arXiv:2601.03161v1 [math.AP] 6 Jan 2026

二维纳维–斯托克斯方程的前向自相似解

DALLAS ALBRITTON、JULIEN GUILLOD、MIKHAIL KOROBKOV 和 XIAO REN

ABSTRACT. 我们构造了从任意大的 -1–齐次初始数据演化而来的二维纳维–斯托克斯方程的自相似解，并给出了其非唯一性的数值证据。

CONTENTS

1. 引言 1 2. 函数空间设定 8 3. $\mathcal{K}$ 9的性质 4. Leray 方程的先验估计 13 5. 通过抛物型估计进行自举 21 6. 数值观察 26 参考文献 28

1. 引言

我们考虑不可压纳维–斯托克斯方程

$$\begin{cases} \partial_t u + u \cdot \nabla u + \nabla p = \Delta u \\ \operatorname{div} u = 0 \end{cases} \tag{NS}$$

在全空间中 $\mathbb{R}^d$，$d = 2$，3. 近年来，我们对三维纳维–斯托克斯方程（NS）柯西问题解的唯一性有了重大进展：我们现在知道，Leray 的弱解 [60]并不唯一。Ladyzhenskaya 在 [54]中预见到了这一点。Jia 和 ˇSver´ak 在 [42]中提出了两种具体的非唯一性情形。随后，第二作者与 ˇSver´ak 在 [36]中给出了数值证据。第一作者、Bru`e 和 Colombo 在 [4]中针对非零外力给出了严格证明。最后，T. Hou、Y. Wang 和 C. Yang 在 [39]中宣布了一项计算机辅助证明。

这项进展的关键在于对自相似解的研究。纳维–斯托克斯方程在此缩放变换下保持不变

$$u_\ell(x,t) = \frac{1}{\ell} u\left(\frac{x}{\ell}, \frac{t}{\ell^2}\right), \quad p_\ell(x,t) = \frac{1}{\ell^2} p\left(\frac{x}{\ell}, \frac{t}{\ell^2}\right), \quad \ell > 0, \tag{1.1}$$

对应于维数计数 [19, (1.9)]

$$[x] = L, \quad [t] = L^2, \quad [u] = L^{-1}, \quad [p] = L^{-2}, \tag{1.2}$$

日期：2026年1月7日。

通过利用黏度 ν 将长度[2] 与时间联系起来得到，其量纲为 $[\nu] = L^2/T$。在 $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$ 中，(NS) 的解 (u, p) 若在缩放对称性 (1.1) 下保持不变，则称为（前向）自相似解 。此类解必然具有以下形式

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}} U\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right), \quad p(x,t) = \frac{1}{t} P\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right). \tag{1.3}$$

特别地，$(u,\ p)$ 完全由时刻 $t = 1$ 的剖面 $(U,\ P)$ 决定。将 (1.3) 代入纳维–斯托克斯方程，可得*Leray* 方程

$$\begin{cases} -\Delta U - \frac{1}{2}(U + y \cdot \nabla_y U) + U \cdot \nabla U + \nabla P = 0 \\ \operatorname{div} U = 0 \end{cases} \tag{1.4}$$

其中 $y = x/\sqrt{t}$。自相似解由 -1 次齐次的初始数据u_0演化而来；初始条件 $u \to u_0$ 在 $t \to 0^+$ 时的行为由边界条件编码

$$U(y) = u_0(y) + o\left(\frac{1}{|y|}\right) \text{ as } |y| \to +\infty. \tag{1.5}$$

非平凡的 -1次齐次速度场不属于临界空间L^d，该空间中局部适定性成立 [46]; 相反，它们属于弱 Lebesgue 空间 $L^{d,\infty}$，目前已知的适定性结果仅限于小数据的整体情形。[1]因此，我们将 -1 次齐次速度场视为处于适定性理论的临界边界。我们通过自相似解来考察这一临界边界。乍看之下，这种方法似乎更易处理，因为 (1.4) 是椭圆型方程，并且与定常纳维–斯托克斯方程有些相似；对于后者，边值问题的解不唯一十分常见，甚至在意料之中，参见例如 [44, 29, 49]。

最简单的非唯一性情形或许是：多个自相似解从同一自相似初始数据 u_0 演化而来。在 [42], , Jia 和 Šverák 推测，随着 u_0 的增大，方程 (1.4)–(1.5) 的解集可能会发生分岔。随后，第二作者与 Šverák 在 [36] 中通过数值计算报告了这种分岔。

由于二维中的 Leray–Hopf 解是唯一的，因此唯一性问题在很大程度上被忽视了。然而，在无限能量类中，并没有什么能够阻止上述情形发生，正如下文所示。

1.1. 主要结果。

本文研究二维纳维–斯托克斯方程 (NS) 的自相似解。我们首先考察以下问题：

> **(Q1)** 给定一个 -1 次齐次的初始速度场，是否存在纳维–斯托克斯方程的自相似解?

我们的主要定理肯定地回答了这个问题：

[1]非正式地说，临界空间是指其范数在 (1.1) 中的缩放下保持不变的空间。空间 $L^{d,\infty}$ 还有一个额外特征： C_0^∞函数不稠密，根据例如 [46, 48] 或 [67, 第 5]章中的论证，这意味着可以得到小初值整体适定性，而不能得到任意初值下的局部适定性。这类空间在 [10]中被宽泛地称为超临界 。

定理 1.1. 设 $\alpha \in (0,1)$ 和 $u_0 \in C^\alpha(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ 是一个 -1–齐次无散向量场。那么，存在一个以 u_0 为初始数据的二维纳维–斯托克斯方程自相似解 u 。此外，其剖面 U 光滑，并满足

$$|U(y) - (e^{\Delta} u_0)(y)| \le C(\alpha, \mathcal{M}) \langle y \rangle^{-1-\alpha}, \tag{1.6}$$

其中 $\mathcal{M} := \|u_0\|_{C^\alpha(S_1)}$。

三维情形中的类似定理由 Jia 和 ˇSver´ak 在 [41] 中得出。然而，二维问题面临着显著的新困难，其中最突出的是初始数据 $u_0 \sim \frac{1}{|x|}$ 具有无限能量，即使在局部范围内也是如此；因此，该问题缺乏明确的 先验估计，这与三维情形不同。事实上，我们推导出的先验估计仅适用于自相似解，而不适用于演化问题的一般解。

在确立自相似解的存在性之后，自然会提出以下问题：

(Q2) 纳维–斯托克斯方程的自相似解是否唯一？

我们的数值结果表明，答案是否定的：

观察 1.2。 对于 -1齐次初始速度场，

$$u_0(y) = -\frac{\sigma y_1 y}{|y|^3}, \tag{1.7}$$

我们通过数值计算观察到，对于 $39.2 \lesssim \sigma \le 80$，具有初始数据 u_0 的二维纳维–斯托克斯方程存在三个不同的自相似解。

第二位作者与 ˇSver´ak 在 [36]中得到了三维情形下的类似结果。二维情形的数值策略与三维情形非常相似。在 σ中延拓解的同时，我们计算该解附近线性化的特征值；根据标准的分岔论证，如果某个特征值变为零，就会出现一个新解。在二维和三维情形中，出现的都是通过打破离散对称性而产生的叉形分岔，如图 1.1 所示。关于这一点的进一步讨论，请参阅第 6 节。

最后，尽管计算在非唯一性理论中发挥了重要作用，无论是在数值证据层面，还是在计算机辅助证明方面 [39]，以手工方式发展这类理论仍然很有意义。定理 1.1 中对大尺度自相似解的研究，可视为朝这一方向迈出的一步。

1.2. **策略**。 为了构造任意大的解 U，我们将依靠两个主要要素：先验 估计和紧性，这是应用某种 Leray-Schauder 不动点理论的关键假设。

我们先从可用的先验 估计入手，着重指出二维理论与三维理论之间的显著差异：

(i) 动能 $\frac{1}{2}\int |u|^2 \, dx$ 在二维中是尺度临界的，但在三维中是超临界的。
(ii) 在二维中，涡量 $\omega := \nabla^\perp \cdot u$ 满足对流扩散方程

$$\partial_t \omega + u \cdot \nabla \omega = \Delta \omega \,. \tag{1.8}$$

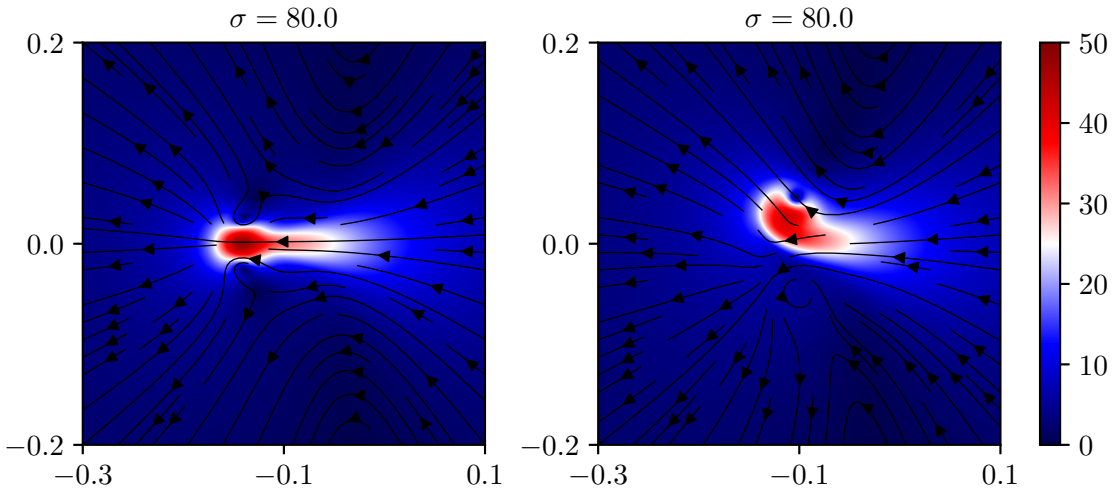


FIGURE 1.1. 具有 $\sigma = 80$ 的对称解与非对称解。

因此，在没有边界的情况下，随着演化，所有 L^p 范数 $\|\omega\|_{L^p}$，$1 \le p \le +\infty$ 都会单调递减。[2]

二维纳维–斯托克斯方程通常被认为性质更好，因为从正则性的角度来看，时间演化问题的先验 估计更好。然而，对于 -1–齐次初始数据，这些预期并不成立：[3]

首先，非零 -1–齐次初始数据 u_0 总是具有无限能量。三维构造中的一个关键点（始于 [41], ）是 u_0 具有 局部有限能量，由此可以得到演化问题的 先验估计 [58]。然而，在二维中，u_0 具有局部无限能量。

其次，对于非零 -1–齐次初始数据，涡量 ω_0 作为分布是 -2–齐次的，因此从来不能表示为局部可积函数。一个值得注意的临界情形是，初始涡量 $\omega_0 = \alpha\delta_{x=0}$ 为狄拉克质量的倍数；相应的解是兰姆–奥辛涡旋

$$\omega(x,t) = \frac{\alpha}{4\pi t} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, \tag{1.9}$$

也就是说，α 倍的二维热核。[4] 有限拉东测度空间 $\mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$ 是二维中的临界空间。值得注意的是，即使在非径向解中，(1.9) 在 $C((0,T];\, L^1) \cap C_w([0,T];\, \mathcal{M})$ 类中也是唯一的，并且会全局吸引环量为 α [32] 的解（另见 [30, 31]）。迄今为止，这是二维中唯一已知的大型自相似解。其他涡量可能以柯西主值积分的形式出现

$$\omega_0 = \mathrm{pv}\, \frac{1}{|x|^2} b_0\left(\frac{x}{|x|}\right), \tag{1.10}$$

其中 $b_0 : S^1 \to \mathbb{R}$ 是球面上的零均值函数，或是狄拉克 δ 函数的线性组合。结论是，标准涡量估计

[2]更一般地，对于凸函数 f，$\int f(\omega)\, dx$ 将递减。[3]类似的“逆转”现象也出现在例如定常绕障碍物流问题中。该问题的三维情形基本上由 J. Leray 本人解决，但二维情形仍未解决，参见例如 [50]。[4]请回想，非线性项在 (1.8) 的径向解上为零。

通常不适用于自相似解。

我们对定理 1.1 的证明基于自相似解特有的先验估计，尤其是

$$\|\langle y\rangle U\|_{L^\infty} \le C(\alpha, \mathcal{M})\,. \tag{1.11}$$

我们从 (1.4) 的基本能量估计开始：

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla U|^2\,dy \le \frac{1}{4}\limsup_{R\to+\infty} R\int_{S_R} |U(y)|^2\,ds \lesssim \|u_0|_{S_1}\|_{L^2(S_1)} \tag{1.12}$$

（见引理 4.3）。接着，根据涡量剖面 $\Omega = \nabla^\perp \cdot U$ 的方程，我们建立

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla\Omega|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^2} |\Delta U|^2 dx \lesssim \mathcal{M}^2 \tag{1.13}$$

（见引理 4.6）。进一步分析时，我们面临一个根本困难：在二维中，狄利克雷积分无法控制速度本身的大小（例如，$\|U\|_{L^2(B_1)}$），而在三维中，$\dot{H}^1(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^6(\mathbb{R}^3)$。此外，$\dot{H}^1(\mathbb{R}^2$中的函数可能随 $|y| \to +\infty$ 对数增长（例如，考虑 $(\ln(2+|y|))^{\frac{1}{3}}$），这与 (1.11) 中预期的 $O(\frac{1}{|y|})$ 衰减相去甚远。这一低频问题是二维定常纳维–斯托克斯方程中的典型问题 [29]，直到最近才在各种情形下得到解决，参见 [35, 51] 及其中的参考文献。然而，由于额外的大项 [35, 51]，文献 $y\cdot\nabla_y U$中的精细论证并不适用于定常型系统 (1.4)，因此需要针对 (1.4) 的特定结构提出一些新思路。

幸运的是，在二维情形下，我们有一种控制压力点态取值的“魔法棒”，即泊松方程

$$-\Delta P = \nabla U : (\nabla U)^T\,, \tag{1.14}$$

与定常纳维–斯托克斯系统中的情形相同。利用补偿紧性（散度-旋度引理），右端可在 Hardy空间中估计为 $\mathcal{H}^1$，因此，$\|\nabla P\|_{L^2} + \|P\|_{L^\infty}$ 也被 $\mathcal{M}^2$ 所控制（见引理4.4）。

但在开始使用这些工具之前，我们还需要对原点邻域内的 U 进行估计。基于上述原因，这个问题并不简单，也无法通过标准积分嵌入不等式解决；因此需要一种新工具。在定常纳维–斯托克斯理论中，伯努利压力 $\phi = \frac{|u|^2}{2} + p$ 满足 $(-\Delta + u\cdot\nabla)\phi = -|\omega|^2$；特别地，它是一个次解。Leray 方程（1.4）中的对应量为

$$\Phi := \frac{1}{2}|U|^2 - \frac{y}{2}\cdot U + P\,, \tag{1.15}$$

其满足

$$(-\Delta + \frac{1}{2}U - \frac{y}{2}\cdot\nabla)\Phi = -|\Omega|^2. \tag{1.16}$$

根据最大值原理，我们有

$$\Phi(y) \le \limsup_{R\to+\infty}\sup_{S_R}\Phi \le C(\|u_0|_{S_1}\|_{L^\infty})\,,\quad \forall y\in\mathbb{R}^2\,. \tag{1.17}$$

注意，Φ 控制着 $|U|^2$，除去（有界的）压力和无符号项$\frac{y}{2}\cdot U$。由此可以论证，存在一条良好的圆周 S_{R^*}，使得 $|U|$

满足 $|U| \le C$（$\|u_0|_{S^1}\|_{L^\infty}$）（见引理 4.5）。值得注意的是，这是文献中首次将“自相似伯努利压力” Φ 用于前向自相似解。曾有人利用相关量来排除非平凡的后向自相似解。我们还提及 [6]，其利用 Φ 排除了高维中的自相似稳态纳维–斯托克斯解。

现在，这个很大的附加项 $y\cdot\nabla_y U$ 变得非常有用：它使我们能够作出关键观察，即 $\partial_r(rU)$ 几乎属于 $L^2(\mathbb{R}^2)$，仅差一个来自 $(U\cdot\nabla)U$ 的对数项。经过一些技术处理，这将导出加权积分估计

$$\big\||y|^{-\gamma_2}(|U|+|P|)\big\|_{L^{2-\gamma_1}(\mathbb{R}^2)} \le C(\mathcal{M}) \tag{1.18}$$

其中含有 $0<\gamma_1 \ll \gamma_2 \ll 1$，同时仍处于系统 (1.4) 的“稳态情形”中（见命题 4.1）。U 衰减的根本原因在于，缩放算子 $\frac{1}{2}(1+y\cdot\nabla_y)$ 在空间无穷远处实际上占主导地位，即使在较弱的初始估计 (1.12) 下也是如此。

在最后阶段，我们回到时变方程，通过抛物正则性理论进一步提升解的正则性。该过程是在环形区域 $\mathcal{A}\times[0,t_0]$ 中进行的，该区域远离 $x=0$，因为当 $|y|\to+\infty$ 时 U 的行为对应于在固定半径 $|x|$处、当 $t\to 0^+$ 时 $u(x,t)$ 的行为。在这一阶段，不仅需要证明逐点估计 (1.11)，还必须通过估计其向远场初始数据 $|U-u_0| \lesssim \langle y\rangle^{-1-\alpha}$ 的收敛速率来获得一定的紧性；这对应于环形区域 $\mathcal{A}\times[0,t_0]$ 中时变解 u的 H¨older 连续性。为此，我们采用 [41]开发的极为高效而优雅的“空间局部平滑化”方法；见第 5 节。

1.3. 与现有文献的比较。

1.3.1. 三维自相似解。 首先，我们回顾构造三维自相似解的策略。

小自相似解可以通过扰动理论 [21,22, 33, 9, 48] 以基本相同的方式在维数为 $d\ge 2$ 的情形下构造。这类解的空间渐近行为已在 [17] 中研究。

Jia 和 ˇSver´ak 在 [41] 中由 -1–齐次$C^\alpha(\mathbb{R}^3\setminus\{0\})$ 初始速度场 u_0构造出了大解。他们通过以下方式得到先验估计：首先，通过一致局部能量估计 [57, 58, 47, 53]在 L^2_{uloc} 中控制 u。其次，利用一种新的局部空间平滑估计，在环形区域$\mathcal{A}\times[0,t_0]$中对解进行 H¨older 类估计，其估计仅依赖于 u_0 的范数。这第二步控制了自相似剖面 U 的尾部，如上所述（另见第 5 节）。这种平滑估计本身也具有独立意义，并已在 [7, 45, 2] 中得到改进。

此后，[41],许多研究提出了其他构造方法，以适应多种扩展情形：离散自相似（DSS）解、[5] 半空间、低正则性以及它们的组合。该方向的重要研究包括 [66]（带有 $\ell_0-1\ll 1$的 DSS），[52]（$\mathbb{R}^3_+$ 通过原始的 Leray 反证法），[59]（$L^\infty(\mathbb{R}^3\setminus B_1)$），[12]（$L^{3,\infty}$），[13]（旋转自相似性），[14, 1]（$\dot B^{-1+3/p}_{p,\infty}$，$3<p<+\infty$），

[5]这意味着存在 $\ell_0>1$，使得 $u_{\ell_0}=u$，其中 u_{ℓ_0} 由缩放对称性 (1.1) 定义。

以及 [23, 16] （L^2_{loc}）。另请参阅一般性参考文献 [43, 15]。[6] 上述研究所依赖的主要 先验估计适用于时间相关问题的解，这些解属于 u_0 临界函数空间，但不一定是自相似的。例如， [12] 基于 Calder´on 型分解 [20] ，由此得到的解满足

$$u = e^{t\Delta}u_0 + v\,, \tag{1.19}$$

其中 v 具有有限能量

$$\|v(\cdot,t)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|\nabla v(s)\|_{L^2}^2\,ds \le C(\|u_0\|_{L^{3,\infty}})t^{1/2}\,, \quad \forall t>0\,. \tag{1.20}$$

在 [8] 中研究了此类解，其中涉及一般的 $L^{3,\infty}$ 速度场。

上述估计的直接类比在二维中全都失效。因此，值得推测对于属于临界空间（如 u_0 ）的非自相似 $L^{2,\infty}$，解本身是否可能不存在。与 $\mathbb{R}^3$中的情形不同，或许在该空间中，某些非自相似初始数据不存在解，而这些初始数据甚至可以是旋转自相似的 [13]。在我们的证明中起关键作用的自相似伯努利压力 Φ，具有相当特殊的形式。

1.3.2. 更多非唯一性。在 [4],中，Bru`e、Colombo 和第一作者针对带有外力的三维纳维–斯托克斯方程的 Leray–Hopf 解，在 $L^1_tL^3_x$–中证明了非唯一性，其中外力在空间中具有紧支撑。具体做法是在轴对称无旋流类别中构造一个由外力支撑的膨胀涡环形式的不稳定自相似解。在 [4], 中，非唯一性并非源于分岔，而是源于自相似变量中的不稳定性，这与 [42, 定理 4 的证明1]相似。据第一作者所述， [4] 中的构造稍作变化后，应当适用于二维中受 $L^1_tL^2_x$–迫的情形。

最近，T. Hou、Y. Wang 和 C. Yang 在 [39],中宣布了一项计算机辅助证明，他们通过数值方法确立了一个无外力自相似解的存在性和不稳定性。

我们还提及凸积分法对纳维–斯托克斯方程唯一性问题的一些贡献，但不打算面面俱到。在 [18], 中，Buckmaster 和 Vicol 证明了有限动能类中的非唯一性。在 [25], 中，Cheskidov 和 Luo 证明了 $L^\infty_tL^p_x$ 中对任意 $p<2$都存在二维非唯一性；在 [24], 中，他们证明了 $L^2_tL^p_x$ 中对任意 $p<+\infty$ 和维数 $d\ge 2$都存在非唯一性。

最后，Coiculescu 和 Palasek 最近证明了由大 BMO^{-1} 初始数据引起的三维 [26]非唯一性。他们在 [26, 备注 1.7] 中对二维情形进行了推测。

1.4. 记号。 我们将 $B_R(y_0)=\{y\in\mathbb{R}^2:\,|y-y_0|<R\}$ 和 $S_R(y_0)=\{y\in\mathbb{R}^2:\,|y-y_0|=R\}$。为简便起见，我们将 B_R, S_R 记作 $B_R(0)$ $S_R(0)$。

在整个证明过程中， $C(\mathcal{M})$ 表示一个仅依赖于 $\mathcal{M}$ 的一般常数，其确切取值可逐行变化。我们用 $A\lesssim B$ 表示具有某个绝对常数 C 的 $A\le CB$，并用 $A\lesssim_\varepsilon B$ 表示 $A\le C(\varepsilon)B$。按照惯例，令$\langle x\rangle=\sqrt{1+|x|^2}$。

[6]关于其他黏性流体方程的大型自相似解，参见例如 [3]（临界表面准地转方程）、 [56] （磁流体力学）和 [55]（纳维–斯托克斯方程）。

我们常将 -1-齐次初始数据表示为其在单位圆 $a_0 = u_0|_{S_1}$ 上的取值，即，

$$u_0(x) = \frac{1}{|x|} a_0\left(\frac{x}{|x|}\right). \tag{1.21}$$

2. Functional set-up

我们将使用巴拿赫空间

$$X_\alpha := \{V \in L^\infty(\mathbb{R}^2) : \langle y\rangle^{1+\alpha} V \in L^\infty\,,\ \operatorname{div} V = 0\}, \tag{2.1}$$

其配备的范数为

$$\|V\|_{X_\alpha} := \|\langle y\rangle^{1+\alpha} V\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}. \tag{2.2}$$

定义线性算子

$$\mathcal{L}U := \Delta U + \frac{1}{2}(U + y\cdot\nabla_y U), \tag{2.3}$$

(1.4) 的动量方程可写为

$$-\mathcal{L}U + \mathbb{P}(U\cdot\nabla U) = 0\,, \tag{2.4}$$

其中 $\mathbb{P} = \mathrm{Id} - \nabla\Delta^{-1}\mathrm{div}$ 表示通常的 Leray 投影算子。我们令 $a = e^{\Delta}u_0$，并将 U 的主阶渐近行为（或等价地，u 的初始数据）编码到分解中

$$U = a + V. \tag{2.5}$$

为便于后续使用，我们在此汇总 a 的一些基本性质：

引理 2.1。有 $a \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$，$\operatorname{div} a = 0$ 以及 $\mathcal{L}a = 0$。此外，对于任意 $\alpha \in (0,1)$，有

$$\|\langle y\rangle^{1+\alpha}(a-u_0)(y)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2\setminus B_1)} + \|\langle y\rangle a(y)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \lesssim \mathcal{M}, \tag{2.6}$$

and

$$\|\langle y\rangle^{1+\alpha}\nabla a(y)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \lesssim \mathcal{M}. \tag{2.7}$$

证明。根据定义，a 显然是光滑且无散的。$\mathcal{L}a = 0$ 这一事实由算子恒等式 $\mathcal{L}e^{\Delta} = e^{\Delta}(\mathcal{L}-\Delta)$ 以及 u_0 的尺度不变性推出。此外，容易验证，对于任意 $x\in\mathbb{R}^2$ 和 $t>0$，

$$(e^{t\Delta}u_0)(x) = \frac{1}{\sqrt{t}} a\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right). \tag{2.8}$$

注意到 $u_0 \in C^\alpha(\mathbb{R}^2\setminus\{0\}) \cap L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$，我们有

$$\|e^{t\Delta}u_0\|_{C^\alpha_{\mathrm{par}}((B_2\setminus B_{1/2})\times[0,1])} \lesssim \mathcal{M}, \tag{2.9}$$

其中 C^α_{par} 表示关于抛物距离的 Hölder 范数

$$d_{\mathrm{par}}((x_1,t_1),(x_2,t_2)) := \sqrt{|x_1-x_2|^2 + |t_1-t_2|}.$$

特别地，对于 $|x|=1$ 和 $t\in(0,1]$，有

$$\big|(e^{t\Delta}u_0)(x) - u_0(x)\big| \lesssim \mathcal{M}\, t^{\frac{\alpha}{2}}, \tag{2.10}$$

这通过恒等式 (2.8) 推出 (2.6) 中的第一个估计。(2.6) 中的第二个估计则由第一个估计以及 a 在 B_1 中显然的逐点界推出。

除了 (2.9) 外，我们还有平滑估计

$$\|\nabla e^{t\Delta}u_0\|_{L^\infty(B_2\setminus B_{1/2})} \lesssim \mathcal{M}\, t^{-\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2}}, \quad \forall t\in(0,1], \tag{2.11}$$

结合 B_1 中 ∇a 显然的逐点界，即可推出（2.7）。

□

由（2.3）和引理 2.1 可知， V 满足扰动的 Leray 方程

$$\begin{cases} -\Delta V - \dfrac{1}{2}(V + y\cdot\nabla_y V) + \mathbb{P}\left[(a+V)\cdot\nabla(a+V)\right] = 0, \\ \operatorname{div} V = 0\,. \end{cases} \tag{2.12}$$

引入非线性算子

$$\mathcal{K}V := \mathcal{L}^{-1}\mathbb{P}[(a+V)\cdot\nabla(a+V)], \tag{2.13}$$

系统（2.12）可以改写为

$$V - \lambda\mathcal{K}V = 0 \tag{2.14}$$

其中 $\lambda = 1$。我们将应用 Leray-Schauder 不动点定理，在巴拿赫空间 X_α 中求解（2.14）；以下两个结果为此提供了关键要素。

命题 2.2。 对于任意 $\alpha\in(0,1)$，非线性算子 $\mathcal{K}:\ X_\alpha\to X_\alpha$ 定义良好、连续且紧。

命题 2.3。 对于固定点方程 (2.14) 的任意解 $V\in X_\alpha$，若$\lambda\in[0,1]$，则有一致先验估计

$$\|V\|_{X_\alpha} \le C(\alpha,\mathcal{M}). \tag{2.15}$$

命题 2.2 将在第 3 节中证明，命题 2.3 将在第 4–5 节中证明。结合起来，它们通过经典的 Leray-Schauder 理论立即推出定理 1.1（参见，例如 [49, 定理 1.2。17]）。

3. Properties of $\mathcal{K}$

命题 *2.2* 的证明。 首先，我们通过写出其积分表示，严格定义算子 $\mathcal{L}^{-1}$。线性方程

$$-\mathcal{L}W = -\Delta W - \frac{1}{2}(W + y\cdot\nabla_y W) = F \tag{3.1}$$

在 $W\in X_\alpha$ 条件下可改写为非齐次热方程

$$\partial_t w - \Delta w = f \tag{3.2}$$

在 $\mathbb{R}^{2+1}$ 中

$$w(x,t) := \frac{1}{\sqrt{t}}W\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \tag{3.3}$$

and

$$f(x,t) := \frac{1}{t\sqrt{t}}F\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right). \tag{3.4}$$

根据 X_α的定义，对于 $|x|>\sqrt{t}$ ，我们有

$$|w(x,t)| \lesssim \frac{1}{\sqrt{t}}\left(\frac{|x|}{\sqrt{t}}\right)^{-1-\alpha}\|W\|_{X_\alpha} \leq t^{\frac{\alpha}{2}}|x|^{-1-\alpha}\|W\|_{X_\alpha}, \tag{3.5}$$

特别地，对于任意 $x\in\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$，有 $\lim_{t\to 0+} w(x,\ t)=0$。求解具有零初始数据的 (3.2)，得到

$$W(x)=w(x,1)=\int_0^1\int_{\mathbb{R}^2}\frac{1}{4\pi(1-t)}e^{-\frac{|x-x'|^2}{4(1-t)}}f(x',t)dx'dt, \tag{3.6}$$

进而得到积分表示公式

$$[(-\mathcal{L})^{-1}F](x)=\int_0^1\int_{\mathbb{R}^2}\frac{1}{4\pi(1-t)t^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{|x-x'|^2}{4(1-t)}}F\left(\frac{x'}{\sqrt{t}}\right)dx'dt. \tag{3.7}$$

基于 (3.7)，现在证明 $\mathcal{K}$ 的有界性：写作 $U=a+V$，由 (2.6) 可知

$$|U(x)| \lesssim \langle x\rangle^{-1}(\mathcal{M}+\|V\|_{X_\alpha}). \tag{3.8}$$

根据 Leray 投影算子的定义，有

$$\mathbb{P}(U\cdot\nabla U)=U\cdot\nabla U+\nabla P \tag{3.9}$$

with

$$P=-\Delta^{-1}\operatorname{div}\operatorname{div}(U\otimes U). \tag{3.10}$$

利用以下恒等式

$$(U\cdot\nabla U)\left(\frac{x'}{\sqrt{t}}\right)=\sqrt{t}\,U\left(\frac{x'}{\sqrt{t}}\right)\cdot\nabla_{x'}U\left(\frac{x'}{\sqrt{t}}\right), \tag{3.11}$$

$$(\nabla P)\left(\frac{x'}{\sqrt{t}}\right)=\sqrt{t}\,\nabla_{x'}P\left(\frac{x'}{\sqrt{t}}\right)=-\sqrt{t}\,(\nabla\Delta^{-1}\operatorname{div}\operatorname{div})_{x'}(U\otimes U)\left(\frac{x'}{\sqrt{t}}\right), \tag{3.12}$$

并通过分部积分，对于 $i=1,2$，我们得到，

$$\begin{aligned}(\mathcal{K}V)_i&=\mathcal{L}^{-1}[\mathbb{P}(U\cdot\nabla U)]_i\\&=-\sum_{j,k=1}^{2}\int_0^1\int_{\mathbb{R}^2}H_{ijk}(x-x',t)\,(U_jU_k)\left(\frac{x'}{\sqrt{t}}\right)dx'dt,\end{aligned} \tag{3.13}$$

其中我们记

$$H_{ijk}(x,t):=(\delta_{ik}\partial_j-\partial^3_{ijk}\Delta^{-1})\left(\frac{1}{4\pi(1-t)t}e^{-\frac{|x|^2}{4(1-t)}}\right). \tag{3.14}$$

由于 $\partial^3_{ijk}\Delta^{-1}$ 的核按 $\langle x\rangle^{-3}$ 的速度衰减，因此有

$$\left|H_{ijk}\left(x,\frac{1}{2}\right)\right| \lesssim \langle x\rangle^{-3}. \tag{3.15}$$

注意到

$$H_{ijk}(x,t)=\frac{1}{4\sqrt{2}(1-t)^{\frac{3}{2}}t}H_{ijk}\left(\frac{x}{\sqrt{2(1-t)}},\frac{1}{2}\right), \tag{3.16}$$

我们得到精确的上界

$$|H_{ijk}(x,t)| \lesssim \frac{1}{(1-t)^{\frac{3}{2}}t}\left\langle \frac{x}{\sqrt{1-t}}\right\rangle^{-3}, \quad \forall x\in\mathbb{R}^2,\, t\in(0,1). \tag{3.17}$$

由 (3.8)、(3.17) 以及下文证明的引理 3.1 可得

$$\begin{aligned}|(\mathcal{K}V)(x)| &\lesssim \int_0^1\int_{\mathbb{R}^2}\frac{1}{(1-t)^{\frac{3}{2}}t}\left\langle \frac{x-x'}{\sqrt{1-t}}\right\rangle^{-3}\left\langle \frac{x'}{\sqrt{t}}\right\rangle^{-2}dx'dt\cdot(\mathcal{M}+\|V\|_{X_\alpha})^2\\ &\lesssim \langle x\rangle^{-2}(\mathcal{M}+\|V\|_{X_\alpha})^2.\end{aligned} \tag{3.18}$$

特别地，有

$$\|\mathcal{K}V\|_{X_\alpha}\lesssim(\mathcal{M}+\|V\|_{X_\alpha})^2, \tag{3.19}$$

这表明 $\mathcal{K}:X_\alpha\to X_\alpha$ 定义良好且有界。

接下来，我们证明 $\mathcal{K}:\ X_\alpha\to X_\alpha$ 连续。由 (3.13)，可写为

$$\begin{aligned}(\mathcal{K}V_1-\mathcal{K}V_2)_i=&\sum_{j,k=1}^2\int_0^1\int_{\mathbb{R}^2}H_{ijk}(x-x',t)\ [(a+V_1)_j(V_1-V_2)_k]\left(\frac{x'}{\sqrt{t}}\right)dx'dt\\ &+\sum_{j,k=1}^2\int_0^1\int_{\mathbb{R}^2}H_{ijk}(x-x',t)\ [(V_1-V_2)_j(a+V_2)_k]\left(\frac{x'}{\sqrt{t}}\right)dx'dt.\end{aligned} \tag{3.20}$$

与 (3.19) 类似，有

$$\|\mathcal{K}V_1-\mathcal{K}V_2\|_{X_\alpha}\lesssim(\mathcal{M}+\|V_1\|_{X_\alpha}+\|V_2\|_{X_\alpha})\|V_1-V_2\|_{X_\alpha}, \tag{3.21}$$

这就推出了所声称的连续性。

最后，我们证明 $\mathcal{K}:X_\alpha\to X_\alpha$的紧性。由 (3.8)，有

$$\|U\|_{L^s(\mathbb{R}^2)}\lesssim_s\mathcal{M}+\|V\|_{X_\alpha},\quad \forall s\in(2,+\infty], \tag{3.22}$$

因此，由 (3.10) 以及黎斯变换的估计可得

$$\|P\|_{L^s(\mathbb{R}^2)}\lesssim_s(\mathcal{M}+\|V\|_{X_\alpha})^2,\quad \forall s\in(1,+\infty). \tag{3.23}$$

由 (3.18) 以及 $\mathcal{L}$ 作为椭圆算子的局部正则性理论，可得局部估计

$$\|\mathcal{K}V\|_{W^{1,s}(B_R)}\lesssim C(s,R,\mathcal{M},\|V\|_{X_\alpha}),\quad \forall R>0,\ s\in(1,+\infty). \tag{3.24}$$

对于 $s>2$，我们回顾紧嵌入 $W^{1,\,s}(B_R)\hookrightarrow L^\infty(B_R)$对任意有限$R$成立。现在，设 V^k，$k=1,2,3,\ldots$是一列函数，其范数$\|V^k\|_{X_\alpha}$ 一致有界。由 (3.19)、(3.24) 以及标准对角线论证，存在一列整数 $k_j\to+\infty$ ，使得 $\mathcal{K}V^{k_j}$ 在局部一致收敛于某个函数 $W^\infty\in X_\alpha$。特别地，对于任意 $n\geq1$，我们可以找到 $j(n)\geq1$ ，使得

$$\|(\mathcal{K}V^{k_{j(n)}}-W^\infty)\cdot\mathbf{1}_{B_n}\|_{X_\alpha}\leq\frac{1}{n}. \tag{3.25}$$

另一方面，由 (3.18) 可知，

$$\|(\mathcal{K}V^{k_{j(n)}}-W^\infty)\cdot\mathbf{1}_{\mathbb{R}^2\setminus B_n}\|_{X_\alpha}\lesssim n^{-1+\alpha}\left(\mathcal{M}+\sup_k\|V^k\|_{X_\alpha}\right)^2. \tag{3.26}$$

结合 (3.25) 和 (3.26)，我们推出 $\mathcal{K}V^{k_{j(n)}} \to W^\infty$ in X_α。这证明了所声称的紧性。

□

引理 3.1。对于任意 $x \in \mathbb{R}^2$，有

$$\int_0^1 \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(1-t)^{\frac{3}{2}} t} \left\langle \frac{x-x'}{\sqrt{1-t}} \right\rangle^{-3} \left\langle \frac{x'}{\sqrt{t}} \right\rangle^{-2} dx'dt \lesssim \langle x \rangle^{-2}. \tag{3.27}$$

*Pr*证明。将 I 记为 (3.27) 中的被积函数，并考虑以下几种情形。

情形 1。$0 < t \leq \frac{1}{2}$ 且 $|x| > 10$。在这种情况下，我们有

$$I \lesssim t^{-1} \langle x-x' \rangle^{-3} \left\langle \frac{x'}{\sqrt{t}} \right\rangle^{-2}, \tag{3.28}$$

因此，

$$\int_{B_{|x|/2}(x)} I dx' \lesssim |x|^{-2} \int_{B_{|x|/2}(x)} \langle x-x' \rangle^{-3} dx' \lesssim |x|^{-2}, \tag{3.29}$$

$$\int_{B_{2|x|}(0) \setminus B_{|x|/2}(x)} I dx' \lesssim t^{-1} |x|^{-3} \int_{B_{2|x|}} \left\langle \frac{x'}{\sqrt{t}} \right\rangle^{-2} dx' \lesssim |x|^{-3} \ln \left(\frac{|x|}{\sqrt{t}} \right), \tag{3.30}$$

$$\int_{\mathbb{R}^2 \setminus B_{2|x|}} I dx' \lesssim \int_{\mathbb{R}^2 \setminus B_{2|x|}} |x'|^{-5} \lesssim |x|^{-3}. \tag{3.31}$$

将以上三个估计相加，得到

$$\int_{\mathbb{R}^2} I dx' \lesssim |x|^{-2} + |x|^{-3} |\ln t|. \tag{3.32}$$

情形 2. $0 < t \leq \frac{1}{2}$ 和 $|x| \leq 10$。在这种情况下，我们有 (3.28)，因此，

$$\int_{B_{20}} I dx' \lesssim t^{-1} \int_{B_{20}} \left\langle \frac{x'}{\sqrt{t}} \right\rangle^{-2} dx' \lesssim |\ln t|, \tag{3.33}$$

$$\int_{\mathbb{R}^2 \setminus B_{20}} I dx' \lesssim \int_{\mathbb{R}^2 \setminus B_{20}} |x'|^{-5} dx' \lesssim 1. \tag{3.34}$$

将上述两个估计相加，得到

$$\int_{\mathbb{R}^2} I dx' \lesssim |\ln t|. \tag{3.35}$$

情形 3. $\frac{1}{2} < t < 1$ 和 $|x| > 10$。在这种情况下，我们有

$$I \lesssim (1-t)^{-\frac{3}{2}} \left\langle \frac{x-x'}{\sqrt{1-t}} \right\rangle^{-3} \langle x' \rangle^{-2}, \tag{3.36}$$

因此,

$$\int_{B_{|x|/2}} I dx' \lesssim |x|^{-3} \int_{B_{|x|/2}} \langle x' \rangle^{-2} dx' \lesssim |x|^{-3} \ln |x|, \tag{3.37}$$

$$\int_{B_{2|x|} \setminus B_{|x|/2}} I dx' \lesssim (1-t)^{-\frac{3}{2}} |x|^{-2} \int_{B_{2|x|}} \left\langle \frac{x-x'}{\sqrt{1-t}} \right\rangle^{-3} dx' \lesssim (1-t)^{-\frac{1}{2}} |x|^{-2}, \tag{3.38}$$

$$\int_{\mathbb{R}^2 \setminus B_{2|x|}} I dx' \lesssim \int_{\mathbb{R}^2 \setminus B_{2|x|}} |x'|^{-5} \lesssim |x|^{-3}. \tag{3.39}$$

将以上三个估计相加，得到

$$\int_{\mathbb{R}^2} I dx' \lesssim (1-t)^{-\frac{1}{2}} |x|^{-2}. \tag{3.40}$$

情形 4. $\frac{1}{2} < t < 1$ 和 $|x| \le 10$。在这种情况下，我们有 (3.36) 和

$$\int_{B_{20}} I dx' \lesssim (1-t)^{-\frac{3}{2}} \int_{B_{20}} \left\langle \frac{x-x'}{\sqrt{1-t}} \right\rangle^{-3} dx' \lesssim (1-t)^{-\frac{1}{2}}, \tag{3.41}$$

$$\int_{\mathbb{R}^2 \setminus B_{20}} I dx' \lesssim \int_{\mathbb{R}^2 \setminus B_{20}} |x'|^{-5} dx' \lesssim 1. \tag{3.42}$$

将以上两个估计相加，得到

$$\int_{\mathbb{R}^2} I dx' \lesssim (1-t)^{-\frac{1}{2}}. \tag{3.43}$$

最后，结合以上所有情形，我们得出

$$\int_0^1 \int_{\mathbb{R}^2} I dx' dt \lesssim \int_0^1 \left((1-t)^{-\frac{1}{2}} \langle x \rangle^{-2} + |\ln t| \langle x \rangle^{-3} \right) dt \lesssim \langle x \rangle^{-2}. \tag{3.44}$$

□

4. A priori estimates for the Leray equation

与命题 2.3 中一样，我们考虑满足不动点方程 (2.14) 且具有 $\lambda \in [0,1]$ 的解 $V \in X_\alpha$。记 $U = a + V$，则有

$$\begin{cases} -\Delta U - \frac{1}{2}(U + y \cdot \nabla U) + \lambda U \cdot \nabla U + \nabla P = 0 \\ \operatorname{div} U = 0, \end{cases} \tag{4.1}$$

这里的压力 P 由下式确定

$$\begin{aligned} P &= \lambda (-\Delta)^{-1} \operatorname{div} \operatorname{div} (U \otimes U) \\ &= -\frac{\lambda}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \log |y - y'| \operatorname{div} \operatorname{div} (U \otimes U)(y') dy'. \end{aligned} \tag{4.2}$$

为简单起见，我们省略了 (U, P) 对 $\lambda \in [0,1]$ 的依赖。由 $V \in X_\alpha$ 和 (2.6)，当 $y \to \infty$ 时，我们有

$$U(y) = \frac{1}{|y|} a_0 \left(\frac{y}{|y|} \right) + O\left(\frac{1}{|y|^{1+\alpha}} \right). \tag{4.3}$$

这里 $O(\cdot)$ 中的常数取决于 $\mathcal{M}$ 和 $\|V\|_{X_\alpha}$。根据标准椭圆正则性理论， U 是局部光滑的，因此本节中的所有计算都在经典意义下成立。

本节的目标是推导关于 U 和 P的加权先验估计，以刻画它们在空间中的定量衰减。虽然命题 4.1 中加权范数的有限性可由 (4.3) 轻易保证，但这里的关键在于，可以用给定的数据 a_0来界定这些范数。这对于应用 Leray-Schauder 定理至关重要。

为明确起见，我们固定两个常数

$$\gamma_1 = \frac{1}{100}, \quad \gamma_2 = \frac{1}{10}. \tag{4.4}$$

命题 4.1。成立

$$\big\| |y|^{-\gamma_2}(|U| + |P|) \big\|_{L^{2-\gamma_1}(\mathbb{R}^2)} \leq C(\mathcal{M}). \tag{4.5}$$

为了证明这一结果，我们必须利用带有系数 λ 的 Leray 方程 (4.1) 的内在结构，并首先获得若干预备估计。

引理 4.2。成立

$$\|\nabla U\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \lesssim C(\alpha, \mathcal{M}, \|V\|_{X_\alpha}). \tag{4.6}$$

证明。 我们采用基于 Stokes 估计的标准自举论证（例如，参见 [29, 定理 IV.4.4 和注 IV.4。2]）。首先，我们可以将 (2.12) 改写为

$$\begin{cases} -\Delta V + \nabla P = \operatorname{div}\left(\dfrac{1}{2} y \otimes V - \lambda U \otimes U\right) - \dfrac{1}{2} V, \\ \operatorname{div} V = 0. \end{cases} \tag{4.7}$$

由 (4.3) 和 X_α 的定义可知，

$$\left| \frac{1}{2} y \otimes V - \lambda U \otimes U \right| (y) \lesssim C(\mathcal{M}, \|V\|_{X_\alpha}) \langle y \rangle^{-\alpha}. \tag{4.8}$$

于是，由局部 Stokes 估计可知，对于任意 $y \in \mathbb{R}^2$ 和 $s \in (1, +\infty)$，

$$\|V\|_{W^{1,s}(B_1(y))} \lesssim_s C(\mathcal{M}, \|V\|_{X_\alpha}) \langle y \rangle^{-\alpha}. \tag{4.9}$$

利用 (4.9)，我们进一步推得

$$\left\| \operatorname{div}\left(\frac{1}{2} y \otimes V - \lambda U \otimes U\right) - \frac{1}{2} V \right\|_{L^s(B_1(y))} \lesssim_s C(\mathcal{M}, \|V\|_{X_\alpha}) \langle y \rangle^{1-\alpha}. \tag{4.10}$$

再次将局部 Stokes 估计应用于 (4.7)，可得

$$\|V\|_{W^{2,s}(B_1(y))} \lesssim_s C(\mathcal{M}, \|V\|_{X_\alpha}) \langle y \rangle^{1-\alpha}. \tag{4.11}$$

取 s 较大（取决于 α），则对 (4.9) 和 (4.11) 进行插值可得

$$\|\nabla V\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \lesssim C(\alpha, \mathcal{M}, \|V\|_{X_\alpha}). \tag{4.12}$$

结合 (2.7)，我们得到所声称的估计 (4.6)。

□

引理 4.3（狄利克雷积分的基本估计）。 成立

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla U|^2 dy = \frac{1}{4}\int_{S_1} |a_0|^2 d\theta \le \frac{\pi}{2}\mathcal{M}^2. \tag{4.13}$$

证明。 在球 B_R上以 U 测试（4.1），并利用以下事实

$$\int_{B_R} (U + y\cdot\nabla U)\cdot U dy = \frac{R}{2}\int_{S_R} |U|^2 ds, \tag{4.14}$$

我们得到局部能量恒等式

$$\int_{B_R} |\nabla U|^2 dy = \int_{S_R} \left(U\partial_r U + \frac{R}{4}|U|^2 - \frac{\lambda}{2}|U|^2 U_r - PU_r \right) ds \tag{4.15}$$

这里，我们记 $\partial_r = \frac{y}{|y|}\cdot\nabla$ 和 $U_r = U\cdot\frac{y}{|y|}$。

由（4.3）和（4.6），可得

$$\limsup_{R\to+\infty} \int_{S_R} U\partial_r U ds < C(\alpha, \mathcal{M}, \|V\|_{X_\alpha}). \tag{4.16}$$

由于（4.3），有

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{S_R} \frac{R}{4}|U|^2 ds = \frac{1}{4}\int_{S_1} |a_0|^2 d\theta \le \frac{\pi}{2}\mathcal{M}^2, \tag{4.17}$$

and

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{S_R} |U|^2 U_r ds = 0. \tag{4.18}$$

由于 $P \in L^2(\mathbb{R}^2)$（见 (3.23)），根据中值定理，存在一列半径 $\{R_k\}_{k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots}$，使得 $R_k \to +\infty$ 且

$$R_k \int_{S_{R_k}} |P|^2 ds \to 0 \tag{4.19}$$

当 $k \to +\infty$ 时。因此，有

$$\left| \int_{S_{R_k}} PU_r ds \right| \lesssim \frac{1}{R_k}\int_{S_{R_k}} |P| ds \lesssim \frac{1}{\sqrt{R_k}} \left(\int_{S_{R_k}} |P|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \to 0 \tag{4.20}$$

当 $R_k \to +\infty$ 时。因此，在 (4.15) 中取 $R = R_k$，使得 $k \to +\infty$，并利用 (4.16)、(4.17)、(4.18)、(4.20)，可得

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla U|^2 dy \le C(\alpha, \mathcal{M}, \|V\|_{X_\alpha}). \tag{4.21}$$

接下来，我们消去 (4.21) 中对 $\|V\|_{X_\alpha}$ 的依赖。由于现在我们知道 $\sim$ $|\nabla U| + |P| \in L^2(\mathbb{R}^2)$，类似于 (4.20)，存在一列半径 $\{R_k\}_{k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots}$趋于无穷，使得

$$\left| \int_{S_{\tilde{R}_k}} PU_r ds \right| + \left| \int_{S_{\tilde{R}_k}} U\partial_r U ds \right| \to 0. \tag{4.22}$$

$\tilde{}$在 (4.15) 中取 $R = R_k$，其中 $k \to +\infty$，并利用 (4.17)、(4.18) 和 (4.22)，即可得到所需的估计 (4.13)。

□

引理4.4（压力的基本估计）。 压力 P 满足

$$\|\nabla^2 P\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} + \|\nabla P\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \|P\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \lesssim \mathcal{M}^2, \tag{4.23}$$

and

$$\lim_{y\to\infty} P(y) = 0. \tag{4.24}$$

证明。 由 (4.13) 和经典的散度-旋度引理 [27], 可得

$$\operatorname{div}\operatorname{div}(U\otimes U) = \sum_{i,j=1}^{2} \partial_i U_j \partial_j U_i \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2), \tag{4.25}$$

其中 $\mathcal{H}^1$ 表示 Hardy 空间，且有

$$\|\operatorname{div}\operatorname{div}(U\otimes U)\|_{\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2)} \lesssim \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla U|^2 dy \lesssim \mathcal{M}^2. \tag{4.26}$$

He因此，由 Hardy 空间的 Calder´on-Zygmund 定理 [64], 可得 s

$$\|\nabla^2 P\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} + \|\nabla P\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \lesssim \mathcal{M}^2. \tag{4.27}$$

此外，该引理的其余结论可由最后一个估计和二维Sobolev嵌入 [62]推出。关于这些相关估计的自包含证明，另请参见 [11,定理 5.13] 。□

引理 4.5（原点附近的局部上界）。 有

$$\max_{B_{10}} |U(y)| \le C(\mathcal{M}). \tag{4.28}$$

证明。记

$$\Phi = \frac{\lambda}{2}|U|^2 - \frac{y}{2}\cdot U + P \tag{4.29}$$

为与 (4.1) 相关的伯努利压力，并记

$$\Omega = \partial_{y_2} U_1 - \partial_{y_1} U_2 \tag{4.30}$$

为涡量函数。由 (4.1) 可推导出

$$-\Delta\Phi + (\lambda U - \frac{y}{2})\cdot\nabla\Phi = -\lambda\Omega^2 \le 0, \tag{4.31}$$

which 蕴含了关于 Φ 的单侧最大值原理，即对任意 $R>0$,

$$\max_{B_R}\Phi \le \max_{S_R}\Phi. \tag{4.32}$$

注意到

$$\limsup_{|y|\to\infty} |\Phi| \lesssim \mathcal{M} \tag{4.33}$$

由于 U 和 P 在无穷远处的渐近行为，(4.32) 成立，见 (4.3) 和 (4.24)。在 (4.32) 中取 $R\to\infty$，可得到 Φ 的逐点上界：

$$\max_{\mathbb{R}^2}\Phi \lesssim \mathcal{M}. \tag{4.34}$$

此外，由于 $\frac{\lambda}{2}|U|^2 \ge 0$ 且根据 (4.23)，我们得到

$$\max_{\mathbb{R}^2}(-\frac{y}{2})\cdot U \le \max_{\mathbb{R}^2}|P| + \max_{\mathbb{R}^2}\Phi \lesssim \mathcal{M}^2 + \mathcal{M}. \tag{4.35}$$

利用 (4.13)、积分中值定理以及圆上的索伯列夫嵌入，我们可以找到一个良好圆 S_{r_*}，满足 $r_* \in (1, 2)$，使得

$$\max_{y\in S_{r_*}} |U(y) - \bar{U}(r_*)| \lesssim \left(\int_{S_{r_*}} |\nabla U|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} \lesssim \mathcal{M}, \tag{4.36}$$

这里 $\bar{U}$ 是 U 在圆周上的平均值:

$$\bar{U}(r) = \frac{1}{2\pi r}\int_{S_r} U ds. \tag{4.37}$$

假设存在一点 $y_* \in S_{r_*}$ 使得

$$|U(y_*)| \geq M(\mathcal{M}^2 + \mathcal{M}), \tag{4.38}$$

其中 M 是一个足够大的绝对常数，由下文的论证确定。由 (4.36)，并取足够大的 M，对于任意 $y \in S_{r_*}$，我们有

$$|U(y) - U(y_*)| \leq \frac{1}{10}|U(y_*)|, \quad |U(y)| \leq 2|U(y_*)|, \tag{4.39}$$

从而

$$\frac{(U(y) - U(y_*)) \cdot U(y)}{|U(y_*)|} \geq -\frac{1}{5}|U(y_*)|. \tag{4.40}$$

Let

$$y_{**} = -r_* \frac{U(y_*)}{|U(y_*)|} \in S_{r_*}, \tag{4.41}$$

那么结合 (4.40) 和 (4.38)，我们推出

$$\begin{aligned} -\frac{y_{**}}{2} \cdot U(y_{**}) &= \frac{r_*}{2}\left(\frac{(U(y_{**}) - U(y_*)) \cdot U(y_*)}{|U(y_*)|} + |U(y_*)|\right) \\ &\geq \frac{r_*}{2}\left(-\frac{1}{5}|U(y_*)| + |U(y_*)|\right) \\ &\geq \frac{2M}{5}(\mathcal{M}^2 + \mathcal{M}). \end{aligned} \tag{4.42}$$

通过取足够大的 M，最后一个估计与 (4.35) 矛盾。因此，我们证明了 (4.38) 不可能成立，换言之，逐点估计

$$\max_{S_{r_*}} |U| \lesssim \mathcal{M}^2 + \mathcal{M} \tag{4.43}$$

必须成立。

由 (4.13)、(4.43) 以及索伯列夫嵌入，得到

$$\|U\|_{L^N(B_{20})} \lesssim_N |\bar{U}(r_*)| + \|\nabla U\|_{L^2(B_{20})} \lesssim \mathcal{M}^2 + \mathcal{M} \tag{4.44}$$

对任意 $N < +\infty$均成立。因此，对于 $1 < s < 2$,

$$\|U \cdot \nabla U\|_{L^s(B_{20})} \leq \|U\|_{L^{\frac{2s}{2-s}}(B_{20})} \|\nabla U\|_{L^2(B_{20})} \lesssim_s \mathcal{M}^3 + \mathcal{M}. \tag{4.45}$$

由方程 (4.1) 和局部斯托克斯估计，得到

$$\begin{aligned} \|U\|_{W^{2,s}(B_{10})} &\lesssim_s \|U\|_{W^{1,s}(B_{20})} + \|U \cdot \nabla U\|_{L^s(B_{20})} + \|y \cdot \nabla U\|_{L^s(B_{20})} \\ &\lesssim_s \mathcal{M}^3 + \mathcal{M}. \end{aligned} \tag{4.46}$$

最后一个估计通过索伯列夫嵌入推出了（4.28）。

□

引理 4.6。有

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\Delta U|^2 dx \lesssim \mathcal{M}^2. \tag{4.47}$$

证明。对方程 (4.1) 取旋度，可得相应的涡量方程

$$-\Delta\Omega - \Omega - \frac{y}{2}\cdot\nabla\Omega + \lambda U\cdot\nabla\Omega = 0. \tag{4.48}$$

在球 B_R 上用 Ω 测试 (4.48)，得到

$$\int_{B_R} |\nabla\Omega|^2 dy = \frac{1}{2}\int_{B_R}\Omega^2 dy + \int_{S_R}\left(\partial_r\Omega + \frac{1}{4}|y|\Omega - \frac{\lambda}{2}U_r\Omega\right)\Omega\, ds. \tag{4.49}$$

我们希望证明，沿着某个 $R\to+\infty$ 序列，(4.49) 中的边界积分定性衰减。首先，将其改写为

$$\begin{aligned}&\int_{S_R}\left(\partial_r\Omega + \frac{1}{4}|y|\Omega - \frac{\lambda}{2}U_r\Omega\right)\Omega ds\\ &= \frac{1}{2R}\left[\frac{d}{dr}\left(r\int_{S_r}\Omega^2 ds\right)\right]\Big|_{r=R} + \left(\frac{R}{4} - \frac{1}{R}\right)\int_{S_R}\Omega^2 ds - \frac{\lambda}{2}\int U_r\Omega^2 ds.\end{aligned} \tag{4.50}$$

为简便起见，记

$$J(r) = r\int_{S_r}\Omega^2 ds. \tag{4.51}$$

并且 J' 其在 r 中的导数。根据 (4.1)，我们可以取 $R_0 > 10$ （ R_0 的定量大小并不重要），使得

$$\sup_{\mathbb{R}^2\setminus B_{R_0}} |U| \le 1. \tag{4.52}$$

对于 $R > R_0$，由 (4.50) 和 (4.52) 可得

$$\int_{S_R}\left(\partial_r\Omega + \frac{1}{4}|y|\Omega - \frac{\lambda}{2}U_r\Omega\right)\Omega ds \le \frac{1}{2R}J'(R) + \frac{1}{8}J(R). \tag{4.53}$$

由 (4.13) 可得

$$\int_{\mathbb{R}^2}\Omega^2 dy \lesssim \mathcal{M}^2 < +\infty, \tag{4.54}$$

因此，由积分中值定理，存在一个半径序列 $\{\rho_k\}_{k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots}$ 使得 $\rho_k \in (2^{2k},\ 2^{2k+1})$，并且

$$J(\rho_k) \lesssim \int_{B_{2^{2k+1}}\setminus B_{2^{2k}}}\Omega^2 dy, \tag{4.55}$$

当 $k\to+\infty$ 时收敛于 0。对于每个 k，我们根据以下三种情况定义 $\widetilde{\rho}_k \in [\rho_k, \rho_{k+1}]$：

(1) 若 $J'(\rho_{k+1}) \le 0$，我们就令 $\widetilde{\rho}_k = \rho_{k+1}$。(2) 若 $J'(\rho_{k+1}) > 0$，且集合 $\mathcal{C} = \{r\in[\rho_k,\rho_{k+1}]\colon J'(r) = 0\}$ 非空，则令 $\widetilde{\rho}_k = \sup\ \mathcal{C}$。(3) 若对所有 $r\in[\rho_k,\rho_{k+1}]$，$J'(r) > 0$，则选择 $\widetilde{\rho}_k$，使得 $J'(\widetilde{\rho}_k) = (\rho_{k+1}-\rho_k)^{-1}(J(\rho_{k+1}) - J(\rho_k))$，其存在性由中值定理保证。

根据构造可以验证，当 $k \to +\infty$ 时，

$$J(\widetilde{\rho}_k) \le J(\rho_{k+1}) \to 0, \quad \max\{J'(\widetilde{\rho}_k), 0\} \to 0. \tag{4.56}$$

因此，基于 (4.53)、(4.54) 和 (4.56)，并在 (4.49) 中取 $R = \widetilde{\rho}_{k+1}$，其中 $k \to +\infty$，可得

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \Omega|^2 dy \le \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \Omega^2 dy \lesssim \mathcal{M}^2. \tag{4.57}$$

由于 $-\Delta U = \nabla^\perp \Omega$ 且 $\nabla^\perp := (-\partial_2, \partial_1)$，(4.57) 等价于所需的估计 (4.47)。

□

现在，我们可以给出：

命题 *4.1* 的证明。 根据索伯列夫嵌入和缩放，对于任意 $R \ge 2$ 和 $N \ge 1$，我们知道

$$R^{-\frac{2}{N}} \left(\int_{B_R} |U|^N dy \right)^{\frac{1}{N}} \lesssim_N \left(\int_{B_R} |\nabla U|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} + \bar{U}(R), \tag{4.58}$$

$\bar{}$，其中 U 在 (4.37) 中定义。根据 Hölder 不等式和 (4.13)，我们知道，对于 $R > 2$,

$$\begin{aligned} |\bar{U}(R) - \bar{U}(2)| &\le \frac{1}{2\pi} \int_2^R \int_0^{2\pi} |\partial_r U| d\theta dr \\ &\lesssim \left(\int_2^R r^{-1} dr \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla U|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\lesssim (\ln R)^{\frac{1}{2}} \mathcal{M}. \end{aligned} \tag{4.59}$$

鉴于引理 4.5，由式 (4.59) 我们进一步推得

$$|\bar{U}(R)| \lesssim C(\mathcal{M}) (\ln R)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall R > 2. \tag{4.60}$$

然后，结合式 (4.58)、(4.60) 和 (4.13)，我们得到

$$\int_{B_R} (R^{-\frac{2}{N}} |U|)^N dy \lesssim_N (C(\mathcal{M}))^N (\ln R)^{\frac{N}{2}}. \tag{4.61}$$

因此，对于任意 $\gamma > 0$，均有

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2 \setminus B_1} \left(|y|^{-\frac{2}{N} - \gamma} |U| \right)^N dy &= \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{B_{2^{k+1}} \setminus B_{2^k}} \left(|y|^{-\frac{2}{N} - \gamma} |U| \right)^N dy \\ &\lesssim_N (C(\mathcal{M}))^N \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{-\gamma N k} (k+1)^{\frac{N}{2}} \\ &\lesssim_{\gamma, N} (C(\mathcal{M}))^N. \end{aligned} \tag{4.62}$$

应用 Hölder 不等式，并利用（4.62）和（4.13），可得

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^2\setminus B_1} |y|^{-\frac{4+2\gamma N}{2+N}} |U\cdot\nabla U|^{\frac{2N}{2+N}} dy \\
&\lesssim \left(\int_{\mathbb{R}^2\setminus B_1} \left(|y|^{-\frac{2}{N}-\gamma}|U|\right)^N dy\right)^{\frac{2}{2+N}} \left(\int_{\mathbb{R}^2\setminus B_1} |\nabla U|^2 dy\right)^{\frac{N}{2+N}} \\
&\lesssim_{\gamma,N} (C(\mathcal{M}))^{\frac{N}{2+N}} \lesssim C(\mathcal{M}).
\end{aligned} \tag{4.63}$$

作参数变换

$$\varepsilon_1 = \frac{4}{2+N}, \quad \varepsilon_2 = \frac{4+2\gamma N}{2+N}, \tag{4.64}$$

由（4.63）可得，对于 $\varepsilon_1 \in (0,\ 1)$ 和 $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$,

$$\int_{\mathbb{R}^2\setminus B_1} |y|^{-\varepsilon_2} |U\cdot\nabla U|^{2-\varepsilon_1} dy \lesssim_{\varepsilon_1,\varepsilon_2} C(\mathcal{M}). \tag{4.65}$$

此外，注意到对于这样的 ε_1 和 ε_2，有

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2\setminus B_1} |y|^{-\varepsilon_2} |\Delta U|^{2-\varepsilon_1} dy &\lesssim \left(\int_{\mathbb{R}^2\setminus B_1} |y|^{-\frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} dy\right)^{\frac{\varepsilon_1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^2\setminus B_1} |\Delta U|^2 dy\right)^{\frac{2-\varepsilon_1}{2}} \\
&\lesssim_{\varepsilon_1,\varepsilon_2} C(\mathcal{M})
\end{aligned} \tag{4.66}$$

由（4.47）可得。同样，由（4.23）有

$$\int_{\mathbb{R}^2\setminus B_1} |y|^{-\varepsilon_2} |\nabla P|^{2-\varepsilon_1} dy \lesssim_{\varepsilon_1,\varepsilon_2} C(\mathcal{M}). \tag{4.67}$$

结合（4.1）和（4.65）–（4.67），可得

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^2\setminus B_1} |y|^{-\varepsilon_2} |U + y\cdot\nabla U|^{2-\varepsilon_1} dy \\
&\lesssim \int_{\mathbb{R}^2\setminus B_1} |y|^{-\varepsilon_2} \left(|U\cdot\nabla U|^{2-\varepsilon_1} + |\Delta U|^{2-\varepsilon_1} + |\nabla P|^{2-\varepsilon_1}\right) dy \\
&\lesssim_{\varepsilon_1,\varepsilon_2} C(\mathcal{M}).
\end{aligned} \tag{4.68}$$

现在，使用极坐标 $r = |y|$ 和 $\theta \in [0, 2\pi)$ 更为方便。注意到 $U + y\cdot\nabla U = \partial_r (rU)$，并利用 (4.28)、(4.68)，对于 $\rho > 2$，我们有

$$\begin{aligned}
\rho|U(\rho,\theta)| &\le 2|U(2,\theta)| + \int_2^\rho |U + y\cdot\nabla U| dr \\
&\le 2|U(2,\theta)| + \left(\int_2^\rho r^{\frac{\varepsilon_2-1}{1-\varepsilon_1}} dr\right)^{\frac{1-\varepsilon_1}{2-\varepsilon_1}} \left(\int_2^\rho r^{1-\varepsilon_2} |U + y\cdot\nabla U|^{2-\varepsilon_1} dr\right)^{\frac{1}{2-\varepsilon_1}} \\
&\lesssim_{\varepsilon_1,\varepsilon_2} C(\mathcal{M}) + \rho^{\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{2-\varepsilon_1}} \left(\int_2^\rho r^{1-\varepsilon_2} |U + y\cdot\nabla U|^{2-\varepsilon_1} dr\right)^{\frac{1}{2-\varepsilon_1}}.
\end{aligned}$$

因此，有

$$\sup_{r>2} r^{2-\varepsilon_2} |U(r,\theta)|^{2-\varepsilon_1} \lesssim_{\varepsilon_1,\varepsilon_2} C(\mathcal{M}) + \int_2^{+\infty} r^{1-\varepsilon_2} |U + y\cdot\nabla U|^{2-\varepsilon_1} dr. \tag{4.69}$$

对 θ 积分（4.69），并利用（4.68），可得

$$\int_0^{2\pi} \sup_{r>2} r^{2-\varepsilon_2}|U(r,\theta)|^{2-\varepsilon_1} d\theta \lesssim_{\varepsilon_1,\varepsilon_2} C(\mathcal{M}), \tag{4.70}$$

这进一步意味着

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2\setminus B_2} r^{-2\varepsilon_2}|U|^{2-\varepsilon_1} dy &\lesssim \left(\int_2^{+\infty} r^{-1-\varepsilon_2} dr\right)\left(\int_0^{2\pi} \sup_{r>2} r^{2-\varepsilon_2}|U(r,\theta)|^{2-\varepsilon_1} d\theta\right)\\ &\lesssim_{\varepsilon_1,\varepsilon_2} C(\mathcal{M}).\end{aligned} \tag{4.71}$$

将 (4.71) 与引理 4.5 中的局部界结合，可得到 (4.5) 中 U 所需的估计。

接下来，我们证明压力的加权估计。直接应用 H¨older 不等式，并结合 (4.71) 和 (4.62)，得到

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2\setminus B_2} r^{-\delta_2}|U\otimes U|^{2-\delta_1} dy &\le \left(\int_{\mathbb{R}^2\setminus B_2} r^{-2\varepsilon_2}|U|^{2-\varepsilon_1} dy\right)^{\frac{M-2}{M}} \left(\int_{\mathbb{R}^2\setminus B_2} r^{-2-\nu M}|U|^M dy\right)^{\frac{2}{M}}\\ &\lesssim_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\nu,M} C(\mathcal{M}),\end{aligned} \tag{4.72}$$

其中我们取 $\delta_1, \delta_2 > 0$ 为

$$\delta_1 = \frac{\varepsilon_1}{2} + \frac{2-\varepsilon_1}{M}, \quad \delta_2 = 2(\varepsilon_2+\nu) + \frac{4-4\varepsilon_2}{M}. \tag{4.73}$$

其中 $M > 10$ 和 $0 < \nu < 1$ 任意选取（且与 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 无关）。根据引理 4.5，若 δ_2 足够小，我们可将 (4.72) 加强为

$$\int_{\mathbb{R}^2} r^{-\delta_2}|U\otimes U|^{2-\delta_1} dy \lesssim_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\nu,M} C(\mathcal{M}). \tag{4.74}$$

由于$r^{-\delta_2}$ 是一个$A_{2-\delta_1}$-权重，如果 δ_1，δ_2 足够小（例如参见 [34,例 7.1。7]），由定义 (4.2) 可得

$$\int_{\mathbb{R}^2} r^{-\delta_2}|P|^{2-\delta_1} dy \le C(\mathcal{M}). \tag{4.75}$$

鉴于 (4.73) 和条件 $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$，我们指出，使 (4.75) 成立的 (δ_1, δ_2) 的允许范围包含集合

$$\left\{(\delta_1,\delta_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \delta_1 < \frac{1}{10},\ 4\delta_1 < \delta_2 < \frac{1}{2}\right\}. \tag{4.76}$$

这就完成了对 (4.5) 中 P 所需估计的证明。

□

5. Bootstrapping via parabolic estimates

在本节中，我们通过一种基于抛物正则性理论以及命题 4.1 中对 U, P得到的定量加权估计的逐步提升过程，证明命题 2.3。

命题 *2.3* 的证明。 与之前一样，我们记 $U = a + V$，它是方程 **(4.1)** 的一个解。我们将证明分为几个连续的步骤。

步骤 1。转换为非定常问题。

由 U， P，我们定义

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}} U\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right), \quad p(x,t) = \frac{1}{t} P\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right), \tag{5.1}$$

于是（u， p）满足系数为 λ 的非定常纳维–斯托克斯方程，即

$$\begin{cases} \partial_t u + \lambda u \cdot \nabla u + \nabla p = \Delta u, \\ \nabla \cdot u = 0. \end{cases} \tag{5.2}$$

根据 U和 P的局部光滑性，时变解（u， p）对任意正时间均光滑。根据（4.3），u 的初始数据为

$$u(x,0) = \frac{1}{|x|} a_0\left(\frac{x}{|x|}\right), \tag{5.3}$$

其含义是，对于任意紧集 $K \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$,

$$\sup_{x\in K} \sup_{0<t<1} t^{-\frac{\alpha}{2}} |u(x,t) - u(x,0)| < +\infty. \tag{5.4}$$

我们的目标是借助现有的 $\||y|^{-\gamma_2} P\|_{L^{2-\gamma_1}}$和 $\||y|^{-\gamma_2} U\|_{L^{2-\gamma_1}}$估计，获得（5.4）的定量版本。

根据构造以及命题 4.1，对于任意 $t > 0$，我们有

$$\left\| \left(\frac{|x|}{\sqrt{t}}\right)^{-\gamma_2} u(x,t) \right\|_{L^{2-\gamma_1}(\mathbb{R}^2)} = t^{\frac{\gamma_1}{4-2\gamma_1}} \||y|^{-\gamma_2} U(y)\|_{L^{2-\gamma_1}(\mathbb{R}^2)} \le C(\mathcal{M})\, t^{\frac{\gamma_1}{4-2\gamma_1}}, \tag{5.5}$$

and

$$\begin{aligned} \left\| \left(\frac{|x|}{\sqrt{t}}\right)^{-\gamma_2} p(x,t) \right\|_{L^{2-\gamma_1}(\mathbb{R}^2)} &= t^{-\frac{1}{2}+\frac{\gamma_1}{4-2\gamma_1}} \||y|^{-\gamma_2} P(y)\|_{L^{2-\gamma_1}(\mathbb{R}^2)} \\ &\le C(\mathcal{M})\, t^{-\frac{1}{2}+\frac{\gamma_1}{4-2\gamma_1}}. \end{aligned} \tag{5.6}$$

因此，对于满足 $R > 1$的环域 $\mathcal{A}_R := B_R \setminus B_{\frac{1}{R}} \subset \mathbb{R}^2$，我们得到

$$\|u(x,t)\|_{L^{2-\gamma_1}(\mathcal{A}_R)} \lesssim_R C(\mathcal{M}) t^{-\frac{\gamma_2}{2}+\frac{\gamma_1}{4-2\gamma_1}}, \tag{5.7}$$

and

$$\|p(x,t)\|_{L^{2-\gamma_1}(\mathcal{A}_R)} \lesssim_R C(\mathcal{M}) t^{-\frac{1}{2}-\frac{\gamma_2}{2}+\frac{\gamma_1}{4-2\gamma_1}}. \tag{5.8}$$

步骤 2. 传播时空局部能量估计。

接下来，我们在初始时刻附近的环域 $\mathcal{A}_5$ 内，对 u 进行局部能量估计。令 φ 为 $\mathbb{R}^2$ 中的光滑截断函数，满足：**(1)** $\varphi(x) = 0$对任意 $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{A}_5$成立；**(2)** $\varphi(x) = 1$ 对任意 $x \in \mathcal{A}_4$成立；**(3)** $|\nabla\varphi(x)| \lesssim |\varphi(x)|^{\frac{9}{10}}$ 对

任意 $x \in \mathbb{R}^2$成立。将(5.2)的第一个方程乘以 $u\varphi^2$进行测试，可得如下局部能量不等式:

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left(\int_{\mathbb{R}^2}|u|^2\varphi^2dx\right)+2\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla(u\varphi)|^2dx\\&=\int_{\mathbb{R}^2}\left(2\lambda|u|^2\varphi u\cdot\nabla\varphi+4\varphi pu\cdot\nabla\varphi+2|u|^2|\nabla\varphi|^2\right)dx.\end{aligned}\tag{5.9}$$

由索伯列夫嵌入，对任意 $1 \le N < +\infty$，有

$$\|u\varphi\|_{L^N(\mathbb{R}^2)} \lesssim_N \left(\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla(u\varphi)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}.\tag{5.10}$$

我们逐项处理（5.9）式的右端。由 φ 的性质 (3)、H¨older 不等式、（5.7）式和（5.10）式，可得

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^2}2\lambda|u|^2\varphi u\cdot\nabla\varphi dx\right|&\lesssim\int_{\mathbb{R}^2}|u|^3\varphi^{\frac{19}{10}}dx\lesssim\int_{\mathbb{R}^2}|u|^{\frac{3}{2}}|u\varphi|^{\frac{3}{2}}dx\\&\lesssim\|u\|^{\frac{3}{2}}_{L^{\frac{15}{8}}(\mathcal{A}_5)}\|u\varphi\|^{\frac{3}{2}}_{L^{\frac{15}{2}}(\mathbb{R}^2)}\lesssim\|u\|^{\frac{3}{2}}_{L^{2-\gamma_1}(\mathcal{A}_5)}\|u\varphi\|^{\frac{3}{2}}_{L^{\frac{15}{2}}(\mathbb{R}^2)}\\&\le C(\mathcal{M})\,t^{-\frac{3\gamma_2}{4}+\frac{3\gamma_1}{8-4\gamma_1}}\left(\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla(u\varphi)|^2dx\right)^{\frac{3}{4}}.\end{aligned}\tag{5.11}$$

因此，有

$$\left|\int_{\mathbb{R}^2}2\lambda|u|^2\varphi u\cdot\nabla\varphi dx\right|-\frac{1}{3}\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla(u\varphi)|^2dx\le C(\mathcal{M})\,t^{-3\gamma_2+\frac{3\gamma_1}{2-\gamma_1}}.\tag{5.12}$$

应用 H¨older 不等式、（5.8）式和拉迪任斯卡娅不等式

$$\|f\|_{L^4(\mathbb{R}^2)}\lesssim\|f\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{R}^2)}\|\nabla f\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{R}^2)},\quad\forall f\in C_0^\infty(\mathbb{R}^2),$$

我们得到

$$\begin{aligned}\left|\int 4\varphi pu\cdot\nabla\varphi dx\right|&\lesssim\|p\|_{L^{\frac{4}{3}}(\mathcal{A}_5)}\|u\varphi\|_{L^4(\mathbb{R}^2)}\lesssim\|p\|_{L^{2-\gamma_1}(\mathcal{A}_5)}\|u\varphi\|_{L^4(\mathbb{R}^2)}\\&\le C(\mathcal{M})\,t^{-\frac{1}{2}-\frac{\gamma_2}{2}+\frac{\gamma_1}{4-2\gamma_1}}\left(\int_{\mathbb{R}^2}|u|^2\varphi^2dx\right)^{\frac{1}{4}}\left(\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla(u\varphi)|^2dx\right)^{\frac{1}{4}}.\end{aligned}$$

因此，有

$$\left|\int 4\varphi pu\cdot\nabla\varphi dx\right|-\frac{1}{3}\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla(u\varphi)|^2dx\le C(\mathcal{M})\,t^{-\frac{2}{3}-\frac{2\gamma_2}{3}+\frac{2\gamma_1}{6-3\gamma_1}}\left(\int_{\mathbb{R}^2}|u|^2\varphi^2dx\right)^{\frac{1}{3}}.\tag{5.13}$$

对于 (5.9) 中的最后一项，与 (5.11) 类似，我们有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2}2|u|^2|\nabla\varphi|^2dx&\lesssim\int_{\mathbb{R}^2}|u|^2|\varphi|^{\frac{9}{5}}dx\\&\lesssim\|u\|^{\frac{1}{5}}_{L^1(\mathcal{A}_5)}\|u\varphi\|^{\frac{9}{5}}_{L^{\frac{9}{4}}(\mathbb{R}^2)}\lesssim\|u\|^{\frac{1}{5}}_{L^{2-\gamma_1}(\mathcal{A}_5)}\|u\varphi\|^{\frac{9}{5}}_{L^{\frac{9}{4}}(\mathbb{R}^2)}\\&\le C(\mathcal{M})\,t^{-\frac{\gamma_2}{10}+\frac{\gamma_1}{20-10\gamma_1}}\left(\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla(u\varphi)|^2dx\right)^{\frac{9}{10}},\end{aligned}\tag{5.14}$$

因此，

$$\int_{\mathbb{R}^2} 2|u|^2|\nabla\varphi|^2dx - \frac{1}{3}\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla(u\varphi)|^2dx \le C(\mathcal{M})\,t^{-\gamma_2+\frac{\gamma_1}{2-\gamma_1}}. \tag{5.15}$$

结合 (5.9)、(5.12)、(5.13) 和 (5.15)，对于 $t\in(0,1)$，我们得到

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left(\int_{\mathbb{R}^2}|u|^2\varphi^2dx\right)+\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla(u\varphi)|^2dx\\ &\le C(\mathcal{M})\,t^{-\frac{3}{4}}\left[\left(\int_{\mathbb{R}^2}|u|^2\varphi^2dx\right)^{\frac{1}{3}}+1\right].\end{aligned} \tag{5.16}$$

Sol将上述微分不等式与初始时刻界结合起来

$$\lim_{t\to0+}\int_{\mathbb{R}^2}|u(x,t)|^2\varphi(x)^2dx=\int_{\mathbb{R}^2}|u(x,0)|^2\varphi(x)^2dx\le C(\mathcal{M}), \tag{5.17}$$

我们得到定量局部能量界

$$\sup_{0\le t<1}\int_{\mathbb{R}^2}|u|^2\varphi^2dx+\int_0^1\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla(u\varphi)|^2dxdt\le C(\mathcal{M}). \tag{5.18}$$

步骤 3. 初始时刻附近的正则性估计。

由于初始数据 $u_0=a_0\left(\frac{y}{|y|}\right)\frac{}{|y|}\in C^\alpha(\mathbb{R}^2\setminus\{0\})$，与 [40] 类似，我们可以将 $u_0=u_0^{(1)}+u_0^{(2)}$ 分解为 $\operatorname{div}u_0^{(1)}=0$, $u_0^{(1)}|_{\mathcal{A}_4}=u_0$, $\operatorname{supp}u_0^{(1)}\subset\mathcal{A}_5$ 和 $\|u_0^{(1)}\|_{C^\alpha(\mathbb{R}^2)}\lesssim\mathcal{M}$。考虑时间区间$[0,T]$上的局部温和解 v，其中 $T=T(\alpha,\mathcal{M})\in(0,1]$ 是方程 (5.2) 的解，其初始数据为 $u_0^{(1)}$，即

$$\begin{cases}\partial_t v+\lambda v\cdot\nabla v+\nabla q=\Delta v,\\ \nabla\cdot v=0,\\ v(x,0)=u_0^{(1)}.\end{cases} \tag{5.19}$$

经典的 v 构造方法（例如参见 [28, 46]）将非线性项 $\lambda v\cdot\nabla v$ 视为对线性斯托克斯方程组的小扰动，因此 T 可以选取得与 $\lambda\in[0,1]$ 无关。此外，很容易证明 v 满足能量估计

$$\sup_{0\le t\le T}\int_{\mathbb{R}^2}|v(x,t)|^2dx+\int_0^T\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla v|^2(x,t)dxdt\le C(\mathcal{M}), \tag{5.20}$$

以及正则性估计

$$\|v\|_{C^\alpha_{\mathrm{par}}(\mathbb{R}^2\times[0,T])}+\|q\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2\times[0,T])}\le C(\alpha,\mathcal{M}). \tag{5.21}$$

设 $u=v+w$，则 w 满足扰动后的纳维–斯托克斯方程

$$\begin{cases}\partial_t w-\Delta w+\lambda w\cdot\nabla w+\lambda v\cdot\nabla w+\lambda w\cdot\nabla v+\nabla\widetilde{p}=0,\\ \nabla\cdot w=0\end{cases} \tag{5.22}$$

在 $\mathbb{R}^2\times[0,T]$ 中，其中 $\widetilde{p}=p-q$ 是 u 与 v 的相应的压力之差。还要注意，w 的初始数据具有消失性质

$$w(x,0)|_{\mathcal{A}_4}=\left(u_0-u_0^{(1)}\right)|_{\mathcal{A}_4}\equiv0. \tag{5.23}$$

根据第 2 步中得到的 u 的局部能量估计以及 v 的全空间能量估计，我们有

$$\sup_{0\le t\le T}\int_{\mathcal{A}_4}|w(x,t)|^2dx+\int_0^T\int_{\mathcal{A}_4}|\nabla w|^2(x,t)dxdt\le C(\mathcal{M}). \tag{5.24}$$

由标准插值可得

$$\int_0^T\int_{\mathcal{A}_3}|w(x,s)|^4dxds\le C(\mathcal{M}), \tag{5.25}$$

因此，对于 $t\in[0,T]$,

$$\int_0^t\int_{\mathcal{A}_3}|w(x,s)|^3dxds\le C(\mathcal{M})\,t^{\frac14}. \tag{5.26}$$

由 (5.8) 和 (5.21)，对于 $t\in[0,T]$，我们有

$$\begin{aligned}\|\widetilde{p}(\cdot,t)\|_{L^{2-\gamma_1}(\mathcal{A}_3)}&\le\|p(\cdot,t)\|_{L^{2-\gamma_1}(\mathcal{A}_3)}+\|q(\cdot,t)\|_{L^{2-\gamma_1}(\mathcal{A}_3)}\\&\le C(\alpha,\mathcal{M})\,t^{-\frac12-\frac{\gamma_2}{2}},\end{aligned} \tag{5.27}$$

因此,

$$\int_0^t\int_{\mathcal{A}_3}|\widetilde{p}(x,s)|^{\frac32}dxds\le C(\alpha,\mathcal{M})\,t^{\frac14-\frac{3\gamma_2}{4}}. \tag{5.28}$$

将函数 w、$\widetilde{p}$、v 在 $\mathcal{A}_3\times[-1+T,0)$ 上延拓为常值 0，然后利用 (5.23) 可以验证，w、$\widetilde{p}$ 是区域 $\mathcal{A}_3\times[-1+T,T]$内方程 (5.22) 的一个适定弱解。接着，应用 [41], 的 ε- 正则性结果，我们推得 $w\in C^{\beta}_{\mathrm{par}}(\mathcal{A}_2\times(-\frac12,s])$，其中具有某个通用的 H¨older 指数 $\beta>0$，当 $s_0=s_0(\alpha,\mathcal{M})$ 足够小时，$\in(0,T]$，并且有

$$\|w\|_{C^{\beta}_{\mathrm{par}}(\mathcal{A}_2\times(-\frac12,s_0])}\le C(\alpha,\mathcal{M}). \tag{5.29}$$

我们指出，[41] 的 ε正则性结果针对的是三维解，其中包括作为特殊情形的二维解。此外，此处额外的参数 $\lambda\in[0,1]$ 并无妨碍，因为该论证是扰动性的。由 v 的正则性，我们进一步推得

$$\|u\|_{C^{\min\{\alpha,\beta\}}_{\mathrm{par}}(\mathcal{A}_2\times[0,s_0])}\le C(\alpha,\mathcal{M}). \tag{5.30}$$

步骤 4. 自相似坐标下的估计与最终自举。

由 (5.30) 和 u的定义可知，对于 $x\in\mathcal{A}_2$、$0<t\le s_0$,

$$\left|\frac{1}{\sqrt{t}}U\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)-\frac{1}{|x|}a_0\left(\frac{x}{|x|}\right)\right|\le C(\alpha,\mathcal{M}). \tag{5.31}$$

令 $x=\frac{y}{|y|}\in S_1$ 和 $t=|y|^{-2}$，上述估计意味着

$$\left||y|U(y)-a_0\left(\frac{y}{|y|}\right)\right|\le C(\alpha,\mathcal{M}) \tag{5.32}$$

[1]对于$|y|\ge s_0^{-2}$。结合（4.28），我们得到

$$\big|U(y)\big|\lesssim C(\alpha,\mathcal{M})\langle y\rangle^{-1} \tag{5.33}$$

对于任意 $y \in \mathbb{R}^2$。根据 Calder´on-Zygmund 定理，我们推得

$$\|P\|_{L^{1+\varepsilon}(\mathbb{R}^2)} \lesssim_\varepsilon C(\alpha, \mathcal{M}) \tag{5.34}$$

对任意 $\varepsilon > 0$。

接下来，通过一个自举步骤，我们可以改进 (5.30) 中的 H¨older 指数，使其与初始数据的正则性相匹配。（若 $\beta \geq \alpha$，则无需此步骤。）根据 p 的定义，对任意 $\varepsilon > 0$ 和 $0 < t \leq 1$，有

$$\|p(x,t)\|_{L^{1+\varepsilon}(\mathbb{R}^2)} = t^{-\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}} \|P\|_{L^{1+\varepsilon}(\mathbb{R}^2)} \leq t^{-\varepsilon} C(\alpha, \mathcal{M}). \tag{5.35}$$

利用 $\Delta p = -\lambda \mathrm{div}(u \cdot \nabla u)$、(5.30) 和 (5.35)，可得

$$\|p(x,t)\|_{L^\infty(\mathcal{A}_{\frac{3}{2}})} \lesssim_\varepsilon t^{-\varepsilon} C(\alpha, \mathcal{M}) \tag{5.36}$$

对 $0 < t \leq 1$。定义

$$\widetilde{u}(x,t) = e^{t\Delta} u_0^{(1)}(x) - \int_0^t e^{(t-s)\Delta} (\lambda \phi u \cdot \nabla u + \phi \nabla p)(x,s) ds \tag{5.37}$$

其中 ϕ 是一个支撑在 $\mathcal{A}_{\frac{3}{2}}$ 内且满足 $\phi|_{\mathcal{A}_{\frac{4}{3}}} = 1$ 的光滑空间截断函数，并令 $\widehat{u} = u - \widetilde{u}$。于是，由 (5.30)、(5.36) 以及热核的基本估计可得

$$\|\widetilde{u}\|_{C^\alpha_{\mathrm{par}}(\mathcal{A}_{\frac{4}{3}} \times [0,1])} \lesssim C(\alpha, \mathcal{M}). \tag{5.38}$$

此外，$\widehat{u}$ 在 $\mathcal{A}_{\frac{4}{3}} \times$ 中满足齐次热方程 $\partial_t \widehat{u} = \Delta \widehat{u} 0, 1]$，在 $\mathcal{A}_{\frac{4}{3}} \times \{0\}$ 处取零初始数据，且在 $\left(\partial \mathcal{A}_{\frac{4}{3}}\right) \times [0,1]$处一致有界（见（5.33））， 因此它局部光滑，特别是，

$$\|\widehat{u}\|_{C^\alpha_{\mathrm{par}}(\mathcal{A}_{\frac{5}{4}} \times [0,1])} \lesssim C(\alpha, \mathcal{M}). \tag{5.39}$$

总之，我们得到了 u的最优局部 H¨older 正则性，即，

$$\|u\|_{C^\alpha_{\mathrm{par}}(\mathcal{A}_{\frac{5}{4}} \times [0,1])} \leq C(\alpha, \mathcal{M}). \tag{5.40}$$

最后，再次回到自相似坐标，对于$x \in \mathcal{A}_{\frac{5}{4}}$，我们得到 $0 < t \leq 1$，

$$\left| \frac{1}{\sqrt{t}} U\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) - \frac{1}{|x|} a_0\left(\frac{x}{|x|}\right) \right| \leq C(\alpha, \mathcal{M}) t^{\frac{\alpha}{2}}, \tag{5.41}$$

这便推出，对于 $|y| \geq 1$,

$$\left| |y| U(y) - a_0\left(\frac{y}{|y|}\right) \right| \leq C(\alpha, \mathcal{M}) |y|^{-\alpha}. \tag{5.42}$$

结合（2.6），这就证明了所需的估计（2.15）。 □

6. 数值观察

本节说明了用于得出数值观察 1.2 的数值方法。Leray 方程 (1.4) 具有由关于水平直线 $x_2 = 0$ 的反射定义的 $\mathbb{Z}_2$-对称性 $\mathcal{R}$ 。我们作出了以下更详细的数值观察：

观察 6.1. 对于 -1–齐次初始速度场，

$$u_0(y) = -\frac{\sigma y_1 y}{|y|^3}, \tag{6.1}$$

我们通过数值计算观察到以下现象：

(1) 在范围 $\sigma \in [0, 80]$ 内，存在一个 $\mathcal{R}$-对称解 U_σ，满足 (1.4) 和 (1.5)。*(2)* 存在 $\sigma_0 \approx 39.2$，使得 U_σ 附近的线性化算子具有一维核。*(3)* 在 $\sigma = \sigma_0$ 处，出现超临界叉形分岔，对应于关于水平轴的对称性破缺。更准确地说，对于 $\sigma \in [\sigma_0, 500]$，存在 (1.4) 的两个解 $U_\sigma + V_\sigma$ 和 $U_\sigma + \mathcal{R}V_\sigma$，满足 (1.5)，其中 $V_\sigma = 0$ 在 $\sigma = \sigma_0$ 处成立，而对于 $\sigma > \sigma_0$，V_σ 不具有 $\mathcal{R}$-对称性（因此是非平凡的）。

由于这些方法与三维情形中采用的方法非常相似 [36], 因此这里的描述相对简略。

6.1. **离散化**。计算区域是一个以原点 B_R 为中心、半径为 R 的球，其大小选取为依赖于 σ，使其满足 $R_\sigma = 100\sqrt{1+\sigma/80}$，以便更好地追踪解。为简单起见，我们不考虑在 B_{R_σ} 上满足 $y = u_0(y)$ 且定义于 ∂B_{R_σ} 上的 (1.4) 式（其中 U），而是将振幅和区域 B_{R_σ} 重新缩放至单位球 B_1，因此我们数值求解以下问题：

$$\begin{cases} -\Delta \widetilde{U} - \dfrac{R_\sigma^2}{2}(\widetilde{U} + \widetilde{y}\cdot\nabla_{\widetilde{y}}\widetilde{U}) + \sigma\widetilde{U}\cdot\nabla\widetilde{U} + \nabla\widetilde{P} = 0 & \text{in } B_1 \\ \operatorname{div}\widetilde{U} = 0 & \text{in } B_1 \\ \widetilde{U}(\widetilde{y}) = \widetilde{y}_1\widetilde{y} & \text{on } \partial B_1 \end{cases} \tag{6.2}$$

其中

$$\widetilde{U}(\widetilde{y}) = \frac{1}{\sigma R_\sigma} U(R_\sigma \widetilde{y}). \tag{6.3}$$

这样，我们就在固定区域 B_1 上进行计算，因此只需考虑一个网格。网格的构造方法是：先对圆盘进行均匀剖分，再在 $B_{1/2}$ 中细化一次，并在 $B_{1/4}$ 中进行第二次细化，最终得到 100013 个单元和 50218 个顶点。在该网格上，U 和 P 分别采用拉格朗日 P2 和 P1 有限元进行离散，所用软件包为 FEniCS [61, 5]。

6.2. **延拓**。在 σ 中进行数值延拓：在 $[0, 10]$ 中我们取步长 0.02，在 $[10, 80]$ 中取步长 0.2。在每一步中，都将前一步得到的解作为牛顿法的初始数据。该牛顿法通常在两到三步内收敛，并自动保持在 $\mathcal{R}$-对称解的类中。

我们通过数值方法求得一个解 U_σ，该解关于 $\sigma \in [0, 80]$ 具有 $\mathcal{R}$ 对称性，如图 6.1 所示。

6.3. **谱**。 对于每个 σ，使用 Krylov–Schur 算法计算（6.2）在 $\widetilde{}$附近线性化后的前 10 个最小特征值 U_σ，该算法由 SLEPc 实现 [37] [38]。

在 $\sigma = 0$处，数值求得的特征值具有极高精度，分别为$1 + \frac{n}{2}$、 $n \in \mathbb{N}$ （重数为 $n \mp 1$），并且与自相似坐标下 Stokes 算子的离散谱完全对应。

图 6.2 展示了实部最接近实轴的特征值。特别是，在 $\sigma_0 \approx 39.2$ 附近，一个实特征值穿过实轴，而在区间 $\sigma \in [0, 80]$内，所有其他特征值的实部都严格为正。

有趣的是，特征值 $\lambda = 1$ 不随 σ变化；这是因为可以证明，任何均值非零的特征向量都具有 $\lambda = 1$。

6.4. **分岔**。 标准分岔理论表明，当一个实特征值在 σ_0处穿过虚轴时，应当有另一个解从 U_σ 在 $\sigma = \sigma_0$处分岔而出$\widetilde{}$。这个新的解分支可以通过数值方法求得：当 σ 略大于 σ_0时，以 $U_\sigma + \alpha\phi$作为$\widetilde{}$初始猜测进行牛顿迭代，其中 ϕ 是对应于穿越虚轴的特征值的特征向量，而 $\alpha \in \mathbb{R}$ 是一个需要调整的实参数。然后可以进行上述延拓。

$\widetilde{}$ $\widetilde{}$由此得到一个非对称解的数值构造 $U_\sigma + V_\sigma$，其对应结果见图 6.3 $\sigma \in [\sigma_0, 80]$ 。

致谢。 DA 获得了美国国家科学基金会资助（编号 2406947），以及威斯康星大学麦迪逊分校研究生教育与科研副校长办公室通过威斯康星校友研究基金会提供的资助。JG 获得了法国国家研究署的资助（资助编号 ANR-18-CE40-0027, SingFlows 项目；ANR-25-CE40-4532-09，smasH 项目），以及索邦大学卓越计划（Idex）新兴计划的资助。XR 获得了中国国家重点研发计划的资助（编号 2023YFA1010700）。DA 和 JG 感谢 Vladim´ır ˇSver´ak 与他们进行了许多富有成效的讨论，内容涉及非唯一性问题。DA 还感谢 Zachary Bradshaw 和 Tobias Barker 就这一问题进行的讨论。

注 6.2。 我们最近得知，Changfeng Gui、Hao Liu 和 Chunjing Xie 能够证明一个与定理 1.1 [68] 类似的结果。

References

[1]D. Albritton 和 T. Barker. 纳维–斯托克斯方程的全局弱 Besov 解及其应用。《数学分析与应用档案》，232(1):197–263，2019年。doi:10.1007/s00205-018-1319-0。[2] D. Albritton、T. Barker 和 C. Prange. 半空间中纳维–斯托克斯方程的局部化平滑与集中。《泛函分析杂志》，284(1):109729，2023年。doi:10.1016/j.jfa.2022.109729。[3]D. Albritton 和 Z. Bradshaw. 具有对称性的临界表面准地转方程的不衰减解。《美国数学会汇刊》，375(1):587–625，2022年。doi:10.1090/tran/8500。[4] D. Albritton、E.Bru´e、and M.Colombo. 受迫纳维–斯托克斯方程的 Leray 解的非唯一性。《数学年刊》，196(1):415 – 455，2022年。doi:10.4007/annals.2022.196.1.3。

[5] M. S. Alnæs、J. Blechta、J. Hake、A. Johansson、B. Kehlet、A. Logg、C. Richardson、J. Ring、M. E. Rognes 和 G. N. Wells. FEniCS 项目 1.5 版。数值软件档案，3(100):9–23，2015年。doi:10.11588/ans.2015.100.20553。[6]J. Bang、C. Gui、H. Liu、Y. Wang 和 C. Xie. 高维纳维–斯托克斯方程稳态解的刚性及其应用。欧洲数学学会杂志，2025年在线先行发表。doi:10.4171/JEMS/1738。[7] T. Barker 和 C. Prange. 纳维–斯托克斯方程的局部化平滑及奇点附近临界范数的集中。《数学分析与应用档案》，236(3):1487–1541，2020年。doi:10.1007/s00205-020-01495-6。[8] T. Barker、G. Seregin 和 V. ˇSver´ak. 大 L^3,$^\infty$ 初始数据下纳维–斯托克斯弱解的稳定性。《偏微分方程通讯》，43(4):628–651，2018年。doi:10.1080/03605302.2018.1449219。[9] O. A. Barraza. 纳维–斯托克斯方程在弱 L^p-空间中的自相似解。《伊比利亚美洲数学杂志》，12(2):411–439，1996年。doi:10.4171/RMI/202。[10] J. Bedrossian、P. Germain 和 B. Harrop-Griffiths. 纳维–斯托克斯方程的涡丝解。《纯粹与应用数学通讯》，76(4):685–787，2023年。doi:10.1002/cpa.22091。[11]A. Bensoussan 和 J. Frehse. 非线性椭圆系统的正则性结果及其应用，应用数学科学第151卷。施普林格出版社，柏林，2002年。doi:10.1007/978-3-662-12905-0。[12]Z. Bradshaw 和 T.-P. Tsai. 纳维–斯托克斯方程的前向离散自相似解 II。《亨利·庞加莱年刊》，18(3):1095–1119，2017年。doi:10.1007/ s00023-016-0519-0。[13] Z. Bradshaw 和 T.-P. Tsai. 纳维–斯托克斯方程的旋转修正尺度不变解。《偏微分方程通讯》，42(7):1065–1087，2017年。doi:10.1080/03605302.2017.1323922。[14] Z. Bradshaw 和 T.-P. Tsai. 具有 Besov 空间数据的纳维–斯托克斯方程离散自相似解。《数学分析与应用档案》，229(1):53–77，2018年。doi:10.1007/ s00205-017-1213-1。[15] Z. Bradshaw 和 T.-P. Tsai. 纳维–斯托克斯方程的自相似解：近期成果综述。载于《几何与应用数学中的非线性分析》第2部分，哈佛大学数学科学与应用中心数学系列第2卷，第159–181页。国际出版社，马萨诸塞州萨默维尔，2018年。[16] Z. Bradshaw 和 T.-P. Tsai. 满足局部能量不等式的 L^2_{loc} 数据对应的纳维–斯托克斯方程离散自相似解。《偏微分方程分析》，12(8):1943–1962，2019年。doi:10.2140/apde.2019.12.1943。[17] L. Brandolese. 纳维–斯托克斯方程自相似解的精细性质。《数学分析与应用档案》，192(3):375–401，2009年。doi:10.1007/s00205-008-0149-x。[18] T. Buckmaster 和 V. Vicol. 纳维–斯托克斯方程弱解的非唯一性。《数学年刊》（第2辑），189(1):101–144，2019年。doi:10.4007/annals.2019.189.1.3。[19] L. Caffarelli、R. Kohn 和 L. Nirenberg. 纳维–斯托克斯方程适当弱解的部分正则性。《纯粹与应用数学通讯》，35(6):771–831，1982年。doi:10.1002/ cpa.3160350604。[20] C. P. Calder´on. 初始数据属于 L^p的纳维–斯托克斯方程弱解的存在性。《美国数学会汇刊》，318(1):179–200，1990年。doi:10.2307/2001234。[21] M. Cannone、Y. Meyer 和 F. Planchon. 纳维–´斯托克斯方程的自相似解。载于《偏微分方程研讨会》，1993–1994年，第´VIII号报告，12页。巴黎综合理工学院，帕莱索，1994年。[22] M. Cannone 和 F. Planchon. R^{3}中纳维–斯托克斯方程的自相似解。《偏微分方程通讯》，21(1-2):179–193，1996年。doi:10.1080/ 03605309608821179。[23] D. Chae 和 J. Wolf. 初值属于 $L^2_{loc}(\mathbb{R}^3)$的纳维–斯托克斯方程离散自相似解的存在性。《亨利·庞加莱研究所年刊 C 辑：非线性分析》，35(4):1019–1039，2018年。doi:10.1016/j.anihpc.2017.10.001。[24] A. Cheskidov 和 X. Luo. 纳维–斯托克斯方程的尖锐非唯一性。《数学创新》，229(3):987–1054，2022年。doi:10.1007/s00222-022-01116-x。

[25] A. Cheskidov 和 X. Luo。二维纳维–斯托克斯方程的 L^2-临界非唯一性。《偏微分方程年刊》，9(2)，2023年。doi:10.1007/s40818-023-00154-9。[26] M. P. Coiculescu 和 S. Palasek。临界数据下纳维–斯托克斯方程光滑解的非唯一性。《数学发明》，2025年。doi:10.1007/s00222-025-01396-z。[27] R. Coifman、P.-L. Lions、Y. Meyer 和 S. Semmes。补偿紧性与 Hardy 空间。《纯粹与应用数学杂志》（第9辑），72(3):247–286，1993年。[28] H. Fujita 和 T. Kato。关于纳维–斯托克斯初值问题。I。《理性力学与分析档案》，16:269–315，1964年。doi:10.1007/BF00276188。[29] G. P. Galdi。《纳维–斯托克斯方程数学理论导论》。Springer 数学专著。Springer，纽约，第二版，2011年。定常问题。doi:10.1007/978-0-387-09620-9。[30]I. Gallagher 和 T. Gallay。以测度作为初始涡量的二维纳维–斯托克斯方程解的唯一性。《数学年刊》，332(2):287–327，2005年。doi:10.1007/s00208-004-0627-x。[31] I. Gallagher、T. Gallay 和 P.-L. Lions。以狄拉克质量作为初始涡量的二维纳维–斯托克斯方程解的唯一性。《数学通讯》，278(14):1665–1672，2005年。doi:10.1002/mana.200410331。[32]T. Gallay 和 C. E. Wayne。二维纳维–斯托克斯方程涡旋解的全局稳定性。《数学物理通讯》，255(1):97–129，2005年。doi:10.1007/s00220-004-1254-9。[33] Y. Giga 和 T. Miyakawa。以测度作为初始涡量的 R^3 中纳维–斯托克斯流及 Morrey 空间。《偏微分方程通讯》，14(5):577–618，1989年。doi:10.1080/03605308908820621。[34]L. Grafakos。《经典傅里叶分析》，数学研究生教材第249卷。Springer，纽约，第三版，2014年。doi:10.1007/978-1-4939-1194-3。[35]J. Guillod、M. Korobkov 和 X. Ren。紧支撑力作用下平面定常纳维–斯托克斯流的存在性与唯一性。《数学物理通讯》，397(2):729–762，2023年。doi:10.1007/s00220-022-04504-9。[36] J. Guillod 和 V. ˇSver´ak。临界空间中纳维–斯托克斯初值问题非唯一性的数值研究。《数学与流体力学杂志》，25(3)，2023年。doi:10.1007/ s00021-023-00789-5。[37]V. Hernandez、J. E. Roman、A. Tomas 和 V. Vidal。SLEPc 中的 Krylov–Schur 方法。技术报告 STR-7，瓦伦西亚理工大学，2009年。可见 http://slepc.upv.es。[38] V. Hernandez、J. E. Roman 和 V. Vidal。SLEPc。《ACM 数学软件汇刊》，31(3):351–362，2005年。doi:10.1145/1089014.1089019。[39] T. Hou、Y. Wang 和 C. Yang。无外力不可压缩三维纳维–斯托克斯方程 Leray–Hopf 解的非唯一性。arXiv 预印本，2025年。arXiv:2509.25116。[40] H. Jia 和 V. ˇSver´ak。潜在纳维–斯托克斯奇点的极小 L^3初始数据。《SIAM 数学分析杂志》，45(3):1448–1459，2013年。doi:10.1137/120880197。[41] H. Jia 和 V. ˇSver´ak。纳维–斯托克斯方程弱解在初始时刻附近的局部空间估计及前向自相似解。《数学发明》，196(1):233–265，2014年。doi:10.1007/s00222-013-0468-x。[42] H. Jia 和 V. ˇSver´ak。不可压缩三维纳维–斯托克斯方程在自然能量空间中是否局部不适定？《泛函分析杂志》，268(12):3734–3766，2015年。doi:10.1016/j.jfa. 2015.04.006。[43] H. Jia、V. ˇSver´ak 和 T.-P. Tsai。非定常纳维–斯托克斯方程的自相似解。载于《黏性流体力学中的数学分析手册》，第461–507页。Springer，Cham，2018年。doi:10.1007/978-3-319-13344-7_9。[44] V. I. Judovich。旋转圆柱间的次级流与流体失稳。《应用数学与力学》，30:688–698，1966年。doi:10.1016/0021-8928(66)90033-5。[45] K. Kang、H. Miura 和 T.-P. Tsai。具有局部L^3 初始数据的纳维–斯托克斯流的短时间正则性及其应用。《国际数学研究通知》，2021(11):8763–8805，2021年。doi:10.1093/imrn/rnz327。

[46] T. Kato。R^m 中纳维–斯托克斯方程的强 L^p-解及其在弱解中的应用。《数学杂志》，187(4):471–480，1984年。doi:10.1007/BF01174182。[47] N. Kikuchi 和 G. Seregin。满足局部能量不等式的纳维–斯托克斯方程柯西问题弱解。载于《非线性方程与谱理论》，《美国数学学会译丛》第2辑第220卷，第141–164页。美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，2007年。doi:10.1090/trans2/220/07。[48]H. Koch 和 D. Tataru。纳维–斯托克斯方程的适定性。《数学进展》，157(1):22–35，2001年。doi:10.1006/aima.2000.1937。[49] M. Korobkov、K. Pileckas 和 R. Russo。《定常纳维–斯托克斯系统：理论基础与 Leray 问题》。Birkh¨auser Cham，2025年。doi:10.1007/978-3-031-50898-1。[50] M. Korobkov 和 X. Ren。平面外域中的定常纳维–斯托克斯系统解：九十年的探索、谜团与见解。《数学与流体力学杂志》，25(3):55，2023年。doi:10.1007/s00021-023-00792-w。[51]M. Korobkov 和 X. Ren。平面定常纳维–斯托克斯系统的基本速度估计及其应用。《数学与流体力学杂志》，27(3):37，2025年。doi: 10.1007/s00021-025-00939-x。[52] M. Korobkov 和 T.-P. Tsai。半空间中纳维–斯托克斯方程的前向自相似解。《偏微分方程分析》，9(8):1811–1827，2016年。doi:10.2140/apde.2016.9.1811。[53]H. Kwon 和 T.-P. Tsai。具有缓慢衰减振荡的不衰减初始数据所对应的全局纳维–斯托克斯流。《数学物理通讯》，375(3):1665–1715，2020年。doi:10.1007/ s00220-020-03695-3。[54] O. A. Lady˘zenskaja。纳维–斯托克斯方程 Hopf 类弱解非唯一性的一个例子。《苏联科学院通报：数学辑》，33:240–247，1969年。[55] B. Lai、C. Miao 和 X. Zheng。分数阶纳维–斯托克斯方程的前向自相似解。《数学进展》，352:981–1043，2019年。doi:10.1016/j.aim.2019.06.021。[56] C.-C. Lai。带阻尼的磁流体动力学方程和黏弹性纳维–斯托克斯方程的前向离散自相似解。《数学与流体力学杂志》，21(3):38，2019年。doi:10.1007/ s00021-019-0443-4。[57] P. G. Lemari´e-Rieusset。Navier-Stokes 方程的无限能量弱解´。 ´。巴黎科学院报告，数学辑 I，328(12):1133–1138，1999年。doi:10.1016/S0764-4442(99)80427-3。[58] P. G. Lemari´e-Rieusset。《纳维–斯托克斯问题的最新进展》，Chapman & Hall/CRC 数学研究札记第431卷。Chapman&Hall/CRC，博卡拉顿，佛罗里达州，2002年。doi:10.1201/9781420035674。[59] P. G. Lemari´e-Rieusset。《21世纪的纳维–斯托克斯问题》。CRC 出版社，博卡拉顿，佛罗里达州，2016年。doi:10.1201/b19556。[60] J. Leray。充满空间的黏性液体的运动。《数学学报》，63(1):193– 248，1934年。doi:10.1007/BF02547354。[61] A. Logg、K.-A. Mardal、G. N. Wells 等。《用有限元方法自动求解微分方程》。Springer，2012年。doi:10.1007/978-3-642-23099-8。[62] V. Maz'ya。《索伯列夫空间及其在椭圆型偏微分方程中的应用》，数学科学基础丛书第342卷 /数学科学基本原理/。Springer，海德堡，增补版，2011年。doi:10.1007/ 978-3-642-15564-2。[63] J. Ne˘cas、M. R˚u˘zi˘cka 和 V. ˘Sver´ak。关于纳维–斯托克斯方程的 Leray 自相似解。《数学学报》，176(2):283–294，1996年。doi:10.1007/BF02551584。[64] E. M. Stein。《调和分析：实变量方法、正交性与振荡积分》，普林斯顿数学丛书第43卷。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1993年。在 Timothy S. Murphy 协助下完成，调和分析专著 III。[65]T.-P. Tsai。满足局部能量估计的纳维–斯托克斯方程 Leray 自相似解。《理性力学与分析档案》，143(1):29–51，1998年。doi:10.1007/ s002050050099。[66] T.-P. Tsai。纳维–斯托克斯方程的前向离散自相似解。《数学物理通讯》，328(1):29–44，2014年。doi:10.1007/s00220-014-1984-2。

[67] T.-P.Tsai。《纳维–斯托克斯方程讲义》，第192卷，收录于《数学研究生教程》。美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，2018年。doi:10.1090/gsm/192。[68] C. Xie。个人通信，2026年1月。

（Dallas Albritton） University of Wisconsin-Madison、
Department of Mathematics、480 Lincoln Dr、 Madison、 WI 53706、 USA
电子邮箱：dalbritton@wisc.edu

（Julien Guillod） Sorbonne Université、 CNRS、 Université Paris Cité、 Inria、
Labo-ratoire Jacques-Louis Lions (LJLL)、 75005 Paris、 France

École Normale Supérieure, Université PSL, Département de Mathématiques et applications, 75005, Paris, France
电子邮箱地址: julien.guillod@sorbonne-universite.fr

（Mikhail Korobkov） Fudan University, School of Mathematical Sciences,
HandanRoad 220, 200433 Shanghai, China
电子邮箱地址: korob@math.nsc.ru (Xiao Ren) Fudan University,
Center for Applied Mathematics, Handan Road220, 200433 Shanghai, China电子邮箱地址: xren@fudan.edu.cn

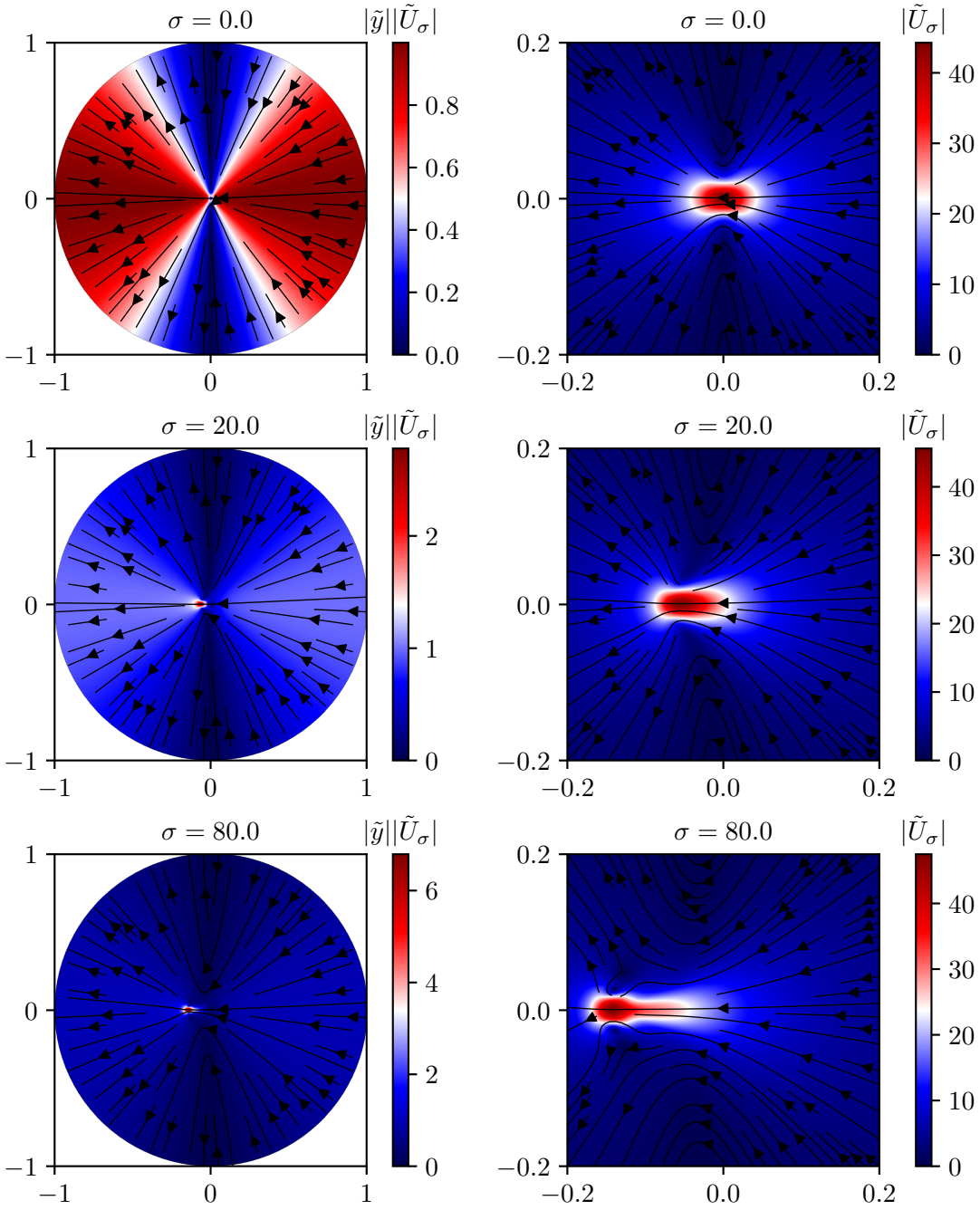
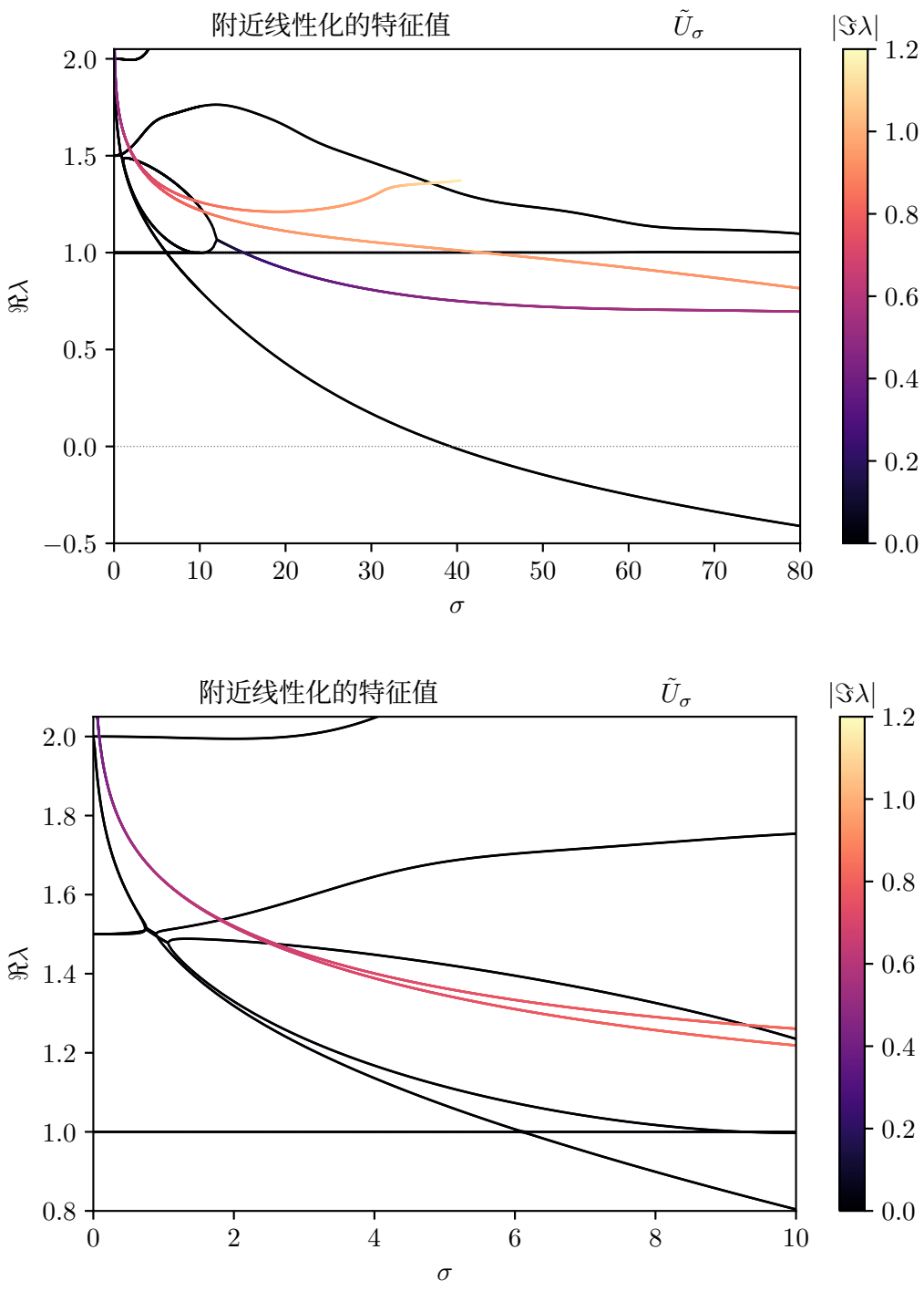


FIGURE 6.1. 当 $\sigma \in \{0, 20, 80\}$ 时方程 (6.2) 解的表示 U_σ：所有解均具有 $\mathcal{R}$ 对称性。第一列展示整个计算区域上的解，以颜色表示 $|\tilde{y}||U(\tilde{y})|$ 的大小，并显示 U 的流线。特别地，对于 $\sigma = 0$，该解还关于竖直轴对称，因为它满足自相似斯托克斯方程。第二列展示原点附近的解，颜色表示 $|U(\tilde{y})|$ 的大小~。



~FIGURE 6.2. 数值求得的 U_σ 附近线性化算子的特征值。线条颜色表示特征值虚部的绝对值。特征值 $\lambda = 1$ 与由特征向量均值给出的投影相关。在 $\sigma_0 \approx 39.2$ 附近，一个实特征值穿过虚轴。

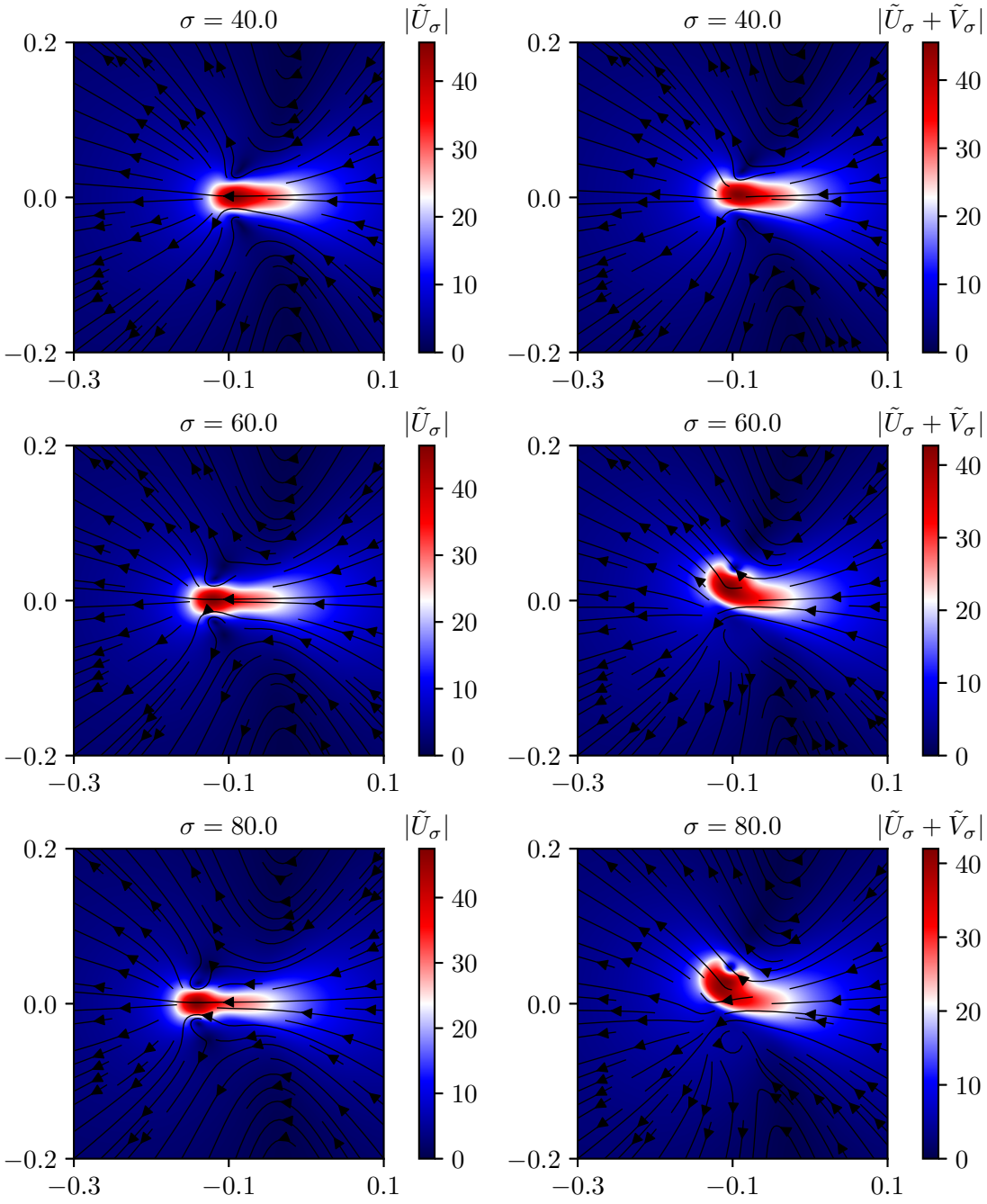


FIGURE 6.3. 对称解 U_σ 位于左侧，非对称解 $U_\sigma + V_\sigma$ 位于右侧的表示，其中 $\sigma \in \{40, 60, 80\}$。表示图位于原点附近，但略微向左偏移，因为有趣的部分在该方向上。可以直观看出，这两个解是不同的。