这些任意子量子态是整数海森堡群的表示——这正如环面上的分数量子霍尔系统所预期的那样。

图 5。在参数空间中沿γ 路径 p 对经典参数进行绝热调控，会在有能隙基态的相应希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ U_γ 之间诱导酉变换。对于拓扑态，这些变换仅取决于 γ的同伦类，从而在参数空间上形成希尔伯特空间的局部系统或平坦丛。等价地，在每个基点处，它们是参数回路 ℓ 的基本群的线性表示，反映了任意拓扑相中系统的拓扑序。



总之，定理 3.5 (28a)，应用于二维二能带（分数）陈绝缘体的拓扑参数空间（5）中的绝热单值化（45），意味着我们所寻求的分数量子反常霍尔任意子将呈现出与分数量子霍尔系统中已经观测到的任意子相似的特征，但现在会局域于动量空间。该结果所预测的实验特征的更多细节将在 [SS25g]中讨论。

5.2. **通过 4-余同伦实现二维任意子。** 在上述关于 FQ(A)H 任意子的讨论（§ 5.1）中，2-球面以及作为量子化定律的 2-上同伦之所以出现，是因为磁通量密度和贝里曲率都是微分 2-形式。若要对定理 3.5 (28b) 和定理 4.5 (39b) 中出现的 4-球面系数作类似解释，就需要理解

4-余同伦作为一种高阶规范场的磁通量子化定律，其中该规范场的磁通量密度由一个微分4-形式给出。

5.2.1. *11*维超引力中的 *C*场。 在11维超引力理论（11维超引力，参见 [MS06; FV12; GSS24a, §3]）中，著名地存在一种具有恰好这种高阶4形式磁通密度的高阶规范场（“C场”）；其电高斯定律表明，4-余同伦是其磁通量子化的一种有效选择（“假设 H”，此处的“H”大写）。

这意味着[4]，当根据假设 H 全局完备化 11维超引力的规范场内容时，整体双曲时空 $X^{1,10} \simeq \mathbb{R}^{1,1} \times X^9$ 上的孤子拓扑可观测量由以下内容张成

$$\pi_0 \operatorname{Map}^*\big(X^9_+ \wedge \mathbb{R}^1_{\cup\{\infty\}}, S^4\big) \simeq \pi_1 \operatorname{Map}_0\big(X^9, S^4\big). \tag{47}$$

5.2.2. 相交 *M2/M5*膜的近视界。 为了使定理 3.5 (28b)适用，我们需要寻找满足以下条件的11维超引力解：其时空拓扑包含一个拓扑上形如 $S^3 \times S^3$。

这类解确实存在，其形式为（参见 [BPS98, §2.2; GMT99]）

$$X^{1,10} \simeq \mathrm{AdS}_3 \times S^3 \times S^3 \times \mathbb{R}^2 \tag{48}$$

反映了适当的 M2/M5 膜交叉的近视界几何。（更一般地说，这种形式的 11维超引力 BPS 解是纤维化在曲面 $\tfrac{1}{2}\,\mathrm{AdS}_3 \times S^3 \times S^3$ 之上的乘积 Σ^2，见 [DHo+08a; DHo+08b; DHo+09]。）

5.2.3. *11*维超引力中的任意子单值化。 若我们将注意范围限制在体区因果菱形 $D^{1,2} \subset \mathrm{AdS}_3$，并令孤子通量局域在 $\mathbb{R}^2$的两个因子之一上，则单值化群（47）变为

$$\begin{aligned}
\pi_1 \operatorname{Map}_0\big(X^9, S^4\big) &\simeq \pi_1 \operatorname{Map}_0\big(D^{1,2} \times \mathbb{R}^1 \times S^3 \times S^3,\, S^4\big) \\
&\simeq \pi_1 \operatorname{Map}_0\big(S^3 \times S^3,\, S^4\big) \\
&\simeq \mathrm{Heis}_3(\mathbb{Z}, 0) \times \mathbb{Z}_{/12}\,,
\end{aligned}$$

其中第一步利用了 $D^{1,2} \times \mathbb{R}^1$ 是可缩的；最后一步则应用了我们新提出的定理 3.5 (28b)。

但这意味着（遵循 [SS25c、§3.3]），在此类 11维超引力背景上经由上同伦量子化的 C场通量所对应的拓扑量子态（48）恰好具有（§ 5.1）中所预期的环面上的 FQ(A)H 任意子形式！

这是量子 11维超引力中任意子统计的一种新颖实现。尽管量子可观测量与实验观测到的分数量子霍尔任意子完全相同，但这些任意子 C 场通量量子乍看之下是高维对象，在更高维的环境空间中编织：[5]

---

[4]通常，如果时空的切丛不可平凡化，则完整的假设 H 要求将普通的 切向扭曲 4-上同伦替代普通的 4- 上同伦；后者不再由映射到 4- 球面的普通映射表示，而是由时空上的 4- 球面纤维化的截面表示。这里可以忽略这一进一步的细化，因为此处相关的示例时空都具有可平凡化的切丛，这主要是由于 $S^3 \simeq \mathrm{SU}(2)$ 及其所对应的乘积空间 $S^3 \times S^3$也具有可平凡化的切丛。[5]或者，§ 5.1.2 中以上同伦形式出现的通常点状任意子，也可以在 11维超引力中通过将其实现于 M5探针世界体积上而进行“几何工程”（而 M5探针世界体积又嵌入于 11维超引力背景中，参见 [HS97; GSS24b]），参见 [SS25b; SS25k], 中的阐述 [SS25l; SS25d]。

5.2.4. 二维任意子。 通过庞特里亚金定理，§ 5.1.3中图 4附近论证的类似推导表明，上文在 § 5.2.3 中辨认出的任意子 C场通量量子在 $S^3 \times S^3$ 内部是二维的（ $2 + \dim(\mathrm{AdS}_3 \times \mathbb{R}^1) = 6$维），在 X^1中也是^{10}维的（因此可视为某种任意子五膜）。因此，式（44）的类似结论表明，这些高维任意子传播时描绘出的“世界体”是 $S^3 \times S^3$内部的三维链环。

类似的“d维任意子”此前主要被讨论为 $d = 1$作为环辫群的线性表示(参见 [nLa26c])，可能存在于三维量子材料中。六个环境维度中 $d = 2$维任意子的作用仍有待理解。

附录 A. 一些拓扑学

为便于参阅正文并确立本文的记号，我们简要回顾一些基本拓扑学的概念和事实。

我们在紧生成拓扑空间范畴中工作，该范畴记作 TopSp；带基点版本记作 TopSp^* 。对于 X， $Y \in \mathsf{TopSp}$，我们记作

$$\mathrm{Map}(X,Y) \in \mathrm{TopSp} \tag{49}$$

for their *mapping space*, and for $(X,x),(Y,y) \in \mathrm{TopSp}^*$ we write

$$\mathrm{Map}^*(X,Y) \subset \mathrm{Map}(X,Y) \in \mathrm{TopSp} \tag{50}$$

它们的带基点映射空间。

例如，将圆实现为

$$S^1 \simeq \frac{[0,1]}{\{0,1\}}$$

而带基点空间的基点环路空间是

$$\Omega X := \mathrm{Map}^*(S^1, X)\,. \tag{51}$$

给定一对带基点空间（X， x）、（Y， y） $\in \mathsf{TopSp}^*$，它们的楔积是

$$X \wedge Y := \frac{X \times Y}{X \times \{y\} \cup \{x\} \times Y}\,. \tag{52}$$

值得注意的是

$$S^{n_1} \wedge S^{n_2} \simeq S^{n_1+n_2}, \tag{53}$$

并且一般而言

$$\Sigma X := S^1 \wedge X \tag{54}$$

是一个带基点空间的悬挂。

虽然楔积不是笛卡尔积，但它确实具有一个由笛卡尔对角映射诱导的自然对角映射，因此我们仍用同一个符号表示:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad\Delta\quad} & X \wedge X\,. \\ & \searrow \quad \nearrow & \\ & X \times X & \end{array} \tag{55}$$

*Hom*伴随 是自然同胚，它将一个以两个变量为参数的映射视为关于第一个变量的函数，其值为关于第二个变量的映射:

$$\mathrm{Map}^*(X \wedge Y,\, Z) \underset{\sim}{\overset{\widetilde{(-)}}{\longleftrightarrow}} \mathrm{Map}^*\big(X,\, \mathrm{Map}^*(Y,Z)\big). \tag{56}$$

值得注意的是，悬挂运算（54）是构造基点环空间（51）的左伴随：

$$\mathrm{Map}^*(\Sigma X,\, Y) \xrightarrow[\sim]{\widetilde{(-)}} \mathrm{Map}^*(X,\, \Omega Y). \tag{57}$$

此外，由于带基点空间的余积就是楔和

$$X \vee Y \;:=\; \frac{X \sqcup Y}{\{x, y\}}. \tag{58}$$

我们有

$$\mathrm{Map}^*(X \vee Y,\, Z) \;\simeq\; \mathrm{Map}^*(X, Z) \times \mathrm{Map}^*(Y, Z). \tag{59}$$

$(X,\ x) \in \mathrm{TopSp}^*$ 的同伦群为

$$\pi_n(X, x) \;\simeq\; \pi_0\, \mathrm{Map}^*(S^n, X)\,. \tag{60}$$

附录 B。一些同伦论

为便于正文参考并确立我们的记号，我们简要回顾基本同伦论中的一些概念和事实。

一个同伦是映射空间中的一条路径。映射的同伦类就是映射空间的连通分支（50）：

定义 B.1。带基点同伦范畴 $\mathrm{Ho}(\mathrm{TopSp}^*)$ 的对象是具有 CW 复形结构的带基点拓扑空间，而态射集则是这些空间之间映射空间的连通分支：

$$\mathrm{Ho}(\mathrm{TopSp}^*)(X, Y) \;\simeq\; \pi_0\, \mathrm{Map}(X, Y)\,.$$

特别地，基点空间 X 的同伦群为

$$\pi_n(X) \;\equiv\; \pi_0\, \mathrm{Map}^*(S^n,\, X). \tag{61}$$

例 B.2。一些低次数球面的著名不稳定同伦群：

$$\begin{array}{l} \forall_{k<n\in\mathbb{N}} \quad \pi_k(S^n) \simeq 0\,, \\ \forall_{n\in\mathbb{N}_{\geq 1}} \quad \pi_n(S^n) \simeq \underbrace{\mathbb{Z}}_{\langle [\mathrm{id}] \rangle}\,, \end{array} \qquad \begin{array}{l} \pi_3(S^2) \simeq \underbrace{\mathbb{Z}}_{\langle [h_{\mathbb{C}}] \rangle} \\ \pi_7(S^4) \simeq \underbrace{\mathbb{Z}}_{\langle [h_{\mathbb{H}}] \rangle} \times \underbrace{\mathbb{Z}_{/12}}_{\langle r_{\mathbb{H}} \rangle} \\ \pi_{15}(S^8) \simeq \underbrace{\mathbb{Z}}_{\langle [h_{\mathbb{O}}] \rangle} \times \underbrace{\mathbb{Z}_{/120}}_{\langle r_{\mathbb{O}} \rangle}\,, \end{array} \qquad \begin{array}{l} \\ \pi_6(S^4) \simeq \mathbb{Z}_{/2} \\ \pi_{14}(S^8) \simeq \mathbb{Z}_{/2}\,. \end{array} \tag{62}$$

其中 $[h_{\mathbb{K}}]$ 表示 $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}、\ \mathbb{H}、\ \mathbb{O}\}$-霍普夫纤维化 $h_{\mathbb{K}}$（参见[SS25i，§3.2。3]）（而 $r_{\mathbb{K}}$ 表示一个不稳定的余类）。

这里同伦群上的群结构由球面上的 H-余群结构诱导而来（参见下文注释B.6 ）：

定义 B.3 （参见 [Ark11，§2。2]）。 H-群是带基点同伦范畴中的一个内群（定义 B.1），因此是一个带基点的拓扑空间（具有 CW-结构），配备了二元运算和逆运算，并且这些运算满足群公理，但仅在（未明确指定的）同伦意义下成立。

对偶地，*H*-余群 是带基点同伦范畴的对偶范畴中的群对象。

例 B.4。对于（X， x） $\in \mathrm{TopSp}^*$：

(i) 环空间 ΩX (51) 是一个 H-群（定义 B.3），其二元运算由环路拼接给出，

$$\begin{array}{ccc} \Omega X \times \Omega X & \xrightarrow{\quad\star\quad} & \Omega X \\ (\ell_1, \ell_2) & \longmapsto & \left(s \mapsto \begin{cases} \ell_1(2s) & \text{if } s \leq 1/2 \\ \ell_1(2s-1) & \text{if } s \geq 1/2 \end{cases} \right) \end{array} \tag{63}$$

其逆元由环路反转给出：

$$\begin{array}{ccc} \Omega X & \xrightarrow{\quad\overline{(-)}\quad} & \Omega X \\ \ell & \longmapsto & \big(s \mapsto \ell(1-s)\big). \end{array} \tag{64}$$

(ii) 悬挂 ΣX (54) 是一个 H-余群，其二元余运算为

$$\begin{array}{ccc} \Sigma X & \longrightarrow & \Sigma X \vee \Sigma X \\ (s, x) & \longmapsto & \begin{cases} \big((2s, x), *\big) & \text{if } s \leq 1/2 \\ \big(*, (2s-1)\big) & \text{if } s \geq 1/2\,, \end{cases} \end{array} \tag{65}$$

以及由下式给出的余逆

$$\begin{array}{ccc} \Sigma X & \longrightarrow & \Sigma X \\ (s, x) & \longmapsto & (1-s, x)\,. \end{array} \tag{66}$$

例 B.5. 更一般地，从悬挂出发或映入环空间的映射空间(57)通过逐点群运算继承 H-群结构。因此，一对映射 $f, g:\ X \to \Omega S$ 上的二元运算由以下复合给出：左侧为楔积对角映射(55)，右侧为环路拼接(63)：

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad f\star g\quad} & \Omega A \\ {\scriptstyle\Delta}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle\star} \\ X \times X & \xrightarrow{\quad f\times g\quad} & \Omega A \times \Omega A\,. \end{array}$$

注 B.6. 在取映射的同伦类之后，H-(余)群结构会导出真正的群结构：对于 (X, x), $(A, a) \in \mathrm{TopSp}^*$，映射空间上的 H-群结构（例 B.5）会导出实际的群结构

$$\begin{aligned} \pi_0 \,\mathrm{Map}^*(X, \Omega A) &\simeq \pi_0 \,\mathrm{Map}^*(\Sigma X, A) \\ &\simeq \pi_1 \,\mathrm{Map}^*(X, A) \ \in\ \mathrm{Grp}\,. \end{aligned} \tag{67}$$

特别是正度同伦群(61)上的群结构，

$$\pi_{d+1}(A) \simeq \pi_0 \,\mathrm{Map}^*(\Sigma S^d,\, A)\,,$$

由此产生。

沿着这一思路进一步探讨：

例 B.7. 对于 X^d 维数为 $d \geq 1$的 CW复形，以及 $S^{d-1} \hookrightarrow D^d \hookrightarrow X$一个将 d球的边界嵌入 X^d的 d胞腔内部的嵌入，则由推出给出的捏映射 ϕ

$$\begin{array}{ccc} S^{d-1} & \longrightarrow & * \\ \downarrow & \ulcorner & \downarrow \\ X^d & \xrightarrow{\phi} & X^d \vee S^d \end{array} \tag{68}$$

展示了 H-余群的一个“H-余作用”（即在未指定的同伦意义下的余作用）$S^d \simeq \Sigma S^{d-1}$（参见例 B.4）。对于任意 $A \in \mathrm{TopSp}^*$，这意味着同伦群 $\pi_d(A) \simeq \pi_0 \mathrm{Map}^*(S^d, A)$（参见注 B.6）在从 X^d 到 A的映射同伦类上诱导一个实际作用：

$$\pi_d(A) \times \pi_0 \,\mathrm{Map}^*(X^d,\, A) \xrightarrow{\sim} \pi_0 \,\mathrm{Map}^*(X^d \vee S^d,\, A) \xrightarrow{\phi^*} \pi_0 \,\mathrm{Map}^*(X^d,\, A)\,. \tag{69}$$

这在上文引理 3.4 的证明中有所应用。

参考文献

[AA78] Andrews 和 M. Arkowitz。《Sullivan极小模型与高阶Whitehead积》。载于：《加拿大数学杂志》30.5（1978），第961–982页。数字对象唯一标识符：10.4153/CJM-1978-083-6（引自第11页）。[Alv85] O. Alvarez。《拓扑量子化与上同调》。载于：《数学物理通讯》100.2（1985年6月），第279–309页。数字对象唯一标识符：10.1007/bf01212452（引自第17页）。[Ark11] M. Arkowitz。《同伦论导论》。Universitext。纽约州纽约市：施普林格，2011。国际标准书号：978-1-4419-7329-0。数字对象唯一标识符：10.1007/978-1-4419-7329-0（引自第24页）。[Bar+20] H. Bartolomei 等。《任意子碰撞中的分数统计》。载于：《科学》368.6487（2020），第173–177页。数字对象唯一标识符：10.1126/science.aaz5601（引自第3页）。[BG25] R. Buyya 和 S. S. Gill 编。《量子计算：原理与范式》。爱思唯尔，2025年7月。国际标准书号：9780443290961。网址：https://shop.elsevier.com/books/quantum-computing/buyya/978-0-443-29096-1（引自第4页）。[BPS98] H. J. Boonstra、B. Peeters 和 K. Skenderis。《膜交叉、反德西特时空与对偶超共形理论》。载于：《核物理B》533.1–3（1998），第127–162页。数字对象唯一标识符：10.1016/S0550-3213(98)00512-4。arXiv：hep-th/9803231 [hep-th]（引自第21页）。[Bre93] G. E. Bredon。《拓扑与几何》。第139卷。数学研究生教材。纽约：施普林格，1993。国际标准书号：978-1-4757-6848-0。数字对象唯一标识符：10.1007/978-1-4757-6848-0（引自第18页）。[Cai+23] J. Cai 等。《扭曲$MoTe_2$中分数阶量子反常霍尔态的特征》。载于：《自然》622（2023），第63–68页。数字对象唯一标识符：10.1038/s41586-023-06289-w（引自第19页）。

[Das22] S. Das Sarma。《量子计算存在炒作问题》。载于：《麻省理工学院技术评论》（2022年3月）。网址：https://www.technologyreview.com/2022/03/28/1048355/quantum-computing-has-a-hype-problem/（引自第4页）。[Der06] J. Derezi´nski。《正则交换与反交换关系表示论导论》。载于《大型库仑系统——量子电动力学》。第695卷。物理学讲义。施普林格，2006，第63–143页。数字对象唯一标识符：10.1007/3-540-32579-4_3。arXiv：math-ph/0511030 [math-ph]（引自第3页）。[DHo+08a] E. D'Hoker 等。《M理论中的精确半BPS通量解 I：局部解》。载于：JHEP 08（2008），第028页。数字对象唯一标识符：10.1088/1126-6708/2008/08/028。arXiv：0806.0605 [hep-th]（引自第21页）。[DHo+08b] E. D'Hoker 等。《M理论中的精确半BPS通量解 II：渐近于 $AdS_7 \times S^4$ 的全局解》。载于：JHEP 12（2008），第044页。数字对象唯一标识符：10.1088/1126-6708/2008/12/044。arXiv：0810.4647[hep-th]（引自第21页）。[DHo+09] E. D'Hoker 等。《M理论中的精确半BPS通量解 III：渐近于 $AdS_4 \times S^7$ 的全局解的存在性与刚性》。载于：JHEP 09（2009），第067页。数字对象唯一标识符：10.1088/1126-6708/2009/09/067。arXiv：0906.0596 [hep-th]（引自第21页）。[Duf99] M. J. Duff。《十一维世界：超引力、超膜与M理论》。IOP出版社，1999。国际标准书号：978-0-750-30672-0。数字对象唯一标识符：10.1201/9781482268737（引自第17页）。[FHT00] Y. F´elix、S. Halperin 和 J.-C. Thomas。《有理同伦论》。第205卷。数学研究生教材。施普林格，2000。数字对象唯一标识符：10.1007/978-1-4613-0105-9（引自第6、11页）。[Fra11] T. Frankel。《物理学的几何：导论》。剑桥大学出版社，2011。国际标准书号：9781139061377。数字对象唯一标识符：10.1017/CBO9781139061377（引自第17页）。[Fre+03] M. Freedman 等。《拓扑量子计算》。载于：《美国数学会通报》40.1（2003），第31–38页。数字对象唯一标识符：10.1090/S0273-0979-02-00964-3。arXiv：quant-ph/0101025（引自第2、4页）。[FSS20] D. Fiorenza、H. Sati 和 U. Schreiber。《扭曲上同伦蕴含8维流形上的M理论反常消除》。载于：《数学物理通讯》377.3（2020年4月），第1961–2025页。数字对象唯一标识符：10.1007/s00220-020-03707-2。arXiv：1904.10207 [hep-th]（引自第4页）。[FSS21] D. Fiorenza、H. Sati 和 U. Schreiber。《扭曲上同伦蕴含M5膜完整六维韦斯-祖米诺项的层级量子化》。载于：《数学物理通讯》384.1（2021年4月），第403–432页。数字对象唯一标识符：10.1007/s00220-021-03951-0。arXiv：1906.07417 [hep-th]（引自第4页）。[FSS23] D. Fiorenza、H. Sati 和 U. Schreiber。《非阿贝尔上同调中的特征映射：扭曲、微分与广义形式》。https://ncatlab.org/schreiber/show/The+Character+Map+in+Non-Abelian+Cohomology。世界科学出版社，2023。国际标准书号：9789811276705。数字对象唯一标识符：10.1142/13422。arXiv：2009.11909 [math.AT]（引自第4、11页）。

[FV12] D. Z. Freedman 和 A. Van Proeyen。超引力。剑桥：剑桥大学出版社，2012年。ISBN：978-0-521-19401-3。数字对象唯一标识符：10.1017/CBO9781139026833（引自第 21 页）。[Gho+25] B. Ghosh 等。“手性马赫–曾德尔干涉仪中的任意子编织”。发表于：《自然·物理》21.9（2025 年 7 月），第 1392–1397 页。数字对象唯一标识符：10.1038/s41567-025-02960-3。arXiv：2410.16488 [cond-mat.mes-hall]

(引自第 3 页)。[Gib77] P. J. Giblin。《图、曲面与同调：代数拓扑导论》。查普曼与霍尔出版社，1977。数字对象唯一标识符：10.1007/978-94-009-5953-8 (引自第 14 页)。[GMT99] J. P. Gauntlett、R. C. Myers 和 P. K. Townsend。“旋转膜的超对称性”。载于：《物理评论D》59（1999），第 025001 页。数字对象唯一标识符：10.1103/PhysRevD.59.025001。arXiv：hep-th/9809065(引自第 21 页)。[GSS24a] G. Giotopoulos、H. Sati 和 U. Schreiber。“11维超空间上的磁通量子化”。载于：《高能物理杂志》2024.7（2024年7月），第 82 页。数字对象唯一标识符：10.1007/JHEP07(2024)082。arXiv：2403.16456 [hep-th](引自第 21 页)。[GSS24b] G. Giotopoulos、H. Sati 和 U. Schreiber。“M5膜上的磁通量子化”。载于：《高能物理杂志》2024.10（2024年10月），第 140 页。数字对象唯一标识符：10.1007/JHEP10(2024)140。arXiv：2406.11304 [hep-th](引自第 21 页)。[GSS25] G. Giotopoulos、H. Sati 和 U. Schreiber。“超李T对偶与M理论”。载于：《数学物理评论》（2025）。数字对象唯一标识符：10.1142/S0129055X25500187。arXiv：2411.10260 [hep-th] (引自第 11 页)。[Han74] V. L. Hansen。“关于从闭曲面到2-球面的映射空间”。载于：《斯堪的纳维亚数学》35.2（1974），第 149–158 页。网址：https://www.jstor.org/stable/24490694 (引自第 2、10–12、16 页)。[Hat02] A. Hatcher。《代数拓扑》。剑桥大学出版社，2002。ISBN：9780521795401。网址：https://pi.math.cornell.edu/~hatcher/AT/AT.pdf (引自第 8 页)。[Her+07] C. P. Herzog 等。“量子临界输运、对偶与M理论”。载于：《物理评论D》75（2007），第 085020 页。数字对象唯一标识符：10.1103/PhysRevD.75.085020。arXiv：hep-th/0701036 [hep-th](引自第 16 页)。[HLS18] S. Hartnoll、A. Lucas 和 S. Sachdev。《全息量子物质》。麻省理工学院出版社，2018。ISBN：9780262348010。arXiv：1612.07324 [hep-th](引自第 16 页)。.[Hop35] H. Hopf。“关于根据映射的度数将球面映到球面的映射”。载于：《数学年刊》111（1935），第 660–672 页。数字对象唯一标识符：10.1007/BF01472256 (引自第 7 页)。[HS97] P. S. Howe 和 E. Sezgin。“$D = 11, p = 5$”。载于：《物理快报B》394（1997），第 62–66 页。数字对象唯一标识符：10.1016/S0370-2693(96)01672-3。arXiv：hep-th/9611008 [hep-th] (引自第 21 页)。[Hu46] S.-T. Hu。“关于映射空间连通分支的同伦群”。载于：《数学探究》8（1946），第 623–629 页。网址：https://dwc.knaw.nl/DL/publications/PU00018263.pdf(引自第 12 页)。

[Hu59] S.-T. Hu。《同伦论》。第 8 卷。纯粹与应用数学。纽约和伦敦：Academic Press，1959。网址：https://webhomes.maths.ed.ac.uk/~v1ranick/papers/hu2.pdf (引自第 4 页)。[Ien92] R. Iengo。“任意子量子力学与陈-西蒙斯理论”。载于：《物理报告》213（1992），第 179–269 页。数字对象唯一标识符：10.1016/0370-1573(92)90039-3 (引自第 3 页)。[Ju+24] L. Ju 等。“分数量子反常霍尔效应”。载于：《自然综述：材料》9.7（2024年6月），第 455–459 页。数字对象唯一标识符：10.1038/s41578-024-00694-x (引自第 19 页)。[Kal01] S. Kallel。“构形空间与射影空间中的曲线拓扑”。载于：《拓扑、几何与代数：相互作用与新方向》。M. Ando 等编。第 279 卷。《当代数学》。美国数学会，2001，第 151–175 页。数字对象唯一标识符：10.1090/conm/279/00713。arXiv：math-ph/0003010 [math.ph] (引自第 2、3、16 页)。[Koh60] S. S. Koh。“关于映射空间连通分支性质的注记 X^{S^p}”。载于：《美国数学会会刊》11（1960），第 896–904 页。网址：https://ncatlab.org/nlab/files/Koh-MappingSpace.pdf(引自第 12 页)。[LT80] L. L. Larmore 和 E. Thomas。“关于截面空间的基本群”。载于：《斯堪的纳维亚数学》47（1980），第 232–246 页。网址：http://www.jstor.org/stable/24491393(引自第 2、3、16 页)。[Lu+24] Z. Lu 等。“多层石墨烯中的分数量子反常霍尔效应”。载于：《自然》626（2024），第 759–764 页。数字对象唯一标识符：10.1038/s41586-023-07010-7(引自第 19 页)。[Men15] L. Menichi。“有理同伦——沙利文模型”。载于：《几何与拓扑中的自由环空间》。第 24 卷。《IRMA数学与理论物理讲座》。欧洲数学学会，2015，第 111–136 页。数字对象唯一标识符：10.4171/153。arXiv：1308.6685 [math.AT](引自第 11 页)。[MS06] A. Miemiec 和 I. Schnakenburg。“M理论基础”。载于：《物理学进展》54.1（2006年1月），第 5–72 页。数字对象唯一标识符：10.1002/prop.200510256。arXiv：hep-th/0509137 [hep-th](引自第 21 页)。[MSM24] N. Morales-Durán、J. Shi 和 A. H. MacDonald。“莫尔材料中的分数化电子”。载于：《自然综述：物理》6.6（2024年4月），第 349–351 页。数字对象唯一标识符：10.1038/s42254-024-00718-z (引自第 19 页)。[MSS24] D. J. Myers、H. Sati 和 U. Schreiber。“同伦类型论中的拓扑量子门”。载于：Commun. Math. Phys. 405（2024），第 1–49 页。数字对象唯一标识符：10.1007/s00220-024-05020-8。arXiv：2303.02382[hep-th] (引自第 4 页)。[Nak+20] J. Nakamura 等。“任意子编织统计的直接观测”。载于：《自然·物理》16（2020），第 931–936 页。数字对象唯一标识符：10.1038/s41567-020-1019-1。arXiv：2006.14115 [cond-mat.mes-hall] (引自第 3 页)。[Nay+08] C. Nayak 等。“非阿贝尔任意子与拓扑量子计算”。载于：《现代物理评论》80（2008），第 1083–1159 页。数字对象唯一标识符：10.1103/revmodphys.80.1083。arXiv：0707.1889 [cond-mat.str-el]（引自第 2 页）。

[Neu+11] T. Neupert 等：《零磁场下的分数量子霍尔态》。载于：《物理评论快报》106.23（2011年6月），第 236804 页。数字对象唯一标识符：10.1103/PhysRevLett.106.236804。arXiv：1012.4723 [cond-mat.mes-hall]

(引自第 19、20 页)。[nLa26a] nLab。全息凝聚态物理。2026年。网址：https://ncatlab.org/nlab/show/holographic+condensed+matter+physics（引自第 16 页）。[nLa26b] nLab。整数海森堡群。2026年。网址：https://ncatlab.org/nlab/show/integer+Heisenberg+group （引自第 2、6 页）。[nLa26c] nLab。环辫群。2026年。网址：https://ncatlab.org/nlab/show/loop+braid+group（引自第 22 页）。[nLa26d] nLab。量子霍尔效应。2026年。网址：https://ncatlab.org/nlab/show/quantum+Hall+effect （引自第 2 页）。[Par+23] H. Park 等。“分数量子化反常霍尔效应的观测”。载于：《自然》622（2023），第 74–79 页。数字对象唯一标识符：10.1038/s41586-023-06536-0。arXiv：2308.02657 [cond-mat.mes-hall] （引自第 19 页）。[PRS13] S. A. Parameswaran、R. Roy 和 S. L. Sondhi。“拓扑平带中的分数量子霍尔物理”。载于：《物理学报告》14.9-10（2013）。拓扑绝缘体/Isolants topologiques，第 816–839 页。数字对象唯一标识符：10.1016/j.crhy.2013.04.003。arXiv：1302.6606 [cond-mat.str-el]（引自第 19 页）。[Ros04] J. Rosenberg。“Stone–von Neumann 定理简史”。载于《算子代数、量子化与非交换几何：纪念约翰·冯·诺依曼和 Marshall H. Stone 诞辰一百周年》。R. S. Doran 和 R. V. Kadison 编。第 365 卷。《当代数学》。罗得岛州普罗维登斯：美国数学会，2004 年，第 331–354 页。ISBN：978-0-8218-3402-2。数字对象唯一标识符：10.1090/conm/365/06710（引自第 2、5 页）。[Roy14] R. Roy。“分数拓扑绝缘体的能带几何”。载于：Physical Review B 90.16（2014 年 10 月），第 165139 页。数字对象唯一标识符：10.1103/PhysRevB.90.165139。arXiv：1208.2055 [cond-mat.str-el]（引自第 19 页）。[Sat18] H. Sati。“框架化M膜、角与拓扑不变量”。载于：《数学物理杂志》59.6（2018），第 062304 页。数字对象唯一标识符：10.1063/1.5007185。arXiv：1310.1060 [hep-th] （引自第 4 页）。[Ser23] A. S. Sergeev。“拓扑绝缘体与向量丛几何”。载于：SciPost Physics Lecture Notes 67（2023）。数字对象唯一标识符：10.21468/scipostphyslectnotes.67。arXiv：2011.05004 [cond-mat.mes-hall]（引自第 19、20 页）。[Sim23] S. H. Simon。《拓扑量子》。牛津：牛津大学出版社，2023年。ISBN：9780198886723（引自第 4 页）。[SS23a] H. Sati 和 U. Schreiber。“扭曲等变微分（TED）K理论中的任意子缺陷膜与共形块”。载于：《数学物理评论》35.6（2023年3月）。数字对象唯一标识符：10.1142/s0129055x23500095。arXiv：2203.11838 [hep-th] （引自第 17 页）。[SS23b] H. Sati 和 U. Schreiber。“M/F理论作为 $M f$理论”。载于：《数学物理评论》35（2023），第 23500289 页。数字对象唯一标识符：10.1142/s0129055x23500289。arXiv：2103.01877 [hep-th]（引自第 4 、 18 页）。

[SS24] H. Sati 和 U. Schreiber。“相空间上的磁通量子化”。载于：Annales Henri Poincar´e 26（2024年5月），第 895–919 页。数字对象唯一标识符：10.1007/s00023-024-01438-x。arXiv： 2312.12517 [hep-th] （引自第 17 页）。[SS25a] H. Sati 和 U. Schreiber。“通过上同伦中的磁通量子化非拉格朗日构造任意子”。载于：Journal of Physics: Conference Series 3152.1（2025年7月）。第二十九届可积系统与量子对称性国际会议，第 012024 页。数字对象唯一标识符：10.1088/1742-6596/3152/1/012024。arXiv： 2509.02577 [math-ph]（引自第 17 页）。[SS25b] H. Sati 和 U. Schreiber。“ 通过磁通量子化研究 Seifert 三维轨形的 M5 探针上的任意子”。载于：Letters in Mathematical Physics 115.2（2025年3月）。数字对象唯一标识符： 10.1007/s11005-025-01918-z。arXiv：2411.16852 [hep-th] （引自第 17、21 页）。[SS25c] H. Sati 和 U. Schreiber。《高规范场的完全拓扑量子化》。2025年。arXiv： 2512.12431 [hep-th] （引自第 16、17、21 页）。[SS25d] H. Sati 和 U. Schreiber。“通过磁通量子化在 M5 探针上工程化任意子”。载于：SciPost Physics Lecture Notes 107（2025）。数字对象唯一标识符： 10.21468/SciPostPhysLectNotes.107。arXiv：2501.17927[hep-th]（引自第 3 、 17 、 21 页）。[SS25e] H. Sati 和 U. Schreiber。“磁通量子化”。载于《数学物理百科全书》。R. Szabo 和 M. Bojowald 编。第 2 版，第 4 卷。Academic Press，2025年，第 281–324 页。ISBN：9780323957069。数字对象唯一标识符：10.1016/b978-0-323-95703-8.00078-1。arXiv：2312.12517[hep-th]（引自第 3、4、16、18 页）。[SS25f] H. Sati 和 U. Schreiber。《通过奇异磁通量子的代数拓扑研究分数量子霍尔任意子》。2025年。arXiv：2505.22144 [cond-mat.mes-hall]（引自第 3、4、16–18 页）。[SS25g] H. Sati 和 U. Schreiber。《二维晶体陈绝缘体的脆弱拓扑相与拓扑序》。2025年12月。arXiv：2512.24709 [cond-mat.str-el] （引自第 17、20 页）。[SS25h] H. Sati 和 U. Schreiber。“ 在分数量子反常霍尔系统中识别任意子拓扑序 ”。载于：Applied Physics Letters（2025年6月）。即将刊出。arXiv：2507.00138 [cond-mat.str-el]（引自第 3、17、19、20 页）。[SS25i] H. Sati 和 U. Schreiber。《测量拓扑相与膜电荷的轨形 K 理论定向》。将作为专著《几何轨形上同调》的第一、二部分出版，CRC Press（2026年，印刷中）。2025年。arXiv： 2511.12720 [hep-th]。网址： https://ncatlab.org/schreiber/show/Geometric+Orbifold+Cohomology（引自第 19、23 页）。[SS25j] H. Sati 和 U. Schreiber。“量子化磁通的量子可观测量”。载于：Annales Henri Poincar´e 26（2025），第 4241–4269 页。数字对象唯一标识符：10.1007/s00023-024-01517-z。arXiv： 2306.01214 [hep-th] （引自第 17 页）。[SS25k] H. Sati 和 U. Schreiber。“通过上同伦中的磁通量子化对切恩–西蒙斯威尔逊环进行重整化”。载于：《数学物理评论》（2025）。即将刊出。arXiv：2509.25336 [hep-th]（引自第 4、21 页）。

[SS25l] H. Sati 和 U. Schreiber. “通过高维上同伦构造高维任意子”。载于：量子引力与计算：信息、前几何与数字物理学。X. Arsiwalla、H. Elshatlawy 和 D. Rickles 编。Routledge，2025。isbn：9781032900940。arXiv：2411.00628 [hep-th]（引自第 17、21 页）。[SS26] H. Sati 和 U. Schreiber. “上同伦、框架链环与阿贝尔任意子”。载于：纪念 Fred Cohen 的代数拓扑专题项目论文集。菲尔兹研究所通讯。即将出版。施普林格，2026。arXiv：2408.11896 [hep-th]（引自第 4、17–19 页）。[Sta20] T. D. Stanescu.《拓扑量子物质与量子计算导论》。CRC Press，2020。isbn：9780367574116。网址：https://www.routledge.com/Introduction-to-Topological-Quantum-Matter--Quantum-Computation/Stanescu/p/book/9780367574116（引自第 2、4、19 页）。[Sto99] H. L. Stormer. “诺贝尔演讲：分数量子霍尔效应”。载于：Rev. Mod. Phys. 71（1999），第 875–889 页。数字对象唯一标识符：10.1103/RevModPhys.71.875（引自第 2、17、18 页）。[Sun+11] K. Sun 等。“具有非平庸拓扑的近乎平带”。载于：Phys. Rev. Lett. 106.23（2011年6月），第 236803 页。数字对象唯一标识符：10.1103/PhysRevLett.106.236803。arXiv：1012.5864（引自第 19 页）。[SV25a] H. Sati 和 S. Valera. “拓扑量子计算”。载于：《数学物理百科全书》。第二版。第 4 卷。爱思唯尔，2025，第 325–345 页。isbn：978-0-323-95703-8。数字对象唯一标识符：10.1016/B978-0-323-95703-8.00262-7（引自第 2、4 页）。[SV25b] H. Sati 和 A. A. Voronov. “环空间的神秘三重性与例外对称性”。载于：Lett. Math. Phys. 115（2025年6月），第 98 页。数字对象唯一标识符：10.1007/s11005-025-01977-2。arXiv：2408.13337[hep-th]（引自第 11 页）。[Thi25] G. C. Thiang. “拓扑半金属”。载于：《数学物理百科全书》。爱思唯尔，2025，第 66–77 页。isbn：9780323957069。数字对象唯一标识符：10.1016/b978-0-323-95703-8.00046-x。arXiv：2407.12692[math-ph]（引自第 19 页）。[TMW11] E. Tang、J.-W. Mei 和 X.-G. Wen. “高温分数量子霍尔态”。载于：Phys. Rev. Lett. 106.23（2011年6月），第 23680

2.

数字对象唯一标识符：10.1103/PhysRevLett.106.236802. arXiv：1101.1942（引于第19页）。[Ton16] D. Tong.《量子霍尔效应讲义》。2016。网址：http://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/qhe.html（引于第2、3、17、18页）。[Vei+24] A. Veillon 等。“分数量子霍尔任意子的标度维数观测”。载于：《自然》632（2024），第517–521页。数字对象唯一标识符：10.1038/s41586-024-07727-z. arXiv：2401.18044 [cond-mat.mes-hall]（引于第3页）。[Whi46] G. W. Whitehead。“同伦群中的乘积”。载于：《数学年刊》47.3（1946），第460–475页。数字对象唯一标识符：10.2307/1969085（引于第12页）。

[Whi78] G. W. Whitehead.《同伦论基础》。第61卷。数学研究生教材。纽约：施普林格，1978。isbn: 978-1-4612- 6318-0。数字对象唯一标识符： 10.1007/978-1-4612-6318-0（引于第2、6、7、14页）。[WN90] X.-G. Wen 和 Q. Niu。“随机势存在时及高亏格黎曼曲面上分数量子霍尔态的基态简并”。载于：《物理评论B》41（1990），第9377–9396页。数字对象唯一标识符： 10.1103/PhysRevB.41.9377 （引于第3页）。[Zaa+15] J. Zaanen 等。《凝聚态物理中的全息对偶》。剑桥大学出版社，2015。isbn: 9781139942492。数字对象唯一标识符：10.1017/CBO9781139942492（引于第16页）。[Zen+23] Y. Zeng 等。“莫尔 MoTe´中分数陈绝缘体的热力学证据”。载于：《自然》622（2023），第69–73页。数字对象唯一标识符： 10.1038/s41586-023-06452-3 （引于第19页）。[Zha+25] J. Zhao 等。“探索莫尔材料中的分数量子反常霍尔效应：进展与未来展望”。载于：《ACS纳米》19.21（2025年6月），第19509–19523页。数字对象唯一标识符： 10.1021/acsnano.5c01598（引于第19页）。沙迦美国大学数学与统计学系，阿联酋电子邮箱： skallel@aus.edu纽约大学阿布扎比分校数学项目与量子和拓扑系统中心，阿联酋电子邮箱： hsati@nyu.edu纽约大学阿布扎比分校数学项目与量子和拓扑系统中心，阿联酋电子邮箱： us13@nyu.edu