arXiv:2601.03155v1 [math.LO] 6 Jan 2026

Vaught 猜想与可作有限字典序分解的偏序理论

米洛什·S·库里利奇

摘要

一个偏序完备理论 $\mathcal{T}$ 是 FLD_1-理论，当且仅当它的某个（等价地，任意一个）模型$\mathbb{X}$ 可作有限字典序分解 $\mathbb{X}=\sum_{\mathbb{I}}\mathbb{X}_i$，其中 $\mathbb{I}$ 是有限偏序，而 $\mathbb{X}_i$-是具有最大元的偏序。此时记作 $\sum_{\mathbb{I}}\mathbb{X}_i\in\mathcal{D}(\mathcal{T})$；当且仅当 $\mathbb{X}_i$ 满足沃恩特猜想（VC）时，我们称 $\sum_{\mathbb{I}}\mathbb{X}_i$ 为 VC 分解（分别称为 VC$^\sharp$-分解）；而当且仅当对每个 $i\in I$， $\mathbb{X}_i$ 满足 VC$^\sharp$:$I(\mathbb{X}_i)\in\{1,\mathfrak{c}\}$时，我们称之为 VC$^\sharp$-分解。若对于某个 $\sum_{\mathbb{I}}\mathbb{X}_i\in\mathcal{D}(\mathcal{T})$，存在语句 $\tau_i\in\mathrm{Th}(\mathbb{X}_i)$、 $i\in I$，从而得到 VC，则称 $\mathcal{T}$为实际沃恩特。我们证明：（1）对于 $\mathcal{T}$，VC 成立当且仅当 $\mathcal{T}$是大理论，或其原子模型具有 VC 分解；（2）对于每个实际沃恩特 FLD_1 理论，VC 成立；（3）若 $\mathcal{T}$的一个模型存在 VC$^\sharp$-分解，则对 $\mathcal{T}$，VC$^\sharp$ 成立。通过定义 FLD_0 理论（此处 $\mathbb{X}_i$-均有最小元“0”），我们得到这些结论的对偶。因此，由于含 0 的线性序类、根树类、含 0 的格类以及布尔代数类$\mathcal{C}_0^{\mathrm{lo}}\subset\mathcal{C}_0^{\mathrm{tree}}\subset\mathcal{C}_0^{\mathrm{reticle}}$和 $\mathcal{C}^{\mathrm{ba}}$ 均为一阶可定义，故对于闭包 $\langle\mathcal{C}_0^{\mathrm{reticle}}\cup\mathcal{C}^{\mathrm{ba}}\rangle_\Sigma$中的偏序，VC 成立；其中 $\langle\mathcal{C}\rangle_\Sigma$ 表示类 $\mathcal{C}$ 在有限字典序和下的闭包。定义根加项在有限字典序和下的闭包$\langle\mathcal{C}\rangle_{\Sigma^r}$，$\sum_{\mathbb{I}}(\mathbb{X}_i)_r$，我们证明 $\langle\mathcal{C}^{\mathrm{VC}^\sharp}\rangle_{\Sigma^r}=\mathcal{C}^{\mathrm{VC}^\sharp}$，其中 $\mathcal{C}^{\mathrm{VC}^\sharp}$ 是所有满足 VC$^\sharp$的偏序所成的类。特别地，对于形如$\sum_{\mathbb{I}}(\dot{\bigcup}_{j<n_i}\prod_{k<m_i^j}\mathbb{X}^j{}_i{}^k)_r$的一大类偏序，VC$^\sharp$ 成立，其中 $\mathbb{X}^j{}_i{}^k$-可以是线性序或布尔代数，也可以属于一大类树。

2020 年数学主题分类：03C15, 03C35, 06A06, 06A05。
关键词：沃恩特猜想、偏序、有限字典序分解。

1 引言

我们回顾一下，Robert Vaught 于 1959 [12], 提出的沃恩特猜想（VC）指出，完备可数一阶理论 $\mathcal{T}$的两两不同构的可数模型的数量 $I(\mathcal{T},\ \omega)$要么至多可数，要么为连续统。与这个（仍未解决的）问题相关的结果包括一项与本文有关的约化：VC 等价于将其限制在偏序理论上的情形（见 [2], 第231页）。关于这类理论，并以 VC$^\sharp$ 表示沃恩特猜想的“尖锐”版本， $I(\mathcal{T})\in\{1,\mathfrak{c}\}$, 我们回顾以下经典结果。

事实1.1 沃恩特猜想对以下理论成立：*(a)* 线性序；此外，*VC*$^\sharp$ 成立（*Rubin [9]*）；*(b)* 模型论树（*Steel [11]*）；*(c)* 网格（不嵌入四元素偏序集 N的偏序）（*Schmerl [10]*）；*(d)* 布尔代数；此外，*VC*$^\sharp$ 成立（*Iverson [3]*）。

在 [4]–[7] 的研究基础上，我们考察若干模型论构造（如解释、直积等），并探讨它们是否保留 VC。具体而言，设有一个结构类 $\mathcal{C}$，其 VC 已得到证实，我们的目标是证实其在构造 c 下的闭包 $\langle\mathcal{C}\rangle_c$ 中的结构也满足 VC。

例如，若 L 是任意关系语言，$\langle\mathcal{C}\rangle_{\mathrm{def}}$ 是可由 $\mathcal{C}$ 中的结构通过无量词公式定义的 L 结构类，$\mathcal{C}^{\mathrm{lo}}$ 是线性序类，而 $\mathcal{C}^{\mathrm{lo}}_{\mathrm{lab}}$ 是由有限多个凸色着色的线性序类（标记线性序），那么根据 [4]–[6]，我们有

[1]数学与信息学系，理学院，诺维萨德大学，Trg Dositeja Obradovi´ca 4, 21000 诺维萨德，塞尔维亚。电子邮件：milos@dmi.uns.ac.rs

事实1.2 *Vaught* 猜想$^\sharp$ 对类 $\langle \mathcal{C}^{\rm lo}_{\rm lab}\rangle_{\rm def}$中的所有关系结构都成立。

这一结果基于 Rubin 的工作 [9]。我们注意到，$\langle \mathcal{C}^{\rm lo}\rangle_{\rm def}$ 中的结构被 Fra¨ıss´e 称为单态的，而 $\langle \mathcal{C}^{\rm lo}_{\rm lab}\rangle_{\rm def}$ 是由 Pouzet 和 Thi´ery [8] 引入的、可作有限单态分解的结构类（FMD 结构）。

下一个例子与一个同构封闭类 $\mathcal{C}$ 偏序有关，该类满足Vaught 猜想$^\sharp$，且在有限乘积和不交并下闭合 $\langle \mathcal{C}\rangle_{\dot\cup\Pi}$。因此，若 $\mathcal{C}^{\rm ba}$ 是布尔代数类，$\mathcal{C}_0^{\rm tree,\ fmd}$是有根 FMD 树类，$\mathcal{C}^{\rm tree}$ 若，Vaught 猜想$^\sharp$ 是满足 Vaught 猜想$^\sharp$的初始有限树类，而 $\langle \mathcal{C}^{\rm lo}\rangle_{\dot\cup_\infty}$ 是线性序的无限不交并类，那么由 [7] 可得

事实1.3 *Vaught* 猜想$^\sharp$ 对该类中的所有偏序都成立

$$\mathcal{C}' := \langle \mathcal{C}^{\rm lo}\rangle_{\dot\cup\Pi} \cup \langle \mathcal{C}^{\rm ba}\rangle_{\dot\cup\Pi} \cup \langle \mathcal{C}^{\rm tree}_{0,\rm fmd}\rangle_{\dot\cup\Pi} \cup \langle \mathcal{C}^{\rm tree}_{\rm if,VC^\sharp}\rangle_{\dot\cup\Pi} \cup \langle \mathcal{C}^{\rm lo}\rangle_{\dot\cup_\infty}.$$

本文针对偏序类 $\mathcal{C}$ 考察其在有限字典序和下的闭包 $\langle \mathcal{C}\rangle_\Sigma$。我们称偏序 $\mathbb{X}$ 允许带有最大元的有限字典序分解（最大元分解），简称 $\mathbb{X}$ 为 FLD_1 偏序，当且仅当存在一个有限偏序 $\mathbb{I}$ 及其论域 X 的一个划分$\{X_i : \ i \in I\}$，使得 $\mathbb{X} = \sum_{\mathbb{I}} \mathbb{X}_i$，并且对每个 $i \in I$，$\max \mathbb{X}_i$ 都存在。例如，每个具有最大元的无限线性序都有无穷多个这样的分解（分解为形如 $(\cdot,\ a]$ 或 $(a,\ b]$）的区间），而每个具有最大元的偏序 $\mathbb{X}$ 都有一个 1-分解$\mathbb{X} = \sum_1 \mathbb{X}$，在我们的语境中这显然成立。

在第 3 节中，我们确立 FLD_1 偏序理论这一概念，并证明完备偏序理论 $\mathcal{T}$有 FLD_1 模型，当且仅当 $\mathcal{T}$的所有模型都是 FLD_1 偏序。用 $\mathcal{D}(\mathcal{T})$ 表示 $\mathcal{T}$的模型的所有 FLD_1 分解所构成的类；若对每个 $i \in I$，$\sum_{\mathbb{I}} \mathbb{X}_i \in \mathcal{D}(\mathcal{T})$ 都满足 VC（分别为 VC$^\sharp$），则称其为 VC-分解（分别为 VC$^\sharp$-分解）。随后我们证明，VC 对 $\mathcal{T}$成立，当且仅当 $\mathcal{T}$是大类，或者其原子模型 $\mathbb{X}^{\rm at}$ 有一个 VC 分解。（否则，对于 $\mathbb{X}^{\rm at}$的每个分解，$\prod_{i\in I} I(\mathbb{X}_i^{\rm at}) = \omega_1 < \mathfrak{c}$，且 $I(\mathcal{T}) = \omega_1$；也就是说，$\mathcal{T}$是一个反例。）

若 $\mathcal{C}$ 是一个含有最大元且 VC 已得到验证的偏序类，为了在第 4 节验证其在有限字典序和下的闭包 $\langle \mathcal{C}\rangle_\Sigma$ 满足 VC，我们将 FLD_1 理论$\mathcal{T}$定义为实际沃恩特，当且仅当对某个 $\sum_{\mathbb{I}} \mathbb{X}_i \in \mathcal{D}(\mathcal{T})$，存在语句 $\tau_i \in \mathrm{Th}(\mathbb{X}_i)$，其中 $i \in I$，从而给出 VC（例如，若 $\mathbb{X}_i$是反向的有根树）。随后我们证明，每个实际沃恩特 FLD_1 理论都满足 VC。类似地，若存在 VC$^\sharp$-分解 $\sum_{\mathbb{I}} \mathbb{X}_i \in \mathcal{D}(\mathcal{T})$，则 $\mathcal{T}$满足 VC$^\sharp$。在定义 FLD_0 偏序（其中各个加项都有最小元）、FLD_0 理论等时，上述所有论断都有自然的对偶。

在第5节中，我们应用这些结果。首先，基于 Rubin、Steel、Schmerl 和 Iverson 的结果（见事实1.1），我们确认，闭包 $\langle \mathcal{C}_0^{\rm fin} \cup \mathcal{C}_0^{\rm reticle} \cup \mathcal{C}^{\rm ba}\rangle_\Sigma$ 中的偏序满足 Vaught 猜想（它们的理论实际上是 Vaught 的；注意 $\mathcal{C}_0^{\rm lo} \subset \mathcal{C}_0^{\rm tree} \subset \mathcal{C}_0^{\rm reticle}$）。其次，为了推广事实1.3中的结果，我们定义有根加项的字典序和运算 $\sum^r$，以及相应的闭包 $\langle \mathcal{C}\rangle_{\Sigma^r}$。随后，我们证明，对于满足 Vaught 猜想$^\sharp$ 的所有偏序组成的类 $\mathcal{C}^{\rm VC^\sharp}$，有 $\langle \mathcal{C}^{\rm VC^\sharp}\rangle_{\Sigma^r} = \mathcal{C}^{\rm VC^\sharp}$。特别地，对于类 $\langle \mathcal{C}'\rangle_{\Sigma^r}$ 中的每个偏序，Vaught 猜想$^\sharp$ 都成立，其中 $\mathcal{C}'$ 是事实1.3中定义的类。因此，我们得到一个由形如 $\sum_{\mathbb{I}}(\dot\bigcup_{j<n_i} \prod_{k<m_i^j} \mathbb{X}^{j,\ k}_{\ i})_r$ 的偏序构成的大型动物园，它们满足 Vaught 猜想$^\sharp$。

2 预备知识

记号 用 L_b 表示语言 $\langle R\rangle$，其中 R 是一个二元关系符号；在讨论偏序时，则用 $\leq$。Mod^{L_b} 表示 L_b-结构组成的类。对于一个完备的 L_b理论 $\mathcal{T}$，

[2]如果删除有根树的根后得到有限个连通分支，则称该有根树为初始有限的。

若其具有无限模型，则 $I(\mathcal{T},\omega) := |\mathrm{Mod}^{L_b}(\mathcal{T},\omega)/\cong|$ 表示$\mathcal{T}$的两两不同构的可数模型的数量。为简便起见，我们将 $I(\mathcal{T},\omega)$记作 $I(\mathcal{T})$；对于一个 L_b-结构 $\mathbb{X}$，我们将 $I(\mathrm{Th}(\mathbb{X})\ \omega)$记作 $I(\mathbb{X})$。若 $\mathbb{X}$ 是有限结构，为方便起见，我们定义 $I(\mathbb{X}) = 1$。对于 $\mathbb{X} \in \mathrm{Mod}^{L_b}$，用 $\mathrm{it}(\mathbb{X})$ 表示 $\mathbb{X}$ 的同构类型（即所有与 $\mathbb{X}$同构的 L_b-结构构成的类），用 $\mathrm{Aut}(\mathbb{X})$ 表示其自同构群。局部使用的特定记号将在相应位置说明。

参数可定义域上的子结构。划分。若 $\varphi(w_0, \ldots\ldots, w_{m-1}, v) = \varphi(\bar{w}, v)$ 是一个 L_b-公式，则 L_b-公式 $\psi(v_0 \ldots v_{n-1}) = \psi(\tilde{v})$ 的相应相对化（其中$n \in \omega$）是通过以下方式递归定义的 L_b-公式 $\psi^{\varphi}(\bar{w}, \tilde{v})$

$$
\begin{aligned}
\psi^{\varphi}(\bar{w},\tilde{v}) &:= \psi(\tilde{v}), \text{ if } \psi(\tilde{v}) \text{ is atomic}, && (1)\\
(\neg\psi(\tilde{v}))^{\varphi}(\bar{w},\tilde{v}) &:= \neg\psi^{\varphi}(\bar{w},\tilde{v}), && (2)\\
(\psi_0(\tilde{v}) \wedge \psi_1(\tilde{v}))^{\varphi}(\bar{w},\tilde{v}) &:= \psi_0^{\varphi}(\bar{w},\tilde{v}) \wedge \psi_1^{\varphi}(\bar{w},\tilde{v}), && (3)\\
(\psi_0(\tilde{v}) \vee \psi_1(\tilde{v}))^{\varphi}(\bar{w},\tilde{v}) &:= \psi_0^{\varphi}(\bar{w},\tilde{v}) \vee \psi_1^{\varphi}(\bar{w},\tilde{v}), && (4)\\
(\forall u\ \psi(\tilde{v},u))^{\varphi}(\bar{w},\tilde{v}) &:= \forall u\ (\varphi(\bar{w},u) \Rightarrow \psi^{\varphi}(\bar{w},\tilde{v},u)), && (5)\\
(\exists u\ \psi(\tilde{v},u))^{\varphi}(\bar{w},\tilde{v}) &:= \exists u\ (\varphi(\bar{w},u) \wedge \psi^{\varphi}(\bar{w},\tilde{v},u)). && (6)
\end{aligned}
$$

若 $\mathbb{X} \in$ 模型类L_b 且 $\bar{a} \in X^m$，令 $D_{\varphi(\bar{a},v),\ \mathbb{X}} := \{x \in X :\ \mathbb{X} \models \varphi[\bar{a},x]\}$，令 $\mathbb{X} \restriction D_{\varphi(\bar{a},v),\ \mathbb{X}}$ 为 $\mathbb{X}$ 的相应子结构，并且

$$w_{\varphi(\bar{w},v)}(\mathbb{X}) := \{\mathrm{it}(\mathbb{X} \restriction D_{\varphi(\bar{a},v),\mathbb{X}}) : \bar{a} \in X^m\}. \tag{7}$$

事实 2.1 若 $\varphi(\bar{w},\ v)$ 是一个 L_b-公式，则对于每个 L_b-公式 $\psi(\tilde{v})$，$\mathbb{X} \in$ 模型类L_b 且 $\bar{a} \in X^m$，我们有

$$\forall \tilde{y} \in (D_{\varphi(\bar{a},v),\mathbb{X}})^n\ \ (\mathbb{X} \restriction D_{\varphi(\bar{a},v),\mathbb{X}} \models \psi[\tilde{y}] \ \Leftrightarrow\ \mathbb{X} \models \psi^{\varphi}[\bar{a},\tilde{y}]). \tag{8}$$

因此，对于 每个 L_b-语句 ψ, $\mathbb{X} \in$ 模型类L_b 和 $\bar{a} \in X^m$，我们有$\mathbb{X} \restriction D_{\varphi(\bar{a},v),\ \mathbb{X}} \models \psi$ 当且仅当 $\mathbb{X} \models \psi^{\varphi}[\bar{a}]$。

证明。 交换全称量词后，我们固定 $\mathbb{X} \in$ 模型类L_b 和 $\bar{a} \in X^m$，并通过归纳证明，对于每个 L_b-公式 $\psi(\tilde{v})$，我们都有 (8)。

如果 $\psi(\tilde{v})$ 是原子公式 ($v_i = v_j$ 或 $R(v_i,\ v_j)$)，$n > i$，j 和 $\tilde{y} \in (D_{\varphi(\bar{a},v),\ \mathbb{X}})^n$，那么显然，$\mathbb{X} \restriction D_{\varphi(\bar{a},v),\ \mathbb{X}} \models \psi[y_i, y_j]$ 当且仅当 $\mathbb{X} \models \psi[y_i, y_j]$ 当且仅当（由 (1)）$\mathbb{X} \models \psi^{\varphi}[y_i, y_j]$；因此，(8) 对 $\psi(\tilde{v})$ 成立。

假设 (8) 对 $\psi(\tilde{v})$ 成立，我们证明它对 $\neg\psi(\tilde{v})$ 也成立。因此，对于 $\tilde{y} \in (D_{\varphi(\bar{a},v),\ \mathbb{X}})^n$，我们有$\mathbb{X} \restriction D_{\varphi(\bar{a},v),\ \mathbb{X}} \models (\neg\psi(\tilde{v}))[\tilde{y}]$，当且仅当 $\mathbb{X} \restriction D_{\varphi(\bar{a},v),\ \mathbb{X}} \not\models \psi[\tilde{y}]$，当且仅当（根据归纳假设）$\mathbb{X} \not\models \psi^{\varphi}[\bar{a},\tilde{y}]$，当且仅当 $\mathbb{X} \models \neg\psi^{\varphi}[\bar{a},\tilde{y}]$，当且仅当（根据 (2)）$\mathbb{X} \models (\neg\psi(\tilde{v}))^{\varphi}[\bar{a},\tilde{y}]$。因此，(8) 对 $\neg\psi(\tilde{v})$ 成立。

假设 (8) 对 $\psi_0(\tilde{v})$ 和 $\psi_1(\tilde{v})$ 成立，我们证明它对 $\psi_0(\tilde{v}) \wedge \psi_1(\tilde{v})$ 也成立。因此，对于$\tilde{y} \in (D_{\varphi(\bar{a},v),\mathbb{X}})^n$，我们有 $\mathbb{X} \restriction D_{\varphi(\bar{a},v),\mathbb{X}} \models (\psi_0(\tilde{v}) \wedge \psi_1(\tilde{v}))[\tilde{y}]$，当且仅当 $\mathbb{X} \restriction D_{\varphi(\bar{a},v),\mathbb{X}} \models \psi_0[\tilde{y}]$ 和$\mathbb{X} \restriction D_{\varphi(\bar{a},v),\mathbb{X}} \models \psi_1[\tilde{y}]$，当且仅当（根据归纳假设）$\mathbb{X} \models \psi_0^{\varphi}[\bar{a},\tilde{y}]$ 和 $\mathbb{X} \models \psi_1^{\varphi}[\bar{a},\tilde{y}]$，当且仅当 $\mathbb{X} \models (\psi_0^{\varphi} \wedge \psi_1^{\varphi})[\bar{a},\tilde{y}]$，当且仅当（根据 (3)）$\mathbb{X} \models (\psi_0(\tilde{v}) \wedge \psi_1(\tilde{v}))^{\varphi}[\bar{a},\tilde{y}]$。因此，(8) 对 $\psi_0(\tilde{v}) \wedge \psi_1(\tilde{v})$ 成立；同理，对 $\psi_0(\tilde{v}) \vee \psi_1(\tilde{v})$ 也成立。

假设 (8) 对于 $\psi(\tilde{v},u)$ 成立，我们证明它对于 $\forall u\ \psi(\tilde{v},u)$ 也成立。令 $Y := D_{\varphi(\bar{a},v),\mathbb{X}}$和 $\tilde{y} \in Y^n$; 那么 $\mathbb{X} \restriction Y \models (\forall u\ \psi(\tilde{v},u))[\tilde{y}]$，当且仅当对于每个 $y \in Y$，都有 $\mathbb{X} \restriction Y \models \psi(\tilde{v},u)[\tilde{y},y]$；当且仅当（由归纳假设）对于每个 $y \in Y$，都有 $\mathbb{X} \models \psi^{\varphi}(\bar{w},\tilde{v},u)[\bar{a},\tilde{y},y]$；当且仅当对于每个 $y \in X$，$\mathbb{X} \models \varphi[\bar{a},y]$ 蕴含 $\mathbb{X} \models \psi^{\varphi}(\bar{w},\tilde{v},u)[\bar{a},\tilde{y},y]$；当且仅当对于每个 $y \in X$，都有 $\mathbb{X} \models (\varphi(\bar{w},u) \Rightarrow \psi^{\varphi}(\bar{w},\tilde{v},u))[\bar{a},\tilde{y},y]$；当且仅当 $\mathbb{X} \models \forall u\,(\varphi(\bar{w},u) \Rightarrow \psi^{\varphi}(\bar{w},\tilde{v},u))[\bar{a},\tilde{y}]$；当且仅当（由 (5)）$\mathbb{X} \models (\forall u\ \psi(\tilde{v},u))^{\varphi}[\bar{a},\tilde{y}]$。因此，(8) 对于 $\forall u\ \psi(\tilde{v},u)$ 成立，同理也对于 $\exists u\ \psi(\tilde{v},u)$ 成立。□

事实 2.2 若 $\mathbb{X}$ 是一个 L_b-结构，$\varphi(\bar{w},v)$ 是一个 L_b-公式，$\bar{a} \in X^m$，其中 $D_{\varphi(\bar{a},v),\mathbb{X}} \neq \emptyset$ 且 $\mathbb{X} \preccurlyeq \mathbb{Y}$，则

$$D_{\varphi(\bar{a},v),\mathbb{X}} = X \cap D_{\varphi(\bar{a},v),\mathbb{Y}} \quad \textit{and} \quad \mathbb{X} \restriction D_{\varphi(\bar{a},v),\mathbb{X}} \preccurlyeq \mathbb{Y} \restriction D_{\varphi(\bar{a},v),\mathbb{Y}}. \tag{9}$$

证明。首先，$x \in D_{\varphi(\bar{a},v),\mathbb{X}}$当且仅当 $x \in X$，且 $\mathbb{X} \models \varphi[\bar{a}, x]$当且仅当（因为 $\mathbb{X} \preccurlyeq \mathbb{Y}$） $x \in X$，并且 $\mathbb{Y} \models \varphi[\bar{a}, x]$当且仅当$x \in X \cap D_{\varphi(\bar{a},v),\mathbb{Y}}$；因此，$D_{\varphi(\bar{a},v),\mathbb{X}} = X \cap D_{\varphi(\bar{a},v),\mathbb{Y}}$。其次，对于公式 $\psi(\bar{w})$和 $\tilde{x} \in (D_{\varphi(\bar{a},v),\mathbb{X}})^n$，我们有$\mathbb{X} \restriction D_{\varphi(\bar{a},v),\mathbb{X}} \models \psi[\tilde{x}]$，当且仅当（根据事实 2.1） $\mathbb{X} \models \psi^{\varphi}[\bar{a}, \tilde{x}]$，当且仅当（因为 $\mathbb{X} \preccurlyeq \mathbb{Y}$） $\mathbb{Y} \models \psi^{\varphi}[\bar{a}, \tilde{x}]$，当且仅当（根据事实 2.1）$\mathbb{Y} \restriction D_{\varphi(\bar{a},v),\mathbb{Y}} \models \psi[\tilde{x}]$。因此，$\mathbb{X} \restriction D_{\varphi(\bar{a},v),\mathbb{X}} \preccurlyeq \mathbb{Y} \restriction D_{\varphi(\bar{a},v),\mathbb{Y}}$。□

事实 2.3 若 $\mathbb{X} \cong \mathbb{Y}$，则 $w_{\varphi(\bar{w},v)}(\mathbb{X}) = w_{\varphi(\bar{w},v)}(\mathbb{Y})$。若 $|X| = \omega$，则 $w_{\varphi(\bar{w},v)}(\mathbb{X}) \leq \omega$。

证明。设 $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ 是一个同构。若$\tau \in w_{\varphi(\bar{w},v)}(\mathbb{X})$，则由 (7) 可知存在 $\bar{a} \in X^m$，使得 $\tau = \mathrm{it}(\mathbb{X} \restriction D_{\varphi(\bar{a},v),\mathbb{X}})$。对于 $x \in X$，我们有$x \in D_{\varphi(\bar{a},v),\mathbb{X}}$当且仅当 $\mathbb{X} \models \varphi[\bar{a}, x]$ 当且仅当 $\mathbb{Y} \models \varphi[f\bar{a}, fx]$ 当且仅当$fx \in D_{\varphi(f\bar{a},v),\mathbb{Y}}$。因此$f[D_{\varphi(\bar{a},v),\mathbb{X}}] = D_{\varphi(f\bar{a},v),\mathbb{Y}}$，从而$\mathbb{X} \restriction D_{\varphi(\bar{a},v),\mathbb{X}} \cong \mathbb{Y} \restriction D_{\varphi(f\bar{a},v),\mathbb{Y}}$，也就是说$\tau = \mathrm{it}(\mathbb{X} \restriction D_{\varphi(\bar{a},v),\mathbb{X}}) = \mathrm{it}(\mathbb{Y} \restriction D_{\varphi(f\bar{a},v),\mathbb{Y}}) \in w_{\varphi(\bar{w},v)}(\mathbb{Y})$。于是，$w_{\varphi(\bar{w},v)}(\mathbb{X}) \subset w_{\varphi(\bar{w},v)}(\mathbb{Y})$，而另一包含关系的证明是对称的。若 $|X| = \omega$，则 $|X^m| = \omega$，并且由 (7) 可得 $w_{\varphi(\bar{w},v)}(\mathbb{X}) \leq \omega$。□

关于结构的划分，根据 [7] 的命题 2.3，我们有

事实 2.4 若 $\mathbb{X}$ 是一个可数的 L_b-结构，且 $\{X_i\colon\ i \in I\}$ 是其论域 X的一个划分，则 *(a)* 若对于每个 $f \in$自同构群$(\mathbb{X})$以及来自 $f[X_i] \cap X_i \neq \emptyset$的 $i \in I$，由此可推出 $f[X_i] = X_i$，那么

$$\mathbb{X} \textit{ is } \omega\textit{-categorical} \Rightarrow \forall i \in I\ (\mathbb{X}_i \textit{ is } \omega\textit{-categorical}); \tag{10}$$

(b) 若对于 $i \in I$，只要 $f_i \in$自同构群$(\mathbb{X}_i)$，就有 $|I| < \omega$和 $\bigcup_{i\in I} f_i \in$自同构群$(\mathbb{X})$，则在 *(10)* 中我们有“$\Leftarrow$”。

字典序和 L_b-结构 设 $\mathbb{I} = \langle I, \rho_I\rangle$和 $\mathbb{X}_i = \langle X_i, \rho_i\rangle$、$i \in I$是具有两两不交的论域的 L_b-结构。结构 $\mathbb{X}_i$、$i \in I$在结构 $\mathbb{I}$上的字典序和，记作 $\sum_{\mathbb{I}} \mathbb{X}_i$，是 L_b-结构 $\mathbb{X} := \langle X, \rho\rangle$，其中 $X := \bigcup_{i\in I} X_i$，并且对于 x、$x' \in X$，我们有：$x\,\rho\,x'$当且仅当

$$\exists i \in I\ \Big(x, x' \in X_i \wedge x\,\rho_i\,x'\Big)\ \vee\ \exists \langle i, j\rangle \in \rho_I \setminus \Delta_I\ \Big(x \in X_i \wedge x' \in X_j\Big), \tag{11}$$

其中 $\Delta_I := \{\langle i, i\rangle\colon\ i \in I\}$。若 $\mathbb{X}$和 $\mathbb{Y}$是 L_b-结构，则用 $\mathrm{PI}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ 表示 $\mathbb{X}$ 和 $\mathbb{Y}$之间所有部分同构的集合。$\mathrm{EF}_k(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ 表示在 $\mathbb{X}$ 和 $\mathbb{Y}$之间长度为 k 的 Ehrenfeucht-Fra¨ıss´e 博弈中，玩家 II 拥有必胜策略。

事实 2.5 设 $\sum_{\mathbb{I}} \mathbb{X}_i$和 $\sum_{\mathbb{I}} \mathbb{Y}_i$是 L_b-结构的字典序和。那么

(a) If $f_i \in \mathrm{PI}(\mathbb{X}_i, \mathbb{Y}_i)$, for $i \in J \subset I$, then $\bigcup_{i\in J} f_i \in \mathrm{PI}(\sum_{\mathbb{I}} \mathbb{X}_i, \sum_{\mathbb{I}} \mathbb{Y}_i)$;
(b) If $\mathbb{X}_i \preccurlyeq \mathbb{Y}_i$, for all $i \in I$, then $\sum_{\mathbb{I}} \mathbb{X}_i \preccurlyeq \sum_{\mathbb{I}} \mathbb{Y}_i$;
(c) If $\mathbb{X}_i \equiv \mathbb{Y}_i$, for all $i \in I$, then $\sum_{\mathbb{I}} \mathbb{X}_i \equiv \sum_{\mathbb{I}} \mathbb{Y}_i$;
(d) If $|I| < \omega$ and $I(\mathbb{X}_i) = 1$, for all $i \in I$, then $I(\sum_{\mathbb{I}} \mathbb{X}_i) = 1$.

证明。(a) 由 (11) 可直接得出此结论。

(b) 首先回顾一个标准事实：若 $\mathbb{X}$和 $\mathbb{Y}$是 L-结构，其中 $|L| < \omega$，且 $\mathbb{X} \subset \mathbb{Y}$，则

$$\mathbb{X} \preccurlyeq \mathbb{Y}\ \ \text{iff}\ \ \forall n \in \omega\ \ \forall \bar{x} \in X^n\ \ \forall k \in \omega\ \ \mathrm{EF}_k((\mathbb{X}, \bar{x}), (\mathbb{Y}, \bar{x})). \tag{12}$$

也就是说，若 $\mathbb{X} \subset \mathbb{Y}$，则（见 [1], 第 77 页）$\mathbb{X} \preccurlyeq \mathbb{Y}$当且仅当对于每个 $n \in \omega$和 $\bar{x} \in X^n$，都有 $(\mathbb{X}, \bar{x}) \equiv (\mathbb{Y}, \bar{x})$，其中 $\equiv$指语言 $L_{\bar{c}} = L \cup \{c_0, \ldots, c_{n-1}\}$，而 c_i, $i < n$是新常元。由于$|L_{\bar{c}}| < \omega$，对于所有 $k \in \omega$，$(\mathbb{X}, \bar{x}) \equiv (\mathbb{Y}, \bar{x})$ 当且仅当 $\mathrm{EF}_k((\mathbb{X}, \bar{x}), (\mathbb{Y}, \bar{x}))$。

现在，若 $\mathbb{X}_i \preccurlyeq \mathbb{Y}_i$，对于 $i \in I$，则对每个 $i \in I$，我们有

$$\forall n \in \omega\ \ \forall \bar{x} \in X_i^n\ \ \forall k \in \omega\ \ \mathrm{EF}_k((\mathbb{X}_i, \bar{x}), (\mathbb{Y}_i, \bar{x})) \tag{13}$$

并且我们必须证明，对于每个 $n \in \omega$、$\bar{x} = \langle x_j\colon\ j < n\rangle \in (\bigcup_{i\in I} X_i)^n$ 以及 $k \in \omega$，都有 $\mathrm{EF}_k((\sum_{\mathbb{I}} \mathbb{X}_i, \bar{x}), (\sum_{\mathbb{I}} \mathbb{Y}_i, \bar{x}))$。对于 $i \in I$，令 $J_i := \{j < n\colon\ x_j \in X_i\}$；则 $\bar{x}^i := \langle x_j\colon\ j \in J_i\rangle \in X_i^{|J_i|}$

（可能为 $J_i = \bar{x}^i = \emptyset$），根据（13），玩家 II 在博弈 $\mathrm{EF}_k((\mathbb{X}_i, \bar{x}^i), (\mathbb{Y}_i, \bar{x}^i))$ 中拥有一个必胜策略，记为 Σ_i。在博弈 $\mathrm{EF}_k((\sum_{\mathbb{I}} \mathbb{X}_i, \bar{x}), (\sum_{\mathbb{I}} \mathbb{Y}_i, \bar{x}))$ 中，玩家 II 以自然的方式使用策略 Σ_i、$i \in I$：当玩家 I 从 X_i 或 Y_i 中选择一个元素 a 时，玩家 II 将 Σ_i 应用于在 $(\mathbb{X}_i, \bar{x}^i)$ 与 $(\mathbb{Y}_i, \bar{x}^i)$ 之间进行的、由 a 扩展的前一段博弈的限制，并据此作出回应。这样，在博弈结束时，对于每个 $i \in I$，都得到一个部分同构 $f_i \in \mathrm{PI}((\mathbb{X}_i, \bar{x}^i), (\mathbb{Y}_i, \bar{x}^i))$（其中一些可能为空）；根据（a），我们有 $f := \bigcup_{i\in I} f_i \in \mathrm{PI}(\sum_{\mathbb{I}} \mathbb{X}_i, \sum_{\mathbb{I}} \mathbb{Y}_i)$。此外，根据构造，我们有 $\{\langle x_j, x_j\rangle : j < n\} \cup f \in \mathrm{PI}((\sum_{\mathbb{I}} \mathbb{X}_i, \bar{x}), (\sum_{\mathbb{I}} \mathbb{Y}_i, \bar{x}))$，因此玩家 II 获胜。

(c) 设 $\mathbb{X}_i \equiv \mathbb{Y}_i$，对所有 $i \in I$。对于 $k \in \mathbb{N}$ 和 $i \in I$，设 Σ_i 是博弈 $\mathrm{EF}_k(\mathbb{X}_i, \mathbb{Y}_i)$ 中玩家 II 的必胜策略。如果在博弈 $\mathrm{EF}_k(\sum_{\mathbb{I}} \mathbb{X}_i, \sum_{\mathbb{I}} \mathbb{Y}_i)$ 中，玩家 II 遵循 Σ_i 的策略（当玩家 I 从 X_i 或 Y_i 中选择一个元素时，玩家 II 使用 Σ_i），那么根据 (a)，玩家 II 获胜。因此，对所有 $k \in \omega$，都有 $\sum_{\mathbb{I}} \mathbb{X}_i \equiv_k \sum_{\mathbb{I}} \mathbb{Y}_i$，从而 $\sum_{\mathbb{I}} \mathbb{X}_i \equiv \sum_{\mathbb{I}} \mathbb{Y}_i$。

(d) 设 $|I| < \omega$，并设 $I(\mathbb{X}_i) = 1$，对所有 $i \in I$。如果对于 $i \in I$，有 $f_i \in \mathrm{Aut}(\mathbb{X}_i)$，那么根据 (a)，我们有 $\bigcup_{i\in I} f_i \in \mathrm{Aut}(\mathbb{X})$。根据事实 2.4(b)，我们有 $I(\mathbb{X}) = 1$。□

3 FLD 理论

我们称偏序 $\mathbb{X}$ 具有带有最大元的有限字典序分解（最大元），简称 $\mathbb{X}$ 是 FLD_1-偏序，当且仅当存在一个有限偏序 $\mathbb{I} = \langle I, \leq_{\mathbb{I}}\rangle$ 及其论域 X 的一个划分 $\{X_i : i \in I\}$，使得 $\mathbb{X} = \sum_{\mathbb{I}} \mathbb{X}_i$，且对每个 $i \in I$，$\max \mathbb{X}_i$ 都存在。

定理 3.1 若 $\mathbb{X}$ 是 *FLD*$_1$-偏序，且 $\mathbb{X} = \sum_{\mathbb{I}} \mathbb{X}_i$，其中 $\mathbb{I} = \langle n, \leq_{\mathbb{I}}\rangle$ 和 $\mathbb{X}_i = \langle X_i, \leq_i\rangle$ $(i < n)$ 是两两不相交的偏序，$r_i =$ 最大值 $\mathbb{X}_i$（$i < n$），且 $\bar{r} := \langle r_0, \ldots, r_{n-1}\rangle$，则 ***(a)*** $X_i = D_{\varphi_i(\bar{r},v)}\mathbb{X}$（$i < n$），其中

$$\varphi_i(\bar{r}, v) := v \leq r_i \wedge \bigwedge_{j<_{\mathbb{I}} i} r_j < v \wedge \bigwedge_{j>_{\mathbb{I}} i} r_j > v \wedge \bigwedge_{j \not\parallel_{\mathbb{I}} i} r_j \not\parallel v; \tag{14}$$

(b) 公式 $\varepsilon(\bar{r}, u, v) = \bigvee_{i<n}(\varphi_i(\bar{r}, u) \wedge \varphi_i(\bar{r}, v))$ 在 $\mathbb{X}$ 上定义了集合 X 和 $X/D_{\varepsilon(\bar{r},u,v)}\mathbb{X}$ 上的等价关系：$i < n\}$；***(c)*** 如果对于 $i < n$、[3]，$\mathbb{Y} \equiv \mathbb{X}$ 和 $\tau_i \in Th(\mathbb{X}_i)$，那么存在 $\bar{r}' := \langle r'_0, \ldots, r'_{n-1}\rangle \in Y^n$，使得对 $i < n$ 定义 $Y_i := D_{\varphi_i(\bar{r}',v)}\mathbb{Y}$，我们有 ***(i)*** $\{Y_i : i < n\}$ 是集合 Y 和 $Y/D_{\varepsilon(\bar{r}',u,v)}\mathbb{Y} = \{Y_i$ 的划分；***(ii)*** 对于 $i < n$，$\mathbb{Y} = \sum_{\mathbb{I}} \mathbb{Y}_i$ 和 $r'_i =$ 最大值为 $\mathbb{Y}_i$；***(iii)*** 对于 $i < n$，$\mathbb{Y}_i \models \tau_i$。

证明。(a) 令 $\mathbb{X} = \langle X, \leq\rangle$。集合 X_i、$i < n$ 两两不相交，且由 (11)，对于 $x, y \in X$，我们有

$$x \leq y \Leftrightarrow \exists i \in n\ (x, y \in X_i \wedge x \leq_i y) \vee \exists i, j \in n\ (i <_{\mathbb{I}} j \wedge x \in X_i \wedge y \in X_j). \tag{15}$$

取 $i < n$，并证明对于每个 $x \in X$，都有 $x \in X_i$ 当且仅当 $\mathbb{X} \models \varphi_i[\bar{r}, x]$，也就是说，

$$x \in X_i \Leftrightarrow x \leq r_i \wedge \bigwedge_{j<_{\mathbb{I}} i} r_j < x \wedge \bigwedge_{j>_{\mathbb{I}} i} r_j > x \wedge \bigwedge_{j \not\parallel_{\mathbb{I}} i} r_j \not\parallel x. \tag{16}$$

若 $x \in X_i$，则 $x, r_i =$ 最大值 $\mathbb{X}_i \in X_i$，因此 $x \leq_i r_i$，由 (15) 得 $x \leq r_i$。若 $j <_{\mathbb{I}} i$，则由于 $r_j \in X_j$ 且 $x \in X_i$，由 (15) 可得 $r_j < x$。若 $j >_{\mathbb{I}} i$，则由于 $r_j \in X_j$ 且 $x \in X_i$，由 (15) 可得 $r_j > x$。最后，若 $j \not\parallel_{\mathbb{I}} i$，则 $i \neq j$ 且 $x \neq r_j$。假设 $x < r_j$，由 (15) 可得 $i <_{\mathbb{I}} j$，这不成立。因此，$x \not< r_j$，同理，$r_j \not< x$，从而得到 $r_j \not\parallel x$。因此，(16) 中的“⇒”得证。

设（16）的右端成立；我们证明 $x \in X_i$。假设 $x \in X_j$，对某个 $j \neq i$，则有 $x \leq_j r_j =$ 最大值 $\mathbb{X}_j$，由（15）可得 $x \leq r_j$。显然，我们有 $i <_{\mathbb{I}} j$ 或 $j <_{\mathbb{I}} i$ 或 $i \not\parallel_{\mathbb{I}} j$。现在，若

[3]或者，等价地，如果 $\mathcal{T}_i \in [\mathrm{Th}(\mathbb{X}_i)]^{<\omega}$ 且 $\tau_i = \bigwedge \mathcal{T}_i$，对于 $i < n$。

$i <_{\mathbb{I}} j$，那么，由于 $r_i \in X_i$，根据（15）可得 $r_i < x$，这不成立，因为根据（16）的右端$x \le r_{i\circ}$ 若 $j <_{\mathbb{I}} i$，那么根据（16）的右端可得 $r_j < x$，这不成立，因为 $x \le r_{j\circ}$ 最后，若 $i \not\parallel_{\mathbb{I}} j$，那么根据（16）的右端可得 $r_j \not\parallel x$，这不成立，因为 $x \le r_{j\circ}$ 因此 $x \in X_i$，且（16）得证。所以，$X_i = D_{\varphi_i(\bar{r},v)\,\mathbb{X}}$，对于 $i < n_\circ$

(b) 由于 $\{X_i : i < n\}$是集合 X 的一个划分，结论 (b) 可由 (a) 得出。

(c) 由 (a) 可得 $\mathbb{X} \models \varphi_p[\bar{r}]$, 其中 $\varphi_p(\bar{w})$ 是表示以下内容的 L_b-公式：$\{D_{\varphi_i(\bar{w},\ v)\,\cdot} : i < n\}$ 是论域的一个划分；例如，

$$\varphi_p(\bar{w}) := \forall v \ \bigvee_{i<n}(\varphi_i(\bar{w},v) \wedge \bigwedge_{j\in n\setminus\{i\}} \neg\varphi_j(\bar{w},v)). \tag{17}$$

由于 $\mathbb{X} = \sum_{\mathbb{I}} \mathbb{X}_i$，根据 (11) 我们有：若 $i,\ j < n, i \neq j, x \in X_i$ 和 $x' \in X_j$，则 $x \le_{\mathbb{X}} x'$ 当且仅当 $i <_{\mathbb{I}} j_\circ$ 因此，由 (a) 可得 $\mathbb{X} \models \varphi_m[\bar{r}]$，其中

$$\begin{aligned}\varphi_m(\bar{w}) \ := \ & \bigwedge_{i,j\in n\,\wedge\, i<_{\mathbb{I}} j} \forall u,v\ (\varphi_i(\bar{w},u) \wedge \varphi_j(\bar{w},v) \Rightarrow u \le v) \ \wedge \\ & \bigwedge_{i,j\in n\,\wedge\, i\not\le_{\mathbb{I}} j} \forall u,v\ (\varphi_i(\bar{w},u) \wedge \varphi_j(\bar{w},v) \Rightarrow \neg u \le v).\end{aligned} \tag{18}$$

在 $\mathbb{X}$ 中，对于 $i < n$，我们有 $r_i =$ 最大值$D_{\varphi_i(\bar{r},\ v)\,\mathbb{X}}$；因此，对于每个$x \in D_{\varphi_i(\bar{r},\ v)\,\mathbb{X}}$，我们有 $x \le_{\mathbb{X}} r_i$，也就是说，$\mathbb{X} \models \varphi_{r_i}[\bar{r}]$，其中

$$\varphi_{r_i}(\bar{w}) := \forall v\ (\varphi_i(\bar{w},v) \Rightarrow v \le w_i). \tag{19}$$

令 $i < n$ 和 $\tau_i \in \mathrm{Th}(\mathbb{X}_i)_\circ$ 则由 (a) 得 $\mathbb{X}_i = \mathbb{X} \restriction D_{\varphi_i(\bar{r},v)\,\mathbb{X}} \models \tau_i$，并由事实 2.1 $\mathbb{X} \models \tau_i^{\varphi_i}[\bar{r}]$ 得。此外，$\mathbb{X} \models \varphi_{\mathcal{T}}[\bar{r}]$，其中

$$\varphi_{\mathcal{T}}(\bar{w}) := \bigwedge_{i<n} \tau_i^{\varphi_i}(\bar{w}). \tag{20}$$

因此我们有 $\mathbb{X} \models \varphi[\bar{r}]$，其中 $\varphi(\bar{w}) := \varphi_p(\bar{w}) \wedge \varphi_m(\bar{w}) \wedge \bigwedge_{i<n} \varphi_{r_i}(\bar{w}) \wedge \varphi_{\mathcal{T}}(\bar{w})$，于是 $\mathbb{X} \models \exists\bar{w}\ \varphi(\bar{w})_\circ$ 因此，$\mathbb{Y} \models \exists\bar{w}\ \varphi(\bar{w})$，所以存在 $\bar{r}' \in Y^n$，使得 $\mathbb{Y} \models \varphi[\bar{r}']$，并且我们验证 (i)–(iii)。

(i) 由于 $\mathbb{Y} \models \varphi_p[\bar{r}']$ 和 $Y_i := D_{\varphi_i(\bar{r}',\ v)\,\mathbb{Y}}$，对于 $i < n$，由 (17) 可知，$\{Y_i : i < n\}$ 是 $\mathbb{Y}$的一个划分。

(ii) 由于 $\mathbb{Y} \models \varphi_m[\bar{r}']$ 和 $Y_i := D_{\varphi_i(\bar{r}',\ v)\,\mathbb{Y}}$，对于 $i < n$，由 (18) 可得

$$\forall i,j < n\ \ (i \neq j \Rightarrow \forall y \in Y_i\ \ \forall y' \in Y_j\ \ (y \le_{\mathbb{Y}} y' \Leftrightarrow i <_{\mathbb{I}} j)). \tag{21}$$

由于 $\mathbb{X}$ 是一个偏序，且 $\mathbb{Y} \equiv \mathbb{X}$, $\mathbb{Y} = \langle Y,\ \le_{\mathbb{Y}}\rangle$ 是一个偏序；因此，对于每个 $i < n$，其子结构$\mathbb{Y}_i = \langle Y_i, \le_{\mathbb{Y}_i}\rangle$（其中 $\le_{\mathbb{Y}_i} := \le_{\mathbb{Y}} \cap Y_i^2$）都是偏序。要证明 $\mathbb{Y} = \sum_{\mathbb{I}} \mathbb{Y}_i$，我们必须证明对于每个 $y,\ y' \in Y$，都有

$$y \le_{\mathbb{Y}} y' \Leftrightarrow \exists i < n\ \ (y,y' \in Y_i \wedge y \le_{\mathbb{Y}_i} y') \ \vee \ \exists i,j < n\ \ (y \in Y_i \wedge y' \in Y_j \wedge i <_{\mathbb{I}} j). \tag{22}$$

设 $y \le_{\mathbb{Y}} y'_\circ$ 若对于某个 $i < n$，有 $y,\ y' \in Y_i$，那么由于 $\mathbb{Y}_i$ 是 $\mathbb{Y}$的子结构，我们有 $y \le_{\mathbb{Y}_i} y'$，且 (22) 的右端成立。否则，存在不同的 $i,\ j < n$，使得 $y \in Y_i$ 且 $y' \in Y_j$；因此，由 (21) 可得 $i <_{\mathbb{I}} j$，(22) 的右端也成立。反过来，设 (22) 的右端成立。若 $y,\ y' \in Y_i$且 $y \le_{\mathbb{Y}_i} y'$，那么由于 $\mathbb{Y}_i \subseteq \mathbb{Y}$，我们有 $y \le_{\mathbb{Y}} y'_\circ$ 否则，我们有 $y \in Y_i$ 和 $y' \in Y_j$，其中$i <_{\mathbb{I}} j$，并且由 (21) 可再次得到 $y \le_{\mathbb{Y}} y'$。因此，(22) 成立，且 $\mathbb{Y} = \sum_{\mathbb{I}} \mathbb{Y}_{i\circ}$ 此外，对于每个 $i < n$，我们有$\mathbb{Y} \models \varphi_{r_i}[\bar{r}']$，并且由于 $Y_i := D_{\varphi_i(\bar{r}',\ v)\,\mathbb{Y}}$，由 (19) 可得 $r'_i =$ 最大值 $\mathbb{Y}_{i\circ}$

(iii) 由于 $\mathbb{Y} \models \varphi_{\mathcal{T}}[\bar{r}']$，根据 (20)，对于 $i < n$，我们有 $\mathbb{Y} \models \tau_i^{\varphi_i}[\bar{r}']$；根据事实 2，$1\ \mathbb{Y}_i \models \tau_{i\circ}$ □

对于一个 FLD_1-偏序 $\mathbb{X}$，令 $\mathcal{I}(\mathbb{X}) := \{\mathbb{I} \in \mathcal{C}^{\mathrm{fin}} : \text{存在一个 } \mathrm{FLD}_1 \text{ 分解 } \mathbb{X} = \sum_{\mathbb{I}} \mathbb{X}_i\}$，其中 $\mathcal{C}^{\mathrm{fin}}$ 是有限偏序类。显然，每个偏序集 $\mathbb{I} \in \mathcal{C}^{\mathrm{fin}}$ 都同构于一个论域为 n 的偏序集，其中 $n \in \mathbb{N}$；因此，在方便时，我们可以假设 $\mathbb{I} = \langle n,\ \le_{\mathbb{I}}\rangle_\circ$

T定理 3.2 如果 $\mathcal{T}$ 是偏序的完备理论，那么 ***(a)*** 如果 $\mathbb{X}$ 是 $\mathcal{T}$ 的 FLD_1-模型，那么对于每个模型 $\mathbb{Y}$，$\mathcal{I}(\mathbb{Y}) = \mathcal{I}(\mathbb{X})$；***(b)*** $\mathcal{T}$ 有 FLD_1-模型，当且仅当 $\mathcal{T}$ 的所有模型都是 FLD_1-偏序。

证明。 如果 $\mathbb{X} \models \mathcal{T}$ 是 FLD_1-偏序， $\mathbb{I} \in \mathcal{I}(\mathbb{X})$ 且 $\mathbb{Y} \equiv \mathbb{X}$，那么根据定理 3.1(c)，存在 $\mathbb{Y}$ 的一个 $\mathbb{I}$分解 $\mathbb{Y} = \sum_{\mathbb{I}} \mathbb{Y}_i$；因此 $\mathbb{I} \in \mathcal{I}(\mathbb{Y})$ 且 $\mathbb{Y}$ 是 FLD_1-偏序。所以， $\mathcal{I}(\mathbb{X}) \subset \mathcal{I}(\mathbb{Y})$，并且类似地， $\mathcal{I}(\mathbb{Y}) \subset \mathcal{I}(\mathbb{X})$。因此 (a) 成立，(b) 由 (a) 得出。□

根据定理 3.2(b)，偏序的完备理论 $\mathcal{T}$当且仅当某个 $\mathcal{T}$模型是 FLD_1-偏序（当且仅当 $\mathcal{T}$的所有模型都是 FLD_1-偏序）时，将被称为 FLD_1-理论。于是，根据定理 3.2(a)，我们可以合法地定义 $\mathcal{I}(\mathcal{T}) := \mathcal{I}(\mathbb{X})$，其中 $\mathbb{X}$是 $\mathcal{T}$的某个（任意）模型。

此外，如果 $\mathbb{X}$ 是一个 FLD_1-偏序， $\mathbb{I} \in \mathcal{I}(\mathbb{X})$ 且 $\mathbb{X} = \sum_{\mathbb{I}} \mathbb{X}_i$ 是 $\mathbb{X}$的 FLD_1 分解，那么可能存在更多这样的 $\mathbb{I}$-分解 $\mathbb{X} = \sum_{\mathbb{I}} \mathbb{X}'_i$，其中 $\mathbb{X}'_i \not\cong \mathbb{X}_i$ 对于某些 i-（例如，对于线性序）。因此，令 $\mathcal{D}_{\mathbb{I}}(\mathbb{X})$ 表示 $\mathbb{X}$ 的所有 $\mathbb{I}$-分解所成的类， $\mathcal{D}(\mathbb{X}) := \bigcup_{\mathbb{I}\in\mathcal{I}(\mathbb{X})} \mathcal{D}_{\mathbb{I}}(\mathbb{X})$ 表示 $\mathbb{X}$ 的所有 FLD_1-分解所成的类，而 $\mathcal{D}(\mathrm{Th}(\mathbb{X})) = \bigcup_{\mathbb{Y}\equiv\mathbb{X}} \mathcal{D}(\mathbb{Y})$ 表示 $\mathrm{Th}(\mathbb{X})$中模型的所有 FLD_1-分解所成的类。因此，对于一个 FLD_1-理论 $\mathcal{T}$，我们定义该类

$$\mathcal{D}(\mathcal{T}) := \bigcup_{\mathbb{X}\models\mathcal{T}} \bigcup_{\mathbb{I}\in\mathcal{I}(\mathcal{T})} \mathcal{D}_{\mathbb{I}}(\mathbb{X}). \tag{23}$$

定理 3.3 若 $\mathcal{T}$是 FLD_1-理论，则以下条件等价

(a) $I(\mathcal{T}) = 1$，即 $\mathcal{T}$是 ω-范畴的；*(b)* 对每个 $\sum_{\mathbb{I}} \mathbb{X}_i \in \mathcal{D}(\mathcal{T})$，对所有 $i \in I$，都有 $I(\mathbb{X}_i) = 1$；*(c)* 存在 $\sum_{\mathbb{I}} \mathbb{X}_i \in \mathcal{D}(\mathcal{T})$，使得对所有 $i \in I$，都有 $I(\mathbb{X}_i) = 1$。

证明。 此外，设 $\mathcal{T}$是一个有无限模型的理论（否则，该命题显然成立）。

(a) $\Rightarrow$ (b)。设 $I(\mathcal{T}) = 1$，设 $\sum_{\mathbb{I}} \mathbb{X}_i \in \mathcal{D}(\mathcal{T})$，其中 $\mathbb{X} := \sum_{\mathbb{I}} \mathbb{X}_i$可数，设 $r_i :=$ 最大值$\mathbb{X}_i$，对于 $i \in I$，且 $\bar{r} := \langle r_i : i \in I\rangle$。我们固定 $i_0 \in I$并证明 $I(\mathbb{X}_{i_0}) = 1$；若$|X_{i_0}| < \omega$，则结论成立；因此设$|X_{i_0}| = \omega$。由于 $\bar{r} \in X^I$且 $\mathbb{X}$是 ω-范畴的， $\mathbb{X}$到 $L_{\bar{c}} := \langle \leq, \langle c_i : i \in I\rangle\rangle$的扩张 $(\mathbb{X}, \bar{r})$ 是 ω-范畴的（见 [2], 第 346 页）。定义 $Y := X_{i_0} \cup \{r_i : i \in I\}$ 和 $\mathbb{Y} := \langle Y, \leq^{\mathbb{X}}\restriction Y\rangle$，得到 $(\mathbb{X}, \bar{r})$ 的一个子结构 $(\mathbb{Y}, \bar{r})$。由于 $\mathbb{Y} = \sum_{\mathbb{I}} \mathbb{Y}_i$，其中 $\mathbb{Y}_{i_0} = \mathbb{X}_{i_0}$且 $Y_i = \{r_i\}$，对于 $i \neq i_0$，由定理 3.1(a) 得 $X_{i_0} = D_{\varphi_{i_0}(\bar{r},v)}\mathbb{X}$；因此，对于 $L_{\bar{c}}$-公式 $\psi_{i_0}(v) := \varphi_{i_0}(\bar{c}, v) \vee \bigvee_{i\in I\setminus\{i_0\}} v = c_i$，有 $Y = D_{\psi_{i_0}(v),(\mathbb{X},\bar{r})}$。于是， $L_{\bar{c}}$-结构 $(\mathbb{Y}, \bar{r}) = (\mathbb{X}, \bar{r})\restriction D_{\psi_{i_0}(v),(\mathbb{X},\bar{r})}$ 是将 $L_{\bar{c}}$-结构 $(\mathbb{X}, \bar{r})$ 相对化到 $\emptyset$-可定义集 $D_{\psi_{i_0}(v),(\mathbb{X},\bar{r})}$ 所得的结构，而 $\mathbb{Y} := \langle X_{i_0} \cup \{r_i : i \in I\}, \leq^{\mathbb{X}}\restriction Y\rangle$ 是 $(\mathbb{X}, \bar{r})$ 到 $L_b = \langle\leq\rangle$的相应相对化约化。因此，由于结构 $(\mathbb{X}, \bar{r})$ 是 ω-范畴的， $\mathbb{Y}$也 ω-范畴（见 [2], 第 346 页）。

为了证明偏序 $\mathbb{X}_{i_0}$是 ω-范畴的，我们将事实 2.4(a)应用于 $\mathbb{Y}$ 及其划分$\{Y_i : i \in I\} = \{X_{i_0}\} \cup \{\{r_i\} : i \in I \setminus \{i_0\}\}$。因此，我们必须证明，对于每个 $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Y})$以及来自 $f[Y_i] \cap Y_i \neq \emptyset$的每个$i \in I$，都有 $f[Y_i] = Y_i$。首先，若 $i \in I \setminus \{i_0\}$且 $f[\{r_i\}] \cap \{r_i\} \neq \emptyset$，则$f(r_i) = r_i$，结论成立；因此还需考虑 i_0。由于 $|X_{i_0}| = \omega$且 $|Y \setminus X_{i_0}| < \omega$，我们总有 $f[X_{i_0}] \cap X_{i_0} \neq \emptyset$；因此必须证明，对于每个 $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Y})$，都有$f[X_{i_0}] = X_{i_0}$。首先我们证明

$$f(r_{i_0}) = r_{i_0}. \tag{24}$$

假设 $f(r_{i_0}) \neq r_{i_0}$，我们有三种情况（回顾一下，$\mathbb{Y} = \sum_{\mathbb{I}} \mathbb{Y}_i$）。首先，若 $f(r_{i_0}) < r_{i_0}$，那么由于 $f^{-1} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Y})$ 也成立，我们将有 $r_{i_0} < f^{-1}(r_{i_0}) < f^{-1}(f^{-1}(r_{i_0})) < \ldots$，因此$|(r_{i_0}, \cdot)_{\mathbb{Y}}| = \omega$，这不成立，因为 $X_{i_0} \subset (\cdot, r_{i_0}]_{\mathbb{Y}}$。其次，若 $f(r_{i_0}) > r_{i_0}$，我们将有 $r_{i_0} <f(r_{i_0}) < f(f(r_{i_0})) < \ldots$，这基于同样的理由不成立。第三，若 $f(r_{i_0}) \not\parallel r_{i_0}$，那么由于$X_{i_0} \subset (\cdot, r_{i_0}]_{\mathbb{Y}}$，对于某个 $i \neq i_0$，我们将有 $f(r_{i_0}) = r_i$，因此 $r_i \not\parallel r_{i_0}$。所以，由于 $\mathbb{Y} = \sum_{\mathbb{I}} \mathbb{Y}_i$，对所有 $x \in X_{i_0}$，我们将有 $x \not\parallel r_i$。但取 $x \in f[X_{i_0}] \cap X_{i_0}$，由于 $f[X_{i_0}] \subset (\cdot, r_i]_{\mathbb{Y}}$，我们将有 $x \leq r_i$，这就产生了矛盾。因此，(24) 成立。

接下来我们证明 $f[\{r_i : i \neq i_0\}] = \{r_i : i \neq i_0\}$，这将推出 $f[X_{i_0}] = X_{i_0}$。反之，假设存在 $i \neq i_0$ 使得 $f(r_i) \in X_{i_0}$；因此，由 (24)， $f(r_i) \in X_{i_0} \setminus \{r_{i_0}\}$。我们再次分三种情况。首先，若 $r_i < r_{i_0}$，那么，由于 $\mathbb{Y} = \sum_{\mathbb{I}} \mathbb{Y}_i$ 且因此 $r_i < X_{i_0}$，我们会得到 $r_i < f(r_i)$，进而得到 $r_i > f^{-1}(r_i) > f^{-1}(f^{-1}(r_i)) > \ldots$，进而得到 $|(\cdot, r_i)_{\mathbb{Y}}| = \omega$，

这不成立，因为 $X_{i_0} \subset (r_i,\ \cdot)_{\mathbb{X}}$。其次，若 $r_i > r_{i_0}$，我们会得到 $f(r_i) < r_i$，进而得到$r_i < f^{-1}(r_i) < f^{-1}(f^{-1}(r_i)) < \ldots$；因此 $|(r_i,\ \cdot)_{\mathbb{Y}}| = \omega$，这不成立，因为 $X_{i_0} \subset (\cdot,\ r_i)_{\mathbb{X}}$。第三，若 $r_i \not\parallel r_{i_0}$，那么我们会得到 $f(r_i) \not\parallel f(r_{i_0}) = r_{i_0}$，这不成立，因为 $f(r_i) \in X_{i_0}$，进而 $f(r_i) \leq r_{i_0}$。因此 $f[X_{i_0}] = X_{i_0}$，并且根据事实 2.4(a)，偏序 $\mathbb{X}_{i_0}$ 是 ω-范畴的。

显然，(b) 蕴含 (c)，并且根据事实 2.5(d)，(c) 蕴含 (a)。 □

定理 3.4 如果 $\mathcal{T}$ 是一个 FLD_1-理论，$\sum_{\mathbb{I}} \mathbb{X}_i \in \mathcal{D}(\mathcal{T})$ $I(\mathbb{X}_i) > \omega$，对于某个 $i \in I$，则 **T**

$$I(\mathcal{T}) \geq \prod_{i\in I} I(\mathbb{X}_i) \in \{\omega_1, \mathfrak{c}\}.$$

证明。设 $\mathbb{X} := \sum_{\mathbb{I}} \mathbb{X}_i \in \mathcal{D}(\mathcal{T})$，其中 $\mathbb{I} = \langle n,\ \leq_{\mathbb{I}}\rangle$ 并且设 $I(\mathbb{X}_{i_0}) = \kappa > \omega$。令 $r_i =$为 $\mathbb{X}_i$ 的最大值，对于$i < n$，并令 $\bar{r} := \langle r_0,\ \ldots\ldots,\ r_{n-1}\rangle$。于是 $|\mathbb{X}| \geq \omega$，根据洛文海姆–斯科伦定理和事实 2.5(b)，我们可以假设对于所有 $i < n$都有 $|X_i| \leq \omega$。令 $\mathbb{Z}^\alpha$、 $\alpha < \kappa$为 $\mathrm{Th}(\mathbb{X}_{i_0})$ 的两两不同构的可数模型，不妨设对于每个 $\alpha < \kappa$ 都有 $\max(\mathbb{Z}^\alpha) = r_{i_0}$，并且对于所有$i < n$都有 $Z^\alpha \cap X_i = \emptyset$。对于 $\alpha < \kappa$，令 $\mathbb{Y}^\alpha := \sum_{\mathbb{I}} \mathbb{Y}^\alpha_i$，其中对于 $i < n$ 我们定义

$$\mathbb{Y}^\alpha_i := \begin{cases} \mathbb{Z}^\alpha, & \text{if } i = i_0, \\ \mathbb{X}_i, & \text{if } i \neq i_0. \end{cases} \tag{25}$$

于是，由事实 2.5(c)，我们有 $\mathbb{Y}^\alpha \in$ 模型类$(\mathcal{T},\ \omega)$；由定理 3.1(a) 和 (25)，我们有 $Z^\alpha = \mathbb{Y}^\alpha_{i_0} = D_{\varphi_{i_0}(\bar{r},\ v)\,\mathbb{Y}^\alpha}$，因此，$\mathbb{Z}^\alpha = \mathbb{Y}^\alpha \restriction D_{\varphi_{i_0}(\bar{r},\ v)\,\mathbb{Y}^\alpha}$。

因此，对每个 $\alpha < \kappa$，$\mathrm{it}(\mathbb{Z}^\alpha) \in w_{\varphi_{i_0}(\bar{w},\ v)}(\mathbb{Y}^\alpha) := \{\mathrm{it}(\mathbb{Y}^\alpha \restriction D_{\varphi_{i_0}(\bar{a},\ v)\,\mathbb{Y}^\alpha}) :\ \bar{a} \in (Y^\alpha)^n\}$，因此，

$$\{\mathrm{it}(\mathbb{Z}^\alpha) : \alpha < \kappa\} \subset \bigcup_{\alpha<\kappa} w_{\varphi_{i_0}(\bar{w},v)}(\mathbb{Y}^\alpha). \tag{26}$$

对每个 $\alpha < \kappa$ $|Y^\alpha| = \omega$ $|w_{\varphi_{i_0}\,\bar{w}\,v}\ \mathbb{Y}^\alpha\ | \leq \omega$ $|\{\ \mathbb{Z}^\alpha\ \ \alpha < \kappa\}| =$，我们有.....，因此，$(\cdot\ )$ $\kappa > \omega$ 26 κ $\bar{w}\ v$ $\mathbb{Y}^\alpha$ $\bar{w}\ v$ $\mathbb{Y}^{\alpha_\xi}$ $\xi < \kappa$ ()。所以，由于 it( ) : ，根据 ( )，存在 -多个不同的集合 $w_{\varphi_{i_0}(\cdot\ ,\ )}$( )，例如 $w_{\varphi_{i_0}(\cdot\ ,\ )}$( )，它们由事实 2.3 推出 $\mathbb{Y}^{\alpha_\xi} \not\cong \mathbb{Y}^{\alpha_\zeta}$，其中 $\xi \neq \zeta$。因此，$\mathbb{Y}^{\alpha_\xi}$、$\xi < \kappa$ 是 $\mathcal{T}$ 的非同构模型，因此 $I(\mathcal{T}) \geq \kappa$。现在，$\prod_{i\in I} I(\mathbb{X}_i) =$ 最大值$\{I(\mathbb{X}_i) :\ i \in I\} = I(\mathbb{X}_{i_1}) > \omega$，对某个 $i_1 \in I$，由 Morley 定理可得 $I(\mathbb{X}_{i_1}) \in \{\omega_1, \mathfrak{c}\}$，并且如上所述，$I(\mathcal{T}) \geq I(\mathbb{X}_{i_1})$。□

定理 3.5 若 $\mathcal{T}$ 是一个具有原子模型的 FLD_1理论，$\mathbb{X}^{\mathrm{at}}$，则对于每个分解 $\sum_{\mathbb{I}} \mathbb{X}^{\mathrm{at}}_i \in \mathcal{D}(\mathbb{X}^{\mathrm{at}})$，我们有

$$I(\mathcal{T}) \leq \prod_{i\in I} I(\mathbb{X}^{\mathrm{at}}_i).$$

证明。设 $\mathbb{X}^{\mathrm{at}} = \sum_{\mathbb{I}} \mathbb{X}^{\mathrm{at}}_i$，其中 $\mathbb{I} = \langle n,\ \leq_{\mathbb{I}}\rangle$，令 $r^{\mathrm{at}}_i :=$为 $\mathbb{X}^{\mathrm{at}}_i$的最大值，其中 $i < n$，且 $\bar{r}^{\mathrm{at}} := \langle r^{\mathrm{at}}_0,\ \ldots,\ r^{\mathrm{at}}_{n-1}\rangle$。我们首先证明，对于每个模型 $\mathbb{Y}$，若其属于 $\mathcal{T}$，则有

$$\mathbb{X}^{\mathrm{at}} \preccurlyeq \mathbb{Y} \ \Rightarrow\ \mathbb{Y} = \sum_{\mathbb{I}} \mathbb{Y}_i,\ \text{where } \mathbb{X}^{\mathrm{at}}_i \preccurlyeq \mathbb{Y}_i,\ \text{for each } i < n. \tag{27}$$

令 $\mathbb{X}^{\mathrm{at}} \preccurlyeq \mathbb{Y}$。由定理 3.1(a)，我们有 $X^{\mathrm{at}}_i := D_{\varphi_i(\bar{r}^{\mathrm{at}},\ v)\,\mathbb{X}^{\mathrm{at}}}$，其中 $i < n$，且$X^{\mathrm{at}}/D_{\varepsilon(\bar{r}^{\mathrm{at}},u,v)\,\mathbb{X}^{\mathrm{at}}} = \{X^{\mathrm{at}}_i :\ i < n\}$。因此，我们有 $\mathbb{X}^{\mathrm{at}} \models \varphi_p[\bar{r}^{\mathrm{at}}]$，其中 $\varphi_p(\bar{w})$是这样一个公式：$\{D_{\varphi_i(\bar{w},\ v)\,\cdot} :\ i < n\}$ 是论域的一个划分，并由（17）定义。因此，由于 $\mathbb{X}^{\mathrm{at}} \preccurlyeq \mathbb{Y}$，我们有$\mathbb{Y} \models \varphi_p[\bar{r}^{\mathrm{at}}]$；并且，定义 $Y_i := D_{\varphi_i(\bar{r}^{\mathrm{at}},\ v)\,\mathbb{Y}}$，其中 $i < n$，我们得到集合 Y 的一个划分 $\{Y_i :\ i < n\}$，并且

$$Y/D_{\varepsilon(\bar{r}^{\mathrm{at}},u,v),\mathbb{Y}} = \{Y_i : i < n\} = \{D_{\varphi_i(\bar{r}^{\mathrm{at}},v),\mathbb{Y}} : i < n\}. \tag{28}$$

由于 $\mathbb{X}^{\mathrm{at}} = \sum_{\mathbb{I}} \mathbb{X}^{\mathrm{at}}_i$我们有 $\mathbb{X}^{\mathrm{at}} \models \varphi_m[\bar{r}^{\mathrm{at}}]$，其中 $\varphi_m(\bar{w})$是描述不同加项之间次序的公式，由（18）定义。因此 $\mathbb{Y} \models \varphi_m[\bar{r}^{\mathrm{at}}]$，因为 $Y_i := D_{\varphi_i\,(\bar{r}^{\mathrm{at}},\ v)\ \mathbb{Y}}$，对于 $i < n$，由（18）可得

$$\forall i, j < n\ \ (i \neq j \Rightarrow \forall y \in Y_i\ \ \forall y' \in Y_j\ \ (y \leq_{\mathbb{Y}} y' \Leftrightarrow i <_{\mathbb{I}} j)), \tag{29}$$

并且，如定理 3.1(c)的证明中那样，我们证明 $\mathbb{Y} = \sum_{\mathbb{I}} \mathbb{Y}_i$。对于 $i < n$，我们有 $r_i^{\mathrm{at}} =$ 最大值 $\mathbb{X}_i^{\mathrm{at}}$，因此 $\mathbb{X}^{\mathrm{at}} \models \varphi_{r_i}[\bar{r}^{\mathrm{at}}]$，其中 $\varphi_{r_i}(\bar{w})$是由（19）定义的公式。于是我们有 $\mathbb{Y} \models \varphi_{r_i}[\bar{r}^{\mathrm{at}}]$，因此$r_i^{\mathrm{at}}$ =最大值 $D_{\varphi_i(\bar{r}^{\mathrm{at}},v)}\,\mathbb{Y}$ =最大值 Y_i。最后，对于 $i < n$，我们证明$\mathbb{X}_i^{\mathrm{at}} \preccurlyeq \mathbb{Y}_i$。由于$X_i^{\mathrm{at}}$:= $D_{\varphi_i(\bar{r}^{\mathrm{at}},v)}\,\mathbb{X}^{\mathrm{at}}$， Y_i: $= D_{\varphi_i(\bar{r}^{\mathrm{at}},v)}\,\mathbb{Y}$ 且 $\mathbb{X}^{\mathrm{at}} \preccurlyeq \mathbb{Y}$，由事实 2.2可得$\mathbb{X}_i^{\mathrm{at}} = \mathbb{X}^{\mathrm{at}} \restriction D_{\varphi_i(\bar{r}^{\mathrm{at}},v)}\,\mathbb{X}^{\mathrm{at}} \preccurlyeq \mathbb{Y} \restriction D_{\varphi_i(\bar{r}^{\mathrm{at}},v)}\,\mathbb{Y} = \mathbb{Y}_i$，从而（27）得证。

显然，对于 $i < n$，我们有

$$\kappa_i := I(\mathbb{X}_i^{\mathrm{at}}) \leq \kappa := \prod_{i<n} I(\mathbb{X}_i^{\mathrm{at}}); \tag{30}$$

令 $\mathrm{Mod}(\mathrm{Th}(\mathbb{X}_i^{\mathrm{at}})\ \omega)/{\cong} = \{[\mathbb{Z}_i^j] \colon j < \kappa_i\}$ 为一个枚举。我们证明

$$\mathrm{Mod}(\mathcal{T},\omega)/{\cong} = \{[\textstyle\sum_{\mathbb{I}} \mathbb{Z}_i^{j_i}] : \langle j_0, \ldots, j_{n-1}\rangle \in \prod_{i<n} \kappa_i\}. \tag{31}$$

若 $[\mathbb{Y}] \in \mathrm{Mod}(\mathcal{T},\ \omega)/{\cong}$，则不失一般性，假设 $\mathbb{X}^{\mathrm{at}} \preccurlyeq \mathbb{Y}$，由 (27) 可得 $\mathbb{Y} = \sum_{\mathbb{I}} \mathbb{Y}_i$，其中对于 $i < n$，有 $\mathbb{X}_i^{\mathrm{at}} \preccurlyeq \mathbb{Y}_i$，因此，对于某个 $j_i < \kappa_i$，有 $\mathbb{Y}_i \cong \mathbb{Z}_i^{j_i}$。由事实 2.5(a) 可得 $\mathbb{Y} \cong \sum_{\mathbb{I}} \mathbb{Z}_i^{j_i}$，也就是说 $[\mathbb{Y}] = [\sum_{\mathbb{I}} \mathbb{Z}_i^{j_i}]$。反过来，若 $\langle j_0, \ldots\ldots, j_{n-1}\rangle \in \prod_{i<n} \kappa_i$，则对于 $i < n$，有$\mathbb{Z}_i^{j_i} \equiv \mathbb{X}_i^{\mathrm{at}}$，并且由事实 2.5(c) 可得 $\sum_{\mathbb{I}} \mathbb{Z}_i^{j_i} \equiv \sum_{\mathbb{I}} \mathbb{X}_i^{\mathrm{at}} = \mathbb{X}^{\mathrm{at}}$。因此 $[\sum_{\mathbb{I}} \mathbb{Z}_i^{j_i}] \in \mathrm{Mod}(\mathcal{T},\ \omega)/{\cong}$，且 (31) 成立。现在，由 (31) 和 (30) 可得 $I(\mathcal{T}) \leq \prod_{i<n} \kappa_i = \prod_{i\in I} I(\mathbb{X}_i^{\mathrm{at}})$。□

定理 3.6 如果 $\mathcal{T}$ 是一个 *FLD*$_1$ 理论，那么有以下几种情况：
(I) 存在 $\sum_{\mathbb{I}} \mathbb{X}_i \in \mathcal{D}(\mathcal{T})$，使得 $I(\mathbb{X}_i) = \mathfrak{c}$，对于某个 $i \in I$，或者 $\mathcal{T}$ 是大的；那么 $I(\mathcal{T}) = \mathfrak{c}$；*(II)* 存在 $\sum_{\mathbb{I}} \mathbb{X}_i \in \mathcal{D}(\mathcal{T})$，使得 $I(\mathbb{X}_i) = 1$，对于所有 $i \in I$；那么 $I(\mathcal{T}) = 1$；
(III) 否则，$\mathcal{T}$ 是小的，且有一个原子模型，$\mathbb{X}^{\mathrm{at}}$，

$$\forall \textstyle\sum_{\mathbb{I}} \mathbb{X}_i \in \mathcal{D}(\mathcal{T})\ \Big((\forall i \in I\ \ I(\mathbb{X}_i) < \mathfrak{c}) \wedge (\exists i \in I\ \ I(\mathbb{X}_i) > 1)\Big), \tag{32}$$

并且有以下子情况：
(III.1) 存在 $\sum_{\mathbb{I}} \mathbb{X}_i^{\mathrm{at}} \in \mathcal{D}(\mathbb{X}^{\mathrm{at}})$，使得 $\mathbb{X}_i^{\mathrm{at}}$对每个 $i \in I$ 都满足 *Vaught* 猜想，那么 $3 \leq I(\mathcal{T}) \leq \omega$；
(III.2) 对于每个 $\sum_{\mathbb{I}} \mathbb{X}_i^{\mathrm{at}} \in \mathcal{D}(\mathbb{X}^{\mathrm{at}})$，都存在 $i \in I$，使得 $I(\mathbb{X}_i^{\mathrm{at}}) = \omega_1 < \mathfrak{c}$；那么 $I(\mathcal{T}) = \omega_1 < \mathfrak{c}$。

证明。如果 (I) 成立且 $\mathcal{T}$很大，那么显然，$I(\mathcal{T}) = \mathfrak{c}$。否则，根据定理 3.4，我们有 $I(\mathcal{T}) \geq \mathfrak{c}$，因此再次有 $I(\mathcal{T}) = \mathfrak{c}$。如果 (II) 成立，那么根据定理 3.3，我们有 $I(\mathcal{T}) = 1$。

在 (III.1) 的假设下，由 (32) 可得，对于所有 $i \in I$，$I(\mathbb{X}_i^{\mathrm{at}}) \leq \omega$；因此，根据定理 3.5，$I(\mathcal{T}) \leq \prod_{i\in I} I(\mathbb{X}_i^{\mathrm{at}}) \leq \omega$。再次由 (32)，存在 $i \in I$ 使得 $I(\mathbb{X}_i^{\mathrm{at}}) > 1$，并且根据定理 3.3，$I(\mathcal{T}) > 1$；于是，根据 Vaught 定理，$I(\mathcal{T}) \geq 3$。

在子情形 (III.2) 中，对于每个分解 $\sum_{\mathbb{I}} \mathbb{X}_i^{\mathrm{at}} \in \mathcal{D}(\mathbb{X}^{\mathrm{at}})$，我们都有：(a) 对某个 $i \in I$，$I(\mathbb{X}_i^{\mathrm{at}}) = \omega_1 < \mathfrak{c}$；(b) 对所有 $i \in I$，$I(\mathbb{X}_i^{\mathrm{at}}) \leq \omega_1$（根据 (32) 和 Morley 定理）。因此，根据定理 3.5 和定理 3.4，$I(\mathcal{T}) \leq \prod_{i\in I} I(\mathbb{X}_i^{\mathrm{at}}) = \omega_1 \leq I(\mathcal{T})$，这给出 $I(\mathcal{T}) = \omega_1 < \mathfrak{c}$。□

如果 $\mathcal{T}$ 是 FLD_1 理论，那么称分解 $\sum_{\mathbb{I}} \mathbb{X}_i \in \mathcal{D}(\mathcal{T})$ 为*VC* 分解（分别称为*Vaught* 猜想$^\sharp$-分解），当且仅当 $\mathbb{X}_i$ 对每个 $i \in I$ 都满足 VC（分别满足 VC$^\sharp$）。

定理 3.7 一个 *FLD*$_1$ 理论 $\mathcal{T}$ 满足 *Vaught* 猜想，当且仅当 $\mathcal{T}$ 是大模型，或者其原子模型具有 *Vaught* 猜想分解。

证明。如果 $I(\mathcal{T}) = \omega_1 < \mathfrak{c}$，那么我们得到定理 3.6 中的子情形（III.2）；因此 $\mathcal{T}$是小的，并且 $\mathbb{X}^{\mathrm{at}}$ 没有 Vaught 猜想分解。反过来，设 $\mathcal{T}$是一个小理论，且 $\sum_{\mathbb{I}} \mathbb{X}_i^{\mathrm{at}}$是 $\mathbb{X}^{\mathrm{at}}$的 Vaught 猜想分解。如果 $\prod_{i<n} I(\mathbb{X}_i^{\mathrm{at}}) = \mathfrak{c}$，那么我们得到定理 3.6 中的情形（I），并且 $I(\mathcal{T}) = \mathfrak{c}$。否则，我们有$\prod_{i<n} I(\mathbb{X}_i^{\mathrm{at}}) \leq \omega$，由定理 3.5，$I(\mathcal{T}) \leq \omega$。□

注 3.8 1. 以下命题等价（在 ZFC 中）：(a) Vaught 猜想，(b) 关于偏序完全理论的 Vaught 猜想，(c) 关于 FLD_1-理论的 Vaught 猜想。也就是说，(a) $\Leftrightarrow$(b) 是众所周知的（见 [2], 第 231 页），而 (b)$\Rightarrow$ (c) 显然成立。如果 (b) 不成立，$I(\mathbb{X}) = \omega_1 < \mathfrak{c}$，并且 $\mathbb{Y}$ 是通过给 $\mathbb{X}$添加一个最大元得到的，那么 Th($\mathbb{Y}$) 是一个 FLD_1-理论，且 $I(\mathbb{Y}) = \omega_1 < \mathfrak{c}$，因此 (c) 不成立。

2. 如果“VC 在具有最大元的偏序的有限字典序和下保持不变”这一断言不是 ZFC 的定理，且 $\mathbb{X} = \sum_{\mathbb{I}} \mathbb{X}_i$ 是一个反例，那么根据定理 3.6，对于每个 $\sum_{\mathbb{J}} \mathbb{X}_j^{\mathrm{at}} \in \mathcal{D}(\mathbb{X}^{\mathrm{at}})$，Th($\mathbb{X}$) 都是小的，$\prod_{i\in I} I(\mathbb{X}_i) \leq \omega$ 并且 $\prod_{j\in J} I(\mathbb{X}_j^{\mathrm{at}}) = \omega_1 < \mathfrak{c}$。

4 Vaught 猜想的充分条件。对偶

关于定理 3.1(c) 中的条件 (iii)，如果存在一个分解 $\sum_{\mathbb{I}} \mathbb{X}_i \in \mathcal{D}(\mathcal{T})$ 和句子 $\tau_i^{\mathrm{vc}} \in \mathrm{Th}(\mathbb{X}_i)$（其中 $i \in I$），从而满足 Vaught 猜想，则称一个 FLD_1-理论 $\mathcal{T}$ 实际上是沃恩特的；也就是说，

$$\exists \textstyle\sum_{\mathbb{I}} \mathbb{X}_i \in \mathcal{D}(\mathcal{T})\ \ \forall i \in I\ \ \exists \tau_i^{\mathrm{vc}} \in \mathrm{Th}(\mathbb{X}_i)\ \ \forall \mathbb{Z} \models \tau_i^{\mathrm{vc}}\ \ (I(\mathbb{Z}) \leq \omega \vee I(\mathbb{Z}) = \mathfrak{c}). \tag{33}$$

定理 4.1 对于每个实际沃恩特 FLD_1-理论 $\mathcal{T}$，沃恩特猜想都成立；更准确地说，

$$I(\mathcal{T}) = \begin{cases} \mathfrak{c}, & \text{if } \exists \sum_{\mathbb{I}} \mathbb{X}_i \in \mathcal{D}(\mathcal{T})\ \exists i \in I\ I(\mathbb{X}_i) = \mathfrak{c}, \text{ or } \mathcal{T} \text{ is large}, \\ 1, & \text{if } \exists \sum_{\mathbb{I}} \mathbb{X}_i \in \mathcal{D}(\mathcal{T})\ \forall i \in I\ I(\mathbb{X}_i) = 1, \\ \in [3, \omega], & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{34}$$

证明。 由定理 3.6，我们只需证明在情形 (III) 中，必有子情形 (III.1)。也就是说，假设 $\mathbb{X}^{\mathrm{at}}$ 是 $\mathcal{T}$的一个原子模型，并且 (32) 成立，我们证明存在 $\sum_{\mathbb{I}} \mathbb{X}_i^{\mathrm{at}} \in \mathcal{D}(\mathbb{X}^{\mathrm{at}})$，使得对每个 $i \in I$，$\mathbb{X}_i^{\mathrm{at}}$都满足 Vaught 猜想。因此，由于 $\mathcal{T}$是实际沃恩特的，存在 $\sum_{\mathbb{I}} \mathbb{X}_i \in \mathcal{D}(\mathcal{T})$，其中$I = n \in \mathbb{N}$，并且对 $i < n$，有 $\tau_i^{\mathrm{vc}} \in \mathrm{Th}(\mathbb{X}_i)$，使得

$$\forall i < n\ \ \forall \mathbb{Z} \models \tau_i^{\mathrm{vc}}\ \ (I(\mathbb{Z}) \leq \omega\ \vee\ I(\mathbb{Z}) = \mathfrak{c}). \tag{35}$$

由定理 3.1(c)，存在 $\bar{r}^{\mathrm{at}} := \langle r_0^{\mathrm{at}}, \dots, r_{n-1}^{\mathrm{at}} \rangle \in (X^{\mathrm{at}})^n$，使得定义 $X_i^{\mathrm{at}} := D_{\varphi_i(\bar{r}^{\mathrm{at}}, v)\ \mathbb{X}^{\mathrm{at}}}$，对$i < n$，我们有：(i) $\{X_i^{\mathrm{at}}\colon\ i < n\}$ 是集合 X^{at} 的一个划分，并且$X^{\mathrm{at}}/D_{\varepsilon(\bar{r}^{\mathrm{at}}, u, v)\ \mathbb{X}^{\mathrm{at}}} = \{X_i^{\mathrm{at}}\colon\ i < n\}$；(ii) $\mathbb{X}^{\mathrm{at}} = \sum_{\mathbb{I}} \mathbb{X}_i^{\mathrm{at}}$，且对 $i < n$，$r_i^{\mathrm{at}} =$的最大值为$\mathbb{X}_i^{\mathrm{at}}$；(iii) 对 $i < n$，有 $\mathbb{X}_i^{\mathrm{at}} \models \tau_i^{\mathrm{vc}}$。现在，由 (ii) 可得$\sum_{\mathbb{I}} \mathbb{X}_i^{\mathrm{at}} \in \mathcal{D}(\mathbb{X}^{\mathrm{at}})$，由 (iii)、(35) 和 (32) 可得，对所有 $i < n$，有 $I(\mathbb{X}_i^{\mathrm{at}}) \leq \omega$。□

定理 4.2 如果 $\mathcal{T}$ 是一个具有 Vaught 猜想$^\sharp$ 分解的 FLD_1 理论，那么 Vaught 猜想$^\sharp$ 对 $\mathcal{T}$成立。

证明。 如果 $\sum_{\mathbb{I}} \mathbb{X}_i \in \mathcal{D}(\mathcal{T})$ 是一个 Vaught 猜想$^\sharp$ 分解，那么对所有 $i \in I$，都有 $I(\mathbb{X}_i) \in \{1, \mathfrak{c}\}$。因此，在定理 3.6 中，我们处于情形（I）或情形（II），由此得到 $I(\mathcal{T}) \in \{1, \mathfrak{c}\}$。□

定理 3.1–4.2 的对偶 对偶地，我们定义允许带零的有限字典序分解的偏序，即 FLD_0-偏序（在分解 $\mathbb{X} = \sum_{\mathbb{I}} \mathbb{X}_i$ 中，我们要求对每个 $i \in I$，$\min \mathbb{X}_i$ 存在）。于是 $\mathcal{I}(\mathbb{X})\colon = \{\mathbb{I} \in \mathcal{C}^{\mathrm{fin}}\colon$ 存在一个 FLD_0 分解 $\mathbb{X} = \sum_{\mathbb{I}} \mathbb{X}_i\}$；偏序 $\mathcal{T}$的完备理论称为 FLD_0-理论，当且仅当其某个（等价地，每个）模型 $\mathcal{T}$ 是一个 FLD_0-偏序；并定义 $\mathcal{I}(\mathcal{T})\colon = \mathcal{I}(\mathbb{X})$，其中 $\mathbb{X}$ 是 $\mathcal{T}$的某个（任意）模型。最后，$\mathcal{D}(\mathcal{T})$是由（23）定义的 $\mathcal{T}$的模型的所有 FLD_0-分解所成的类，而 $\mathcal{T}$是一个实际 *Vaught* 的FLD_0-理论，当且仅当（33）成立。因此，在定理 3.1–4.2 中用 FLD_0 代替 FLD_1，即可得到它们的对偶形式。我们不再逐一列出。

满足 Vaught 猜想的 5 个闭包

设 $\mathcal{C}$ 是一个对偏序在 $\cong$下闭的类，并设 $\langle\mathcal{C}\rangle_\Sigma$ 是包含$\mathcal{C}$ 且在同构和有限字典序和下闭的偏序的最小类。[4] 为了描述 $\langle\mathcal{C}\rangle_\Sigma$，我们首先证明，字典序和的字典序和仍然是字典序和。

事实 5。1 如果 $\mathbb{I}$、 $\mathbb{J}_i$、 $i\in I$ 以及 $\mathbb{X}_j$、 $j\in\bigcup_{i\in I}J_i$ 是定义域两两不交的偏序，则 *en*

$$\sum_{\mathbb{I}}\sum_{\mathbb{J}_i}\mathbb{X}_j=\sum_{\sum_{\mathbb{I}}\mathbb{J}_i}\mathbb{X}_j. \tag{36}$$

证明。 令 $\mathbb{I}=\langle I、\ \leq_{\mathbb{I}}\rangle$、 $\mathbb{J}_i=\langle J_i、\ \leq_{\mathbb{J}_i}\rangle$，其中 $i\in I$、 $\mathbb{X}_j=\langle X_j、\ \leq_{\mathbb{X}_j}\rangle$，其中 $j\in\bigcup_{i\in I}J_i$，以及 $\mathbb{J}=\sum_{\mathbb{I}}\mathbb{J}_i=\langle J、\ \leq_{\mathbb{J}}\rangle$。显然， $J=\bigcup_{i\in I}J_i$和（36）中的偏序集具有相同的论域: $X=\bigcup_{j\in J}X_i$。令$\sum_{\mathbb{I}}\sum_{\mathbb{J}_i}\mathbb{X}_j=\langle X、\ \leq\rangle$、 $\sum_{\mathbb{J}}\mathbb{X}_j=\langle X、\ \leq'\rangle$ 以及 x、 $y\in X$。

假设 $x\leq y$，我们证明 $x\leq' y$。首先，令 $x,y\in\bigcup_{j\in J_i}\mathbb{X}_j$，其中某个 $i\in I$，且$x\leq_{\sum_{\mathbb{J}_i}\mathbb{X}_j}y$。若对某个 $j\in J_i$，有 $x,y\in X_j$且 $x\leq_{\mathbb{X}_j}y$，则显然 $x\leq' y$。否则，存在不同的 $j,j'\in J_i$，使得 $x\in X_j$、 $y\in X_{j'}$且 $j<_{\mathbb{J}_i}j'$；于是 $j<_{\mathbb{J}}j'$，因此再次有 $x\leq' y$。其次，若 $x\in\bigcup_{j\in J_i}X_j$且 $y\in\bigcup_{j\in J_{i'}}X_j$，其中 $i<_{\mathbb{I}}i'$，则对某个 $j\in J_i$，有 $x\in X_j$；对某个 $j'\in J_{i'}$，有 $y\in X_{j'}$，并且由于 $i<_{\mathbb{I}}i'$，我们有 $j<_{\mathbb{J}}j'$；因此，确实有 $x\leq' y$。

反过来，假设 $x\leq' y$我们证明$x\leq y$。首先，如果存在$i\in I$和$j\in J_i$使得x，$y\in X_j$以及 $x\leq_{\mathbb{X}_j}y$，那么 $x\leq_{\sum_{\mathbb{J}_i}\mathbb{X}_j}y$，因此$x\leq y$。其次，令 $x\in X_j$和 $y\in X_{j'}$，其中$j<_{\mathbb{J}}j'$。如果对于某个 $i\in I$，有 j，$j'\in J_i$，并且 $j<_{\mathbb{J}_i}j'$，那么 $x\leq_{\sum_{\mathbb{J}_i}\mathbb{X}_j}y$，因此$x\leq y$。否则，存在不同的 i，$i'\in I$使得 $j\in J_i$和$j'\in J_{i'}$。于是，由于 $j<_{\mathbb{J}}j'$，我们有 $i<_{\mathbb{I}}i'$；又由于$x\in\bigcup_{j\in J_i}X_j$和 $y\in\bigcup_{j\in J_{i'}}X_j$，我们有$x\leq y$。□

事实 5.2 如果 $\mathcal{C}$ 是一个关于同构封闭的偏序类，那么

$$\langle\mathcal{C}\rangle_\Sigma=\bigcup\{\mathrm{it}(\textstyle\sum_{\mathbb{I}}\mathbb{X}_i):\mathbb{I}\in\mathcal{C}^{\mathrm{fin}}\wedge\langle\mathbb{X}_i:i\in I\rangle\in\mathcal{C}^I\wedge\forall i,j\in I\ (i\neq j\Rightarrow X_i\cap X_j=\emptyset)\}. \tag{37}$$

证明。 令 $\mathcal{C}^*$ 表示（37）的右端。首先，对于 $\mathbb{Y}\in\mathcal{C}$，我们有 $\mathbb{Y}=\sum_1\mathbb{Y}\in\mathcal{C}^*$；因此 $\mathcal{C}\subset\mathcal{C}^*$。其次，显然 $\mathcal{C}^*$ 是 $\cong$-封闭的。第三，类 $\mathcal{C}^*$ 关于有限字典序和封闭，因为根据事实 5.1，元素 $\mathcal{C}$ 的字典序和的字典序和，是元素 $\mathcal{C}$ 的字典序和。最后，如果类 $\mathcal{C}'\supset\mathcal{C}$ 关于 $\cong$ 和有限字典序和封闭，那么显然 $\mathcal{C}^*\subset\mathcal{C}'$。 □

我们回顾一下，偏序 $\mathbb{X}$ 是（模型论意义下的）树，当且仅当（$\cdot$， $x]$ 对每个 $x\in X$ 都是线性序；而且 $\mathbb{X}$ 是一个格，当且仅当它不嵌入具有如下哈斯图的四元素偏序集 N。注意，向一个格添加最小元（或最大元）后仍然得到一个格。在 [10] Schmerl 证实了格的 Vaught 猜想，并证明格理论是有限公理化的；见 [10] 的推论 4.7。因此这些类

$$\mathcal{C}_0^{\mathrm{lo}}\subset\mathcal{C}_0^{\mathrm{tree}}\subset\mathcal{C}_0^{\mathrm{reticle}}\text{ and }\mathcal{C}^{\mathrm{ba}}$$

具有最小元的线性序、有根树、具有最小元的格以及布尔代数可由语句 $\bigwedge\mathcal{T}_{\mathrm{lo}0}$、 $\bigwedge\mathcal{T}_{\mathrm{tree}0}$、 $\bigwedge\mathcal{T}_{\mathrm{reticle}0}$和 $\bigwedge\mathcal{T}_{\mathrm{ba}}$一阶定义。

令 $\mathcal{C}_0^{\mathrm{fin}}$（分别地， $\mathcal{C}_1^{\mathrm{fin}}$）表示具有最小元（分别地，最大元）的有限偏序类。若$\mathcal{C}$ 是一个偏序类，则用 $\mathcal{C}^{-1}$ 表示相应反向序的类， $\mathbb{X}^{-1}:=\langle X,\ (\leq_{\mathbb{X}})^{-1}\rangle$，其中 $\mathbb{X}\in\mathcal{C}$。因此，$(\mathcal{C}_0^{\mathrm{tree}})^{-1}$ 是具有最大元的反向树类，$(\mathcal{C}_0^{\mathrm{fin}})^{-1}=\mathcal{C}_1^{\mathrm{fin}}$，$(\mathcal{C}_0^{\mathrm{reticle}})^{-1}=\mathcal{C}_1^{\mathrm{reticle}}$（具有最大元的格类）以及 $(\mathcal{C}^{\mathrm{ba}})^{-1}=\mathcal{C}^{\mathrm{ba}}$。

[4]若 $\mathbb{I}\in\mathcal{C}^{\mathrm{fin}}$ 且 $\langle\mathbb{Y}_i:\ \ i\in I\rangle\in\mathcal{C}^I$，则在 $\mathcal{C}$中存在 $\mathbb{X}_i\cong\mathbb{Y}_i$，对于 $i\in I$，其论域两两不交且$\sum_{\mathbb{I}}\mathbb{X}_i\in\langle\mathcal{C}\rangle_\Sigma$。根据事实 2.5(a)，取另一组代表元 $\mathbb{X}_i'\cong\mathbb{Y}_i$，我们有$\sum_{\mathbb{I}}\mathbb{X}_i'\cong\sum_{\mathbb{I}}\mathbb{X}_i$；因此，$\langle\mathcal{C}\rangle_\Sigma$ 可视为对来自 $\mathcal{C}$的序型的有限字典序和封闭。

定理 5.3 对于来自该类的每个偏序 $\sum_{\mathbb{I}}\mathbb{X}_i$ 的理论，*Vaught* 猜想（事实上是 *(34)*）成立

$$\left\langle \mathcal{C}_0^{\mathrm{fin}}\cup\mathcal{C}_0^{\mathrm{reticle}}\cup\mathcal{C}^{\mathrm{ba}}\right\rangle_{\Sigma}\cup\left\langle \mathcal{C}_1^{\mathrm{fin}}\cup\mathcal{C}_1^{\mathrm{reticle}}\cup\mathcal{C}^{\mathrm{ba}}\right\rangle_{\Sigma}.$$

特别　　地，沃恩特猜想对于有根树、布尔代数等的字典序和成立　　.

证明。令 $\mathbb{X}:=\sum_{\mathbb{I}}\mathbb{X}_i\in\langle\mathcal{C}_0^{\mathrm{fin}}\cup\mathcal{C}_0^{\mathrm{reticle}}\cup\mathcal{C}^{\mathrm{ba}}\rangle_{\Sigma\circ}$ 为了应用定理 4.1 的对偶形式，我们注意到 Th($\mathbb{X}$) 是一个 FLD_0 理论，并证明它实际上是沃恩特猜想。因此，若 $i\in I$ 且 $\mathbb{X}_i\in\mathcal{C}_0^{\mathrm{reticle}}$，也就是说，若 $\mathbb{X}_i$ 是一个有最小元的格，则 $\tau_i:=\bigwedge\mathcal{T}_{\text{格}0}$　　$\in$ Th($\mathbb{X}_i$)，并且根据 Schmerl的结果，沃恩特猜想对每个 $\mathbb{Z}\models\tau_i$都成立。若 $\mathbb{X}_i\in\mathcal{C}^{\mathrm{ba}}$，根据 Iverson [3] 的结果，同样成立；若 $\mathbb{X}_i\in\mathcal{C}_0^{\mathrm{fin}}$，则结论显然。因此 Th($\mathbb{X}$) 实际上是沃恩特猜想。对于 $\mathbb{X}\in\langle\mathcal{C}_1^{\mathrm{fin}}\cup\mathcal{C}_1^{\mathrm{reticle}}\cup\mathcal{C}^{\mathrm{ba}}\rangle_{\Sigma}$，我们有一个对偶证明。□

为了扩展事实1.3（关于非连通偏序）的结果，我们引入一种新的闭包。首先，若 $\mathbb{X}=\langle X,\leq_{\mathbb{X}}\rangle$ 是一个偏序，令 $1+\mathbb{X}$ 为从 $\mathbb{X}$ 出发，在其所有元素下方添加一个元素（例如 $x_0\notin X$）后得到的偏序（因此，$1+\mathbb{X}=\langle X\cup\{x_0\},\leq_{1+\mathbb{X}}\rangle$，其中$\leq_{1+\mathbb{X}}=\leq_{\mathbb{X}}\cup\{\langle x_0,x\rangle:x\in X\cup\{x_0\}\}$）。其次，对任意偏序 $\mathbb{X}$，定义有根 $\mathbb{X}$、$\mathbb{X}_r$如下:

$$\mathbb{X}_r=\begin{cases}\mathbb{X}, & \text{if } \min\mathbb{X}\text{ exists},\\ 1+\mathbb{X}, & \text{otherwise.}\end{cases}\tag{38}$$

第三，若 $\mathbb{I}\in\mathcal{C}^{\mathrm{fin}}$ 和 $\mathbb{X}_i$、$i\in I$是偏序，令 $\sum_{\mathbb{I}}^{r}\mathbb{X}_i:=\sum_{\mathbb{I}}(\mathbb{X}_i)_r$ 为相应的有根加项的字典序和 $\mathbb{X}_i$。现在，对于偏序的 $\cong$-闭类 $\mathcal{C}$，令 $\langle\mathcal{C}\rangle_{\Sigma^r}$为包含 $\mathcal{C}$ 且在同构和有根加项的有限字典序和下封闭的最小闭包。显然，$\langle\mathcal{C}\rangle_{\Sigma^r}=\bigcup_{n\in\omega}\mathcal{C}_n$，其中 $\mathcal{C}_0:=\mathcal{C}$，且对于 $n\in\omega$,

$$\mathcal{C}_{n+1}:=\bigcup\{\text{它}(\textstyle\sum_{\mathbb{I}}(\mathbb{X}_i)_r):\mathbb{I}\in\mathcal{C}^{\mathrm{fin}}\wedge\langle\mathbb{X}_i:i\in I\rangle\in(\bigcup_{m\leq n}\mathcal{C}_m)^I\wedge\forall\{i,j\}\in[I]^2\,(X_i)_r\cap(X_j)_r=\emptyset\}.$$

例如，对于 $n=1$, $\sum_{\mathbb{I}}(\mathbb{X}_i)_r=\sum_{\mathbb{I}}(\sum_{\mathbb{J}_i}(\mathbb{X}_i^j)_r)_r\in\mathcal{C}_2$，其中 $\mathbb{X}_i^j\in\mathcal{C}$，对于 $i\in I$ 和 $j\in J_i$。令 (39)
$\mathcal{C}^{\mathrm{VC}^\sharp}$ 为满足 Vaught 猜想$^\sharp$的所有 偏序组成的类。

定理 5.4 若 $\mathcal{C}$ 是满足 Vaught 猜想$^\sharp$的偏序的 $\cong$-闭包类，则对闭包 $\langle\mathcal{C}\rangle_{\Sigma^r}$中的每个偏序，Vaught 猜想$^\sharp$ 均成立。特别地，类 $\mathcal{C}^{\mathrm{VC}^\sharp}$ 在有根被加项的有限字典序和下封闭，也就是说 $\langle\mathcal{C}^{\mathrm{VC}^\sharp}\rangle_{\Sigma^r}=\mathcal{C}^{\mathrm{VC}^\sharp}$。

证明。通过归纳，我们证明对每个 $n\in\omega$，每个满足 Vaught 猜想$^\sharp$的偏序 $\mathbb{X}\in\mathcal{C}_n$ 都成立。对于 $n=0$, 这是我们的假设。设该命题对所有 $m\leq n$ 都成立，并设 $\mathbb{X}=\sum_{\mathbb{I}}(\mathbb{X}_i)_r\in\mathcal{C}_{n+1\circ}$ 那么，对每个 $i\in I$，偏序 $(\mathbb{X}_i)_r$ 都有一个最小元，因此，$\mathbb{X}$ 是一个 FLD_0-偏序集；由定理 3.2 的对偶，Th($\mathbb{X}$) 是一个 FLD_0-理论。由（39），对每个 $i\in I$，我们都有 $\mathbb{X}_i\in\bigcup_{m\leq n}\mathcal{C}_m$；根据归纳假设，偏序集 $\mathbb{X}_i$ 满足 Vaught 猜想$^\sharp$，因此，偏序集 $(\mathbb{X}_i)_r$ 也满足 Vaught 猜想$^\sharp$。所以，由定理 4.2 的对偶，$\mathbb{X}$ 也满足 Vaught 猜想$^\sharp$。□

定理 5.4 给出了事实1.3的以下推广。回忆一下，$\mathcal{C}^{\mathrm{lo}}$、$\mathcal{C}_0^{\mathrm{tree}}$、$_{\mathrm{fmd}}$ 和 $\mathcal{C}^{\mathrm{tree}}$ 若，Vaught 猜想$^\sharp$ 分别是满足 Vaught 猜想$^\sharp$ 的线性序类、有根 FMD 树类和初始有限树类，而 $\langle\mathcal{C}^{\mathrm{lo}}\rangle_{\dot\cup_\infty}$ 是无限多个线性序的不交并构成的类。

定理5.5 Vaught 猜想$^\sharp$ 对该类中的每个偏序理论都成立

$$\left\langle\mathcal{C}^{\mathrm{fin}}\cup\langle\mathcal{C}^{\mathrm{lo}}\rangle_{\dot\cup\Pi}\cup\langle\mathcal{C}^{\mathrm{ba}}\rangle_{\dot\cup\Pi}\cup\langle\mathcal{C}_{0,\mathrm{fmd}}^{\mathrm{tree}}\rangle_{\dot\cup\Pi}\cup\langle\mathcal{C}_{\mathrm{if},\mathrm{VC}^\sharp}^{\mathrm{tree}}\rangle_{\dot\cup\Pi}\cup\langle\mathcal{C}^{\mathrm{lo}}\rangle_{\dot\cup_\infty}\right\rangle_{\Sigma^r}.\tag{40}$$

特别地，对于有限线性序的有限字典序和、布尔代数、以根为根的*FMD*树等，Vaught 猜想$^\sharp$ 成立。

定理5.5生成了满足 Vaught 猜想$^\sharp$的一大类偏序。也就是说，若 $\mathcal{C}$ 是一个 $\cong$-闭偏序类，那么根据 [7] $\mathbb{X} \in \langle \mathcal{C} \rangle_{\cup\Pi}$ 的引理3.1，当且仅当 $\mathbb{X} = \dot{\bigcup}_{i<n} \prod_{j<m_i} \mathbb{X}_i^j$ 时，对于某个 n，$m_i \in \mathbb{N}$ 和 $\mathbb{X}_i^j \in \mathcal{C}$；因此，对于以下形式的偏序，Vaught 猜想$^\sharp$ 成立：

$$\sum_{\mathbb{I}} (\dot{\bigcup}_{j<n_i} \prod_{k<m_i^j} \mathbb{X}_i^{j,k})_r,$$

其中对每个 $i \in I$，我们有：$\mathbb{X}^j_{,\ i}{}^k \in \mathcal{C}$，其中 $\mathcal{C} \in \{\mathcal{C}^{\mathrm{lo}}, \mathcal{C}^{\mathrm{tree}}_{0,\mathrm{fmd}}, \mathcal{C}^{\mathrm{tree}}$ 若，Vaught 猜想$^\sharp$，$\mathcal{C}^{\mathrm{ba}}\}$，对所有 $j < n_i$ 和 $k < m_i^j$ 均成立。

定理5.5 和运算 $\sum^r$ 与 FLD_0-偏序集相关；以自然的方式，我们可以得到一个对偶陈述，以及与 FLD_1-偏序集相关的运算；例如，在 (38) 中，我们用 $\mathbb{X}+1$ 等代替 $1+\mathbb{X}$。

注5.6 闭包 $\langle \mathcal{C} \rangle_{\cup\Pi}$，$\langle \mathcal{C} \rangle_{\Sigma}$ 和 $\langle \mathcal{C} \rangle_{\Sigma^r}$。若 $\mathcal{C}$ 是偏序集的一个 $\cong$-闭类，那么根据 [7] 的引理3.1 和事实 5.2，其闭包 $\langle \mathcal{C} \rangle_{\cup\Pi}$ 和 $\langle \mathcal{C} \rangle_{\Sigma}$ 一步即可得到。关于闭包 $\langle \mathcal{C} \rangle_{\Sigma^r}$，情况则有所不同，并且取决于 $\mathcal{C}$。例如，根据定理 5.4，对于 $\mathcal{C} = \mathcal{C}^{\mathrm{VC}^\sharp}$，我们有 $\langle \mathcal{C} \rangle_{\Sigma^r} = \mathcal{C}$；因此，在该闭包中不会得到新的结构。若取 $\mathcal{C} = \{1\}$，更确切地说，若 $\mathcal{C}$ 是所有单元素偏序集构成的类，那么根据 (39)，$\mathcal{C}_1 := \{\sum_{\mathbb{I}} 1 : \mathbb{I} \in \mathcal{C}^{\mathrm{fin}}\} = \mathcal{C}^{\mathrm{fin}}$，并且由于 $|\sum_{\mathbb{I}} (\mathbb{X}_i)_r| < \omega$，若 $|X_i| < \omega$，对所有 $i \in I$，根据 (39) 我们有 $\langle \mathcal{C}^{\mathrm{fin}} \rangle_{\Sigma^r} = \mathcal{C}^{\mathrm{fin}}$，这意味着 $\langle \mathcal{C} \rangle_{\Sigma^r} = \mathcal{C}_1$，也就是说，$\mathcal{C}$ 的闭包在递归的第一步即可得到。

一般而言，由（39）定义的类 $\mathcal{C}_{n+1}$ 可以分两步从 $\mathcal{C}_n$ 得到：

$$\begin{aligned} \mathcal{C}'_{n+1} &= \bigcup \{\mathrm{it}(1+\mathbb{X}) : \mathbb{X} \in \bigcup_{m \le n} \mathcal{C}_m \wedge \min \mathbb{X} \text{ does not exist}\} \text{ and} \\ \mathcal{C}_{n+1} &= \mathcal{C}'_{n+1} \cup \langle \{\mathbb{X} \in \mathcal{C}'_{n+1} : \min \mathbb{X} \text{ exists}\} \rangle_{\Sigma}. \end{aligned}$$

因此，对于由（40）定义的类 $\mathcal{C}$，只要 $\mathbb{X}$ 是不止一个偏序集的不交并，或者例如 $\mathbb{X}$ 是不含最小元的线性序的直积（例如$\mathbb{Z} \times \omega$），我们就有 $1+\mathbb{X} \in \mathcal{C}'_1$；而在 $\mathcal{C}_2$ 中，我们将得到这些“有根”偏序集的所有有限字典序和。但这还不是全部；也就是说，对于某些 $\mathbb{I}$，来自 $\mathcal{C}_{n+1}$ 的偏序集 $\sum_{\mathbb{I}} (\mathbb{X}_i)_r$ 不含最小元；例如，当 $\mathbb{I}$是大小为 >1 的反链时，我们会得到新的（同构类型的）偏序集。

参考文献

[1] J. L. Bell，A. B. Slomson，《模型与超积：导论》。北荷兰出版公司，阿姆斯特丹—伦敦，1969年。[2] W. Hodges，《模型论》，《数学及其应用百科全书》第42卷，剑桥大学出版社，剑桥，1993年。[3] P. Iverson，《布尔代数理论的完全扩张的可数同构类型数》，Colloq. Math. 62, 2（1991）181–187。[4] M. S. Kurili´c，《单态理论的沃恩特猜想》，Ann. Pure Appl. Logic 170, 8（2019）910–920。[5] M. S. Kurili´c，《几乎可链理论的沃恩特猜想》，J. Symb. Log. 86, 3（2021）991–1005。[6] M. S. Kurili´c，《具有有限单态分解的理论的沃恩特猜想》，Fund. Math. 256, 2（2022）131–169。[7] M. S. Kurili´c，《某些偏序类的强 Vaught 猜想》，Ann. Pure Appl. Logic 175, 4（2024）Paper No. 103411，18页。[8] M. Pouzet，N. M. Thi´ery，《具有多项式增长的某些关系结构及其相关代数 I：轮廓的准多项式性》，Electron. J. Combin. 20, 2（2013）Paper 1，35页。[9] M. Rubin，《线性序理论》，Israel J. Math. 17（1974）392–443。[10] J. H. Schmerl，《树状结构 II：树理论中的可解释性》，Trans. Amer. Math. Soc. 266, 2（1981）629–643。[11] J. R. Steel，《关于沃恩特猜想》。Cabal 研讨会 76/77（Proc. Caltech-UCLA Logic Sem., 1976/77），第193–208页，《数学讲义》第689卷，施普林格，柏林，1978年。[12] R. L. Vaught，《完全理论的可数模型》，1961年《无穷方法》（数学基础研讨会论文集，华沙，1959年），第303–321页，培格曼，牛津；华沙国家科学出版社，华沙。