线性和半线性波动方程的时间二阶时空离散的稳定性、收敛性与几何性质

[a]Matteo Ferrari, [a]Ilaria Perugia, [a]Enrico Zampa

[a] 维也纳大学数学系，
Oskar-Morgenstern-Platz 1，1090 维也纳，奥地利

arXiv:2601.03160v1 [math.NA] 6 Jan 2026

摘要

我们通过建立时间二阶时空离散与时间一阶形式之间的精确等价关系，重新考察线性和半线性波动方程的时间二阶时空离散。我们重点分析采用时间连续分片多项式试探函数的格式，研究其稳定性、收敛性与几何性质。首先，我们考虑一种弱时空形式，其中检验函数被投影到时间次数低一阶的间断多项式上，并证明该形式在线性情形下等价于 [French, Peterson 1996] 提出的格式，以及 [Karakashian, Makridakis2005] 将其推广至半线性情形后得到的格式。具体而言，这种等价性表明，该方法在网格节点处守恒能量，但不具备辛结构。随后，我们引入两种辛变体，分别通过时间上的高斯–勒让德求积和高斯–洛巴托求积得到，并证明它们对应于特定的 Runge–Kutta 时间积分器。这些联系阐明了所研究时空方法的几何结构。

1 引言

我们研究一类用于线性和半线性波动方程的时间二阶时空 Galerkin 方法，并建立了与时间一阶形式之间的新等价性结果。这些等价性使得能够将已知性质从一阶格式严格地推广到二阶格式。

近年来，用于波动方程的时间二阶时空 Galerkin 格式引起了广泛关注。一种常见的构造方法是先将波动方程乘以关于空间和时间的检验函数，这些函数在终止时刻为零，然后分别对空间和时间进行分部积分。随后，对解的初始条件施加强约束，而对其时间导数的初始条件施加弱约束。接着，采用空间和时间上的连续有限元对所得公式进行离散。对于线性波动方程，众所周知，采用标准离散时间空间时，这种公式可能无法无条件稳定；参见 [36, 注 4.9] （连续分片线性多项式的情形），以及 [8, 定理 5.9] （最大正则性样条的情形）。这种不稳定性源于能量范数中缺乏 inf–sup 稳定性 [40, 定理 4.2.23]。为克服这一问题，已有研究提出了各种稳定化技术。

在 [35], 中，针对时间上的连续分片线性多项式提出了一种稳定化技术，其中空间刚度项中的测试函数被投影到时间上的分片常数函数空间中。随后，在 [41], 中，通过将其投影到次数低一阶的不连续分片多项式空间，该方法被扩展到高阶连续分片多项式，并通过数值结果进行了验证。对于连续分片线性多项式， [35] 中提出的稳定化方法等价于添加一个非一致惩罚项。沿着这一思路， [10]中针对时间上的最大正则性样条提出了一种稳定化方法（随后在 [8]中进行了分析）。另一种方法涉及

使用一个算子变换测试函数：修正希尔伯特变换；该方法在 [28], 中取得了颇具前景的数值结果，或通过 Morawetz 乘子实现了这一点 [3]。
本文证明，对 [41] 的稳定化公式稍作修改后，便等价于 [1, 11] 中针对线性波动方程提出的一阶时间间断 Galerkin–连续 Galerkin（DG–CG）方法。这意味着，该二阶时间方法具有已为 [11, 13] 中的一阶时间方法确立的相同理论性质。由于此修改仅影响右端项，稳定性结果也适用于 [41] 的原始公式。这一等价性推广了 [42], 的结果；该结果表明，在张量积网格上， [41] 中的最低次离散化与时间上的 Crank–Nicolson 格式（等价地，参数为 $(\beta,\ \gamma)$ 的 Newmark 方法 $=(1/4,\ 1/2)$）一致。除右端项的处理方式外，该格式本身也等价于最低次 DG–CG 方法。随后，我们将同一框架应用于半线性波动方程。在所得双线性形式的所有项中，除时间刚度项外，均插入了一个投影，将函数投影到次数低一阶的间断多项式空间。所得公式等价于 [21], 中分析的一阶时间 DG–CG 方法的扩展，因此其中确立的稳定性与收敛性可直接推广到二阶时间格式。在保持 [11, 19, 13], 中确立的无条件稳定性和收敛性性质的同时，二阶时间公式将未知量的数量减少了一半。此外，尽管该方法使用时间连续的试函数和检验函数，仍可采用时间步进方式实现，并且已有高效求解器，参见 [43, §7] （另见 [38, 22, 27]）。

到目前为止讨论的方法都能精确保持离散能量。然而在实际应用中，非线性项通常使用数值积分进行积分，因此能量守恒只能在数值积分误差范围内成立。数值积分还可用于保持其他几何性质，例如辛性。在此基础上，我们提出了两种分别基于高斯–勒让德求积和高斯–洛巴托求积的辛变体。在张量积网格上，它们分别对应于对时间一阶等价公式应用高斯–勒让德龙格–库塔法或洛巴托 IIIA/IIIB 龙格–库塔法时间离散格式。因此，这两种方法都是辛的，其中高斯–勒让德变体无条件稳定，而高斯–洛巴托变体仅条件稳定。我们在表 1 中总结了所考虑方法的主要性质。

方法	**稳定性**	**能量守恒**	**辛性**
未稳定化	△	×	✓
稳定化	✓	✓（除数值积分误差外）	×
高斯–勒让德	✓	×	✓
高斯–洛巴托	△	×	✓

表 1：四种时间二阶方法的性质：“未稳定化”是基本方法，“稳定化”指投影到次数低一阶的间断多项式上的方法，而“高斯–勒让德”和“高斯–洛巴托”是采用相应求积公式的方法。 ✓ = 是， × = 否，△ = 有条件。

概述。 本文的组织结构如下。第 2 节聚焦于线性波动方程的时间二阶时空方法，并证明其与时间一阶形式的等价性。由此得到一种无条件稳定格式，可通过在时间方向采用欠积分来高效实现。第 3 节将同一框架扩展到半线性波动方程。第 3.3 节介绍了基于高斯–勒让德和高斯–洛巴托求积公式的辛变体，这些变体保持了关键的几何性质。第 2.5.1 节和第 3.2.1 节报告的数值结果分别验证了线性情形下的能量守恒以及正弦-戈登方程的收敛阶。

2 线性情形

本节考虑一种用于线性 波动方程的时间二阶时空方法，这是对 [41] 中稳定化方法的略微修改。我们证明了该公式与问题时间一阶形式的时空不连续–连续 Galerkin（DG–CG）离散化之间的等价性；该离散化由 [1, 11]，引入，因此，针对后者建立的理论结果可以扩展到前者。我们还介绍了时间二阶方法的一种高效实现方式，该方法无需求解局部线性方程组即可计算公式所需的 L^2 投影。

2.1 线性波动方程

我们考虑以下具有齐次狄利克雷边界条件的初值问题

$$\begin{cases} \partial_t^2 U - \operatorname{div}_{\boldsymbol{x}}(c^2 \nabla_{\boldsymbol{x}} U) = F & \text{in } Q_T := \Omega \times (0,T), \\ U = 0 & \text{on } \partial\Omega \times (0,T), \\ U(\cdot,0) = U_0, \quad \partial_t U(\cdot,t)_{|t=0} = V_0 & \text{in } \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^d (d = 1,\ 2,\ 3)$ 是一个多面体利普希茨区域，$T > 0$ 是有限时间，波速 $c \in C(\Omega)$，$c(\boldsymbol{x}) \geq c_0 > 0$ 对所有 $\boldsymbol{x} \in \Omega$ 均成立。此外，给定数据满足

$$U_0 \in H_0^1(\Omega), \quad V_0 \in L^2(\Omega), \quad F \in L^1(0,T;L^2(\Omega)).$$

考虑问题 (1) 的以下变分公式：求 $U \in C([0,T];\ H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,T];\ L^2(\Omega))$，使得 $U(\cdot,\ 0) = U_0$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中，$\partial_t U(\cdot,\ t)|_{t=0} = V_0$ 在 $L^2(\Omega)$ 中，并且

$$\int_0^T \langle \partial_t^2 U(\cdot,t), W(\cdot,t) \rangle_{H_0^1(\Omega)} \,\mathrm{d}t + (c^2 \nabla_{\boldsymbol{x}} U, \nabla_{\boldsymbol{x}} W)_{L^2(Q_T)} = \int_0^T (F(\cdot,t), W(\cdot,t))_{L^2(\Omega)} \,\mathrm{d}t \tag{2}$$

对所有 $W \in L^2(0,\ T;\ H_0^1(\Omega))$ 均成立。这里，$\langle \cdot,\ \cdot \rangle_{H_0^1(\Omega)}$ 表示 $[H_0^1(\Omega)]'$ 与 $H_0^1(\Omega)$ 之间的对偶配对。(2) 的解的存在性与唯一性见 [24, 第一部分定理 2.1]。此外，(2) 的任意解实际上满足

$$U \in C([0,T];H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,T];L^2(\Omega)) \cap H^2(0,T;[H_0^1(\Omega)]'). \tag{3}$$

引入辅助未知量 $V := \partial_t U$ 后，问题 (1) 也可以表述为如下的一阶时间系统

$$\begin{cases} \partial_t U - V = 0 & \text{in } Q_T, \\ \partial_t V - \operatorname{div}_{\boldsymbol{x}}(c^2 \nabla_{\boldsymbol{x}} U) = F & \text{in } Q_T, \\ U = 0 & \text{on } \partial\Omega \times (0,T), \\ U(\cdot,0) = U_0, \quad V(\cdot,0) = V_0 & \text{in } \Omega. \end{cases} \tag{4}$$

取 (3) 中的 U，有

$$V = \partial_t U \in C([0,T];L^2(\Omega)) \cap H^1(0,T;[H_0^1(\Omega)]').$$

在构造问题 (1) 的时空张量积离散化之前，我们先引入一些记号。

2.2 离散化设置

对于空间离散化，考虑由形状正则的协调单纯形网格上的次数至多为 $p_{\boldsymbol{x}} \geq 1$ 的分片多项式函数构成的空间 $S^{p_{\boldsymbol{x}}}_{h_{\boldsymbol{x}}}(\Omega) \subset H^1_0(\Omega)$，网格尺寸为 $h_{\boldsymbol{x}}$。对于时间离散化，我们引入空间 $S^{p_t}_{h_t}(0,\ T)$，它由定义在网格尺寸为 h_t 的 $(0,\ T)$ 网格上的次数为 $p_t \geq 1$ 的分片连续多项式构成，该网格由节点 $0 =: t_0 < t_1 < \ldots < t_{N_t} := T \text{for} N_t \in \mathbb{N}$ 定义。我们分别用 $S^{p_t}_{h_t,\ 0,\ \bullet}(0,\ T)$ 和 $S^{p_t}_{h_t,\ \bullet,\ 0}(0,\ T)$ 表示满足零初值和终值条件的 $S^{p_t}_{h_t}(0,\ T)$ 子空间。此外，我们定义张量积空间

$$
\begin{aligned}
Q^{p_t}_{\boldsymbol{h}}(Q_T) &:= S^{p_{\boldsymbol{x}}}_{h_{\boldsymbol{x}}}(\Omega) \otimes S^{p_t}_{h_t}(0,T), \\
\partial_t Q^{p_t}_{\boldsymbol{h}}(Q_T) &:= S^{p_{\boldsymbol{x}}}_{h_{\boldsymbol{x}}}(\Omega) \otimes \partial_t S^{p_t}_{h_t}(0,T), \\
Q^{p_t}_{\boldsymbol{h},0,\bullet}(Q_T) &:= S^{p_{\boldsymbol{x}}}_{h_{\boldsymbol{x}}}(\Omega) \otimes S^{p_t}_{h_t,0,\bullet}(0,T), \\
Q^{p_t}_{\boldsymbol{h},\bullet,0}(Q_T) &:= S^{p_{\boldsymbol{x}}}_{h_{\boldsymbol{x}}}(\Omega) \otimes S^{p_t}_{h_t,\bullet,0}(0,T).
\end{aligned}
$$

我们强调，在表示张量积离散空间和函数的记号中，多项式次数仅针对时间离散化指定。这一约定反映了这样一个事实：空间中的检验函数和试探函数采用相同的离散空间，而时间上的多项式次数则各不相同。

令 $\Pi^{(p_t-1,-1)}{}_{h_t}\colon\ L^2(0,T) \ \to\ \partial_t S^{p_t}_{h_t}(0,T)$ 为 L^2 正交投影。我们用同一符号 $\Pi^{(p_t-1,-1}{}_{)\,h_t}$ 表示该算子及其时空扩展，后者将 $L^2(Q_T)$ 映射到 $L^2(\Omega) \otimes \partial_t S^{p_t}_{h_t}(0,T)$，其定义如下：对于 $U \in L^2(Q_T)$，

$$
(\Pi^{(p_t-1,-1)}_{h_t} U, \partial_t W^{p_t}_{h_t})_{L^2(Q_T)} = (U, \partial_t W^{p_t}_{h_t})_{L^2(Q_T)} \qquad \text{for all } W^{p_t}_{h_t} \in L^2(\Omega) \otimes S^{p_t}_{h_t}(0,T). \tag{5}
$$

最后，令 $U_{0,h_{\boldsymbol{x}}},\ V_{0,h_{\boldsymbol{x}}} \in S^{p_{\boldsymbol{x}}}_{h_{\boldsymbol{x}}}(\Omega)$ 为初始数据 U_0 和 V_0 的近似值，我们分别将它们定义为投影到 $S^{p_{\boldsymbol{x}}}_{h_{\boldsymbol{x}}}(\Omega)$ 上的椭圆投影和 L^2 投影：

$$
\begin{aligned}
(c^2 \nabla_{\boldsymbol{x}} U_{0,h_{\boldsymbol{x}}}, \nabla_{\boldsymbol{x}} W_{h_{\boldsymbol{x}}})_{L^2(\Omega)} &= (c^2 \nabla_{\boldsymbol{x}} U_0, \nabla_{\boldsymbol{x}} W_{h_{\boldsymbol{x}}})_{L^2(\Omega)} \qquad \text{for all } W_{h_{\boldsymbol{x}}} \in S^{p_{\boldsymbol{x}}}_{h_{\boldsymbol{x}}}(\Omega), \\
(V_{0,h_{\boldsymbol{x}}}, W_{h_{\boldsymbol{x}}})_{L^2(\Omega)} &= (V_0, W_{h_{\boldsymbol{x}}})_{L^2(\Omega)} \qquad \text{for all } W_{h_{\boldsymbol{x}}} \in S^{p_{\boldsymbol{x}}}_{h_{\boldsymbol{x}}}(\Omega).
\end{aligned}
$$

2.3 离散形式

我们考虑问题 (1) 的以下离散化，这是对 [41] 中引入的方法的略微修改（见下文注2.1）：

求 $U^{p_t}_{\boldsymbol{h}} \in Q^{p_t}_{\boldsymbol{h}}(Q_T)$，使得 $U^{p_t}_{\boldsymbol{h}}(\cdot,\ 0) = U_{0,\ h_{\boldsymbol{x}}}$ 属于 Ω，且

$$
\begin{aligned}
-(\partial_t U^{p_t}_{\boldsymbol{h}}, \partial_t W^{p_t}_{\boldsymbol{h}})_{L^2(Q_T)} + (c^2 \nabla_{\boldsymbol{x}} U^{p_t}_{\boldsymbol{h}}, \nabla_{\boldsymbol{x}} \Pi^{(p_t-1,-1)}_{h_t} W^{p_t}_{\boldsymbol{h}})_{L^2(Q_T)} \\
= (F, \Pi^{(p_t-1,-1)}_{h_t} W^{p_t}_{\boldsymbol{h}})_{L^2(Q_T)} + (V_{0,h_{\boldsymbol{x}}}, W^{p_t}_{\boldsymbol{h}}(\cdot,0))_{L^2(\Omega)}
\end{aligned} \tag{6}
$$

对所有 $W^{p_t}_{\boldsymbol{h}} \in Q^{p_t}_{\boldsymbol{h},\ \bullet,\ 0}(Q_T)$。

在下文第 2.4 节中，我们证明该方法可以等价地改写为离散的时间一阶公式，相关分析见 [1, 11, 13]（参见下文 (10)）。利用这种等价性，公式 (6) 的稳定性和收敛性质可直接由时间一阶格式的相应性质推出。

注2.1（的未稳定化格式和稳定化格式）。将离散函数 $W^{p_t}_{\boldsymbol{h}} \in Q^{p_t}_{\boldsymbol{h},\ \bullet,\ 0}(Q_T)$ 代入（1）进行测试，分别对空间和时间进行分部积分，并以弱意义施加 $\partial_t U^{p_t}_{\boldsymbol{h}}$ 的初始条件，可得到以下离散形式：求 $U^{p_t}_{\boldsymbol{h}} \in Q^{p_t}_{\boldsymbol{h}}(Q_T)$，使得 $U^{p_t}_{\boldsymbol{h}}(\cdot, 0) = U_{0,\ h_{\boldsymbol{x}}}$ 在 Ω 中，且

$$
-(\partial_t U^{p_t}_{\boldsymbol{h}}, \partial_t W^{p_t}_{\boldsymbol{h}})_{L^2(Q_T)} + (c^2 \nabla_{\boldsymbol{x}} U^{p_t}_{\boldsymbol{h}}, \nabla_{\boldsymbol{x}} W^{p_t}_{\boldsymbol{h}})_{L^2(Q_T)} = (F, W^{p_t}_{\boldsymbol{h}})_{L^2(Q_T)} + (V_0, W^{p_t}_{\boldsymbol{h}}(\cdot,0))_{L^2(\Omega)} \tag{7}
$$

对所有$W_{\boldsymbol{h}}^{p_t} \in Q_{\boldsymbol{h}}^{p_t}$, $\bullet, 0$（Q_T）均成立。*[36]*中已证明，当且仅当满足类型为 $h_t \leq Ch_{\boldsymbol{x}}$ 的*CFL*条件时，方法（7）才稳定，其中常数 $C > 0$ 取决于空间 $S_{h_{\boldsymbol{x}}}^{p_{\boldsymbol{x}}}$（Ω）、 p_t以及 T（关于采用最大正则性样条进行时间离散化的情形，参见 *[8]*）。为克服这一限制， *[41]* 提出在梯度-梯度项中插入投影算子 $\Pi^{(p_t-1,-1}$) $_{h_t}$。数值结果表明，所得方法有效且无条件稳定。

方法(6) 与 *[41]* 中的方法唯一的区别在于，前者右端包含算子 $\Pi^{(p_t-1,-1}$) $_{h_t}$，而后者不包含。因此，为 (6) 建立的稳定性结果可直接推广至 *[41],* 中的方法，从而为该方法表现出的无条件稳定性提供理论依据。

■

与 [1, 11], 中的时间一阶格式相比，格式(6)的优点是只将波场作为未知量，因此未知量数量减半。此外，该格式还可以使用 [43]中最近开发的高效求解器。

虽然计算(6)左端的投影 $\Pi^{(p_t-1,-1}$) $_{h_t}$ 通常需要引入一个辅助变量，但我们将说明如何避免这一点，从而实现更高效的计算。这是通过将公式(6)解释为对(7)中的梯度-梯度项在时间方向采用次求积后得到的公式来实现的，具体如下述结果所示。

命题 2.2. 对于所有 $u_{h_t}^{p_t}, v_{h_t}^{p_t} \in S_{h_t}^{p_t}(0,T)$，以下结论成立：

$$(u_{h_t}^{p_t}, \Pi_{h_t}^{(p_t-1,-1)} v_{h_t}^{p_t})_{L^2(t_{i-1},t_i)} = \sum_{j=1}^{p_t} u_{h_t}^{p_t}(x_j^{(i)}) v_{h_t}^{p_t}(x_j^{(i)}) \omega_j^{(i)}, \qquad i = 1, \ldots, N_t, \tag{8}$$

其中， $\{x_j^{(i)}\}_{j=1}^{p_t}$ 和 $\{\omega_j^{(i)}\}_{j=1}^{p_t}$ 分别是$[t_{i-1}, t_i]$上含 p_t 个点的高斯–勒让德数值积分的节点和权重。

证明。 由于含 p_t 个点的高斯–勒让德求积公式对次数不超过$2p_t - 1$的多项式是精确的，因此有

$$(u_{h_t}^{p_t}, \Pi_{h_t}^{(p_t-1,-1)} v_{h_t}^{p_t})_{L^2(t_{i-1},t_i)} = \sum_{j=1}^{p_t} u_{h_t}^{p_t}(x_j^{(i)}) \Pi_{h_t}^{(p_t-1,-1)} v_{h_t}^{p_t}(x_j^{(i)}) \omega_j^{(i)}.$$

为得到该结论，只需证明对于所有 $j = 1, \ldots, p_t$和 $i = 1, \ldots, N_t$,

$$v_{h_t}^{p_t}(x_j^{(i)}) = \Pi_{h_t}^{(p_t-1,-1)} v_{h_t}^{p_t}(x_j^{(i)}). \tag{9}$$

设 $\{L_j^{(i)}(t)\}_{j\geq 0}$ 为 $[t_{i-1}, t_i]$上的标准勒让德多项式。由其正交性可知,

$$v_{h_t}^{p_t}(t) - \Pi_{h_t}^{(p_t-1,-1)} v_{h_t}^{p_t}(t) = L_{p_t}^{(i)}(t) \frac{(v_{h_t}^{p_t}, L_{p_t}^{(i)})_{L^2(t_{i-1},t_i)}}{(L_{p_t}^{(i)}, L_{p_t}^{(i)})_{L^2(t_{i-1},t_i)}}, \quad t \in [t_{i-1}, t_i].$$

回顾一下， $\{x_j^{(i)}\}_{j=1}^{p_t}$ 恰为 $L_{p_t}^{(i)}(t)$的零点，由此可得式（9），进而得到式（8） . □

2.4 等价性结果

基于时间一阶形式（4）的线性波动方程时空DG–CG离散化（见 [1, 11], ）如下：

~ ~ ~ ~求 $U_{\boldsymbol{h}}^{p_t}$, $V_{\boldsymbol{h}}^{p_t} \in Q_{\boldsymbol{h}}^{p_t}(Q_T)$, 使得 $U_{\boldsymbol{h}}^{p_t}(\cdot, 0) = U_{0,\ h_{\boldsymbol{x}}}$, $V_{\boldsymbol{h}}^{p_t}(\cdot, 0) = V_{0,\ h_{\boldsymbol{x}}}$ 在 Ω 中，并且

$$\begin{cases} (\partial_t \widetilde{U}_{\boldsymbol{h}}^{p_t}, \chi_{\boldsymbol{h}}^{p_t-1})_{L^2(Q_T)} - (\widetilde{V}_{\boldsymbol{h}}^{p_t}, \chi_{\boldsymbol{h}}^{p_t-1})_{L^2(Q_T)} = 0 \\ (\partial_t \widetilde{V}_{\boldsymbol{h}}^{p_t}, \lambda_{\boldsymbol{h}}^{p_t-1})_{L^2(Q_T)} + (c^2 \nabla_{\boldsymbol{x}} \widetilde{U}_{\boldsymbol{h}}^{p_t}, \nabla_{\boldsymbol{x}} \lambda_{\boldsymbol{h}}^{p_t-1})_{L^2(Q_T)} = (F, \lambda_{\boldsymbol{h}}^{p_t-1})_{L^2(Q_T)} \end{cases} \tag{10}$$

对所有 $\chi_{\boldsymbol{h}}^{p_t-1}$, $\lambda_{\boldsymbol{h}}^{p_t-1} \in \partial_t Q_{\boldsymbol{h}}^{p_t}(Q_T)$。

在下文的定理 2.5 中，我们证明离散问题 (6) 与 (10) 之间的等价性。为此，我们先将问题 (6) 改写为系统形式（引理 2.3），并定义具有给定初始数据的函数在 $Q_{\boldsymbol{h}}^{p_t}(Q_T)$ 中的重构（引理 2.4）。

Lem理 2.3。 考虑如下问题：求 $U_{\boldsymbol{h}}^{p_t} \in Q_{\boldsymbol{h}}^{p_t}(Q_T)$ 和 $V_{\boldsymbol{h}}^{p_t-1} \in \partial_t Q_{\boldsymbol{h}}^{p_t}(Q_T)$，使得 at

$$\begin{cases} (\partial_t U_{\boldsymbol{h}}^{p_t}, \chi_{\boldsymbol{h}}^{p_t-1})_{L^2(Q_T)} - (V_{\boldsymbol{h}}^{p_t-1}, \chi_{\boldsymbol{h}}^{p_t-1})_{L^2(Q_T)} = 0 & \text{for all } \chi_{\boldsymbol{h}}^{p_t-1} \in \partial_t Q_{\boldsymbol{h}}^{p_t}(Q_T), \\ -(V_{\boldsymbol{h}}^{p_t-1}, \partial_t W_{\boldsymbol{h}}^{p_t})_{L^2(Q_T)} + (c^2 \nabla_{\boldsymbol{x}} U_{\boldsymbol{h}}^{p_t}, \nabla_{\boldsymbol{x}} \Pi_{h_t}^{(p_t-1,-1)} W_{\boldsymbol{h}}^{p_t})_{L^2(Q_T)} & \\ \quad = (F, \Pi_{h_t}^{(p_t-1,-1)} W_{\boldsymbol{h}}^{p_t})_{L^2(Q_T)} + (V_{0,h_{\boldsymbol{x}}}, W_{\boldsymbol{h}}^{p_t}(\cdot, 0))_{L^2(\Omega)} & \text{for all } W_{\boldsymbol{h}}^{p_t} \in Q_{\boldsymbol{h},\bullet,0}^{p_t}(Q_T) \end{cases} \tag{11}$$

满足初始条件 $U_{\boldsymbol{h}}^{p_t}(\cdot, 0) = U_{0,\ h_{\boldsymbol{x}}}$ 属于 Ω。于是，(6) 与 (11) 等价，即 $U_{\boldsymbol{h}}^{p_t}$ 满足 (6) 当且仅当 $U_{\boldsymbol{h}}^{p_t}$ 和 $V_{\boldsymbol{h}}^{p_t-1} = \partial_t U_{\boldsymbol{h}}^{p_t}$ 满足 (11)。

证明。 由于 (11) 中的第一方程只是恒等式 $\partial_t U_{\boldsymbol{h}}^{p_t} = V_{\boldsymbol{h}}^{p_t-1}$，因此证明显而易见。 □

引理 2.4。 给定 $V_{\boldsymbol{h}}^{p_t-1} \in \partial_t Q_{\boldsymbol{h}}^{p_t}(Q_T)$ 和 $V_{0,\ h_{\boldsymbol{x}}} \in S_{h_{\boldsymbol{x}}}^{p_{\boldsymbol{x}}}(\Omega)$，存在唯一的 $\widetilde{V}_{\boldsymbol{h}}^{p_t} \in Q_{\boldsymbol{h}}^{p_t}(Q_T)$，使得 $\widetilde{V}_{\boldsymbol{h}}^{p_t}(\cdot, 0) = V_{0,\ h_{\boldsymbol{x}}}$ 并且

$$(\widetilde{V}_{\boldsymbol{h}}^{p_t}, \partial_t W_{\boldsymbol{h}}^{p_t})_{L^2(Q_T)} = (V_{\boldsymbol{h}}^{p_t-1}, \partial_t W_{\boldsymbol{h}}^{p_t})_{L^2(Q_T)} \quad \text{for all } W_{\boldsymbol{h}}^{p_t} \in Q_{\boldsymbol{h}}^{p_t}(Q_T).$$

~证明。 通过验证若 $V_{\boldsymbol{h}}^{p_t}(\cdot, 0) = 0$ 且

$$(\widetilde{V}_{\boldsymbol{h}}^{p_t}, \partial_t W_{\boldsymbol{h}}^{p_t})_{L^2(Q_T)} = 0 \quad \text{for all } W_{\boldsymbol{h}}^{p_t} \in Q_{\boldsymbol{h}}^{p_t}(Q_T), \tag{12}$$

~则 $V_{\boldsymbol{h}}^{p_t} = 0$。为此，我们注意到，与 (12) 相关联的系统矩阵具有张量积结构，由空间中的一个正定矩阵和时间中的一个矩阵构成。前者源自 $L^2(\Omega)$ 内积，后者则与该问题相关

$$\text{find } \widetilde{v}_{h_t}^{p_t} \in S_{h_t,0,\bullet}^{p_t}(0,t) \text{ such that} \qquad (\widetilde{v}_{h_t}^{p_t}, \partial_t w_{h_t}^{p_t})_{L^2(0,T)} = 0 \quad \text{for all } w_{h_t}^{p_t} \in S_{h_t}^{p_t}(0,t), \tag{13}$$

也可以证明其可逆。可逆性可按照 [9, 附录 B.1]中的方法建立。具体而言，我们在时间网格的每个区间 $[t_{i-1}, t_i]$ 上将 $\widetilde{v}_{h_t}^{p_t}$ 展开为

$$\widetilde{v}_{h_t}^{p_t}(t) = \sum_{r=0}^{p_t} c_r^{(i)} L_r^{(i)}(t) \quad \text{for } t \in [t_{i-1}, t_i],$$

其中 $\{L_r^{(i)}\}_r$ 是区间 $[t_{i-1}, t_i]$上的勒让德多项式，它们关于 $L^2(t_{i-1},\ t_i)$内积正交，并按 $L_r^{(i)}(t_i) = 1$进行归一化。于是有

$$c_r^{(i)} = \frac{(\widetilde{v}_{h_t}^{p_t}, L_r^{(i)})_{L^2(t_{i-1},t_i)}}{(L_r^{(i)}, L_r^{(i)})_{L^2(t_{i-1},t_i)}} \qquad \text{for } r = 0, \ldots, p_t.$$

我们依次对 $i = 1, \ldots, N_t$进行处理：用所有时间导数分别与次数不超过 $p_t - 1$ 的勒让德多项式在 $[t_{i-1}, t_i]$ 上一致、且在 $[t_{i-1}, t_i]$ 外为零的函数测试 (13)，得到对于 $r = 0, \ldots, p_t - 1$，有 $c_r^{(i)} = 0$。由条件 $\widetilde{v}_{h_t}^{p_t}(t_{i-1}) = 0$，我们还可得出 $c_{p_t}^{(i)} = 0$，因此 $\widetilde{v}_{h_t}^{p_t} = 0$ 位于 $[t_{i-1}, t_i]$ 中，因为正交多项式的零点严格位于该区间内部（例如参见 [17,引理 3.2]）。 □

~ ~ ~**定理 2.5**。设 $U_{\boldsymbol{h}}^{p_t}, V_{\boldsymbol{h}}^{p_t} \in Q_{\boldsymbol{h}}^{p_t}(Q_T)$ 是格式 (10) 的一个解。那么，$U_{\boldsymbol{h}}^{p_t} = U_{\boldsymbol{h}}^{p_t} \in Q_{\boldsymbol{h}}^{p_t}(Q_T)$ 是 (6) 的一个解。反之，设 $U_{\boldsymbol{h}}^{p_t} \in Q_{\boldsymbol{h}}^{p_t}(Q_T)$ 是格式 (6) 的一个解。那么，

$$\widetilde{U}_{\boldsymbol{h}}^{p_t} = U_{\boldsymbol{h}}^{p_t} \in Q_{\boldsymbol{h}}^{p_t}(Q_T), \quad \widetilde{V}_{\boldsymbol{h}}^{p_t} \ such\ that \quad \Pi_{h_t}^{(p_t-1,-1)} \widetilde{V}_{\boldsymbol{h}}^{p_t} = \partial_t U_{\boldsymbol{h}}^{p_t}, \quad \widetilde{V}_{\boldsymbol{h}}^{p_t}(\cdot,0) = V_{0,h_{\boldsymbol{x}}}$$

是 (10) 的一个解。

证明。利用引理 2.3 中的等价性，我们直接研究 (10) 与 (11) 之间的关系。~ ~我们先证明，若 $U_{\boldsymbol{h}}^{p_t}$, $V_{\boldsymbol{h}}^{p_t} \in Q_{\boldsymbol{h}}^{p_t}(Q_T)$ 满足 (10)，则

$$U_{\boldsymbol{h}}^{p_t} = \widetilde{U}_{\boldsymbol{h}}^{p_t} \in Q_{\boldsymbol{h}}^{p_t}(Q_T), \quad V_{\boldsymbol{h}}^{p_t-1} = \Pi_{h_t}^{(p_t-1,-1)} \widetilde{V}_{\boldsymbol{h}}^{p_t} \in \partial_t Q_{\boldsymbol{h}}^{p_t}(Q_T) \tag{14}$$

满足 (11)。我们先验证 (11) 中第一方程的有效性。对所有 $\chi_{\boldsymbol{h}}^{p_t-1} \in \partial_t Q_{\boldsymbol{h}}^{p_t}(Q_T)$，有

$$\begin{aligned}(\partial_t U_{\boldsymbol{h}}^{p_t}, \chi_{\boldsymbol{h}}^{p_t-1})_{L^2(Q_T)} &\overset{(14)}{=} (\partial_t \widetilde{U}_{\boldsymbol{h}}^{p_t}, \chi_{\boldsymbol{h}}^{p_t-1})_{L^2(Q_T)} \overset{(10)}{=} (\widetilde{V}_{\boldsymbol{h}}^{p_t}, \chi_{\boldsymbol{h}}^{p_t-1})_{L^2(Q_T)} \\ &\overset{(5)}{=} (\Pi_{h_t}^{(p_t-1,-1)} \widetilde{V}_{\boldsymbol{h}}^{p_t}, \chi_{\boldsymbol{h}}^{p_t-1})_{L^2(Q_T)} \\ &\overset{(14)}{=} (V_{\boldsymbol{h}}^{p_t-1}, \chi_{\boldsymbol{h}}^{p_t-1})_{L^2(Q_T)}.\end{aligned}$$

对于 (11) 中的第二方程，对所有 $W_{\boldsymbol{h}}^{p_t} \in Q_{\boldsymbol{h},\bullet,0}^{p_t}(Q_T)$，我们先计算

$$-(V_{\boldsymbol{h}}^{p_t-1}, \partial_t W_{\boldsymbol{h}}^{p_t})_{L^2(Q_T)} \overset{(14)}{=} -(\Pi_{h_t}^{(p_t-1,-1)} \widetilde{V}_{\boldsymbol{h}}^{p_t}, \partial_t W_{\boldsymbol{h}}^{p_t})_{L^2(Q_T)} \overset{(5)}{=} -(\widetilde{V}_{\boldsymbol{h}}^{p_t}, \partial_t W_{\boldsymbol{h}}^{p_t})_{L^2(Q_T)}. \tag{15}$$

~然后，对 (15) 右端关于时间分部积分，并利用初始条件 $V_{\boldsymbol{h}}^{p_t}(\cdot,0) = V_{0,h_{\boldsymbol{x}}}$，以及测试函数 $W_{\boldsymbol{h}}^{p_t}$ 上的零终值条件，得到

$$\begin{aligned}-(V_{\boldsymbol{h}}^{p_t-1}, \partial_t W_{\boldsymbol{h}}^{p_t})_{L^2(Q_T)} &= (\partial_t \widetilde{V}_{\boldsymbol{h}}^{p_t}, W_{\boldsymbol{h}}^{p_t})_{L^2(Q_T)} + (V_{0,h_{\boldsymbol{x}}}, W_{\boldsymbol{h}}^{p_t}(\cdot,0))_{L^2(\Omega)} \\ &\overset{(5)}{=} (\partial_t \widetilde{V}_{\boldsymbol{h}}^{p_t}, \Pi_{h_t}^{(p_t-1,-1)} W_{\boldsymbol{h}}^{p_t})_{L^2(Q_T)} + (V_{0,h_{\boldsymbol{x}}}, W_{\boldsymbol{h}}^{p_t}(\cdot,0))_{L^2(\Omega)} \\ &\overset{(10)}{=} -(c^2 \nabla_{\boldsymbol{x}} \widetilde{U}_{\boldsymbol{h}}^{p_t}, \nabla_{\boldsymbol{x}} \Pi_{h_t}^{(p_t-1,-1)} W_{\boldsymbol{h}}^{p_t})_{L^2(Q_T)} \\ &\quad + (F, \Pi_{h_t}^{(p_t-1,-1)} W_{\boldsymbol{h}}^{p_t})_{L^2(Q_T)} + (V_{0,h_{\boldsymbol{x}}}, W_{\boldsymbol{h}}^{p_t}(\cdot,0))_{L^2(\Omega)} \\ &\overset{(14)}{=} -(c^2 \nabla_{\boldsymbol{x}} U_{\boldsymbol{h}}^{p_t}, \nabla_{\boldsymbol{x}} \Pi_{h_t}^{(p_t-1,-1)} W_{\boldsymbol{h}}^{p_t})_{L^2(Q_T)} \\ &\quad + (F, \Pi_{h_t}^{(p_t-1,-1)} W_{\boldsymbol{h}}^{p_t})_{L^2(Q_T)} + (V_{0,h_{\boldsymbol{x}}}, W_{\boldsymbol{h}}^{p_t}(\cdot,0))_{L^2(\Omega)},\end{aligned} \tag{16}$$

第一个断言的证明至此完成。
反之，若 $U_{\boldsymbol{h}}^{p_t} \in Q_{\boldsymbol{h}}^{p_t}(Q_T)$、$V_{\boldsymbol{h}}^{p_t-1} \in \partial_t Q_{\boldsymbol{h}}^{p_t}(Q_T)$ 是方程 (11) 的解，则

$$\widetilde{U}_{\boldsymbol{h}}^{p_t} = U_{\boldsymbol{h}}^{p_t} \in Q_{\boldsymbol{h}}^{p_t}(Q_T), \quad \widetilde{V}_{\boldsymbol{h}}^{p_t} \text{ such that } \quad \Pi_{h_t}^{(p_t-1,-1)} \widetilde{V}_{\boldsymbol{h}}^{p_t} = V_{\boldsymbol{h}}^{p_t-1}, \quad \widetilde{V}_{\boldsymbol{h}}^{p_t}(\cdot,0) = V_{0,h_{\boldsymbol{x}}} \tag{17}$$

~ ~满足 (10)。由引理 2.4 可得，如 (17) 中的 $V_{\boldsymbol{h}}^{p_t}$ 存在且唯一。由于 $V_{\boldsymbol{h}}^{p_t}$ 存在，容易验证 (10) 中的第一方程：对所有 $\chi_{\boldsymbol{h}}^{p_t-1} \in \partial_t Q_{\boldsymbol{h}}^{p_t}(Q_T)$，

$$\begin{aligned}(\partial_t \widetilde{U}_{\boldsymbol{h}}^{p_t}, \chi_{\boldsymbol{h}}^{p_t-1})_{L^2(Q_T)} &\overset{(17)}{=} (\partial_t U_{\boldsymbol{h}}^{p_t}, \chi_{\boldsymbol{h}}^{p_t-1})_{L^2(Q_T)} \overset{(11)}{=} (V_{\boldsymbol{h}}^{p_t-1}, \chi_{\boldsymbol{h}}^{p_t-1})_{L^2(Q_T)} \\ &\overset{(17)}{=} (\Pi_{h_t}^{(p_t-1,-1)} \widetilde{V}_{\boldsymbol{h}}^{p_t}, \chi_{\boldsymbol{h}}^{p_t-1})_{L^2(Q_T)} \\ &\overset{(5)}{=} (\widetilde{V}_{\boldsymbol{h}}^{p_t}, \chi_{\boldsymbol{h}}^{p_t-1})_{L^2(Q_T)}.\end{aligned}$$

对于 (10) 中的第二方程，令 $\lambda_{\boldsymbol{h}}^{p_t-1} \in \partial_t Q_{\boldsymbol{h}}^{p_t}(Q_T)$。与上文类似，存在唯一的 $W_{\boldsymbol{h}}^{p_t} \in Q_{\boldsymbol{h}}^{p_t,\bullet,0}(Q_T)$，使得 $\Pi^{(p_t-1,-1)}{}_{h_t} W_{\boldsymbol{h}}^{p_t} = \lambda_{\boldsymbol{h}}^{p_t-1}$。然后，对时间进行分部积分，并使用 (16) 中的初始条件和终端条件，计算得

$$
\begin{aligned}
(\partial_t \widetilde{V}_{\boldsymbol{h}}^{p_t}, \lambda_{\boldsymbol{h}}^{p_t-1})_{L^2(Q_T)} &= (\partial_t \widetilde{V}_{\boldsymbol{h}}^{p_t}, \Pi_{h_t}^{(p_t-1,-1)} W_{\boldsymbol{h}}^{p_t})_{L^2(Q_T)} \\
&\overset{(5)}{=} (\partial_t \widetilde{V}_{\boldsymbol{h}}^{p_t}, W_{\boldsymbol{h}}^{p_t})_{L^2(Q_T)} \\
&= -(\widetilde{V}_{\boldsymbol{h}}^{p_t}, \partial_t W_{\boldsymbol{h}}^{p_t})_{L^2(Q_T)} - (V_{0,h_{\boldsymbol{x}}}, W_{\boldsymbol{h}}^{p_t}(\cdot,0))_{L^2(\Omega)} \\
&\overset{(5)}{=} -(\Pi_{h_t}^{(p_t-1,-1)} \widetilde{V}_{\boldsymbol{h}}^{p_t}, \partial_t W_{\boldsymbol{h}}^{p_t})_{L^2(Q_T)} - (V_{0,h_{\boldsymbol{x}}}, W_{\boldsymbol{h}}^{p_t}(\cdot,0))_{L^2(\Omega)} \\
&\overset{(12)}{=} -(V_{\boldsymbol{h}}^{p_t-1}, \partial_t W_{\boldsymbol{h}}^{p_t})_{L^2(Q_T)} - (V_{0,h_{\boldsymbol{x}}}, W_{\boldsymbol{h}}^{p_t}(\cdot,0))_{L^2(\Omega)} \\
&\overset{(11)}{=} -(c^2 \nabla_{\boldsymbol{x}} U_{\boldsymbol{h}}^{p_t}, \nabla_{\boldsymbol{x}} \Pi_{h_t}^{(p_t-1,-1)} W_{\boldsymbol{h}}^{p_t})_{L^2(Q_T)} \\
&\qquad + (F, \Pi_{h_t}^{(p_t-1,-1)} W_{\boldsymbol{h}}^{p_t})_{L^2(Q_T)} \\
&= -(c^2 \nabla_{\boldsymbol{x}} U_{\boldsymbol{h}}^{p_t}, \nabla_{\boldsymbol{x}} \lambda_{\boldsymbol{h}}^{p_t-1})_{L^2(Q_T)} + (F, \lambda_{\boldsymbol{h}}^{p_t-1})_{L^2(Q_T)} \\
&\overset{(17)}{=} -(c^2 \nabla_{\boldsymbol{x}} \widetilde{U}_{\boldsymbol{h}}^{p_t}, \nabla_{\boldsymbol{x}} \lambda_{\boldsymbol{h}}^{p_t-1})_{L^2(Q_T)} + (F, \lambda_{\boldsymbol{h}}^{p_t-1})_{L^2(Q_T)},
\end{aligned}
$$

至此，证明完成。 □

注 2.6. 定理 *2.5* 中建立的等价性与 *[5],* 中的结果类似；该结果表明，通过连续伽辽金方法（见 *[16]*）和间断伽辽金方法（例如，见 *[34]*）对导数进行离散化，所得结果除重构外相同。事实上，(11)中的第二方程也可以改写为一种特殊的时间间断 ***Galerkin*** 方法（见下文(40) 中的第二方程）。不过，此处采用的通量定义不同于 *[5]*中采用的定义。

注 2.7. 我们强调， *[39, 7, 6]* 中提出并分析的时间二阶 ***DG–CG*** 格式与本文考察的方法以及 *[1, 11]*中的时间一阶格式并无直接关联。该方法由(2) 在未对时间进行分部积分的情况下得到。

2.5 理论性质

由于定理 2.5 所蕴含的等价性结果，针对格式 (10) 得出的主要理论结果可立即推广到 (6)。我们先概述格式 (10) 的这些结果，相关内容参见 [11]和 [13], ，然后在定理 2.9 中陈述 (6) 对应的结果。

i) **适定性** ([11, 定理 1], [13, 定理 3.5])。 存在唯一的解 $(U_{\boldsymbol{h}}^{p_t}, V_{\boldsymbol{h}}^{p_t})$，且满足

$$
\|\widetilde{V}_{\boldsymbol{h}}^{p_t}\|_{C([0,T];L^2(\Omega))} + \|c\nabla_{\boldsymbol{x}} \widetilde{U}_{\boldsymbol{h}}^{p_t}\|_{C([0,T];L^2(\Omega)^d)} \lesssim \|V_0\|_{L^2(\Omega)} + \|c\nabla_{\boldsymbol{x}} U_0\|_{L^2(\Omega)^d} + \|F\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega)}, \tag{10}
$$

其中隐藏常数仅依赖于 p_t。

对于误差估计，我们采用 [13] 的设定，并提出以下附加假设 .

假设 2.8。 设 Ω 满足椭圆正则性假设，即若 $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ 且 $\Delta_{\boldsymbol{x}} \varphi \in L^2(\Omega)$，则 $\varphi \in H^2(\Omega)$。此外，设数据满足 $c \in C(\Omega) \cap W_\infty^1(\Omega)$，并且对于某个 $r > \max\{1, d/2\}$，有 $U_0 \in H^r(\Omega)$ 且 $V_0 \in H^r(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$；并设弱形式 (2) 的解满足 $U \in H^2(0,T;\ H^r(\Omega))$，其中 $\nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot (c^2 \nabla_{\boldsymbol{x}} U) \in H^1(0,T;\ L^2(\Omega))$。

ii) **误差估计** ([11, 定理 7], [13, 定理 4.9]). 设假设 2.8 成立。那么，若 $V_0 \in H^{\ell+1}(\Omega)$ 且

$$
U \in W_1^2(0,T;H^{\ell+1}(\Omega)) \cap W_1^{m+2}(0,T;H^1(\Omega)) \cap W_1^{m+1}(0,T;H^2(\Omega)) \cap C^{m+2}([0,T];L^2(\Omega)) \tag{18}
$$

对于给定的 ℓ 和 m，满足 $1 \le \ell \le p_{\boldsymbol{x}}$ 和 $1 \le m \le p_t$，则有以下误差估计：

$$
\begin{aligned}
\|\partial_t U - \widetilde{V}_{\boldsymbol{h}}^{p_t}\|_{C([0,T];L^2(\Omega))} &\lesssim h_{\boldsymbol{x}}^{\ell+1}\Big(\|\partial_t U\|_{C([0,T];H^{\ell+1}(\Omega))} + \|V_0\|_{H^{\ell+1}(\Omega)} + \|\partial_{tt} U\|_{L^1(0,T;H^{\ell+1}(\Omega))}\Big) \\
&\quad + h_t^{m+1}\Big(\|\partial_t^{(m+2)} U\|_{C([0,T];L^2(\Omega))} + \|\nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot (c^2 \nabla_{\boldsymbol{x}} \partial_t^{(m+1)} U)\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))} \\
&\quad + \|c\nabla_{\boldsymbol{x}} \partial_t^{(m+2)} U\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega)^d)}\Big), \\
\|\nabla_{\boldsymbol{x}}(U - \widetilde{U}_{\boldsymbol{h}})\|_{C([0,T];L^2(\Omega))} &\lesssim h_{\boldsymbol{x}}^{\ell}\Big(\|U\|_{C([0,T];H^{\ell+1}(\Omega))} + h_{\boldsymbol{x}}\|V_0\|_{H^{\ell+1}(\Omega)} + h_{\boldsymbol{x}}\|\partial_{tt} U\|_{L^1(0,T;H^{\ell+1}(\Omega))} \\
&\quad + h_t^{m+1}\Big(\|c\nabla_{\boldsymbol{x}} \partial_t^{(m+1)} U\|_{C([0,T];L^2(\Omega)^d)} \\
&\quad + \|\nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot (c^2 \nabla_{\boldsymbol{x}} \partial_t^{(m+1)} U)\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))} \\
&\quad + \|c\nabla_{\boldsymbol{x}} \partial_t^{(m+2)} U\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega)^d)}\Big), \\
\|U - \widetilde{U}_{\boldsymbol{h}}\|_{C([0,T];L^2(\Omega))} &\lesssim h_{\boldsymbol{x}}^{\ell+1}\Big(\|U\|_{C([0,T];H^{\ell+1}(\Omega))} + \|V_0\|_{H^{\ell+1}(\Omega)} + \|\partial_{tt} U\|_{L^1(0,T;H^{\ell+1}(\Omega))}\Big) \\
&\quad + h_{\boldsymbol{x}}^{m+1}\Big(\|\partial_t^{(m+2)} U\|_{C([0,T];L^2(\Omega))} + \|\nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot (c^2 \nabla_{\boldsymbol{x}} \partial_t^{(m+1)} U)\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))} \\
&\quad + \|c\nabla_{\boldsymbol{x}} \partial_t^{(m+2)} U\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega)^d)}\Big),
\end{aligned}
\tag{19}
$$

其中的隐含常数与 $h_{\boldsymbol{x}}$ 和 h_t无关。

***iii)* 能量守恒**。 设$U_{\boldsymbol{h}}^{p_t}$， $V_{\boldsymbol{h}}^{p_t}$是 (10) 的一个解。那么，对于 $F = 0$，满足以下能量守恒性质：对所有 $j = 0, \ldots, N_t$,

$$
\frac{1}{2}\left(\|\widetilde{V}_{\boldsymbol{h}}^{p_t}(\cdot, t_j)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|c\nabla_{\boldsymbol{x}} \widetilde{U}_{\boldsymbol{h}}^{p_t}(\cdot, t_j)\|_{L^2(\Omega)^d}^2\right) = \frac{1}{2}\left(\|V_{0,h_{\boldsymbol{x}}}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|c\nabla_{\boldsymbol{x}} U_{0,h_{\boldsymbol{x}}}\|_{L^2(\Omega)^d}^2\right).
$$

通过对 (10) 进行测试可以推导出此恒等式；对于 $j = 0, \ldots, N_t$，取

$$
\chi_{\boldsymbol{h}}^{p_t-1}(\boldsymbol{x}, t) = -\partial_t \widetilde{V}_{\boldsymbol{h}}^{p_t}(\boldsymbol{x}, t)\mathbb{1}_{[0,t_j]}(t) \quad \text{and} \quad \lambda_{\boldsymbol{h}}^{p_t-1}(\boldsymbol{x}, t) = \partial_t \widetilde{U}_{\boldsymbol{h}}^{p_t}(\boldsymbol{x}, t)\mathbb{1}_{[0,t_j]}(t),
$$

并将所得的两个方程相加，即得

$$
(\widetilde{V}_{\boldsymbol{h}}^{p_t}, \partial_t \widetilde{V}_{\boldsymbol{h}}^{p_t})_{L^2(\Omega\times[0,t_j])} + (c^2 \nabla_{\boldsymbol{x}} \widetilde{U}_{\boldsymbol{h}}^{p_t}, \partial_t \widetilde{U}_{\boldsymbol{h}}^{p_t})_{L^2(\Omega\times[0,t_j])} = 0,
$$

由此可直接推出 (29)。

现在我们推导出 (6) 的相应性质。

定理 2.9。 存在唯一的解 $U_{\boldsymbol{h}}^{p_t}(6)$，且它满足

$$
T^{-1/2}\|\partial_t U_{\boldsymbol{h}}^{p_t}\|_{L^2(Q_T)} + \|c\nabla_{\boldsymbol{x}} U_{\boldsymbol{h}}^{p_t}\|_{C([0,T];L^2(\Omega)^d)} \lesssim \|V_0\|_{L^2(\Omega)} + \|c\nabla_{\boldsymbol{x}} U_0\|_{L^2(\Omega)^d} + \|F\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))},
$$

其中隐藏常数仅取决于 p_t。此外，在假设 *2.8* 下，若 $V_0 \in H^{\ell+1}(\Omega)$ 且 U具有(18) 中的正则性，对于给定的 ℓ 和 m，且 $1 \le \ell \le p_{\boldsymbol{x}}$ 和 $1 \le m \le p_t$，则有以下误差估计：

$$
\begin{aligned}
\|c\nabla_{\boldsymbol{x}}(U - U_{\boldsymbol{h}}^{p_t})\|_{C([0,T];L^2(\Omega))} &\lesssim h_{\boldsymbol{x}}^{\ell} + h_t^{m+1}, \\
\|U - U_{\boldsymbol{h}}^{p_t}\|_{C([0,T];L^2(\Omega))} &\lesssim h_{\boldsymbol{x}}^{\ell+1} + h_t^{m+1}.
\end{aligned}
\tag{20}
$$

这里我们仅报告收敛阶，省略了对 U 和 V_0 的依赖；这些依赖与 (19) 中最后两个误差估计完全相同。此外，我们有

$$
\begin{aligned}
\|\partial_t U - \partial_t U_{\boldsymbol{h}}^{p_t}\|_{L^2(Q_T))} &\lesssim h_{\boldsymbol{x}}^{\ell+1}\Big(\|\partial_t U\|_{C([0,T];H^{\ell+1}(\Omega))} + \|V_0\|_{H^{\ell+1}(\Omega)} + \|\partial_{tt} U\|_{L^1(0,T;H^{\ell+1}(\Omega))}\Big) \\
&\quad + h_t^{\min\{m+1,p_t\}}\|\partial_t^{(m+2)} U\|_{C([0,T];L^2(\Omega))} \\
&\quad + h_t^{m+1}\Big(\|\nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot (c^2 \nabla_{\boldsymbol{x}} \partial_t^{(m+1)} U)\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))} + \|c\nabla_{\boldsymbol{x}} \partial_t^{(m+2)} U\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega)^d)}\Big) \\
&\lesssim h_{\boldsymbol{x}}^{\ell+1} + h_t^{\min\{m+1,p_t\}}.
\end{aligned}
\tag{21}
$$

最后，对于 $F=0$，满足以下能量守恒性质：对于所有 $j=0,\ldots,N_t$，

$$\frac{1}{2}\left(\|\widetilde{V}_{\boldsymbol{h}}^{p_t}(\cdot,t_j)\|_{L^2(\Omega)}^2+\|c\nabla_{\boldsymbol{x}}U_{\boldsymbol{h}}^{p_t}(\cdot,t_j)\|_{L^2(\Omega)^d}^2\right)=\frac{1}{2}\left(\|V_{0,h_{\boldsymbol{x}}}\|_{L^2(\Omega)}^2+\|c\nabla_{\boldsymbol{x}}U_{0,h_{\boldsymbol{x}}}\|_{L^2(\Omega)^d}^2\right). \tag{22}$$

其中，$\widetilde{V}_{\boldsymbol{h}}^{p_t}$是 $Q_{\boldsymbol{h}}^{p_t}(Q_T)$ 中满足下述条件的唯一函数：

$$\Pi_{h_t}^{(p_t-1,-1)}\widetilde{V}_{\boldsymbol{h}}^{p_t}=\partial_t U_{\boldsymbol{h}}^{p_t}\quad and\quad \widetilde{V}_{\boldsymbol{h}}^{p_t}(\cdot,0)=V_{0,h_{\boldsymbol{x}}}, \tag{23}$$

证明。由定理 2.5 可知，$U_{\boldsymbol{h}}^{p_t}\in Q_{\boldsymbol{h}}^{p_t}(Q_T)$是方程（6）的解，当且仅当 $(U_{\boldsymbol{h}}^{p_t},\widetilde{V}_{\boldsymbol{h}}^{p_t})\in Q_{\boldsymbol{h}}^{p_t}(Q_T)\times Q_{\boldsymbol{h}}^{p_t}(Q_T)$是方程（10）的解，其中 $U_{\boldsymbol{h}}^{p_t}=U_{\boldsymbol{h}}^{p_t}$和 $\widetilde{V}_{\boldsymbol{h}}^{p_t}$满足（23）。因此，方程（10）的适定性、误差估计（20）以及能量守恒性质立即推出相应的结论。剩下只需证明（21）。利用（23）以及 L^2 投影的稳定性，我们计算得：

$$\begin{aligned}\|\partial_t U-\partial_t U_{\boldsymbol{h}}^{p_t}\|_{L^2(Q_T)}&\le\|\partial_t U-\Pi_{h_t}^{(p_t-1,-1)}\partial_t U\|_{L^2(Q_T)}+\|\Pi_{h_t}^{(p_t-1,-1)}\partial_t U-\partial_t U_{\boldsymbol{h}}^{p_t}\|_{L^2(Q_T)}\\&=\|\partial_t U-\Pi_{h_t}^{(p_t-1,-1)}\partial_t U\|_{L^2(Q_T)}+\|\Pi_{h_t}^{(p_t-1,-1)}(\partial_t U-\widetilde{V}_{\boldsymbol{h}}^{p_t})\|_{L^2(Q_T)}\\&\le\|\partial_t U-\Pi_{h_t}^{(p_t-1,-1)}\partial_t U\|_{L^2(Q_T)}+\|\partial_t U-\widetilde{V}_{\boldsymbol{h}}^{p_t}\|_{L^2(Q_T)}\\&\le\|\partial_t U-\Pi_{h_t}^{(p_t-1,-1)}\partial_t U\|_{L^2(Q_T)}+T^{1/2}\|\partial_t U-\widetilde{V}_{\boldsymbol{h}}^{p_t}\|_{C([0,T];L^2(\Omega))}.\end{aligned}$$

L^2 然后，利用 L^2 投影的逼近性质以及（19）中的第一个估计，即可得出结论。 □

注 2.10 (重构 $\widetilde{V}_{\boldsymbol{h}}^{p_t}$)。 对于（23）中定义的 $\partial_t U_{\boldsymbol{h}}^{p_t}$的重构 $\widetilde{V}_{\boldsymbol{h}}^{p_t}$，稳定性估计

$$\|\widetilde{V}_{\boldsymbol{h}}^{p_t}\|_{C([0,T];L^2(\Omega))}+\|c\nabla_{\boldsymbol{x}}U_{\boldsymbol{h}}^{p_t}\|_{C([0,T];L^2(\Omega)^d)}\lesssim\|V_0\|_{L^2(\Omega)}+\|c\nabla_{\boldsymbol{x}}U_0\|_{L^2(\Omega)^d}+\|F\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}$$

以及误差估计

$$\|\partial_t U-\widetilde{V}_{\boldsymbol{h}}^{p_t}\|_{C([0,T];L^2(\Omega))}\lesssim h_{\boldsymbol{x}}^{\ell+1}+h_t^{m+1}$$

可直接由公式 (10) 的相关结果得出。

注 2.11 (重构 $\overset{*}{U}{}_{\boldsymbol{h}}^{p_t+1}$)。 按照 *[13,§4.4],*，可通过以下公式得到 U 关于 (6) 的数值解 $U_{\boldsymbol{h}}^{p_t}$的后处理近似 $\overset{*}{U}{}_{\boldsymbol{h}}^{p_t+1}\in Q_{\boldsymbol{h}}^{p_t+1}(Q_T)$：

$$\overset{*}{U}{}_{\boldsymbol{h}}^{p_t+1}(\boldsymbol{x},t):=U_{0,h_{\boldsymbol{x}}}(\boldsymbol{x})+\int_0^t\widetilde{V}_{\boldsymbol{h}}^{p_t}(\boldsymbol{x},s)\mathrm{d}s,\quad(\boldsymbol{x},t)\in Q_T,$$

其中 $\widetilde{V}_{\boldsymbol{h}}^{p_t}$如 (23) 所示。对于 $p_t>1$，且假设 U 足够光滑，*[13,*定理 *4.12]* 证明了

$$\|U-\overset{*}{U}{}_{\boldsymbol{h}}^{p_t+1}\|_{C([0,T];L^2(\Omega))}\lesssim h_{\boldsymbol{x}}^{p_{\boldsymbol{x}}+1}+h_t^{p_t+2}.$$

2.5.1 数值结果

关于验证第 2.5 节中针对公式 (10) 所述稳定性结果和收敛估计的详细数值实验，我们请读者参阅 [13]。由于 (6) 与 (10) 等价，因此其中也确认了相同的稳定性性质和收敛行为。关于利用 [41]（见注2.1）中引入的二阶公式 (6) 变体直接得出的数值结果，我们还请读者参阅 [41]和 [43, §7] 。本节重点验证 (22) 中给出的能量守恒性质。

考虑在 $Q_T=\Omega\times(0,T)$ 上的线性波动方程 (1)，其中 $\Omega=(-30,30)$，且 $T=10$，其数据为

$$c(x)=1,\quad F(x,t)=0,\quad U_0(x)=\omega(x+1)S(x+1),\quad V_0(x)=-\omega'(x+1)S(x+1)-\omega(x+1)S'(x+1),$$

其中

$$\omega(s) := e^{-20(s-0.1)^2} - e^{-20(s+0.1)^2}, \qquad S(s) := \frac{1}{1+e^{-30s}}.$$

精确解为

$$U(x,t) = \omega(x-t+1)S(x-t+1).$$

我们可以假设满足齐次狄利克雷边界条件，因为

$$\max_{t\in(0,10),\ x\in\{-30,30\}} |U(x,t)| \le 10^{-16}.$$

我们在含有 $N_t = 128$ 个时间单元和 $N_x = 384$ 个空间单元的均匀网格上，使用多项式次数 $p_t = p_x = 1$ 和 $p_t = p_x = 2$，对 (10) 中的公式进行测试。对于每个时间步 t_j，$j = 0, \ldots, N_t$，我们计算离散能量

$$E_{\boldsymbol{h}}^{p_t}(t_j) := \frac{1}{2}\left(\|\widetilde{V}_{\boldsymbol{h}}^{p_t}(\cdot,t_j)\|^2_{L^2(-30,30)} + \|\nabla_{\boldsymbol{x}} U_{\boldsymbol{h}}^{p_t}(\cdot,t_j)\|^2_{L^2(-30,30)}\right).$$

~我们回顾一下，$V_{\boldsymbol{h}}^{p_t}$是 (23) 中定义的 $\partial_t U_{\boldsymbol{h}}^{p_t}$ 的重构，而 $U_{h_x,\,0}$ 和 $V_{h_x,\,0}$ 分别使用椭圆投影和 L^2 投影定义。我们考虑量 $|E_{\boldsymbol{h}}^{p_t}(t_j) - E_{\boldsymbol{h}}^{p_t}(0)|$，其中 $j = 1, \ldots, N_t$。根据 (22)，这一差值预计为机器精度量级。图1中的数值结果与这一预期吻合良好。

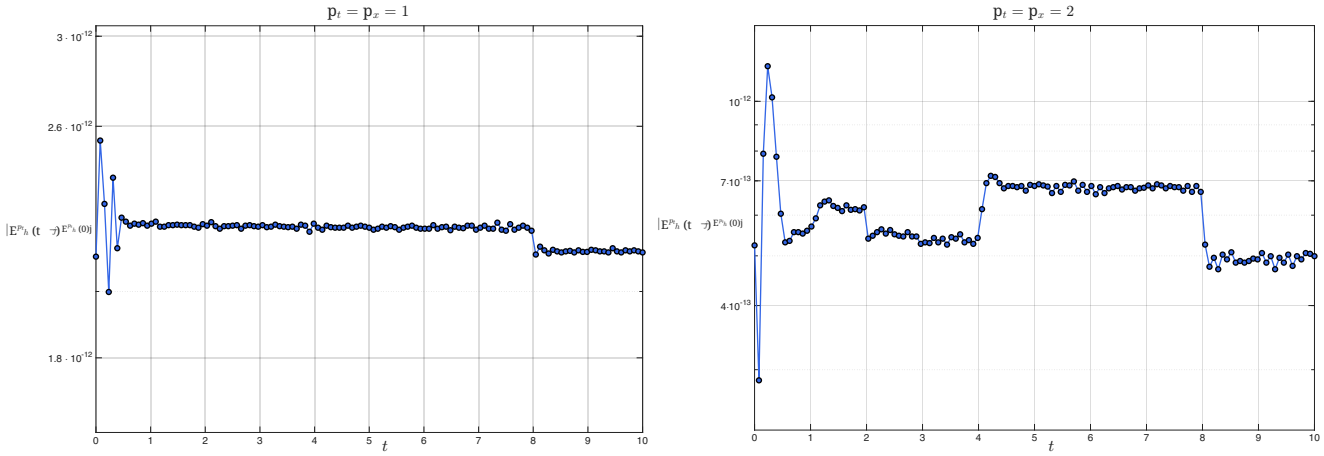


图1：使用多项式次数 $p_t = p_x = 1$（左）和 $p_t = p_x = 2$（右）时离散能量误差 $|E_{\boldsymbol{h}}^{p_t}(t_j) - E_{\boldsymbol{h}}^{p_t}(0)|$ 的演变。

我们强调，要观察到离散能量守恒，关键在于使用~重构 $V_{\boldsymbol{h}}^{p_t}$而非 $\partial_t U_{\boldsymbol{h}}^{p_t}$来计算能量。正如 [40, 备注 4.233], 中所示，使用 $\partial_t U_{\boldsymbol{h}}^{p_t}$定义的离散能量并不能像图1中那样达到机器精度的守恒，而只能达到与数值方法相同的精度阶。

3 半线性情形的扩展

本节考虑半线性波动方程。尽管文献 [21], 已研究将 [1, 11] 中的时间一阶 DG–CG 格式 (10) 推广到这一情形，但这里我们展示，二阶时间方法 (6) 也可以类似地加以推广。所得二阶时间公式与一阶时间公式之间的等价性，可以通过与线性情形相同的论证得到。我们还介绍了二阶时间方法的两种辛格式：一种在时间方向采用高斯–洛巴托求积公式，另一种采用高斯–勒让德求积公式。

3.1 半线性波动方程

我们考虑以下初边值问题，其中包含非线性项 $g(U)$，且 $g(0) = 0$:

$$\begin{cases} \partial_t^2 U - \operatorname{div}_{\boldsymbol{x}}(c^2 \nabla_{\boldsymbol{x}} U) + g(U) = F & \text{in } Q_T, \\ U = 0 & \text{on } \partial\Omega \times (0,T), \\ U(\cdot,0) = U_0, \quad \partial_t U(\cdot,t)_{|t=0} = V_0 & \text{in } \Omega. \end{cases} \tag{24}$$

相应的一阶时间问题如下:

$$\begin{cases} \partial_t U - V = 0 & \text{in } Q_T, \\ \partial_t V - \operatorname{div}_{\boldsymbol{x}}(c^2 \nabla_{\boldsymbol{x}} U) + g(U) = F & \text{in } Q_T, \\ U = 0 & \text{on } \partial\Omega \times (0,T), \\ U(\cdot,0) = U_0, \quad V(\cdot,0) = V_0 & \text{in } \Omega. \end{cases} \tag{25}$$

为方便后文，我们引入

$$G(U) := \int_0^U g(V)\mathrm{d}V. \tag{26}$$

Re标记 3.1 (非线性项示例)。该框架涵盖了几个重要模型 *s:*

- $g(U) = c^2$正弦 U: 正弦-戈登方程,
- $g(U) = c^2 U$: 线性克莱因-戈登方程,
- $g(U) = c^4 U + c^2 |U|^\rho U$，其中 ρ处于次临界范围，即当 $d = 1$时 $\rho > 0$，2以及当 $d = 3$时 $0 < \rho \leq 4$: 具有散焦非线性的非线性克莱因-戈登方程。

注 *3.2*（适定性结果）。关于 *(24)* 的适定性结果至少可追溯至 *[26]*。对于 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$一个有界的利普希茨区域，在具体情形 $g(U) = |U|^\rho U$下，当 $d = 2$时 $\rho > 0$，或当 $d = 3$时$0 < \rho \leq 2$，文献 *[26,* 定理 *1.1* 和 *1.2]* 证明了: 对于 $c = 1$, $F \in L^2(Q_T)$、$U_0 \in H_0^1(\Omega) \cap L^{\rho+2}(\Omega)$ 以及 $V_0 \in L^2(\Omega)$，存在一个 U关于 *(24)* 的唯一弱解，其属于 $L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega) \cap L^{\rho+2}(\Omega)) \cap W^{1,\infty}(0,T; L^2(\Omega))$。对于具有多项式增长的 g单调情形，当多项式次数足够小时，该结果仍然成立（例如参见 *[25]*）。
对于Ω 一个 C^2正则区域，假设 $g \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ 其中

$$\begin{aligned} & zg(z) \geq 0 \quad \textit{for all } z \in \mathbb{R}, \\ & G(U_0) \in L^1(\Omega), \quad \textit{with } G \textit{ as in } (26), \\ & |g'(z)| \leq C(1 + |z|^\gamma) \quad \textit{for a.e. } z \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

当 $\gamma > 0$ 若 $d = 1,2$，或 $0 \leq \gamma \leq 2$ 若 $d = 3$ 时，式 (24) 的强解的存在性与唯一性已在 *[2,* 定理 *3.7],* 中证明，适用于 $c = 1$, $F \in H^1(0, T;\ L^2(\Omega))$、$U_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ 和 $V_0 \in H_0^1(\Omega)$。这涵盖了非线性克莱因-戈登方程: 当 $\rho > 0$ 若 $d = 1,2$，或 $0 < \rho \leq 2$ 若 $d = 3$。

当 G 如式 (26) 所示，问题 (25) 是一个哈密顿量为以下形式的非自治哈密顿系统

$$\mathcal{H}(V,U,t) := \frac{1}{2}\Big(\int_\Omega |V(\boldsymbol{x},t)|^2 \mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_\Omega |\nabla_{\boldsymbol{x}} U(\boldsymbol{x},t)|^2 \mathrm{d}\boldsymbol{x} \Big) + \int_\Omega G\left(U(\boldsymbol{x},t)\right) \mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_\Omega F(\boldsymbol{x},t)\, U(\boldsymbol{x},t) \mathrm{d}\boldsymbol{x}, \tag{27}$$

例如参见 [29, §3.2]。由于该系统是非自治的，哈密顿量（或能量）通常不守恒，而辛形式守恒；参见 [33, 定理 2.1]。然而，如果 F 与 t无关，则该系统实际上是自治的，并且 $\frac{d}{dt}\mathcal{H} = 0$。

3.2 离散形式

[1, 11] 中针对线性波动方程（见（10））介绍的方法，在 [21] 中扩展到了半线性波动方程。该扩展如下：

find $\widetilde{U}_{\boldsymbol{h}}^{p_t}, \widetilde{V}_{\boldsymbol{h}}^{p_t} \in Q_{\boldsymbol{h}}^{p_t}(Q_T)$ such that $\widetilde{U}_{\boldsymbol{h}}^{p_t}(\cdot,0) = U_{0,h_{\boldsymbol{x}}}$, $\widetilde{V}_{\boldsymbol{h}}^{p_t}(\cdot,0) = V_{0,h_{\boldsymbol{x}}}$ in Ω, and

$$\begin{cases} (\partial_t \widetilde{U}_{\boldsymbol{h}}^{p_t}, \chi_{\boldsymbol{h}}^{p_t-1})_{L^2(Q_T)} - (\widetilde{V}_{\boldsymbol{h}}^{p_t}, \chi_{\boldsymbol{h}}^{p_t-1})_{L^2(Q_T)} = 0 & \text{for all } \chi_{\boldsymbol{h}}^{p_t-1} \in \partial_t Q_{\boldsymbol{h}}^{p_t}(Q_T), \\ (\partial_t \widetilde{V}_{\boldsymbol{h}}^{p_t}, \lambda_{\boldsymbol{h}}^{p_t-1})_{L^2(Q_T)} + (c^2 \nabla_{\boldsymbol{x}} \widetilde{U}_{\boldsymbol{h}}^{p_t}, \nabla_{\boldsymbol{x}} \lambda_{\boldsymbol{h}}^{p_t-1})_{L^2(Q_T)} & \\ \qquad + (g(\widetilde{U}_{\boldsymbol{h}}^{p_t}), \lambda_{\boldsymbol{h}}^{p_t-1})_{L^2(Q_T)} = (F, \lambda_{\boldsymbol{h}}^{p_t-1})_{L^2(Q_T)} & \text{for all } \lambda_{\boldsymbol{h}}^{p_t-1} \in \partial_t Q_{\boldsymbol{h}}^{p_t}(Q_T). \end{cases} \tag{28}$$

按照第 2.4 节中的方法，可以证明，式 (28) 中的方法可等价地改写为以下关于时间的二阶离散形式：

求 $U_{\boldsymbol{h}}^{p_t} \in Q_{\boldsymbol{h}}^{p_t}(Q_T)$，使得 $U_{\boldsymbol{h}}^{p_t}(\cdot,0) = U_{0,h_{\boldsymbol{x}}}$ 在 Ω 中，且

$$\begin{aligned} &-(\partial_t U_{\boldsymbol{h}}^{p_t}, \partial_t W_{\boldsymbol{h}}^{p_t})_{L^2(Q_T)} + (c^2 \nabla_{\boldsymbol{x}} U_{\boldsymbol{h}}^{p_t}, \nabla_{\boldsymbol{x}} \Pi_{h_t}^{(p_t-1,-1)} W_{\boldsymbol{h}}^{p_t})_{L^2(Q_T)} \\ &\quad + (g(U_{\boldsymbol{h}}^{p_t}), \Pi_{h_t}^{(p_t-1,-1)} W_{\boldsymbol{h}}^{p_t})_{L^2(Q_T)} = (F, \Pi_{h_t}^{(p_t-1,-1)} W_{\boldsymbol{h}}^{p_t})_{L^2(Q_T)} + (V_{0,h_{\boldsymbol{x}}}, W_{\boldsymbol{h}}^{p_t}(\cdot,0))_{L^2(\Omega)} \end{aligned} \tag{29}$$

对所有 $W_{\boldsymbol{h}}^{p_t} \in Q_{\boldsymbol{h},\bullet,0}^{p_t}(Q_T)$ 均成立。

我们强调，在这种情况下，检验函数前的投影算子 $\Pi^{(p_t-1,-1)}{}_{h_t}$ 也插入了非线性项中。

注 3.3. 对于属于 $S_{h_t}^{p_t}(0,T)$ 的函数，L^2 投影与高斯–勒让德节点处的逐单元拉格朗日插值算子相重合；这一点在 (9) 中得到确立，并在下文的 (36) 中予以形式化。对于公式 (29)，这一性质尤其有用。它将 L^2 投影（包括非线性项中的投影）的计算简化为简单的插值，从而避免求解局部线性方程组；这是先前在第 *2.3* 节讨论过的一项关键优势。

我们陈述如下等价性结果。其证明是定理 2.5 证明的直接推广，因此不再赘述。

命题 3.4. 若$(U_{\boldsymbol{h}}^{p_t}, V_{\boldsymbol{h}}^{p_t}) \in Q_{\boldsymbol{h}}^{p_t}(Q_T) \times Q_{\boldsymbol{h}}^{p_t}(Q_T)$是(28)的一个解，则 $U_{\boldsymbol{h}}^{p_t} = U_{\boldsymbol{h}}^{p_t}$是(29)的一个解。反之，若 $U_{\boldsymbol{h}}^{p_t} \in Q_{\boldsymbol{h}}^{p_t}(Q_T)$是(29)的一个解，则以下一对$(U_{\boldsymbol{h}}^{p_t}, V_{\boldsymbol{h}}^{p_t}) \in Q_{\boldsymbol{h}}^{p_t}(Q_T) \times Q_{\boldsymbol{h}}^{p_t}(Q_T)$，其中

$$\widetilde{U}_{\boldsymbol{h}}^{p_t} = U_{\boldsymbol{h}}^{p_t}, \quad \widetilde{V}_{\boldsymbol{h}}^{p_t} \quad \textit{such that} \quad \Pi_{h_t}^{(p_t-1,-1)} \widetilde{V}_{\boldsymbol{h}}^{p_t} = \partial_t U_{\boldsymbol{h}}^{p_t}, \quad \widetilde{V}_{\boldsymbol{h}}^{p_t}(\cdot,0) = V_{0,h_{\boldsymbol{x}}}$$

是(28)的一个解。

对于公式 (28)，在以下情形下，离散解的存在性与唯一性已得到证明：

- 全局利普希茨函数 g：在这种情况下，要求 h_t 足够小（其上界为一个与 $h_{\boldsymbol{x}}$ 无关的常数），参见 [21, 定理 2.1];
- 局部利普希茨函数 g：在这种情况下，要求 $h_{\boldsymbol{x}}$ 和 h_t 充分（其界由与 $h_{\boldsymbol{x}}$ 和 h_t无关的常数给出）；这是结合 [21, § 2], [20, § 2],和 [19, § 2 以及 §4]中的结果得到的。

此外，假设空间区域 Ω 满足椭圆正则性，且 $V_0 \in H_0^1(\Omega)$，并使用椭圆投影来定义$V_{0,\ h_{\boldsymbol{x}}}$ from V_0，则以下误差估计

在 [21, 定理 4.1], 中推导得出，其前提是离散解存在且连续解 U 具有充分的正则性：

$$\|U-\widetilde{U}_{\boldsymbol{h}}^{p_t}\|_{C([0,T];L^2(\Omega))}+\|\partial_t U-\widetilde{V}_{\boldsymbol{h}}^{p_t}\|_{C([0,T];L^2(\Omega))}\lesssim h_{\boldsymbol{x}}^{p_{\boldsymbol{x}}+1}+h_t^{p_t+1}, \tag{30}$$

其中，隐含常数与 h_t 和 $h_{\boldsymbol{x}}$无关。最后，我们得到以下能量守恒性质。

引理 **3.5.** 设 $F=0$。令 $\widetilde{U}_{\boldsymbol{h}}^{p_t}$、$\widetilde{V}_{\boldsymbol{h}}^{p_t}$为(28)的一个解。那么，对于所有 $j=0,\ \ldots\ldots,\ N_t$，

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left(\|\widetilde{V}_{\boldsymbol{h}}^{p_t}(\cdot,t_j)\|_{L^2(\Omega)}^2+\|c\nabla_{\boldsymbol{x}}\widetilde{U}_{\boldsymbol{h}}^{p_t}(\cdot,t_j)\|_{L^2(\Omega)}^2\right)+\|G(\widetilde{U}_{\boldsymbol{h}}^{p_t}(\cdot,t_j))\|_{L^2(\Omega)}^2\\&\qquad=\frac{1}{2}\left(\|V_{0,h_{\boldsymbol{x}}}\|_{L^2(\Omega)}^2+\|c\nabla_{\boldsymbol{x}}U_{0,h_{\boldsymbol{x}}}\|_{L^2(\Omega)}^2\right)+\|G(U_{0,h_{\boldsymbol{x}}})\|_{L^2(\Omega)}^2,\end{aligned}$$

其中 G 与(26)中的相同。

证明。 与线性情形一样，对、……、N_t，用 $j=0$测试(28)，其中

$$\chi_{\boldsymbol{h}}^{p_t-1}(\boldsymbol{x},t)=-\partial_t\widetilde{V}_{\boldsymbol{h}}^{p_t}(\boldsymbol{x},t)\mathbb{1}_{[0,t_j]}(t)\quad\text{and}\quad\lambda_{\boldsymbol{h}}^{p_t-1}(\boldsymbol{x},t)=\partial_t\widetilde{U}_{\boldsymbol{h}}^{p_t}(\boldsymbol{x},t)\mathbb{1}_{[0,t_j]}(t),$$

并将两个方程相加。由此得到如下关系

$$(\widetilde{V}_{\boldsymbol{h}}^{p_t},\partial_t\widetilde{V}_{\boldsymbol{h}}^{p_t})_{L^2(\Omega\times[0,t_j])}+(c^2\nabla_{\boldsymbol{x}}\widetilde{U}_{\boldsymbol{h}}^{p_t},\partial_t\widetilde{U}_{\boldsymbol{h}}^{p_t})_{L^2(\Omega\times[0,t_j])}+(g(\widetilde{U}_{\boldsymbol{h}}^{p_t}),\partial_t\widetilde{U}_{\boldsymbol{h}}^{p_t})_{L^2(\Omega\times[0,t_j])}=0.$$

该结果可直接由 $g(U)=G'(U)$ 得出。 □

与线性情形一样，命题 (3.4) 的等价性结果使得 (28) 的性质可以推广到 (29)。特别是，对于在与 (28) 中公式相同的假设下成立的误差估计，我们有

$$\begin{aligned}\|U-U_{\boldsymbol{h}}^{p_t}\|_{C([0,T];L^2(\Omega))}&\lesssim h_{\boldsymbol{x}}^{p_{\boldsymbol{x}}+1}+h_t^{p_t+1},\\\|\partial_t U-\widetilde{V}_{\boldsymbol{h}}^{p_t}\|_{C([0,T];L^2(\Omega))}&\lesssim h_{\boldsymbol{x}}^{p_{\boldsymbol{x}}+1}+h_t^{p_t+1},\end{aligned} \tag{31}$$

其中 $\widetilde{V}_{\boldsymbol{h}}^{p_t}\in Q_{\boldsymbol{h}}^{p_t}(Q_T)$ 是由 (23) 定义的 $\partial_t U_{\boldsymbol{h}}^{p_t}$的重构。不对 $\partial_t U_{\boldsymbol{h}}^{p_t}$进行重构时，我们有

$$\|\partial_t U-\partial_t U_{\boldsymbol{h}}^{p_t}\|_{L^2(Q_T)}\lesssim h_{\boldsymbol{x}}^{p_{\boldsymbol{x}}+1}+h_t^{p_t}. \tag{32}$$

最后，对于 $F=0$，能量守恒性质为：对 $j=0,\ \ldots\ldots,\ N_t$,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left(\|\widetilde{V}_{\boldsymbol{h}}^{p_t}(\cdot,t_j)\|_{L^2(\Omega)}^2+\|c\nabla_{\boldsymbol{x}}U_{\boldsymbol{h}}^{p_t}(\cdot,t_j)\|_{L^2(\Omega)}^2\right)+\|G(U_{\boldsymbol{h}}^{p_t}(\cdot,t_j))\|_{L^2(\Omega)}^2\\&\qquad=\frac{1}{2}\left(\|V_{0,h_{\boldsymbol{x}}}\|_{L^2(\Omega)}^2+\|c\nabla_{\boldsymbol{x}}U_{0,h_{\boldsymbol{x}}}\|_{L^2(\Omega)}^2\right)+\|G(U_{0,h_{\boldsymbol{x}}})\|_{L^2(\Omega)}^2,\end{aligned}$$

3.2.1 数值结果

本节针对正弦-戈登方程验证 (30) 中的收敛估计。我们考虑问题 (25)，其中 $g(U)=\sin(U)$，定义在 $Q_T=\Omega\times(0,\ T)$ 上，其中 $\Omega=(-20,\ 20)$，且 $T=1$，数据为

$$c(x)=1,\qquad F(x,t)=0,\qquad U_0(x)=0,\qquad V_0(x)=\frac{4}{\gamma}\operatorname{sech}\left(\frac{x}{\gamma}\right),\quad \gamma=1.1.$$

(25) 的精确解为

$$U(x,t)=4\arctan\left(\varphi(t)\operatorname{sech}\left(\frac{x}{\gamma}\right)\right),\qquad \varphi(t)=\frac{1}{\sqrt{\gamma^2-1}}\sin\left(\frac{t}{\gamma}\sqrt{\gamma^2-1}\right). \tag{33}$$

由于

$$\max_{t\in(0,1),\ x\in\{-20,20\}} |U(x,t)| \le 10^{-16},$$

我们可以假设齐次狄利克雷边界条件。我们在均匀网格上使用 $p_t = p_{\boldsymbol{x}} = 1$ 和 $p_t = p_{\boldsymbol{x}} = 2$，对不同网格尺寸 $h_t = h_{\boldsymbol{x}}$ 下的公式 (29) 进行测试。非线性系统通过不动点迭代求解。图2报告了 $U - U_{\boldsymbol{h}}^{p_t}$ 时 $C^0([0,T];\ L^2(\Omega))$ 和 $H^1(0,T;\ L^2(\Omega))$ 范数下的绝对误差，以及 $\partial_t U - \widetilde{V}_{\boldsymbol{h}}^{p_t}$ 时 $C^0([0,T];\ L^2(\Omega))$ 范数下的绝对误差。观测到的收敛行为与误差估计 (31) 和 (32) 一致。

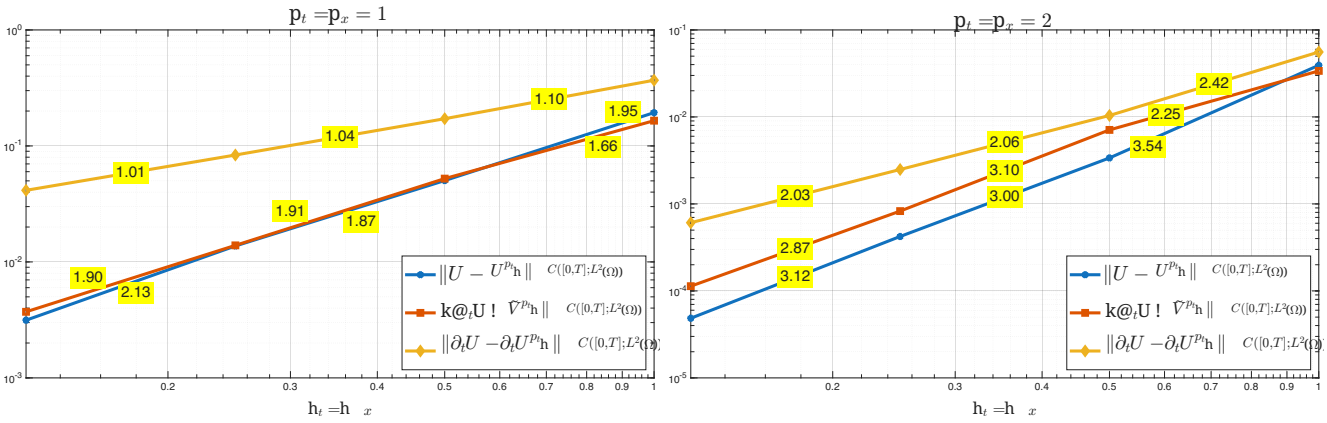


图2：对于精确解 (33)，在不同网格尺寸 $h_t = h_x$ 下，使用多项式次数 $p_t = p_x = 1$ （左）和 $p_t = p_x = 2$ （右）时的绝对误差。

3.3 基于时间方向数值求积的辛变体

时间二阶离散（29）具有无条件稳定性，并能精确守恒离散能量。然而，非线性项的积分需要使用求积公式，因此实际中的能量守恒只能达到数值积分误差的精度。因此，若要将能量守恒做到机器精度，就应相应地选择求积公式，这使得该格式依赖于具体问题。例如，[12], French 和 Sch¨affer 提出了一种动态求积公式。另一种做法是固定求积公式，从而放弃能量守恒，转而追求其他几何性质。高斯–勒让德和高斯–洛巴托求积公式是值得考虑的选择，因为它们能使格式在时间上具有辛性质，正如下文所示。

我们强调，本节采用了略有不同的视角，不再从时空格式出发。事实上，本节所讨论的方法都可以理解为先对空间进行半离散化 $S_{h_{\boldsymbol{x}}}^{p_{\boldsymbol{x}}}(\Omega)$，再使用 Runge–Kutta格式进行时间离散。空间半离散化具有一项重要性质，即保留了波动方程的哈密顿结构，见 [31]。因此，寻找时间方向上的辛积分器是合理的。特别是，当系统是非自治的时，即使在连续层面，能量也不守恒，而辛形式却保持不变。因此，在这种情况下，辛格式优于能量守恒格式。

注 3.6. 常微分方程（*ODEs*）的*Galerkin*格式与*Runge–Kutta*方法之间的等价性已在多种背景下得到探讨。在 *[16, 15],* 中提出了一种单步*Galerkin*方法，其中试探函数连续，而检验函数不连续，但二者的多项式次数相同。作者证明了这一公式与*Runge–Kutta*配点法等价。在 *[12],* 中，针对一般常微分方程推导了连续–不连续*Galerkin*方法，并证明采用*Gauss–Legendre*点处的*Lagrange*插值这一变体等价于一种

隐式龙格–库塔方法。最后， *[4]* 证明，一类一般的有限元时间积分格式在结合适当的求积公式后等价于 ***Runge–Kutta***方法；具体而言，采用高斯–勒让德求积可得到高斯龙格–库塔格式。

我们使用记号 $(\cdot,\cdot)_{L^2_{\mathsf{GLe},m_1}(Q_T)}$ 和 $(\cdot,\cdot)_{L^2_{\mathsf{GLo},m_2}(Q_T)}$ 分别表示在每个时间区间 $[t_{n-1},t_n]$内，利用高斯–勒让德节点 $m_1\geq 1$ 和高斯–洛obatto节点 $m_2\geq 2$ 进行时间数值积分所计算的 Q_T上的 L^2内积。我们还回顾一下，高斯–勒让德求积公式对次数不超过 $2m_1-1$ 的多项式精确，而高斯–洛obatto求积公式对次数不超过 $2m_2-3$ 的多项式精确。

假设 $F\in C([0,T];\,L^2(\Omega))$，我们引入 (29) 的以下两种变体：

find $U_{\boldsymbol{h}}^{p_t}\in Q_{\boldsymbol{h}}^{p_t}(Q_T)$ such that $U_{\boldsymbol{h}}^{p_t}(\cdot,0)=U_{0,h_{\boldsymbol{x}}}$ in Ω and

$$\begin{aligned}&-(\partial_t U_{\boldsymbol{h}}^{p_t},\partial_t W_{\boldsymbol{h}}^{p_t})_{L^2(Q_T)}+(c^2\nabla_{\boldsymbol{x}}U_{\boldsymbol{h}}^{p_t},\nabla_{\boldsymbol{x}}W_{\boldsymbol{h}}^{p_t})_{L^2_{\mathsf{GLe},p_t}(Q_T)}\\&\quad+(g(U_{\boldsymbol{h}}^{p_t}),W_{\boldsymbol{h}}^{p_t})_{L^2_{\mathsf{GLe},p_t}(Q_T)}=(F,W_{\boldsymbol{h}}^{p_t})_{L^2_{\mathsf{GLe},p_t}(Q_T)}+(V_{0,h_{\boldsymbol{x}}},W_{\boldsymbol{h}}^{p_t}(\cdot,0))_{L^2(\Omega)}\end{aligned}\tag{34}$$

对所有 $W_{\boldsymbol{h}}^{p_t}\in Q_{\boldsymbol{h},\bullet,0}^{p_t}(Q_T)$;

求 $U_{\boldsymbol{h}}^{p_t}\in Q_{\boldsymbol{h}}^{p_t}(Q_T)$，使得 $U_{\boldsymbol{h}}^{p_t}(\cdot,0)=U_{0,h_{\boldsymbol{x}}}$ 在 Ω 中且

$$\begin{aligned}&-(\partial_t U_{\boldsymbol{h}}^{p_t},\partial_t W_{\boldsymbol{h}}^{p_t})_{L^2(Q_T)}+(c^2\nabla_{\boldsymbol{x}}U_{\boldsymbol{h}}^{p_t},\nabla_{\boldsymbol{x}}W_{\boldsymbol{h}}^{p_t})_{L^2_{\mathsf{GLo},p_t+1}(Q_T)}\\&\quad+(g(U_{\boldsymbol{h}}^{p_t}),W_{\boldsymbol{h}}^{p_t})_{L^2_{\mathsf{GLo},p_t+1}(Q_T)}=(F,W_{\boldsymbol{h}}^{p_t})_{L^2_{\mathsf{GLo},p_t+1}(Q_T)}+(V_{0,h_{\boldsymbol{x}}},W_{\boldsymbol{h}}^{p_t}(\cdot,0))_{L^2(\Omega)}\end{aligned}\tag{35}$$

对所有 $W_{\boldsymbol{h}}^{p_t}\in Q_{\boldsymbol{h},\bullet,0}^{p_t}(Q_T)$。

注 3.7。 设 $\mathcal{I}_{h_t}^{p_t-1}\colon C([0,T])\to\partial_t S_{h_t}^{p_t}(0,T)$ 为在高斯–勒让德节点处逐个单元定义的拉格朗日插值算子。与 L^2 投影算子 $\Pi^{(p_t-1,-1)}{}_{h_t}$ 类似，我们用同一符号 $\mathcal{I}_{h_t}^{p_t-1}$ 表示该算子及其时空扩展，后者作用于 $C([0,T];\,L^2(\Omega))$中的函数。对于所有 $v_{h_t}^{p_t}\in S_{h_t}^{p_t}(0,T)$，

$$\Pi_{h_t}^{(p_t-1,-1)}v_{h_t}^{p_t}=\mathcal{I}_{h_t}^{p_t-1}v_{h_t}^{p_t};\tag{36}$$

见(9)。利用算子 $\mathcal{I}_{h_t}^{p_t-1}$，(34) 中的格式可等价地写成如下形式：求 $U_{\boldsymbol{h}}^{p_t}\in Q_{\boldsymbol{h}}^{p_t}(Q_T)$ 使得 $U_{\boldsymbol{h}}^{p_t}(\cdot,0)=U_{0,h_{\boldsymbol{x}}}$ 在Ω 中，并且

$$\begin{aligned}&-(\partial_t U_{\boldsymbol{h}}^{p_t},\partial_t W_{\boldsymbol{h}}^{p_t})_{L^2(Q_T)}+(\mathcal{I}_{h_t}^{p_t-1}c^2\nabla_{\boldsymbol{x}}U_{\boldsymbol{h}}^{p_t},\nabla_{\boldsymbol{x}}W_{\boldsymbol{h}}^{p_t})_{L^2(Q_T)}\\&\quad+(\mathcal{I}_{h_t}^{p_t-1}g(U_{\boldsymbol{h}}^{p_t}),W_{\boldsymbol{h}}^{p_t})_{L^2(Q_T)}=(\mathcal{I}_{h_t}^{p_t-1}F,W_{\boldsymbol{h}}^{p_t})_{L^2(Q_T)}+(V_{0,h_{\boldsymbol{x}}},W_{\boldsymbol{h}}^{p_t}(\cdot,0))_{L^2(\Omega)}\end{aligned}\tag{37}$$

于是，由(37) 对(34)的改写可知，(29) 和(34) 中的方法仅在非线性项和源项中是否包含 $\mathcal{I}_{h_t}^{p_t-1}$ 这一点上有所不同（在(34) 中，应用于这些项中检验函数的投影算子 $\Pi^{(p_t-1,-1)}{}_{h_t}$ 是多余的，因此省略）。等价地，考虑到(36)，这种差异也可以解释为对这些项的第一个自变量进行插值，而不是对检验函数进行插值。

在下述定理中，我们证明公式 (34) 和 (35) 分别对应于适当的配点龙格–库塔时间离散格式，从而可推出其辛性。

定理 3.8。 格式 (34) 和 (35) 分别等价于将高斯–勒让德以及洛巴托 *IIIA/IIIB* 龙格–库塔时间离散应用于半线性波动方程的时间一阶形式 (25)，其中该方程采用 $S_{h_{\boldsymbol{x}}}^{p_{\boldsymbol{x}}}(\Omega)$ 空间进行空间半离散。因此，这两种格式都是辛的。

证明。 按照第 2.4 节中的方法，可以证明，格式 (34) 等价于（依命题 3.4 的含义）以下 (28) 的变体：求 $U_{\boldsymbol{h}}^{p_t}$， $V_{\boldsymbol{h}}^{p_t} \in Q_{\boldsymbol{h}}^{p_t}(Q_T)$，使得 $U_{\boldsymbol{h}}^{p_t}(\cdot,\ 0) = U_{0,\ h_{\boldsymbol{x}}}, \sim V_{\boldsymbol{h}}^{p_t}(\cdot,\ 0) = V_{0,\ h_{\boldsymbol{x}}}$ 在 Ω 中，并且

$$\begin{cases} (\partial_t \widetilde{U}_{\boldsymbol{h}}^{p_t}, \chi_{\boldsymbol{h}}^{p_t-1})_{L^2(Q_T)} - (\widetilde{V}_{\boldsymbol{h}}^{p_t}, \chi_{\boldsymbol{h}}^{p_t-1})_{L^2(Q_T)} = 0 & \text{for all } \chi_{\boldsymbol{h}}^{p_t-1} \in \partial_t Q_{\boldsymbol{h}}^{p_t}(Q_T), \\ (\partial_t \widetilde{V}_{\boldsymbol{h}}^{p_t}, \lambda_{\boldsymbol{h}}^{p_t-1})_{L^2(Q_T)} + (c^2 \nabla_{\boldsymbol{x}} \widetilde{U}_{\boldsymbol{h}}^{p_t}, \nabla_{\boldsymbol{x}} \lambda_{\boldsymbol{h}}^{p_t-1})_{L^2(Q_T)} & \\ \qquad + (g(\widetilde{U}_{\boldsymbol{h}}^{p_t}), \lambda_{\boldsymbol{h}}^{p_t-1})_{L^2_{\mathsf{GLe},p_t}(Q_T)} = (F, \lambda_{\boldsymbol{h}}^{p_t-1})_{L^2_{\mathsf{GLe},p_t}(Q_T)} & \text{for all } \lambda_{\boldsymbol{h}}^{p_t-1} \in \partial_t Q_{\boldsymbol{h},\bullet,0}^{p_t}(Q_T). \end{cases} \tag{38}$$

众所周知（例如，参见 [12]），格式 (38) 等价于高斯–勒让德龙格–库塔时间离散，而高斯–勒让德龙格–库塔时间离散具有辛性（参见 [23, 32]）。为完整起见，我们在附录中给出等价性的直接证明。

现在考虑方法 (35)。与引理 2.3 中一样，(35) 的一个等价公式如下：求 $U_{\boldsymbol{h}}^{p_t} \in Q_{\boldsymbol{h}}^{p_t}(Q_T)$ 和 $V_{\boldsymbol{h}}^{p_t-1} \in \partial_t Q_{\boldsymbol{h}}^{p_t}(Q_T)$，使得 $U_{\boldsymbol{h}}^{p_t}(\cdot,\ 0) = U_{0,\ h_{\boldsymbol{x}}}$ 属于 Ω，且

$$\begin{cases} (\partial_t U_{\boldsymbol{h}}^{p_t}, \chi_{\boldsymbol{h}}^{p_t-1})_{L^2(Q_T)} - (V_{\boldsymbol{h}}^{p_t-1}, \chi_{\boldsymbol{h}}^{p_t-1})_{L^2(Q_T)} = 0 & \text{for all } \chi_{\boldsymbol{h}}^{p_t-1} \in \partial_t Q_{\boldsymbol{h}}^{p_t}(Q_T), \\ -(V_{\boldsymbol{h}}^{p_t-1}, \partial_t W_{\boldsymbol{h}}^{p_t})_{L^2(Q_T)} + (c^2 \nabla_{\boldsymbol{x}} U_{\boldsymbol{h}}^{p_t}, \nabla_{\boldsymbol{x}} W_{\boldsymbol{h}}^{p_t})_{L^2_{\mathsf{GLo},p_t+1}(Q_T)} & \\ \qquad + (g(U_{\boldsymbol{h}}^{p_t}), W_{\boldsymbol{h}}^{p_t})_{L^2_{\mathsf{GLo},p_t+1}(Q_T)} = (F, W_{\boldsymbol{h}}^{p_t})_{L^2_{\mathsf{GLo},p_t+1}(Q_T)} & \\ \qquad\qquad + (V_{0,h_{\boldsymbol{x}}}, W_{\boldsymbol{h}}^{p_t}(\cdot,0))_{L^2(\Omega)} & \text{for all } W_{\boldsymbol{h}}^{p_t} \in Q_{\boldsymbol{h},\bullet,0}^{p_t}(Q_T). \end{cases} \tag{39}$$

为证明 (39) 实际上是洛巴托 IIIA/IIIB 龙格–库塔方法，我们考虑以下时间混合化公式：求 $U_{\boldsymbol{h}}^{p_t} \in Q_{\boldsymbol{h}}^{p_t}(Q_T)$、 $V_{\boldsymbol{h}}^{p_t-1} \in \partial_t Q_{\boldsymbol{h}}^{p_t}(Q_T)$ 和 $\widehat{V}_{h_{\boldsymbol{x}}}^{n} \in S_{h_{\boldsymbol{x}}}^{p_{\boldsymbol{x}}}$，其中 $n = 0,\ \ldots\ldots,\ N_t$，使得 $\widehat{V}_{h_{\boldsymbol{x}}}^{0} = V_{0,\ h_{\boldsymbol{x}}}$, $U_{\boldsymbol{h}}^{p_t}(\cdot,\ 0) = U_{0,\ h_{\boldsymbol{x}}}$ 属于 Ω，且

$$\begin{cases} (\partial_t U_{\boldsymbol{h}}^{p_t}, \chi_{\boldsymbol{h}}^{p_t-1})_{L^2(Q_T)} - (V_{\boldsymbol{h}}^{p_t-1}, \chi_{\boldsymbol{h}}^{p_t-1})_{L^2(Q_T)} = 0 & \text{for all } \chi_{\boldsymbol{h}}^{p_t-1} \in \partial_t Q_{\boldsymbol{h}}^{p_t}(Q_T), \\ (\partial_t V_{\boldsymbol{h}}^{p_t-1}, \lambda_{h_{\boldsymbol{x}},n}^{p_t})_{L^2(\Omega\times(t_{n-1},t_n))} & \\ \qquad + (\widehat{V}_{h_{\boldsymbol{x}}}^{n} - V_{\boldsymbol{h}}^{p_t-1}(\cdot,t_n^-), \lambda_{h_{\boldsymbol{x}},n}^{p_t}(\cdot,t_n))_{L^2(\Omega)} & \\ \qquad - (\widehat{V}_{h_{\boldsymbol{x}}}^{n-1} - V_{\boldsymbol{h}}^{p_t-1}(\cdot,t_{n-1}^+), \lambda_{h_{\boldsymbol{x}},n}^{p_t}(\cdot,t_{n-1}))_{L^2(\Omega)} & \\ \qquad + (c^2 \nabla_{\boldsymbol{x}} U_{\boldsymbol{h}}^{p_t}, \nabla_{\boldsymbol{x}} \lambda_{h_{\boldsymbol{x}},n}^{p_t})_{L^2_{\mathsf{GLo},p_t+1}(\Omega\times(t_{n-1},t_n))} & \\ \qquad = (F, \lambda_{h_{\boldsymbol{x}},n}^{p_t})_{L^2_{\mathsf{GLo},p_t+1}(\Omega\times(t_{n-1},t_n))} & \text{for all } \lambda_{h_{\boldsymbol{x}},n}^{p_t} \in S_{h_{\boldsymbol{x}}}^{p_{\boldsymbol{x}}}(\Omega) \times \mathbb{P}^{p_t}(t_{n-1},t_n), \\ & \text{for all } n = 1,\ldots,N_t. \end{cases} \tag{40}$$

局部检验函数 $\lambda_{h_{\boldsymbol{x}},n}^{p_t}$ 是全局函数 $\lambda_{\boldsymbol{h}}^{p_t} \in \partial_t Q_{\boldsymbol{h}}^{p_t+1}(Q_T)$ 在每个时间区间上的限制。若 $U_{\boldsymbol{h}}^{p_t}$, $V_{\boldsymbol{h}}^{p_t-1}$, 和 $\widehat{V}_{h_{\boldsymbol{x}}}^{n}$, $n = 0,\ldots,N_t$, 满足混合公式 (40)，则 $U_{\boldsymbol{h}}^{p_t}$和 $V_{\boldsymbol{h}}^{p_t-1}$满足 (39)。这一点很容易看出：用 $\lambda_{\boldsymbol{h}}^{p_t} = W_{\boldsymbol{h}}^{p_t} \in Q_{\boldsymbol{h},\bullet,0}^{p_t}(Q_T)$ 测试构成 (40) 第二部分的方程组即可，因为 $Q_{\boldsymbol{h},\bullet,0}^{p_t}(Q_T) \subset \partial_t Q_{\boldsymbol{h}}^{p_t+1}(Q_T)$。反过来，设 $U_{\boldsymbol{h}}^{p_t}$和$V_{\boldsymbol{h}}^{p_t-1}$ 满足 (39)。那么，可以按如下方式依次计算 $\{\widehat{V}_{h_{\boldsymbol{x}}}^{n}\}_n$：给定 $\widehat{V}_{h_{\boldsymbol{x}}}^{n-1}$，通过求解与空间中的质量矩阵相关联的线性系统来计算 $\widehat{V}_{h_{\boldsymbol{x}}}^{n}$；该系统由从 (40) 中分离出所有不含 $\widehat{V}_{h_{\boldsymbol{x}}}^{n}$ 的项得到。由此可知，根据构造， $U_{\boldsymbol{h}}^{p_t}$, $V_{\boldsymbol{h}}^{p_t-1}$ 和 $\widehat{V}_{h_{\boldsymbol{x}}}^{n}$ 满足 (40) 中的第二方程。

现在我们证明 (40) 是一种洛巴托 IIIA/IIIB 龙格–库塔法。首先回顾洛巴托 IIIA/IIIB 对在如下类型分区系统下的不连续配点公式

$$\begin{cases} \dot{y} = f(z,t), \\ \dot{z} = g(y,t); \end{cases}$$

自治情形见 [14, 定理 2.2 的证明，II.2。2] 在每个时间单元 $[t_{n-1},t_n]$ 中，给定 y^{n-1} 和 z^{n-1}，我们寻求多项式 $u^{p_t+1}\in\mathbb{P}^{p_t+1}(t_{n-1},\ t_n)$ 和 $v^{p_t-1}\in\mathbb{P}^{p_t-1}(t_{n-1},\ t_n)$，使其满足以下条件：$h_t^{(n)}:=t_n-t_{n-1}$，

$$\begin{cases} u^{p_t+1}(t_{n-1})=y^{n-1} & \\ \dot{u}^{p_t+1}(t_n^i)=f(v^{p_t-1}(t_n^i),t_n^i) & \text{for all } i=0,\dots,p_t,\\ y^n=u^{p_t+1}(t_n), & \\ v^{p_t-1}(t_{n-1})=z^{n-1}-h_t^{(n)}\omega_0(\dot{v}^{p_t-1}(t_{n-1})-g(u^{p_t+1}(t_{n-1}),t_{n-1})), & \\ \dot{v}^{p_t-1}(t_n^i)=g(u^{p_t+1}(t_n^i),t_n^i) & \text{for all } i=1,\dots,p_t-1,\\ z^n=v^{p_t-1}(t_n)-h_t^{(n)}\omega_{p_t}(\dot{v}^{p_t-1}(t_n)-g(u^{p_t+1}(t_n),t_n)). & \end{cases} \tag{41}$$

这里，$c_0,\dots,c_{p_t}$ 和 $\omega_0,\dots,\omega_{p_t}$ 分别是 $[0,1]$, 和t_n^i 上的高斯–洛巴托节点及权重：$=t_{n-1}+c_ih_t^{(n)}$。在特殊情形 $f(z,t)=z$下，(41) 中的第二方程意味着 $\dot{u}^{p_t+1}$ 是次数为 p_t-1的多项式，因此 u^{p_t+1} 实际上是次数为 p_t 的多项式。

比较 (40) 和 (41)，y 在网格节点处对应于 $U_{\boldsymbol{h}}^{p_t}$，而 u^{p_t+1}（如上所述，它是关于 $[t_{n-1},t_n]$ 的次数至多为 p_t 的多项式）对应于内部高斯–洛obatto节点处的 $U_{\boldsymbol{h}}^{p_t}$。反过来，z 表示 $\widehat{V}_{h_{\boldsymbol{x}}}^n$，而 v^{p_t-1} 对应于内部高斯–洛obatto节点处的 $V_{\boldsymbol{h}}^{p_t-1}$。(40) 中的第一方程直接意味着

$$\partial_tU_{\boldsymbol{h}}^{p_t}=V_{\boldsymbol{h}}^{p_t-1} \tag{42}$$

逐点成立，尤其是在高斯–洛巴托点处成立。我们用与 $[t_n,t_{n+1}]$ 中的 p_t+1 高斯–洛obatto节点相关联的、次数为 $\le p_t$ 的多项式的拉格朗日基函数，测试 (40) 中的第二方程。回想一下，含有 p_t+1 个节点的高斯–洛obatto求积对次数为 $\le 2p_t-1$ 的多项式精确，因此我们得到以下关系：在 t_{n-1} 处、在内部高斯–洛obatto点处以及在 t_n 处：

$$\begin{aligned}
&h_t^{(n)}\omega_0(\partial_tV_{\boldsymbol{h}}^{p_t-1}(\cdot,t_{n-1}),\lambda_{h_{\boldsymbol{x}},n}^{p_t}(\cdot,t_{n-1}))_{L^2(\Omega)}-(\widehat{V}_{h_{\boldsymbol{x}}}^{n-1}-V_{\boldsymbol{h}}^{p_t-1}(\cdot,t_{n-1}),\lambda_{h_{\boldsymbol{x}},n}^{p_t}(\cdot,t_{n-1}))_{L^2(\Omega)}\\
&\qquad+h_t^{(n)}\omega_0(c^2\nabla_{\boldsymbol{x}}U_{\boldsymbol{h}}^{p_t}(\cdot,t_{n-1}),\nabla_{\boldsymbol{x}}\lambda_{h_{\boldsymbol{x}},n}^{p_t}(\cdot,t_{n-1}))_{L^2(\Omega)}=h_t^{(n)}\omega_0(F(\cdot,t_{n-1}),\lambda_{h_{\boldsymbol{x}},n}^{p_t}(\cdot,t_{n-1}))_{L^2(\Omega)},\\
&h_t^{(n)}\omega_i(\partial_tV_{\boldsymbol{h}}^{p_t-1}(\cdot,t_n^i),\lambda_{h_{\boldsymbol{x}},n}^{p_t}(\cdot,t_n^i))_{L^2(\Omega)}+h_t^{(n)}\omega_i(c^2\nabla_{\boldsymbol{x}}U_{\boldsymbol{h}}^{p_t}(\cdot,t_n^i),\nabla_{\boldsymbol{x}}\lambda_{h_{\boldsymbol{x}},n}^{p_t}(\cdot,t_n^i))_{L^2(\Omega)}\\
&\qquad\qquad=\omega_i(F(\cdot,t_n^i),\lambda_{h_{\boldsymbol{x}},n}^{p_t}(\cdot,t_n^i))_{L^2(\Omega)}\qquad\text{for all } i=1,\dots,p_t-1,\\
&h_t^{(n)}\omega_{p_t}(\partial_tV_{\boldsymbol{h}}^{p_t-1}(\cdot,t_n),\lambda_{h_{\boldsymbol{x}},n}^{p_t}(\cdot,t_n))_{L^2(\Omega)}+(\widehat{V}_{h_{\boldsymbol{x}}}^{n}-V_{\boldsymbol{h}}^{p_t-1}(\cdot,t_n),\lambda_{h_{\boldsymbol{x}},n}^{p_t}(\cdot,t_n))_{L^2(\Omega)},\\
&\qquad+h_t^{(n)}\omega_{p_t}(c^2\nabla_{\boldsymbol{x}}\widetilde{U}_{\boldsymbol{h}}^{p_t}(\cdot,t_n),\nabla_{\boldsymbol{x}}\lambda_{h_{\boldsymbol{x}},n}^{p_t}(\cdot,t_n))_{L^2(\Omega)}=h_t^{(n)}\omega_{p_t}(F(\cdot,t_n),\lambda_{h_{\boldsymbol{x}},n}^{p_t}(\cdot,t_n))_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}\tag{43}$$

将 (40) 的重构形式 (42)–(43) 与 Lobatto IIIA/IIIB 格式 (41) 进行比较，即完成了对 (35) 等价性主张的证明。最后，众所周知，Lobatto IIIA/IIIB 对是适用于自治 [37] 和非自治 [18] 哈密顿系统的辛积分器。□

注3.9. 使用混合化来研究数值格式的几何性质，灵感来源于 *[30]*。

结论

我们证明，对 [41] 的稳定化公式稍作修改，即可得到一个用于线性波动方程的时间二阶 DG–CG方法，且该方法与经典的时间一阶方法等价。这种等价性使时间二阶格式能够继承一阶方法的无条件稳定性和收敛性

性质，同时减少未知量的数量，并支持高效的时间步进实现。随后，我们将这一框架扩展到半线性波动方程。最后，我们提出了基于高斯–勒让德和高斯–洛巴托求积公式的辛变体；这些变体放弃了能量守恒，以换取几何结构保持。

一阶时间DG–CG时间离散化是高斯–勒让德龙格–库塔方法

高斯–勒让德龙格–库塔方法是基于在高斯–勒让德求积点处进行配点的隐式龙格–库塔方法。对于初值问题 $\dot{\boldsymbol{y}}(t) = \boldsymbol{F}(t,\ \boldsymbol{y}(t)),\ \ \boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}_0$，在时间网格 $\{t_0, t_1, \ldots\}$ 上采用步长 $h_t^{(n)}$ 的、具有 m 个点的高斯–勒让德龙格–库塔方法具有如下形式（例如参见 [17, 引理 3.5]）：对于每个时间步 $n \geq 1$，我们寻求一个 m次多项式 $\boldsymbol{q}_n$（系数为向量），使得

$$\begin{aligned} \boldsymbol{q}_n(t_{n-1}) &= \boldsymbol{y}_{n-1} \\ \dot{\boldsymbol{q}}_n(t_{n-1} + c_j h_t^{(n)}) &= \boldsymbol{F}(t_{n-1} + c_j h_t^{(n)}, \boldsymbol{y}(t_{n-1} + c_j h_t^{(n)})), \quad j = 1, \ldots, m, \end{aligned} \tag{44}$$

然后令 $\boldsymbol{y}_n = \boldsymbol{q}_n(t_n)$。这里，$\{c_j\}$ 是区间 $[0,1]$ 上具有 m个点的高斯–勒让德求积的节点。

考虑式 (38) 的时间对应问题，即：求 $u_{h_t}^{p_t}, v_{h_t}^{p_t} \in S_{h_t}^{p_t}(0,T)$，使得

$$\begin{cases} (\dot{u}_{h_t}^{p_t}, \chi_{h_t}^{p_t-1})_{L^2(0,T)} - (v_{h_t}^{p_t}, \chi_{h_t}^{p_t-1})_{L^2(0,T)} = 0, & \text{for all } \chi_{h_t}^{p_t-1} \in S_{h_t}^{(p_t-1,-1)}(0,T), \\ (\dot{v}_{h_t}^{p_t}, \lambda_{h_t}^{p_t-1})_{L^2(0,T)} + \mu(u_{h_t}^{p_t}, \lambda_{h_t}^{p_t-1})_{L^2(0,T)} & \\ \qquad + (\mathcal{I}_{h_t}^{p_t-1} g(u_{h_t}^{p_t}), \lambda_{h_t}^{p_t-1})_{L^2(0,T)} = (\mathcal{I}_{h_t}^{p_t-1} f, \lambda_{h_t}^{p_t-1})_{L^2(0,T)} & \text{for all } \lambda_{h_t}^{p_t-1} \in S_{h_t}^{(p_t-1,-1)}(0,T), \end{cases} \tag{45}$$

其初始条件为 $u_{h_t}^{p_t}(0) = u_0$, $v_{h_t}^{p_t}(0) = v_0$，源项为 $f \in C^0([0,T])$，非线性项为 $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，常数为 $\mu > 0$。这里，μ 表示带狄利克雷边界条件的算子 $-\mathrm{div}(c^2 \cdot)$ 的一个特征值。

对于任意 $n \geq 0$，考虑在式 (45) 中取测试函数 $\chi_{h_t}^{p_t-1}(t) = \lambda_{h_t}^{p_t-1}(t) = \mathcal{L}_j^{(n)}(t)\mathbb{1}_{[t_n,t_{n+1}]}(t)$，其中 $\{\mathcal{L}_j^{(n)}(t)\}$ 是与区间 $[t_n, t_{n+1}]$ 上的 p_t 高斯–勒让德节点 $\{x_j^{(n)}\}$相对应的、次数为 $\leq p_t - 1$ 的多项式的拉格朗日基。注意，每个 $\mathcal{L}_j^{(n)}(t)$ 的次数为 $p_t - 1$，并回忆一下，含有 p_t 个节点的高斯–勒让德求积公式对次数不超过 $2p_t - 1$ 的多项式是精确的。对于式 (45) 中的第一方程，当 $j = 1, \ldots, p_t$ 时，我们得到

$$\begin{aligned} (\dot{u}_{h_t}^{p_t}, \mathcal{L}_j^{(n)})_{L^2(t_n,t_{n+1})} - (v_{h_t}^{p_t}, \mathcal{L}_j^{(n)})_{L^2(t_n,t_{n+1})} &= \sum_{k=1}^{p_t} \dot{u}_{h_t}^{p_t}(x_k^{(n)}) \mathcal{L}_j^{(n)}(x_k^{(n)}) \omega_k^{(n)} - \sum_{k=1}^{p_t} v_{h_t}^{p_t}(x_k^{(n)}) \mathcal{L}_j^{(n)}(x_k^{(n)}) \omega_k^{(n)} \\ &= \dot{u}_{h_t}^{p_t}(x_j^{(n)}) \omega_j^{(n)} - v_{h_t}^{p_t}(x_j^{(n)}) \omega_j^{(n)}, \end{aligned}$$

因为 $\mathcal{L}_j^{(n)}(x_k^{(n)}) = \delta_{jk}$。这里，我们用 $\{\omega_j^{(n)}\}$ 表示区间 $[t_n, t_{n+1}]$ 上具有 p_t 个点的高斯–勒让德求积权重。(45) 中的第一方程由此推出

$$\dot{u}_{h_t}^{p_t}(x_j^{(n)}) - v_{h_t}^{p_t}(x_j^{(n)}) = 0, \qquad 1 \leq j \leq p_t. \tag{46}$$

同样，对于（45）中第二方程的各项，我们得到，对于 $j = 1$，……，p_t

$$\begin{aligned} &(\dot{v}_{h_t}^{p_t}, \mathcal{L}_j^{(n)})_{L^2(t_n,t_{n+1})} + \mu(u_{h_t}^{p_t}, \mathcal{L}_j^{(n)})_{L^2(t_n,t_{n+1})} + (\mathcal{I}_{h_t}^{p_t-1} g(u_{h_t}^{p_t}), \mathcal{L}_j^{(n)})_{L^2(t_n,t_{n+1})} \\ &\quad = \dot{v}_{h_t}^{p_t}(x_j^{(n)}) \omega_j^{(n)} + \mu u_{h_t}^{p_t}(x_j^{(n)}) \omega_j^{(n)} + \mathcal{I}_{h_t}^{p_t-1} g(u_{h_t}^{p_t})(x_j^{(n)}) w_j^{(n)} \\ &\quad = \dot{v}_{h_t}^{p_t}(x_j^{(n)}) \omega_j^{(n)} + \mu u_{h_t}^{p_t}(x_j^{(n)}) \omega_j^{(n)} + g(u_{h_t}^{p_t})(x_j^{(n)}) w_j^{(n)} \end{aligned}$$

and

$$(\mathcal{I}_{h_t}^{p_t-1} f, \mathcal{L}_j^{(n)})_{L^2(t_n,t_{n+1})} = \mathcal{I}_{h_t}^{p_t-1} f(x_j^{(n)}) w_j^{(n)} = f(x_j^{(n)}) w_j^{(n)}$$

由此得到

$$\dot{v}_{h_t}^{p_t}(x_j^{(n)}) + \mu u_{h_t}^{p_t}(x_j^{(n)}) + g(u_{h_t}^{p_t})(x_j^{(n)}) = f(x_j^{(n)}), \qquad 1 \le j \le p_t. \tag{47}$$

现在，考虑将一个 p_t 阶高斯–勒让德龙格–库塔方法应用于初值问题

$$\begin{cases} \dot{u} = v & \text{in } [0,T], \\ \dot{v} = -\mu u - g(u) + f & \text{in } [0,T], \\ u(0) = u_0, \quad v(0) = v_0. \end{cases}$$

采用（44）的记号，我们有 $\boldsymbol{y}(t) = (u(t)\ v(t))$ 以及 $\boldsymbol{F}(t,\ \boldsymbol{y}(t)) = (v(t)\ -\mu u(t)\ +\ f(t))$。于是，由（44）可推得，对所有 $n \ge 1$，高斯–勒让德龙格–库塔近似 $\boldsymbol{q}_n = (u_{h_t}^{p_t}|_{[t_{n-1},t_n]},\ v_{h_t}^{p_t}|_{[t_{n-1},t_n]})$ 满足

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{q}_n(t_{n-1}) = (u_{h_t}^{p_t}(t_{n-1}), v_{h_t}^{p_t}(t_{n-1})), \\ &\dot{\boldsymbol{q}}_n(x_j^{(n)}) = \big(v_{h_t}^{p_t}(x_j^{(n)}), -\mu u_{h_t}^{p_t}(x_j^{(n)}) - g(u_{h_t}^{p_t})(x_j^{(n)}) + f(x_j^{(n)})\big), \quad j = 1, \dots, p_t, \end{aligned} \tag{48}$$

由于 $x_j^{(n)} = t_{n-1} + c_j h_t^{(n)}$。将（48）与（46）–（47）进行比较，我们得出，格式（45）恰好是一个具有 p_t 阶段的高斯–勒让德龙格–库塔格式。

资助

本研究部分由奥地利科学基金（FWF）10.55776/F65 资助。MF 和 EZ 是 Gruppo Nazionale Calcolo Scientifico-Istituto Nazionale di Alta Matematica（GNCS-INdAM）的成员。

参考文献

[1] L. Bales 和 I. Lasiecka. 非齐次波动方程的时空连续有限元。*Comput. Math. Appl.*，27(3):91–102，1994年。[2] V. Barbu. 非线性无穷维系统的分析与控制，*Mathematicsin Science and Engineering*丛书第190卷。Academic Press, Inc.，波士顿，MA，1993年。[3] P. Bignardi 和 A. Moiola. 波动方程的时空连续强制性表述。*Numerische Mathematik*，157(4):1211–1258，2025年。[4] C. L. Bottasso. 重新审视时间有限元：龙格–库塔方法的变分解释。*Appl. Numer. Math.*，25(4):355–368，1997年。[5] B. Cockburn. 连续伽辽金方法和间断伽辽金方法对导数的离散化完全相同。*Beijing Journal of Pure and Applied Mathematics*，2(1):115– 122，2025年4月。纪念 Chi-Wang Shu 教授 65 岁生日的高阶精度数值方法及其应用特刊。

[6] Z. Dong、E.H. Georgoulis、L. Mascotto 和 Z. Wang。二阶形式波动方程时空有限元方法的后验误差分析与自适应性。*arXiv:2509.08537*，2025年。

[7] Z . Dong, L. Mascott°, 一个 d Z. Wang. A priori and 一个位置 teriori 误差是 timates of a C^0-in-ti我我 thod 二阶形式的波动方程。*arXiv:2411.03264*，2024年。[8] M. Ferrari和S. Fraschini。波动方程协调时空等几何方法的稳定性。《数学计算》，95(1):683–719，2026年。[9] M. Ferrari和I. Perugia。二阶形式声波方程时空等几何逼近的内禀无条件稳定性。《数学模型与应用科学方法》，2025年。已接受发表。[10] S. Fraschini、G. Loli、A. Moiola和G. Sangalli。用于声波方程的无条件稳定时空等几何方法。*Comput. Math. Appl.*，169:205–222，2024年。[11] D. A. French和T. E. Peterson。用于波动方程的连续时空有限元方法。《数学计算》，65(214):491–506，1996年。[12] D. A. French和J. W. Schaeffer。保持非线性问题能量性质的连续有限元方法。《应用数学与计算》，39(3):271–295，1990年。[13] S. G´omez。用于分析波动方程连续时空有限元方法的变分方法。《数学计算》，2025年。即将刊出。[14] E. Hairer、C. Lubich和G. Wanner。几何数值积分，施普林格计算数学丛书第31卷。施普林格出版社，柏林，第二版，2006年。常微分方程的保结构算法。[15] B. L. Hulme。常微分方程的离散伽辽金及相关单步方法。《数学计算》，26:881–891，1972年。[16] B. L. Hulme。用于初值问题的单步分片多项式伽辽金方法。《数学计算》，26:415–426，1972年。[17] A. Iserles。微分方程数值分析初阶。剑桥应用数学丛书。剑桥大学出版社，剑桥，第二版，2009年。[18] L. O. Jay。非自治哈密顿系统若干低阶分区方法的辛性条件。《数值算法》，86(2):495–514，2021年。[19] O. Karakashian和C. Makridakis。非线性薛定谔方程的时空有限元方法：间断伽辽金方法。《数学计算》，67(222):479–499，1998年。[20] O. Karakashian和C. Makridakis。非线性薛定谔方程的时空有限元方法：连续伽辽金方法。*SIAM*数值分析杂志，36(6):1779–1807，1999年。[21] O. Karakashian和C. Makridakis。带网格修正的连续伽辽金方法对非线性波动方程的收敛性。《数学计算》，74(249):85–102，2005年。[22] U. Langer和M. Zank。各向异性索伯列夫空间中抛物型初边值问题的高效直接时空有限元求解器。*SIAM J. Sci. Comput.*，43(4):A2714–A2736，2021年。[23] F. M. Lasagni。正则龙格–库塔方法。《应用数学与物理杂志》，39(6):952–953，1988年。[24] I. Lasiecka和R. Triggiani。二阶双曲型混合问题正则性的最新进展及其应用。载于《动力学报告》。动力系统专题论述。新系列，第3卷，第104–162页。施普林格出版社，柏林，1994年。

[25] M. Liero和U. Stefanelli。半线性方程的加权惯性-耗散-能量泛函。意大利数学联合会公报（第9辑），6(1):1–27，2013年。[26] J.-L. Lions。非线性边值问题的若干求解方法。Dunod，巴黎；Gauthier-Villars，巴黎，1969年。[27] G. Loli和G. Sangalli。时空等几何分析：综述及其在波传播中的应用。SeMA期刊，2025年。[28] R. L¨oscher、O. Steinbach和M. Zank。波动方程无条件稳定时空有限元方法的数值结果。载于《科学与工程中的区域分解方法第二十六届会议》，第625–632页。施普林格，2023年。[29] J. E. Marsden和T. S. Ratiu。《力学与对称性导论》，应用数学丛书第17卷。施普林格出版社，纽约，第二版，1999年。经典力学系统的基础论述。[30] R. I. McLachlan和A. Stern。可混合间断伽辽金方法的多辛性。计算数学基础，20(1):35–69，2020年。[31] M. A. S´anchez和J. Valenzuela。用于半线性波传播的辛哈密顿有限元方法。科学计算杂志，99(3):论文编号62，27页，2024年。[32] J. M. Sanz-Serna。哈密顿系统的龙格-库塔格式。BIT，28(4):877–883，1988年。[33] J. M. Sanz-Serna和M. P. Calvo。《数值哈密顿问题》，应用数学与数学计算丛书第7卷。Chapman & Hall，伦敦，1994年。[34] D. Sch¨otzau和C. Schwab。初值问题间断伽辽金时间步进方法的先验误差分析。Calcolo，37(4):207–232，2000年。[35] O. Steinbach和M. Zank。波动方程的稳定化时空有限元方法，计算机科学与工程讲义第128卷。施普林格国际出版，沙姆，2019年。[36] O. Steinbach和M. Zank。用于初边值问题的强制型时空有限元方法。电子数值分析汇刊，52:154–194，2020年。[37] G. Sun。辛分区龙格-库塔方法。计算数学杂志，11(4):365–372，1993年。[38] M. Tani。等几何分析中由非对称格式产生的线性系统的预条件策略。Comput. Math. Appl.，74(7):1690–1702，2017年。[39] N. J. Walkington。波动方程的DG-CG组合时间步进。SIAM数值分析杂志，52(3):1398–1417，2014年。[40] M. Zank。时变偏微分方程的inf-sup稳定时空方法。格拉茨工业大学出版社，2020年。[41] M. Zank。用于波动方程的高阶时空连续伽辽金方法。载于第十四届WCCM-ECCOMAS大会，卷700，2021年。[42] M. Zank。Newmark方法与二阶波动方程的时空有限元方法。载于《数值数学与高级应用——ENUMATH 2019》，计算机科学与工程讲义第139卷，第1225–1233页。施普林格，沙姆，2021年。[43] M. Zank。二阶形式波动方程的高效直接时空有限元求解器。科学计算杂志，105(1):论文编号19，2025年。