arXiv:2601.03176v1 [math.CO] 6 Jan 2026

多面体上的赋值与拓扑排列

˘ASKOLDKHOVANSKII、VALENTINA KIRITCHENKO 和
VLADLEN TIMORIN

Abstract. 我们重新探讨凸多面体上的经典主题——（广义或平移不变）赋值。我们的研究框架对经典框架作了推广，方向与以往的推广“相反”：以往研究大多关注定义多胞体顶点所用的底域或底环的变化，而我们考察更一般的定义超平面集合。这些集合不被施加任何代数结构。这一框架使我们得以揭示剪刀全等问题与有限超平面排列之间的密切关系：这两个领域存在许多平行的结果，但这种平行性似乎一直未受关注。特别是，关于排列的 Varchenko–Gelfand 代数的某些性质，可以转化为多胞体环或赋值的性质。在一般的拓扑框架下研究这些性质是可行的，也就是说，可以在所谓的拓扑排列背景下进行研究；在拓扑排列中，超平面不必是直的，甚至可以具有非平凡的拓扑结构。

1. Historic overview

本概述面向非专业读者；结果简介请参阅下一节。

剪刀全等问题至少可以追溯到欧几里得和阿基米德的时代；它们拥有悠久而丰富的历史。回顾一下，平面中的两个多边形如果其中一个可以被切割成有限个多边形块，并且可以将这些多边形块重新拼成另一个多边形，则称二者剪拼等价。这个定义隐含了一个特定的欧几里得等距变换群 G：移动这些多边形块时，只允许使用来自 G 的变换。根据 G 的选择，可以得到各种称为 G-剪刀全等问题的问题。例如，当 G 是平面欧几里得等距变换的全群时，两个平面多边形

本文介绍了“对称性、信息、混沌”项目的成果。该项目由HSE大学基础研究计划资助实施。

是 G-剪刀合同的，当且仅当它们具有相同的面积。这一结果非常经典，被称为华莱士–博尔尧–格维恩定理；这一名称承认了19世纪初彼此独立且明确的证明，同时也暗示该论述可追溯至欧几里得。事实上，当 G 被替换为仅由平行平移和半周旋转组成的一个小得多的子群时，同样的结果仍然成立，正如 Hadwiger 和 Glur 在 [10] 中所证明的那样。

即使在这一最简单的情形下，也很明显，面积的某些抽象性质发挥着决定性作用，即可加性和 G-不变性。可加性通过赋值这一概念形式化。给定一个 $\mathcal{P}$ 凸多边形类，使得 $\varnothing \in \mathcal{P}$ ，并且该类在取交集的运算下保持稳定，定义一个作用于 $\mathcal{P}$ 上的赋值为一个 μ 函数 $\mathcal{P}$, 其值（例如取于实数集或有理数集）满足 $\mu(\varnothing) = 0$ 以及 $\mu(P \cup Q) = \mu(P) + \mu(Q) - \mu(P \cap Q)$，其中 P、 Q和 $P \cup Q \in \mathcal{P}$。当然，这一概念可以原样扩展到高维多面体。若 μ 满足：对于所有 $g \in$ G, 都有 G-不变 $\mu(gP) = \mu(P)$，则称其为 G-不变。比如，欧几里得面积是有界多边形上的一个赋值，并且在整个欧几里得等距变换群下保持不变。赋值的另一个重要性质是简单：如果 μ 在退化多边形上为零，即在线段和点上为零，则称其为简单赋值。高维简单赋值 定义为在正余维多面体上为零的赋值。如果一个多边形被切分成若干部分，那么可以将该多边形上的简单赋值的值计算为所有相应部分上的值之和——无需考虑这些部分可能存在非空交集这一事实，因为这些交集具有正余维。接下来，当使用 G 中的元素重新排列这些部分时，G-不变性保证 μ 的值不会改变。因此，G-不变的简单赋值在所有成 G-剪刀合同的多边形对上始终取相同的值。

由佐恩引理可知，存在许多 Q-线性映射 ξ： R $\to$R，它们并非 R-线性映射；这类映射称为可加函数 ，因为它们由函数方程 $f(x+y) = f(x)+f(y)$ 所刻画，该方程对所有 $x, y \in$R 都成立。每个取值于 R 的赋值 μ ，都会导出不可数多个形如 $\xi \circ \mu$ 的赋值，其中ξ： R $\to$ R 是可加函数。与其同时考虑所有 $\xi \circ \mu$ 和 μ，不如只考虑取值于 Q 的赋值；因为只要选定一组基，任何取值于 Q-向量空间的赋值都可归结为一族取值于 Q 的赋值。面积也可以这样看作不可数多个取值于 Q 的赋值，因为 R 是 Q 上的向量空间。

希尔伯特第三问题探讨了华莱士—博雅伊—格维恩定理的类似命题是否在三维情形下成立，也就是说，任意两个

体积相同的凸三维多面体是否剪拼等价（其中允许的变换群是实数集^{3}的全等变换群）。正如希尔伯特早已猜想的那样，答案是否定的；这一否定答案的原因在于，存在许多独立于体积的简单不变赋值。德恩 [4] 描述了这些赋值，它们被称为德恩不变量；例如参见 [26]。在二维情形下也能找到某些类似的不变量，只是需要将 G 限定为所有平移组成的群 T。具体而言，取一条余定向直线 $L \subset \mathrm{R}^2$, ，其中 L 的余定向 指选取 $\mathrm{R}^2 \setminus L$ 的一个连通分支，并称之为的正侧（另一个连通分支则称为负侧）。给定一个紧凸多边形 P，定义数值 $\Upsilon_L(P)$ 为 $\mathrm{Len}(P \cap L_+)$ 与 $\mathrm{Len}(P \cap L_-)$ 之差；其中 $L_\pm$ 是与 L平行的 P 的两条支撑直线，正负号则取决于 P 位于所选支撑直线的正侧还是负侧。Len(I)表示紧区间 I的欧几里得长度。Hadwiger 和 Glur 在 1951 年 的论文 [10] 中引入了二维赋值。

[10] 的一个主要结果是，平面内两个有界凸多边形剪拼等价，当且仅当它们面积相同，并且对于所有 L，它们的 Υ_L取值相同。例如，面积相同的三角形和正方形并不剪拼等价。另一方面，所有面积相同的平行六面体都剪拼等价，因为赋值 Υ_L 对它们均为零，其中 L取遍所有情况。特别是，可以通过切割正方形并平移各块（过程中不允许旋转各块），以任意角度“旋转”正方形。尽管要区分每一对不剪拼等价的多边形，需要无穷族赋值 Υ_L （由所有直线参数化），但要判断给定的两个多边形是否剪拼等价，只需有限个赋值（只需取包含这两个多边形所有非退化边的有限条直线即可）。借助抽象线性代数的方法，可以由 [10] 推得，平面多边形上的每个简单T-不变赋值，都是（可能无穷的）由（$\xi \circ$面积）和 $\xi \circ \Upsilon_L$构成的线性组合，其中 L 遍历所有经过某个给定点（例如原点）的余定向直线，而 ξ : R $\to$Q遍历所有取值于Q的R上的可加函数。

[10] 的结果后来被推广到任意维数的实仿射空间；参见 [12, 26, 15]。我们不再考虑 Υ_L，而是研究与实数集 R^n中的定向旗 $\mathcal{L}$ 相关联的多维 ***Hadwiger*** 不变量 $\Upsilon_{\mathcal{L}}$。所谓旗，是指按包含关系线性排序的仿射子空间有限集族。Hadwiger 不变量基于特殊类型的旗 $\mathcal{L}$ ，即 $\mathcal{L}$ 应由子空间 $L^0 \supset \cdots \supset L^k$组成，

其中 L^i 在实数集 $\mathbf{R}^n$中的余维为 i，而 i取从 0 到 k（含端点）的所有整数。将 $\mathcal{L}$ 的定向定义为 L^k在实数集 $\mathbf{R}^n$中的余定向。这种类型的定向旗构成集合 $\Lambda_k^{\mathcal{O}}$。给定任意 $\mathcal{L} \in \Lambda_k^{\mathcal{O}}$和任意维数为 n、位于实数集 $\mathbf{R}^n$ 中的凸多胞体 $P \subset$，若 $P \cap L^i$是 P的一个面且余维为 i，对所有 $i = 0$、.....、k均成立，则值 $\Upsilon_{\mathcal{L}}(P)$定义为 $\pm\mathrm{vol}_{n-k}(P \cap L^k)$；否则定义为 0。这里，$\mathrm{vol}_{n-k}$表示 $n-k$ 维体积，并将其视为每个余维为 k的仿射子空间上的测度；当且仅当由 P 定义的$\mathcal{L}$ 定向与给定的 $\mathcal{L}$定向一致时，符号取正，否则取负。更精确地，假设 $\Upsilon_{\mathcal{L}}(P) \neq 0$，考虑向量 v_{k-1}、.....、 v_0，其中每个 v_i连接 $P \cap L^{i+1}$的重心与 $P \cap L^i$的重心；这些向量在一个与 L^k 互补的仿射子空间中构成一组基，因而定义了 L^k的余定向；这就是 P 定义 $\mathcal{L}$定向的方式。文献 [15]明确描述了实数集 $\mathbf{R}^n$ 中的凸多胞体上所有简单 T-不变赋值构成的空间：每个这样的赋值都是形如 $\xi \circ \Upsilon_{\mathcal{L}}$的赋值的（可能无限）线性组合，其中 $\mathcal{L} \in \Lambda_k^{\mathcal{O}}$，且 $\xi\colon \mathbf{R} \to \mathbf{Q}$ 是可加的。这些赋值之间的所有线性关系也有明确描述。

因此，实数集^{n}上的 T-剪拼全等问题已有完整解答。由上述内容可知，实数集^n 中的两个凸多胞体 P和 Q 是 T-剪拼等价的，当且仅当所有 Hadwiger 不变量在 P 和 Q上的取值相同。注意，体积泛函也是 Hadwiger 不变量之一，具体对应于旗 $\{L^0 =$实数集$^n\}$。对于非交换群 G，尤其是当 G 为欧几里得等距变换的全群时，G-剪拼全等问题仍未解决。特别是，在维数 > 4下，欧几里得剪拼全等不变量尚缺乏完整描述；双曲空间和球面空间中的相应问题甚至在维数 3 时也仍未解决。德恩不变量已推广到更高维欧几里得空间；然而，与 Sydler 定理不同——该定理指出，在实数集^3, 中，两个凸多胞体剪拼等价，当且仅当它们的体积和德恩不变量相同——目前尚无针对实数集^n 且 $n > 4$ 的这一事实的推广（$n = 4$ 情形已由 Jessen 的结果 [13] 涵盖）。关于剪刀全等问题的进一步研究方向，建立在其与代数 K-理论、同调代数和代数几何之间的深刻联系之上；综述见[31]。

有理凸多面体 及其上的赋值构成了一个有趣的子领域，这源于它与代数几何和表示论的联系，尤其是与环面簇理论的联系。若多面体 P 的所有顶点

都属于 $\mathbb{Q}^n \subset$ 实数集^n （分别属于 $\mathbb{Z}^n \subset$ 实数集^n），则称其为有理多面体（分别称为整数多胞体）。在此背景下，相关群 G 是平移群 T 的一个格，例如，可以取所有由来自 $\mathbb{Z}^n \subset$实数集^{n}的向量所确定的平移；在这种情况下，我们记 $\mathsf{G} = \mathbb{Z}^n$。整数多胞体上的赋值可以定义为：将定义在所有有理多胞体集合上的赋值限制到所有整数多胞体集合上（P. McMullen [20] 证明，一个表面上弱得多的定义与此等价；难点在于，整数多胞体类在取交集时并不封闭）。更一般地，可以考虑有序域甚至有序环中的多面体；剪刀合同的代数方法（特别是同调方法）很容易扩展到这一情形，前提是将多面体理解为某些单形的并。此前关于所有多胞体或有理多胞体上的 $\mathbb{Z}^n$-不变赋值的研究包括 [17, 25, 19, 22]；其中一些工作考虑了更一般的基环。在 [9], Hadwiger 描述了实数集 $\mathbb{R}^n$中所有多胞体上的 $\mathbb{Z}^n$-不变赋值。

剪刀合同群$\mathrm{Sc}(\mathcal{P}; \mathsf{G})$ 与实数集 $\mathbb{R}^n$ 中一类$\mathcal{P}$ 多胞体及实数集 $\mathbb{R}^n$ 上等距变换群 G 相关联，是由 $\mathcal{P}$ 中的元素生成的阿贝尔群（给定 $P \in \mathcal{P}$, 我们将 $\mathrm{Sc}(\mathcal{P};\mathsf{G})$ 中相应的生成元记为 $[P]$ ），并满足以下关系

- $[\varnothing] = 0$,
- $[P \cup Q] = [P] + [Q] - [P \cap Q]$ for $P, Q, P \cup Q \in \mathcal{P}$,
- $[gP] = [P]$ for all $g \in \mathsf{G}$.

对 $\mathrm{Sc}(\mathcal{P}; \mathsf{G})$ 施加额外的关系 $[P] = 0$（当 $\dim(P) < n$ 时），可得到它的一个进一步商空间；该商空间记为 $\mathrm{Sc}^\circ(\mathcal{P}; \mathsf{G})$，称为简单剪刀合同群。Zylev 的经典结果 [32] 表明， P、 $Q \in \mathcal{P}$ 是 G-剪刀合同的，当且仅当 $[P] = [Q]$ 属于 $\mathrm{Sc}^\circ(\mathcal{P}; \mathsf{G})$。有了这一代数框架，剪刀合同问题便可归结为描述相应的简单剪刀合同群。请注意， $\mathcal{P}$ 上所有取值于 Q 的 G-不变赋值所构成的空间，自然同构于对偶空间 $\mathrm{Hom}(\mathrm{Sc}(\mathcal{P}; \mathsf{G}); \mathbb{Q})$，而简单赋值构成的子空间则与 $\mathrm{Hom}(\mathrm{Sc}^\circ(\mathcal{P}; \mathsf{G}); \mathbb{Q})$ 同一。正因如此，研究赋值的问题与研究相应剪刀合同群的问题本质上是等价的。大多数作者更倾向于后者，因为从实际角度看，剪刀合同群比其对偶空间小。

考虑映射 $P \mapsto [P]$ 从 $\mathcal{P}$到 $\mathrm{Sc}(\mathcal{P}; \mathsf{G})$；该映射可视为普适的 G-不变赋值。这里的普适性意味着，任何取值于某个阿贝尔群 A（例如）的 G- 不变赋值 μ，都可以表示为 $\mu(P) = \xi([P])$，其中 $\xi : \mathrm{Sc}(\mathcal{P}; \mathsf{G}) \to A$ 是一个适当的群同态。P. McMullen 在 [18] 中证明，如果 $\mathcal{P}$

是 $\mathbf{R}^n$ 中所有凸多胞体的集合，而 T 是所有平行平移组成的群，那么经过一个非常小的修改后，$\mathrm{Sc}(\mathcal{P}; \mathrm{T})$ 获得一个自然的分次 R-代数结构，即所谓的多胞体代数，其中乘法由多胞体的闵可夫斯基和诱导。唯一需要的修改是在 0 次部分。McMullen 多胞体代数的各种版本在环面簇的交理论中发挥着关键作用。例如，正如 Fulton 和 Sturmfels 在 [7], 中所证明的，**复环面** $(\mathbf{C} \setminus \{0\})^n$ 的条件环自然同构于 $\mathrm{Sc}(\mathcal{P}_{\mathbb{Z}}; \mathbf{Z}^n)$；后者可定义为由整数多胞体生成的 $\mathrm{Sc}(\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}; \mathbf{Z}^n)$ 的子群。这里，$\mathcal{P}_{\mathbb{Z}}$ 是所有整数多胞体的集合，而 $\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}$ 是所有有理多胞体的集合。我们撰写本文的动机，是希望更好地理解这一同构。

剪刀合同群的代数方法基于这样一种认识：实数集 $\mathbf{R}^n$ 中的多胞体是单形的并集。这种方法很适合处理多胞体顶点可取自不同集合的情形。另一方面，一种对偶方法是固定实数集 $\mathbf{R}^n$ 中的某个仿射超平面集合 $\mathcal{A}$，并规定 $\mathcal{P}$ 仅由边界为 $\mathcal{A}$ 中超平面的多面体组成。更准确地说，对于有限子集 $\mathcal{A}'$，$\mathcal{A}'' \subset \mathcal{A}$，取 $\mathcal{A}'$ 中所有超平面的交集，再减去 $\mathcal{A}''$ 中所有超平面的并集；这个集合差的各个连通分支称为 $\mathcal{A}$-多面体。有界的 $\mathcal{A}$-多面体称为 $\mathcal{A}$-多胞体。本文研究 $\mathcal{A}$-多面体的剪刀全等问题，我们采用的方法与上述标准方法截然不同。记 $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$ 为所有 $\mathcal{A}$-多胞体的集合。

仿射超平面排列 是上述设定的一个重要特例。它们是 $\mathbf{R}^n$ 中仿射超平面的有限集族。给定一个仿射排列 $\mathcal{A}$，考虑 $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$ 上的赋值是有意义的，其中 $\mathbf{G} = 0$ 是平凡群，仅由单位元构成。在这种情况下，简单剪刀合同群与所谓的 *Varchenko–Gelfand*代数 [29] 相同；该代数是 $\mathcal{A}$ 上的有理数值函数空间，其元素是定义在 $\mathcal{A}$ 的补区域上的所有有理数值函数。Varchenko–Gelfand代数中的关系（更准确地说，是其底层有理向量空间中的关系）是剪刀合同群中关系的典型例子。尽管这一观察浅显且几乎不言自明，却似乎一直未受关注。可以通过拓扑方法研究群 $\mathrm{Sc}^\circ(\mathcal{P}_{\mathcal{A}}; 0)$：事实证明，该群的相关性质几乎不依赖于 $\mathcal{A}$ 由真正的超平面构成这一假设。例如，在二维情形下，直线所需满足的唯一性质是：每条直线都是一条简单曲线，并且适当地嵌入 $\mathbf{R}^2$，中；而

任意两条不同的直线在拓扑意义上横截相交（无需对交点数量设定上限）。

$\mathsf{G} = 0$ 的情形很重要，因为对于所有其他的 G，群 $\mathrm{Sc}(\mathcal{P}; \mathsf{G})$ 都是 $\mathrm{Sc}(\mathcal{P}; 0)$ 的商。另一方面，G 的某些其他特殊取值也有很好的拓扑解释。例如，令 $\mathsf{G} = \mathbb{Z}^n$ 为由整数向量平移构成的群，并令 $\mathcal{A}$ 为一组有理（= 即定义在 Q 上）的仿射超平面，且在 $\mathbb{Z}^n$ 的作用下保持不变。那么 $\mathcal{A}$ 定义了实环面 $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ 中的一组 $\mathcal{A}$ 余维一子环面；这些子环面是相对于环面上的标准欧几里得结构而言的测地超平面。如果 $\mathcal{A}$ 是有限集，则称其为 环面配置。在额外假设 $\mathcal{A}$ 至少包含一组交集为单点的 n 个超平面的条件下，可以考虑由 $\mathcal{A}$ 中的超平面围成的 $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ 中的多胞体；令 $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$ 表示这类多胞体。此时，研究 $\mathcal{P}_{\hat{\mathcal{A}}}$ 上的 $\mathbb{Z}^n$- 不变赋值，等价于研究环面中 $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$ 上的赋值。平坦环面及其测地超平面可以由更一般的拓扑流形及其拓扑超曲面取代。本文采用的正是这种方法。

2. Introduction and statement of results

我们的主要目标之一是对有理多胞体上的简单 $\mathbb{Z}^n$-赋值作出函子性描述。考虑 $\mathbb{R}^n$ 中的一个有理超平面集合 $\mathcal{A}$，它具有 $\mathbb{Z}^n$-不变性，也就是说，在整数格 $\mathbb{Z}^n$ 的向量作用下平行平移后保持不变，并且 $\mathcal{A}$ 中包含一个 n-元组，其交集为单点。令 $\mathcal{P} = \mathcal{P}_{\hat{\mathcal{A}}}$ 表示所有 $\mathcal{A}$-多胞体构成的类。若对任意 $P \in \mathcal{P}$ 和 $v \in \mathbb{Z}^n$，都有 $\mu(P+v) = \mu(P)$，则称 $\mathcal{P}$ 上的赋值 μ 是 $\mathbb{Z}^n$-不变的（也称 μ 为 $\mathbb{Z}^n$-赋值）。回顾一下，若对任意满足 $\dim(P) < n$ 的情况都有 $\mu(P) = 0$，则称 μ 是简单的。一个重要的特殊情形是，$\mathcal{A}$ 由 $\mathbb{R}^n$ 中所有有理超平面组成。对于本文而言，另一个极端情形—— $\mathcal{A}$ 为有限集——同样重要；在方法论层面上，甚至更加重要。

2.1. 例子。 体积（归一化后，使得 $\mathbb{Z}^n$ 的一个基本域体积为 1）给出了 $\mathbb{Z}^n$-赋值的一个主要例子：$\mathrm{vol} : \mathcal{P} \to \mathbb{Q}$。事实上，这个赋值是简单的，并且在所有有理数平移下（而不仅仅是整数平移下）保持不变：也就是说，vol 是一个 $\mathbb{Q}^n$-赋值。$P \cap \mathbb{Z}^n$ 的基数是 $\mathbb{Z}^n$-赋值的另一个例子；它不是简单的。固定一个非零线性泛函 $\xi : \mathbb{Q}^n \to \mathbb{Q}$，并令 P_ξ 为 P 中使 ξ 取得最大值的面，其中 $P \in \mathcal{P}$。令 $\mu_\xi(P) := \mathrm{vol}_{d-1}(P_\xi)$，其中 vol_k 表示维数为 k 时的体积；这也是一个不简单的 $\mathbb{Q}^n$-赋值。线性组合

vol 和 μ_ξ （对各种 ξ ）也是 $\mathbb{Q}^n$-赋值。通过固定某个 $Q \in \mathcal{P}$ 并令 $\mu_Q(P) := \mathrm{vol}(P+Q)$，可以得到一类相关的 $\mathbb{Q}^n$-赋值；其中右侧的 $+$ 是 Minkowski 和（ μ_Q 确实是赋值这一事实虽正确且容易证明，但并非显而易见，参见 [21, 9]）。

2.2. 设定的变化。 如第1节所述，改变$\mathcal{P}$ 和 G，可以得到若干相互关联的背景。以下是关于类似主题的已有研究的专题索引：

> [10, 12, 26, 15]**：** 所有多胞体，简单的实数集^n-赋值；
> [18, 25, 19, 22, 6]**：** 所有多胞体，实数集^n-赋值；[5, 25, 6]**：** 所有多胞体，所有赋值（或所有简单赋值）；[17, 25, 19, 22]**：** 整数或有理多胞体，$\mathbb{Z}^n$-赋值；[9]**：** 所有多胞体，$\mathbb{Z}^n$-赋值。

论文 [12, 26, 18, 22] 还将上述设定推广到有序域，甚至推广到以更一般的基环取代实数集和 Z 的情形。

ˆ 2.3. 生成元与关系。 回到初始设置： $\mathcal{A}$是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个 $\mathbb{Z}^n$-不变有理超平面集合，其中包含一个具有单点交集的 n-元组，而 $\mathcal{P} = \mathcal{P}_{\hat{\mathcal{A}}}$ 是所有 ˆ ˆ $\mathcal{A}$-多胞体的类。所有简单 $\mathbb{Z}^n$-赋值在 $\mathcal{P}$ 上的有理向量空间 $\mathrm{Val} = \mathrm{Val}(\mathcal{A}; \mathbb{Z}^n)$可以用生成元与关系来描述。我们允许生成元的无限线性组合：对于一族赋值 $\mu_\lambda \in \mathrm{Val}$，若对于每个 $P \in \mathcal{P}$，使 $\mu_\lambda(P) \neq 0$ 成立的 λ 的取值只有有限多个，则和 $\sum_\lambda f(\lambda)\mu_\lambda$ 是有意义的。若族 $(\mu_\lambda)_\lambda$ 生成 Val，则称其为 Val 的生成族，即每个 $\mu \in \mathrm{Val}$ 都可以写成 $\sum_\lambda f(\lambda)\mu_\lambda$，其中 $f(\lambda) \in \mathbb{Q}$ 是某些有理系数。此外，生成元 μ_λ 之间的一个关系是形如 $\sum_\lambda f(\lambda)\mu_\lambda = 0$的等式，其中该和可以是无限的，但同样地，对于每个 $P \in \mathcal{P}$，在 P上取非零值的项只有有限多个。

2.4. 函子性。我们希望描述 Val 的一组生成元和定义关系，使其以函子性方式依赖于 $\mathcal{A}$。具体而言，对于每个 $\mathcal{A}$，我们定义 $\mathrm{Val}(\mathcal{A}; \mathbb{Z}^n)$ 的一个特殊生成集 $\mathcal{G}(\mathcal{A})$。每个映射 j ，若它将一个超平面集合 $\mathcal{A}$ 映到另一个此类集合 $\mathcal{A}'$，并且对所有 $H \in \mathcal{A}$， H 与 $j(H)$ 平行；同时，只要 H' 是 H 的一个 $\mathbb{Z}^n$-平移， $j(H')$ 就是 $j(H)$ 的一个 $\mathbb{Z}^n$-平移，则该映射会在生成元层面诱导出一个映射 $j_* : \mathcal{G}(\mathcal{A}) \to \mathcal{G}(\mathcal{A}')$。映射的复合应当对应于诱导映射的复合，也就是说，对于任意一对映射 $j_1 : \mathcal{G}(\mathcal{A}_1) \to \mathcal{G}(\mathcal{A}_2)$ 和 $j_2 : \mathcal{G}(\mathcal{A}_2) \to \mathcal{G}(\mathcal{A}_3)$，应有 $(j_1 \circ j_2)_* = j_{1*} \circ j_{2*}$ 。如果 $\mathcal{A}$ 处于一般位置，可以证明

ˆ j_* 可扩展为一个加法群同态，从 Val($\mathcal{A}$; $\mathbb{Z}^n$) 映到 Val($\mathcal{A}'$; $\mathbb{Z}^n$)。例如，当人们希望对不同的平移子群使用“同一”生成集时，就需要函子性。在本文的后续工作中，作者计划研究多项式赋值，即满足如下条件的赋值 μ：对于每个 $P \in \mathcal{P}$，函数$v \mapsto \mu(P + v)$ 是 $v \in \mathbb{R}^n$ 或 $v \in \mathbb{Z}^n$ 上的多项式函数。要描述多项式赋值，函子性地选取生成元起着决定性作用。事实证明，经典 Hadwiger 不变量系 [10] 的一个变体具有所需的函子性，见 2.7。Varchenko [28] 首先在有限仿射超平面排列的背景下研究了生成元的函子性。

2.5. **一种一般范式**。 本文的主要创新与其说在于结果（这些结果推广了已知结果），不如说在于研究方法，它揭示了不同学科之间的联系。我们的论证思路大致如下：



以下陈述的主定理，与其说应被视为主结果，不如说更应被视为这些技巧的主要示例。主定理也可以有带有拓扑意味的变体。若在实数集^n 中，仿射超平面集族 $\mathcal{A}$是有限的，那么关于 $\mathcal{A}$-多胞体的赋值描述与 Varchenko–Gelfand代数 [29]ˆ（针对 $\mathcal{A}$）的描述密切相关。当 $\mathbb{Z}^n$-不变的有理超平面集族 $\mathcal{A}$ 局部有限时，我们在紧 n环面中得到有限集族的余维一子环面。研究 $\mathcal{A}$-多胞体上的 $\mathbb{Z}^n$-赋值，同样与研究 Varchenko–Gelfand代数的环面类比有关。此外，这些问题在更一般的拓扑情形下也有意义；在这种情形中，超平面和平坦不必是直的，甚至可以具有非平凡的拓扑结构。

ˆ 2.6. **环面中的旗**。 $\mathcal{A}$中的任意超平面都会在 $\mathbb{T}^n := \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$中定义一个余维为一的子环面。将所有这类子环面的集合记为 $\mathcal{A}$ ，并将 $\mathcal{A}$ T中的超平面称为 $\mathcal{A}$ 的元素。 $\mathcal{A}$的平坦（或 $\mathcal{A}$-平坦）是指交集 $\bigcap \mathcal{A}'$的一个连通分支，其中$\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ 是 $\mathcal{A}$的一个子族。注意，超平面的交集可能是不连通的；然而，根据定义，所有平坦都是连通的。特别地，整个 $\mathbb{T}^n$ 也是一个平坦，因为它是空子族的交集。此外， $\mathcal{A}$中的每个超平面都是一个平坦；根据我们对 $\mathcal{A}$的假设，存在维数从 0 到 n的所有平坦。将（ $\mathcal{A}$的）一个旗定义为一组按包含关系线性排序的平坦。我们主要考虑以下形式的旗

的形式

$$\mathcal{L} = (L^0 \supset \cdots \supset L^k),$$

其中， L^i 是余维为 i的平坦， i 遍历从 0 到 k的所有整数。记 $[\mathcal{L}]$ 为旗中最小的平坦 L_k 。令 Λ_k 表示上述所有旗 $\mathcal{L}$的集合。

ˆ 2.7. **Hadwiger 不变量**。 考虑一个 $\mathcal{A}$-多面体 P 及其面链 $F^0 \supset \cdots \supset F^k$，其中 F^i是 P的余维为 i的面，且 i从 0 到 k。令 L^i 为 F^i 投影到环面 $\mathbf{T}^n$后的仿射张成，由此得到一个旗 $\mathcal{L} =$ ($L^0 \supset \cdots \supset L^k$)，它来自 Λ_k，称为的旗。此外， P 按如下方式定义 L^k 的余定向。对于所有的 $i = 0$、.....$k-1$，取一个从 F^k的重心指向 F^i的重心的向量v_i。这样便得到 L^k的某个横截面中的一个基，它定义了 L^k的余定向。所谓定向旗，是指带有 $[\mathcal{L}]$的选定定向的旗 $\mathcal{L}$。

给定一个定向旗 $\mathcal{L} \in \Lambda_k$，定义 $\Upsilon_{\mathcal{L}}(P)$ 为 $\pm\mathrm{vol}_{n-k}(P \cap [\mathcal{L}])$，其中 $\mathcal{L}$ 是如上所述由 P 得到的旗；符号取正或负，取决于所选的 $[\mathcal{L}]$ 的余定向是否与由 P 诱导的余定向一致。若 $\mathcal{L}$ 不是 P 的旗，则令 $\Upsilon_{\mathcal{L}}(P) = 0$。ˆ 注意， $\Upsilon_{\mathcal{L}}$ 是定义在 $\mathcal{A}$ 多胞体上的简单 $\mathbf{Z}^n$-不变赋值。称 $\Upsilon_{\mathcal{L}}$ 为与旗 $\mathcal{L}$ 及 $[\mathcal{L}]$ 的余定向相关联的秩为 ***Hadwiger*** 不变量 k 。

定理。 ***Hadwiger*** 不变量 $\Upsilon_{\mathcal{L}}$ 生成空间 $\mathrm{Val}(\mathcal{P}\hat{}_{\mathcal{A}}, \mathbb{Z}^n)$:ˆ每个定义在 $\mathcal{A}$ 多胞体上的 μ Z^n-不变简单赋值都可以写成 $\mu_f = \sum_{\mathcal{L}} f(\mathcal{L})\Upsilon_{\mathcal{L}}$，其中系数 $f(\mathcal{L}) \in$ 属于 $\mathbb{Q}$。

相关结果见 [17, 12, 26, 18, 22]；上述定理与 [17, 22] 的共同特例是 $\mathcal{A}$ 为所有有理超平面的集合。注意， $f(\mathcal{L})$ 不仅取决于几何旗 $\mathcal{L}$ ，也取决于其定向；可以使 f 成为交错的，即随着 $\mathcal{L}$ 的定向反转而改变符号。现在剩下要描述 $\Upsilon_{\mathcal{L}}$ 之间的关系，等价地说，要刻画那些满足 $\mu_f = 0$ 的交错函数 f。

ˆ 注意，Hadwiger 不变量会以 2.4 所述的函子性方式依赖于 $\mathcal{A}$ 。事实上，映射 $j\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ ，若对每个 $H \in \mathcal{A}$， $j(H)$ 都平行于 H；并且只要 H' 是 ^{n} 的 Z 平移， $j(H')$ 就是 $j(H)$ 的 $\mathbf{Z}^n$ 平移，则该映射会诱导相应子环面集合之间的映射，即从 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{A}'$ 的映射。接下来，将此映射延拓到平坦，使交集对应于交集，并延拓到（定向）旗。由于 Hadwiger 不变量以定向旗标记，因此我们也得到 Hadwiger 不变量之间的自然映射。

2.8. **互反律**。 假设旗 $\mathcal{L}^\circ$ 包含余维从 0 到 k 的所有平坦，唯独缺少一个严格介于 0 和 k 之间的余维 m。于是，补全 $\mathcal{L}^\circ$ 使得 $\mathcal{L}^\circ \cup \{M\} \in \Lambda_k$ 的余维 m 平坦 M 有多种（可能是无限多种）选择方式。固定 $[\mathcal{L}^\circ]$ 的某个余定向。以下 Hadwiger 不变量之间的关系不难验证：

$$\sum_M \Upsilon_{\mathcal{L}^\circ \cup \{M\}} = 0,$$

其中求和遍历所有满足 $\mathcal{L}^\circ \cup \{M\} \in \Lambda_k$ 的余维为 m 的平坦 M，且求和中的所有旗 $\mathcal{L}^\circ \cup \{M\}$ 均带有上文选定的相同的 $[\mathcal{L}^\circ]$ 定向。将此关系称为$\mathcal{L}^\circ$处的互反律。每个 $\mathcal{L}^\circ$ 都会导出其自身的互反律。当 $[\mathcal{L}^\circ]$ 的定向反转时，等式左侧变号，因此得到一个等价的关系。上述互反律与 Parshin 互反律 [23, 16, 1, 14]如出一辙；事实上，在仿射超平面排列或环面排列的情形下，它们与后者密切相关。

2.9. **周期消失条件**。 迄今为止， $\mathcal{A}$ 的 k维平坦中的 k维体积如何归一化并不重要。现在，我们固定一种归一化方式。给定 $\mathcal{A}$的一个平坦 L ，将 L 上的体积形式归一化，使得 L 的总体积为一。在接下来的讨论中，所有余维均相对于 $\mathbf{T}^n$而言。

固定一面旗 $\mathcal{L} \in \Lambda_{m-1}$ 和一条定向简单闭曲线 $\gamma \subset [\mathcal{L}]$。Hadwiger 不变量之间的另一个关系形式如下：

$$\sum_{M \subset [\mathcal{L}]} (\gamma \cdot M) \Upsilon_{\mathcal{L} \cup \{M\}} = 0.$$

这里，对所有满足 $\mathcal{L} \cup \{M\} \in \Lambda_m$ 的余维为 m 的平坦$M \subset [\mathcal{L}]$ 求和（可能是无穷和），而 $\gamma \cdot M$ 表示 γ 与 M 的交数。为了使各项定义良好，需要固定所有相对于 $\mathbf{T}^n$ 的 M 的余定向：为此，固定 $[\mathcal{L}]$ 的某个余定向，并对每个 M，选择 M 相对于 $[\mathcal{L}]$ 的某个余定向。注意：反转 M 的相对余定向意味着同时改变 $\Upsilon_{\mathcal{L} \cup \{M\}}$ 和 $\gamma \cdot M$ 的符号，因此不会影响总和。刚才展示的关系称为周期消失条件。这些关系与凸几何中的柯西定理密切相关（关于凸多面体各个面的体积的线性关系）。由于交数 $\gamma \cdot M$ 仅取决于 γ 的同调类，因此对于给定的 $\mathcal{L}$，独立周期消失条件的数量等于 $[\mathcal{L}]$的第一贝蒂数。

2.10. 主定理。 以下结果包含了 2.7 中陈述的定理，但给出了更多内容（它描述了 Hadwiger 不变量之间的所有关系）。

定理。 所有$\mathrm{Val}(\mathcal{P}^{\wedge}_{\mathcal{A}};\mathbb{Z}^n)$ $\mathcal{A}$-多胞体上的$\mathbb{Z}^n$-不变简单赋值$^{\wedge}$空间由 *Hadwiger* 不变量生成。*Hadwiger* 不变量之间的关系由互反律和周期消失条件生成。

这里，我们允许生成元的无限线性组合，也允许关系的无限线性组合。注意，$\mathrm{Val}(\mathcal{P}^{\wedge}_{\mathcal{A}};\mathbb{Z}^n)$ 的生成集在所有 有理平移下保持不变。$^{\wedge}$ 主定理的一个特殊情形是 $\mathcal{A}$ 由实数集 $\mathbb{R}^n$ 中的所有有理超平面组成，这与 [22]接近。不过，首先，我们采用了截然不同、在很大程度上偏重拓扑的方法。其次，我们的描述涉及有理多胞体上的所有简单 $\mathbb{Z}^n$-不变赋值，而非仅涉及它们在整数多胞体类上的限制。在 [19],中还有另一项密切相关的结果，其中考虑的是所有赋值，不限于简单赋值。

主定理也有其他版本，并且可以用相同的方法证明：将 $\mathcal{A}$ 中的有理超平面替换为 $\mathbb{T}^n$ 中的超曲面，这些超曲面满足某些自然的拓扑假设。例如，若 $n=2$，只需考虑 $\mathbb{T}^2$ 中的任意一族本质简单闭曲线，使得首先，该族中的任意两条曲线都相交横截（在拓扑意义上）；其次，这些曲线的同调类生成 $\mathrm{H}_1(\mathbb{T}^2)$。

2.11. 所有简单赋值。如前所述，“主定理”的选择在一定程度上是任意的，因为重点在于一种新方法。我们再举例说明这种方法。例如，对于任意的 ^{n} 实数集中的仿射超平面集合，9.6 节描述了 $\mathcal{A}$ 多胞体上的所有简单赋值及其间的所有关系。具体而言，现在令 $\mathcal{L}$ 为 ^{n} 实数集中的一面完备旗（包含维数介于 0 和 n 之间的所有维数的平坦），而不是环面中的旗，并为 $[\mathcal{L}]$ 选定某种余定向，再按照上文类似的方式定义 $\Upsilon_{\mathcal{L}}$: $\Upsilon_{\mathcal{L}}(P)$ $=\pm1$ 当且仅当 $\mathcal{L}$ 是 P 的一面旗，否则为 0。在前一种情况下，符号取决于 P 所诱导的 $[\mathcal{L}]$ 余定向是否与所选余定向相同。
Hadwiger 不变量（现在仅对完备旗定义）生成空间 $\mathrm{Val}(\mathcal{P}_{\mathcal{A}};0)$，该空间由 $\mathcal{A}$ 多胞体上的所有简单赋值构成。Hadwiger 不变量之间的关系由互反律和周期消失条件生成。更多细节见 9.6 节；另请注意， $\mathcal{A}$ 包含 ^{n} 实数集中的所有仿射超平面这一特殊情形，等价于 [6, 定理 3.5]。周期

完备旗的消失条件尤其简单。给定一面几乎完备旗 $\mathcal{L}$，它仅缺少维数 0 这一项，相应的关系为 $\sum_{a\in[\mathcal{L}]} \Upsilon_{\mathcal{L}\cup\{a\}} = 0$，其中求和遍及所有零维平坦 $\{a\} \subset [\mathcal{L}]$，并且 a 的余定向选取得彼此相容。

在 9.5 中，我们考虑 $\mathcal{A}$-多面体上的所有余简单简单赋值，这些多面体不一定有界。赋值是余简单的，意味着它们在包含正维数仿射子空间的多面体上取零。这一设定或许与经典的剪刀合同理论相距更远，因为后者将多胞体视为可以剖分成单形的图形。另一方面，对于有限的 $\mathcal{A}$，9.5 的结果可以由 [27, 定理 2.4] 以及 Orlik–Solomon代数与 Varchenko–Gelfand 代数之间的[29] 分次向量空间同构推导出来。

2.12. **拓扑排列**。如果将仿射空间或环面中的一族 $\mathcal{A}$超平面替换为一族拓扑超曲面，并满足一些次要的拓扑要求，所有已公布的结果仍然成立。现在我们将注意力限制在 $\mathcal{A}$有限的情形。需要假设每个平坦（超平面交集的一个连通分支）也是一个拓扑流形，并且来自 $\mathcal{A}$ 的超曲面将每个平坦切分为拓扑胞腔。在这种情况下，$\mathcal{A}$称为<style id='7'>拓扑排列（形式定义见 6.1）。环境空间也不必是实数集^n 或 T^n；它可以是任意拓扑流形。这种拓扑方法的一个重要优点是，互反律和周期消失条件获得了自然的上同调解释。

拓扑排列同时推广了仿射超平面排列和环面排列 [3, 2]。将我们的方法专门应用于环面排列的情形，可以得到对 Varchenko–Gelfand代数 [29] 的环面类比的描述（见第 7 节）。即使所有平坦都具有平凡的拓扑，由拓扑排列提供的推广仍然具有意义：例如，它包括“伪直线”排列。在经典的 Pappus排列中，可以在局部将一条直线变形，从而避开伪直线排列中某个顶点，尽管所得到的排列无法在任何域上实现。不仅如此，在平面中，可以取任意一组从无穷远延伸至无穷远、并在有限多个点处以拓扑意义横截相交的简单曲线，即“直线”；两条不同的“直线”甚至可以有多个交集（见第 5.3 节）。

2.13. **论文的组织结构**。 第 3 节以凸链的前对偶语言重新表述主定理及一些相关结果。主定理由第 3 节中的若干断言推出，所使用的方法是第 4 节讨论的线性代数方法。在第 5 节中，我们为研究拓扑排列奠定基础；相关研究在第 6 节展开。根据定义，拓扑排列构成CW空间的一个特殊类别。任何 CW空间都可导出相应的代数（上）链复形，其（上）同调就是 X 的（上）同调。对于拓扑排列，可以得到若干代数（上）链复形。它们之间的关系对于我们的主结果至关重要。

给定实数集 $\mathcal{A}$中的超平面排列^d，其 *Varchenko–Gelfand* 代数 $\mathcal{A}$ 按定义是定义在 $\bigcup\mathcal{A}$补集上的局部常值函数代数。第7节讨论将Varchenko–Gelfand 代数推广到拓扑排列。虽然代数本身的定义可以直接推广，但次数滤过则需要作出解释。第8节通过将次数滤过的商空间嵌入到定向旗标上的交错函数空间中，对其进行研究。最后，第9节和第10节根据有限排列的情形，推导任意仿射超平面或有理托里克超平面集合所对应的凸链空间的性质。特别是，主定理的证明在第10节完成。

3. 凸链

下面，我们将赋值视为相关凸链空间上的线性泛函。对这些空间的描述，通过对偶化即可得到对赋值的描述。

3.1. **一维**。 在讨论一般方法之前，我们先介绍最简单的特殊情形，即一维情形。设 $\mathcal{A}$ 是实数集$\mathbb{R}^1$中的任意点集；则$\hat{}\mathcal{A}$-多胞体是端点$\hat{}$位于 $\mathcal{A}$中的紧区间。非平凡的旗对应于情形 $k = 1$ ，并且$\hat{}\hat{}$可与 $\mathcal{A}$ 中的单点对应。定向旗标是配有经过这些点的运动方向的 $\mathcal{A}$ 中的点；标准定向$\hat{}$是从左向右。给定这样的定向旗 $\mathcal{L} = \{a\} \subset \mathcal{A}$，Harwiger不变量 $\Upsilon_{\mathcal{L}}$ 在任意满足 $b < a$的区间 $[b;\ a]$ 上取值1，在任意满足 $a < b$的区间 $[a;\ b]$ 上取值 -1 ，在所有其他区间上取值0。无限线性组合$\sum_{a\in\hat{}\mathcal{A}} f(a)\Upsilon_{\{a\}}$ 对应于一个函数 $f\colon \mathcal{A} \to \mathbb{Q}$；换言之，每个这样的函数 f 都定义一个赋值 μ_f。更明确地说， $\mu_f[a;\ b] = f(b) - f(a)$，当 $a < b\hat{}\hat{}$且 $a, b \in \mathcal{A}$时。显然，所有简单赋值在 $\mathcal{A}$-多胞体上都可以表示成这种形式。唯一的关系是周期消失

条件 $\mu_1 = 0$，其中下标中的1表示取值为1的常函数ˆ。换言之， $\mathcal{A}$-ˆ多胞体上所有简单赋值构成的空间，可以描述为 $\mathcal{A}$上的函数空间模去常数。

ˆ 现在假设 $\mathcal{A}$ 是实数集的一个 Q-向量子空间，且简单赋值 μ_f 是 $\mathcal{A}$-不变的，即在所有由 $\mathcal{A}$ 中的向量所作的平移下保持不变。在这些假设下，只需选择 f 使得 f(0) $= 0$ （这总是可行的，因为给 f 加上一个常数不会改变 μ_f）；这一选择将保证 f 在 Q 上是线性的——这是 μ_f 的可加性与其平移不变性的直接推论。因此，定义在 $\mathcal{A}$-多胞体上的所有 $\mathcal{A}$-不变简单赋值所构成的 Q-向量空间，可以与 $\mathcal{A}$ 上所有 Q-线性函数构成的空间等同起来。

ˆ 然而，我们的主定理所处的情形是 $\mathcal{A}$ 在整数平移下稳定，并且所考虑的赋值假设为简单且整数不变。任何这样的赋值都可以写成 $\mu_f = \sum_{a\in\mathcal{A}} f(a)\Upsilon_{\{a\}}$，其中 f 现在是 $\mathcal{A}$ 上的一个有理数值函数；$\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{A}$ 在 R/Z 上的投影。等价地， f 可以看作 $\mathcal{A}$ 上的一个 Z-周期函数。同样，唯一的关系是 $\mu_1 = 0$。空间 Val($\mathcal{P}$ ˆ$_{\mathcal{A}}$; Z) 可与 $\mathcal{A}$ 上所有函数构成的空间模去常数后等同起来。

3.2. 凸链空间。固定一族有理超平面（余维一子环面） $\mathcal{A}$ ，位于 $\mathbb{T}^n$ 中，并假设 $\mathcal{A}$ 包含一组 n 个交集维数为 0 的超平面。我们将 $\mathcal{A}$-多面体定义为以下集合的连通分支所构成的拓扑胞腔：$H_1 \cap \cdots \cap H_k \setminus ($ $H_{k+1} \cup \cdots \cup H_m)$，其中取某些 H_1、.....、 $H_m \in \mathcal{A}$ 和某个 $k < m$。令 $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\mathcal{A})$ 为 $L^\infty(\mathbb{T}^n; \mathbb{Q})$ 的子空间，其元素由函数 $f\colon \mathbb{T}^n \to \mathbb{Q}$ 表示，且 $f(\mathbb{T}^n)$ 有限；此外，对每个 $c \in \mathbb{Q}$， $f^{-1}\{c\}$ 都是有限个 $\mathcal{A}$- 多面体的并。正如成员关系 $f \in L^\infty$ 所示，若上述两个函数仅在零测集上不同（例如，在来自$\mathcal{A}$的有限个超平面之并上不同），则将它们视为相同。称 $\mathcal{V}$ 为与 $\mathcal{A}$ 相关联的凸链空间。该空间由开 $\mathcal{A}$-多面体的示性函数张成（回顾一下，对于子集 $A \subset \mathbb{R}^n$， $\mathbb{1}_A$ 是 A 上的函数，在 A 的所有点取值 1，在其他所有点取值 0）。简单的 $\mathbb{Z}^n$-不变赋值可视为 $\mathcal{V}$ 上的线性泛函，见 [30, 24, 8]；因此 Val($\mathcal{P}$ ˆ$_{\mathcal{A}}$; $\mathbb{Z}^n$) $= \mathcal{V}^*$ 是 $\mathcal{V}$ 在 Q 上的对偶空间。通常，研究 $\mathcal{V}$ 比研究 $\mathcal{V}^*$ 更为合适，因为前者空间稍小。若 $\alpha \in \mathcal{V}$ 且 $\mu \in \mathcal{V}^*$，则 $\langle \mu, \alpha \rangle$ 表示

$\mathcal{V}^*$ 与 $\mathcal{V}$ 之间自然双线性非退化配对的值。凸链的其他形式见 [8, 25]。

3.3. 初等链。 给定一个 L 的平坦 $\mathcal{A}$，记 $\mathcal{A}|_L$ 为由 L 中交集 $L\cap H$ 的分量所形成的超平面集合，其中 $H\in\mathcal{A}$ 满足 $L\not\subset H$。考虑一个旗 $\mathcal{L}\in\Lambda_k$，即形如 $L^0\supset\cdots\supset L^k$的 $\mathcal{A}$ 旗，其中 L^i 的余维为 i，而 i遍历从 0 到 k的所有整数。令 $E^k_{\mathcal{L}}$ 表示与 $\mathcal{A}|_{[\mathcal{L}]}$相关联的 $[\mathcal{L}]$ 中的凸链空间，并由 $[\mathcal{L}]$的余定向进行扭曲。扭曲 的含义如下：如果固定了 $[\mathcal{L}]$ 的一个余定向，则 $E^k_{\mathcal{L}}$ 与 $[\mathcal{L}]$中的凸链空间相同。另一方面，反转 $[\mathcal{L}]$ 的余定向意味着相应的同一关系改变符号。定义 E^k 为对所有$\mathcal{L}\in\Lambda_k$的 $E^k_{\mathcal{L}}$ 的直和。回忆一下，每个 $\xi\in E^k$ 都具有如下形式

$$\xi=\bigoplus_{\mathcal{L}\in\Lambda_k}\xi_{\mathcal{L}},$$

其中只有有限个项 $\xi_{\mathcal{L}}$ 非零；项 $\xi_{\mathcal{L}}$ 称为$\mathcal{L}$-连通分支，其对应于 ξ。空间 E^k 称为初等链空间。

3.4. Leray 算子。 现在定义某些线性映射 $D:E^k\to E^{k+1}$。对于 $\xi\in E^k$ 和一个旗 $\mathcal{L}\in\Lambda_{k+1}$，$\mathcal{L}$-连通分支（$D\xi$）$_{\mathcal{L}}\in E^{k+1}_{\mathcal{L}}$ $D\xi$ 的定义如下。回忆一下，$[\mathcal{L}]$是 $\mathcal{L}$中按包含关系最小的平坦，并令 $\Gamma\mathcal{L}\in\Lambda_k$ 为从 $\mathcal{L}$ 中删去项 $[\mathcal{L}]$后得到的旗。选定 $[\Gamma\mathcal{L}]$ 的某个余定向以及相对于 $[\Gamma\mathcal{L}]$的 $[\mathcal{L}]$的某个余定向后，我们可以将 $\xi_{\Gamma\mathcal{L}}$ 视为 $[\Gamma\mathcal{L}]$上的函数，并讨论 $[\Gamma\mathcal{L}]$中$[\mathcal{L}]$ 的正侧和负侧。此外，我们的选择还给出了X中 $[\mathcal{L}]$ 的某个余定向，即 $[\Gamma\mathcal{L}]$ 的既定余定向与 $[\Gamma\mathcal{L}]$中 $[\mathcal{L}]$ 的既定相对余定向的复合。取 $\xi(q)$ 在 $q\in[\Gamma\mathcal{L}]$从其正侧趋近平坦 $[\mathcal{L}]$ 时的极限，再减去$\xi(q)$ 在 q 从负侧趋近平坦 $[\mathcal{L}]$ 时的极限。将这次离散微分的结果定义为 $(D\xi)_{\mathcal{L}}$，并利用上述 $[\mathcal{L}]$的余定向将其视为 $E^{k+1}_{\mathcal{L}}$ 中的元素。它是 $[\mathcal{L}]$上的函数，除去一个由余维为 $>k+1$ 的平坦组成的并集外处处有定义。反转 $[\Gamma\mathcal{L}]$ 的余定向意味着将 ξ 替换为 $-\xi$，因此也将 $(D\xi)_{\mathcal{L}}$ 替换为 $-(D\xi)_{\mathcal{L}}$。改变 $[\Gamma\mathcal{L}]$ 中 $[\mathcal{L}]$ 的相对余定向会交换 $[\mathcal{L}]$的两侧，因此差改变符号；同样，$(D\xi)_{\mathcal{L}}$ 会被替换为 $-(D\xi)_{\mathcal{L}}$。因此，$(D\xi)_{\mathcal{L}}$ 确实是 $E^{k+1}_{\mathcal{L}}$ 中定义良好的元素。将 D 称为 Leray 算子；它是离散微分的一种形式。如果需要强调 D 对 k 的依赖关系，我们可以用 D_k 代替 D。

3.5. **空间 $\mathcal{F}_k$ 与次数滤过**。令 $\mathcal{F}_k$ 表示 D 的核： $E^k \to E^{k+1}$。如果 $\xi \in \mathcal{F}_k$，那么对于每个旗 $\mathcal{L} \in \Lambda_k$， ξ 的 $\mathcal{L}$-连通分支 $\xi_{\mathcal{L}}$ 可视为 $[\mathcal{L}]$ 上的常函数。因此， ξ 可以看作定义在 $\Lambda_k^{\mathcal{O}}$ 来自 Λ_k的定向旗集合上的交错函数，其中 $\mathcal{L} \in \Lambda_k$ 的定向意味着选择 $[\mathcal{L}]$的一个余定向，而 ξ 为交错的则意味着每当 $\mathcal{L}$ 反转其定向时，它就改变符号。将 $\mathcal{V}_{\leqslant k}$ 定义为D^{k+1} 的核： $\mathcal{V} = E^0 \to E^{k+1}$。这些空间构成一个滤过

$$\mathcal{V}_{\leqslant 0} \subset \mathcal{V}_{\leqslant 1} \subset \cdots \subset \mathcal{V}_{\leqslant n} = \mathcal{V}$$

的 $\mathcal{V}$ 称为次数滤过。令 $\mathcal{V}_{<k} := \mathcal{V}_{\leqslant k-1}$，考虑次数滤过的商空间 $\mathcal{V}_k := \mathcal{V}_{\leqslant k}/\mathcal{V}_{<k}$。根据次数滤过的定义， D^k 将商空间 $\mathcal{V}_k$ 嵌入 $\mathcal{F}_k$。我们将 $\mathcal{V}_k$与其在 $\mathcal{F}_k$中的像等同。接下来的目标是描述将 $\mathcal{V}_k$ 定义为 $\mathcal{F}_k$ 的子空间的线性方程。

3.6. **中的互反律**。考虑 $\mathcal{A}$的一个旗 $\mathcal{L}^\circ$ ，其中包含余维从 0 到 k 的平坦，但恰好缺少一个余维 m，且 $0 < m < k$。若元素 $\xi \in \mathcal{F}_k$ 满足以下条件，则称其在 $\mathcal{L}^\circ$ 处满足互反律：对所有满足 $\mathcal{L}^\circ \cup \{M\} \in \Lambda_k$的余维为 m的平坦 M ，将 $\xi_{\mathcal{L}^\circ \cup \{M\}}$ 求和后结果为零。这里，所有旗 $\mathcal{L}^\circ \cup \{M\}$ 的定向均由 $[\mathcal{L}^\circ]$的同一余定向给出；利用这些定向，所有项 $\xi_{\mathcal{L}^\circ \cup \{M\}}$ 都可视为有理数。注意：尽管该和可能是无穷和，但其中只有有限项非零。不难看出， $\mathcal{V}_k$ 中的所有元素都满足所有互反律，即满足上述所有旗 $\mathcal{L}^\circ$ 处的互反律。

更一般地，可以对 $\xi \in E^k$陈述互反律； $\xi_{\mathcal{L}^\circ \cup \{M\}}$ 之和不再是有理数，而是 $[\mathcal{L}]$上的一条凸链； $\mathcal{L}^\circ$ 处的互反律规定这条凸链为零。

3.7. E^k中的周期消失。设 $\xi = \bigoplus_{\mathcal{L}} \xi_{\mathcal{L}}$ 是 E^k的一个元素，其中 $k > 0$。现在固定 $\mathcal{L}^\circ \in \Lambda_{k-1}$ ，并考虑所有包含 $\mathcal{L}^\circ$的旗 $\mathcal{L} \in \Lambda_k$ 。令 $\xi_\circ$ 为所有满足 $\mathcal{L} \supset \mathcal{L}^\circ$的 $\mathcal{L} \in \Lambda_k$ 对应的 $\xi_{\mathcal{L}}$ 的直和。尽管 $\xi_\circ$ 不是$[\mathcal{L}^\circ]$上的光滑微分 1-形式，但对于一条位于 $[\mathcal{L}^\circ]$ 中、相对于所有满足 $\mathcal{L}^\circ \subset \mathcal{L}$的 $[\mathcal{L}]$ 处于一般位置的光滑简单路径 γ，仍可定义 $\xi_\circ$ 沿其的积分：该积分等于所有满足 γ的$(t, \mathcal{L})$对应的 $\xi_{\mathcal{L}}(\gamma(t))$之和。这里，满足 $\gamma(t) \in [\mathcal{L}]$ 的一对$(t, \mathcal{L})$定义了 $[\mathcal{L}]$在 $[\mathcal{L}^\circ]$ 中的相对余定向，使得 γ 在时刻 t从负侧穿过 $[\mathcal{L}]$ 到正侧；再结合 $[\mathcal{L}^\circ]$在$\mathbf{T}^n$中的某个固定余定向，这些 $[\mathcal{L}]$ 的相对余定向定义了 $\mathcal{L}$ 的定向，用于计算 $\xi_{\mathcal{L}}(\gamma(t))$。假设 ξ 满足互反律；那么很容易验证， $\xi_\circ$ 沿任意

边界的积分都为零，即 $\xi_\circ$ 是一个余循环。因此， $\xi_\circ$ 表示 $[\mathcal{L}^\circ]$的一个第一上同调类 $[\xi_\circ]$ 。根据定义， ξ 在 $\mathcal{L}^\circ$ 满足周期消失条件，当且仅当 $[\xi_\circ]=0$，也就是说，当且仅当 $\xi_\circ$ 是一个余边界。说 ξ 满足所有周期消失条件（即在所有 $\mathcal{L}^\circ\in\Lambda_{k-1}$处的周期消失条件），等价于说，对于某个 $\eta\in E^{k-1}$，$\xi=D\eta$ ；参见第8.4节。此处给出的 E^k 中周期消失条件的描述，与第2.9节中针对 $\mathcal{F}_k$给出的描述相容。

3.8. 对 $\mathcal{V}_k$ 的描述。 以下是主定理的一个对偶前版本，参见 2.10。

定理。 子空间 $\mathcal{V}_k\subset\mathcal{F}_k$ 由 $\mathcal{F}_k$ 中满足所有互反律和所有周期消失条件的元素组成。

ˆ 3.9. 重新审视 Hadwiger 不变量。 设 $\mathcal{A}$ 是实数集 $\mathbf{R}^n$ 中一组有理超平面，它在 $\mathbf{Z}^n$-平移下保持不变，并且 ˆ $\mathcal{A}$ 的某个子集的交集是单点。令 $\mathcal{A}$ 为 ˆ$\mathcal{A}$ 在从实数集 $\mathbf{R}^n$ 到实数集 $\mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$ 的自然投影下的像；我们假设上文引入的所有概念及相应记号（$\mathcal{V}$、$\mathcal{V}_k$、 $\mathcal{F}_k$、E^k 等）均对应于所选的 $\mathcal{A}$。任意定义在 $\mathcal{A}$-多胞体上的简单 $\mathbf{Z}^n$-赋值 ˆ 都可视为 $\mathcal{V}$ 上的线性泛函。给定一个定向旗 $\mathcal{L}\in\Lambda_k^{\mathcal{O}}$，令 $\pi^{\mathcal{L}}$ 为从 E^k 到 $[\mathcal{L}]$ 上的凸链空间的线性投影。将 $[\mathcal{L}]$ 上的体积赋值记作 $\mathrm{vol}_{[\mathcal{L}]}$，我们现在可以将 Hadwiger 不变量 $\Upsilon_{\mathcal{L}}$ 表示为

$$\Upsilon_{\mathcal{L}}=\mathrm{vol}_{[\mathcal{L}]}\circ\pi^{\mathcal{L}}\circ D^k.$$

由此可知， $\Upsilon_{\mathcal{L}}$ 在 $\mathcal{V}_{<k}$上消失，因此定义了 $\mathcal{V}_k$上的线性泛函˜$\Upsilon_{\mathcal{L}}$ 。通过将 $\mathcal{V}_k$ 与 $\mathcal{F}_k$的一个子空间相对应，该泛函 $\tilde{\Upsilon}_{\mathcal{L}}$ 可识别为 $\mathrm{vol}_{[\mathcal{L}]}\circ\pi^{\mathcal{L}}$。

考虑定义在 $\Lambda_k^{\mathcal{O}}$ 上的函数 $\mathbb{1}_{\mathcal{L}}\in\mathcal{F}_k$ 如下：它在 $\mathcal{L}$上取值 1，在具有相反定向的同一旗上取值 -1 ，在 $\Lambda_k^{\mathcal{O}}$中的所有其他旗上取值 0。随着 $\mathcal{L}$ 变化，元素 $\mathbb{1}_{\mathcal{L}}$ 构成 $\mathcal{F}_k$的生成集，也就是说， $\mathcal{F}_k$ 中的每个元素都可以写成 $\mathbb{1}_{\mathcal{L}}$的有限线性组合。由于我们对˜体积 $\mathrm{vol}_{[\mathcal{L}]}$进行了归一化，泛函 $\Upsilon_{\mathcal{L}}$ 在 $\pm\mathbb{1}_{\mathcal{L}}$ 上取值 ±1 ，在 $\mathcal{F}_k$的所有其他生成元上取值 0。因此， $\mathcal{F}_k$ 上的任意线性泛函 ν 都可以写成

$$\nu=\frac{1}{2}\sum_{\mathcal{L}\in\Lambda_k^{\mathcal{O}}}\nu(\mathbb{1}_{\mathcal{L}})\tilde{\Upsilon}_{\mathcal{L}}.$$

事实上，当在 $\mathcal{L} \in \Lambda_k^{\mathcal{O}}$的 $\mathbb{1}_{\mathcal{L}}$ 上求值时，左边得到$\nu(\mathbb{1}_{\mathcal{L}})$，而右边等于

$$\frac{1}{2}\left(\nu(\mathbb{1}_{\mathcal{L}})\tilde{\Upsilon}_{\mathcal{L}}(\mathbb{1}_{\mathcal{L}}) + \nu(\mathbb{1}_{-\mathcal{L}})\tilde{\Upsilon}_{-\mathcal{L}}(\mathbb{1}_{\mathcal{L}})\right) = \nu(\mathbb{1}_{\mathcal{L}}),$$

从几何上看，其中 $-\mathcal{L} \in \Lambda_k^{\mathcal{O}}$与 $\mathcal{L}$ 是同一个旗，但定向相反。这里，我们用到了 $\Upsilon_{\mathcal{L}}(\mathbb{1}_{\mathcal{L}}) = 1$ 以及 $\Upsilon_{-\mathcal{L}}(\mathbb{1}_{\mathcal{L}}) = -1$；此外，我们还用到了 $\mathbb{1}_{-\mathcal{L}} = -\mathbb{1}_{\mathcal{L}}$。

3.10. **Hadwiger 不变量生成** $\mathcal{V}^*$。 现在我们证明 $\mathcal{V}^*$ 由 Hadwiger 不变量 $\Upsilon_{\mathcal{L}}$生成，这是主定理的一部分。设 $\mu \in \mathcal{V}^*$ 是定义在 $\mathcal{A}$ 多面体上的任意简单 $\mathbf{Z}^n$-赋值。可以将 μ 视为 $\mathcal{V}$上的线性泛函。只需证明：若 μ 在 $\mathcal{V}_{<k}$上为零，则存在一个（可能是无限的）秩为 k 的 Hadwiger 不变量的线性组合μ'，使得 $\mu - \mu'$ 在 $\mathcal{V}_{\leqslant k}$上为零。注意，任何秩为 k 的 Hadwiger 不变量在 $\mathcal{V}_{<k}$上都为零，因此它定义了 $\mathcal{V}_k$上的线性泛函。现在将 μ和 μ' 都视为 $\mathcal{V}_k$上的线性泛函。因此，只需找到一个秩为 k 的 Hadwiger 不变量的线性组合 μ'，使其在 $\mathcal{V}_k$ 上的取值与 μ相同。根据 3.9，所需的 μ' 是

$$\mu' := \frac{1}{2}\sum_{\mathcal{L}\in\Lambda_k^{\mathcal{O}}} \mu(\mathbb{1}_{\mathcal{L}})\Upsilon_{\mathcal{L}}.$$

3.11. **不同的秩彼此独立**。 不同秩的 Hadwiger 不变量线性独立。

引理。 *考虑 Hadwiger 不变量之间的线性关系* $\sum_{\mathcal{L}} f(\mathcal{L})\Upsilon_{\mathcal{L}} = 0$，其中 f 是定义在 $\bigcup_k \Lambda_k^{\mathcal{O}}$ 上的交错函数。于是

$$\sum_{\mathcal{L}\in\Lambda_k^{\mathcal{O}}} f(\mathcal{L})\Upsilon_{\mathcal{L}} = 0, \qquad \forall\ k = 0, \ldots, n.$$

遗憾的是，这一结果无法推广到本文所考察的更广泛的拓扑设置。类似的结论一般而言似乎并不成立。因此，该证明方法也非常具体地适用于有理超平面和 $\mathbf{Z}^n$-不变性的情形；这种方法是经典的。

证明。对于任意正整数 λ，考虑映射 $\lambda\times : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$，它将所有向量乘以 λ。根据我们对有理超平面集合 $\mathcal{A}$ 的假设，对于每个 $H \in \mathcal{A}$，都有 $\lambda \times H \in \mathcal{A}$，其中 $\lambda \times H$是 H 在映射 $\lambda\times$下的像。因此，预合成 $\lambda\times$ 可将任意 $\mathbf{Z}^n$-赋值变为 $\mathcal{A}$ 上的 $\mathbf{Z}^n$-赋值。现在注意，不同秩的 Hadwiger 不变量具有不同的缩放

性质，即相对于 $\lambda\times$， $\Upsilon_{\mathcal{L}}\circ(\lambda\times) = \lambda^k\Upsilon_{\mathcal{L}}$，这对任意秩为$k$ 的哈德维格不变量 $\Upsilon_{\mathcal{L}}$ 都成立。现在只需考察恒等式

$$0 = \sum_{k=0}^{d}\sum_{\mathcal{L}\in\Lambda_k^{\mathcal{O}}} f(\mathcal{L})\Upsilon_{\mathcal{L}}\circ(\lambda\times) = \sum_{k=0}^{d}\lambda^k\sum_{\mathcal{L}\in\Lambda_k^{\mathcal{O}}} f(\mathcal{L})\Upsilon_{\mathcal{L}}$$

作为两个关于 λ的多项式函数相等，并分别对每个 k 将系数与幂次 λ^k 对应起来。□

4. Linear algebra

在本节中，我们研究允许无限线性组合的情形下的关系和二阶导子（关系之间的关系）。

4.1. 对偶函数空间。 设 Ω 是一个无限集，Q[Ω]表示 Ω 上所有有限支撑函数构成的有理向量空间。回顾一下，函数 $\alpha : \Omega \to \mathbb{Q}$ 若支撑有限，则称为有限支撑函数；其支撑 $\operatorname{supp}(\alpha) := \{x \in \Omega \mid \alpha(x) \neq 0\}$ of α 是有限集。众所周知，Q[Ω] 的对偶空间是 Ω 上所有函数构成的空间 $\mathbb{Q}^\Omega$，而 $\mathbb{Q}^\Omega$ 与 Q[Ω] 之间的典范配对可写为

$$\langle f, \alpha\rangle := \sum_{x\in\Omega} f(x)\alpha(x), \quad f \in \mathbb{Q}^\Omega,\ \alpha \in \mathbb{Q}[\Omega].$$

尽管从形式上看，右侧的和是无穷的，但由于假设 α 的支撑是有限的，因此只有有限项非零。

4.2. 关系。 现在考虑一个向量子空间 $\mathcal{U} \subset$Q[Ω]。设函数族$(f_l)_{l\in\mathfrak{l}}$ 由任意集合 $\mathfrak{l}$（可能不可数）索引，其中的函数 $f_l \in \mathbb{Q}^\Omega$ 称为 $\mathcal{U}$ 的定义关系族，如果

$$\mathcal{U} = \{\alpha \in \mathbb{Q}[\Omega] \mid \langle f_l, \alpha\rangle = 0 \quad \forall l \in \mathfrak{l}\}.$$

更一般地， $\mathcal{U}$ 的关系 是指满足$\langle f,\ \alpha\rangle = 0$（对所有 $\alpha \in \mathcal{U}$成立）的任意函数 $f \in \mathbb{Q}^\Omega$ 。记 $\mathcal{U}^\perp$为 $\mathcal{U}$的所有关系构成的向量空间。我们希望用定义关系f_l来描述 $\mathcal{U}^\perp$。如果对每个 $x \in\Omega$，所有满足 $f_l(x) \neq 0$ 的 $l \in \mathfrak{l}$ 构成的集合都是有限的，则称族(f_l)为局部有限 。

定理。 若 $\mathcal{U}$ 是$\mathbb{Q}[\Omega]$，的一个子空间，且$(f_l)_{l\in\mathfrak{l}}$ 是 $\mathcal{U}$的局部有限定义关系族，那么任意 $f \in \mathcal{U}^\perp$均可写为

$$f = \sum_{l\in\mathfrak{l}} \lambda_l f_l, \quad \lambda_l \in \mathbb{Q}$$

这里，求和遍历可能无限的集合 $\mathfrak{l}$；这是有意义的，因为对于每个 $x \in \Omega$， $f(x)$的求和中只有有限项非零。上述定理的证明将在后续章节给出。

4.3. 组合关系。 4.2 节中陈述的定理有一个直接的证明方向：

引理。 设 $\mathcal{U}$ 和 f_l 如 *4.2* 节所述。任意（可能是无限的）有理系数 λ_l 的线性组合 $\sum_{l\in\mathfrak{l}} \lambda_l f_l$ 都是 $\mathcal{U}$ 的一个关系。

证明。 令 $f = \sum_l \lambda_l f_l$，其中 $l \mapsto \lambda_l$ 是从 $\mathfrak{l}$ 到 Q 的任意函数。取任意 $\alpha \in \mathcal{U}$；我们要证明 $\langle f, \alpha\rangle = 0$。事实上，

$$\langle f, \alpha\rangle = \sum_{x\in\Omega} \alpha(x) \sum_{l\in\mathfrak{l}} \lambda_l f_l(x).$$

注意，这是一个有限和。首先，令 supp(α) 为 α 的支撑，它是 Ω 的一个有限子集；其次，对于任意 $x \in$supp(α)，令 $\mathfrak{l}_x$ 为所有满足 $f_l(x) \neq 0$ 的 $l \in \mathfrak{l}$ 构成的集合。现在，右侧的第一个求和可改写为对 $x \in$ supp(α) 的求和，而第二个求和则可改写为对 $l \in \mathfrak{l}_x$ 的求和。令 $\mathfrak{l}_\alpha$ 为所有 $\mathfrak{l}_x$ （其中 $x \in$supp(α）的并集；那么，右侧的求和可以理解为对有限直积 supp(α) $\times \mathfrak{l}_\alpha$ 的求和。改变求和次序后，我们得到

$$\langle f, \alpha\rangle = \sum_{l\in\mathfrak{l}_\alpha} \lambda_l \sum_{x\in\mathrm{supp}(\alpha)} \alpha(x) f_l(x) = \sum_{l\in\mathfrak{l}_\alpha} \lambda_l \langle f_l, \alpha\rangle = 0.$$

因此， f 是 $\mathcal{U}$的一个关系，正如所声称的那样。 □

4.4. 一种紧致性。 在 Q^Ω 上定义一个有限仿射泛函，即形如 $\xi(f) := \langle f, \alpha\rangle + b$ 的仿射泛函 $\xi\colon \mathrm{Q}^\Omega \to \mathrm{Q}$，其中 $\alpha \in \mathrm{Q}[\Omega]$ and $b \in \mathrm{Q}$。现在设 $\mathcal{S}$ 是 Q^Ω 上任意一族有限仿射泛函。若任意有限子族 $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$ 定义一个非空仿射子空间，则称 $\mathcal{S}$ 为有限一致

$$L_{\mathcal{S}'} := \{f \in \mathbb{Q}^\Omega \mid \xi(f) = 0 \quad \forall \xi \in \mathcal{S}'\}.$$

下面给出 Tychonoff紧致性论证 的一个版本。

定理。 设 $\mathcal{S}$ 是$\mathbb{Q}^\Omega$ 上一族有限仿射泛函，且有限一致。那么 $\mathcal{S}$ 相容：存在一个元素 $g \in \mathbb{Q}^\Omega$，使得对所有 $\xi \in \mathcal{S}$，都有 $\xi(g) = 0$。

证明。固定 $x \in \Omega$。由于 $\mathcal{S}$ 有限一致，存在一个有理数 $q_x \in \mathrm{Q}$，使得 $\mathcal{S} \cup \{f \mapsto f(x) - q_x\}$ 也有限一致。事实上，所有有限子集族 $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$ 上的 $\{f(x) \mid f \in L_{\mathcal{S}'}\} \subset \mathrm{Q}$ 的交集非空，因为该交集的

任意有限子集的交集都非空，且每个项要么是 Q，要么是单个点。因此，q_x 要么有唯一确定的定义，要么可以任意选取；在后一种情况下，总可以令$q_x := 0$。将仿射泛函 $\xi_x\colon f \mapsto f(x) - q_x$ 添加到 $\mathcal{S}$ 中，并继续处理“下一个”点。通过传递归纳（或佐恩引理），$\mathcal{S}$ 可以用这种方式扩充，使其对于每个 $x \in \Omega$都包含某个形如 ξ_x的泛函；此外，扩充后的仿射泛函族仍然有限一致。现在可以假设 $\mathcal{S}$包含所有 ξ_x。

令 g 为函数 $x \mapsto q_x := -\xi_x(0)$（这里，0 表示加法群 $\mathbb{Q}^\Omega$ 的单位元，也就是 Ω 上的零函数）。我们声称 g 对所有 $\xi \in \mathcal{S}$ 都满足 $\xi(g) = 0$。每个单独的 $\xi \in \mathcal{S}$ 都具有如下形式：$\xi(f) = \langle f, \alpha\rangle + b$，其中 $\alpha \in \mathbb{Q}[\Omega]$ 且 $b \in \mathbb{Q}$。记 x_1、.....、x_n 为 $\operatorname{supp}(\alpha)$ 的所有点，并令 $q_i := q_{x_i}$，其中 $i = 1$、.....、n；此外，令 $\xi_i := \xi_{x_i}$。由于 $\{\xi, \xi_1, \dots, \xi_n\}$ 是 $\mathcal{S}$ 的相容有限子族，存在函数 $g' \in \mathbb{Q}^\Omega$，使得 $\xi(g') = 0$，且对所有 $i = 1$、.....、n，均有 $\xi_i(g') = 0$。由 $\xi_i(g') = 0$ 可知 $g'(x_i) = g(x_i)$，因此，

$$\xi(g) = \sum_{i=1}^{n} g(x_i)\alpha(x_i) + b = \sum_{i=1}^{n} g'(x_i)\alpha(x_i) + b = 0,$$

其中最后一个等式与 $\xi(g') = 0$ 相同。因此，正如所声称的，$g \in \mathbb{Q}^\Omega$确实对所有 $\xi \in \mathcal{S}$ 都满足 $\xi(g) = 0$。□

4.5. 第 4.2 节定理的证明。 这个定理的一个方向已在第4.3节中证明。现在假设 $f \in \mathcal{U}^\perp$，我们要将 f 表示为 $\sum \lambda_l f_l$，其中求和遍及 $l \in \mathfrak{l}$，而 λ_l 是一些有理系数。将尚未知的系数系统 λ_l 视为定义在 $\mathfrak{l}$ 上的函数 $\lambda : l \mapsto \lambda_l$，也就是说，视为 $\mathbb{Q}^{\mathfrak{l}}$ 的一个元素。令 $\mathcal{S}$ 为方程组 $\xi_x(\lambda) = 0$，其中 $\xi_x(\lambda) := f(x) - \sum_l \lambda_l f_l(x)$。注意，在 ξ_x 的公式右侧，求和实际上是有限的：它只包含有限多个满足 $f_l(x) \neq 0$ 的 $l \in \mathfrak{l}$。因此，ξ_x 是 $\mathbb{Q}^{\mathfrak{l}}$ 上的有限仿射泛函。

引理。 *系统 $\mathcal{S}$ 有限一致。*

证明。令$\mathcal{S}' = \{\xi_{x_1}, \dots, \xi_{x_n}\} \subset \mathcal{S}$为一个有限子集族，并设 $\Omega' := \{x_1, \dots, x_n\}$。$\mathcal{S}'$的一致性意味着如下内容：将 f限制到 Ω'得到的限制函数 $f' := f|_{\Omega'}$是限制函数$f'_l := f_l|_{\Omega'}$的线性组合。为此，只需证明 f'在所有满足$\langle f'_l, \alpha\rangle = 0$的$\alpha \in \mathbb{Q}[\Omega']$上都为零（我们使用第 4.2 节定理的有限维类比，这是线性代数中的经典事实）。事实上，每个这样的 α都属于 $\mathcal{U}$，而 f属于 $\mathcal{U}^\perp$。□

根据紧致性，见 4.4，存在一个函数 $\lambda \in \mathsf{Q}^{\mathfrak{l}}$，使得对于所有 $x \in \Omega$，$\xi_x(\lambda) = 0$，也就是说，$f(x)$ 等于 $\sum_l \lambda_l f_l(x)$。由于这对所有 x都成立，我们得到 $f = \sum \lambda_l f_l$。

4.6. **假设 3.8，主定理的证明。** 假设 3.8 中陈述的定理成立，现在我们可以证明主定理。我们只需证明，Hadwiger 不变量之间的任意关系都是互反律和周期消失条件的（可能是无限）线性组合。这由 3.8 和 4.2 的定理得出。首先，根据 3.11，我们可以固定 k，只研究秩为 k 的 Hadwiger 不变量之间的关系。设 $\mathcal{U} := \mathcal{V}_k \subset \mathcal{F}_k$；在此情形下，$\Omega$ 是 $\Lambda_k^{\mathcal{O}}$ 中所有定向旗的集合，参见第 3.5 节。于是，互反律和周期消失条件可解释为定义 $\mathcal{U}$ 的线性方程 f_l，并结合定义 Ω 上交错函数的关系。这里，指标 l 可理解为形如 $\mathcal{L}\setminus\{M\}$ 的旗，其中 $\mathcal{L} \in \Lambda_k$ 且 $M \in \mathcal{L}$；因此，指标集 $\mathfrak{l}$ 是所有此类旗的集合。

让我们检验族 (f_l) 是局部有限的，也就是说，涉及给定旗 $\mathcal{L} \in \Lambda_k$ 的互反律和周期消失条件只有有限多个。事实上，这些互反律或周期消失条件与形如 $\mathcal{L} \setminus \{M\}$ 的旗一一对应，其中 $M \in \mathcal{L}$ 的余维为 > 0；这类旗的数量为 k，即 $\mathcal{L}$ 去掉 $k+1$ 后的基数。由 3.8 可知，所有 f_l 的公共零点集确实是 $\mathcal{U}$。现在，4.2 表明，Hadwiger 不变量之间的任意关系，也就是说，在 $\mathcal{U}$ 上消失的任意线性泛函，都是 f_l 的线性组合，正如所需。

5. Semiregular CW spaces

本节介绍一类特殊的 CW 空间，它们推广了正则胞腔分解。

5.1. **原子。** 设有一个拓扑空间 X 及其子集的有限集族 $\mathcal{A}$。给定任意子集族 $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$，令 $X_{\mathcal{A}'}$ 为所有满足以下性质的点 $x \in X$ 所构成的集合：对每个 $H \in \mathcal{A}'$，$x \in H$；对每个 $H \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}'$，$x \notin H$。原子定义为所有可能的子集族 $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ 所对应的 $X_{\mathcal{A}'}$ 的连通分支，其中 $\mathcal{A}$。根据定义，X 是其原子的不交并。第 6 节将讨论这样一种情形：其中 $\mathcal{A}$ 的元素具有仿射超平面的某些性质，而原子具有凸多胞体的某些性质。

5.2. **CW空间。** 回顾一下（例如参见 [11]），有限 *CW* 空间（或 CW复形）是定义在拓扑空间 X 上的一种结构。首先，它将 X 表示为若干互不相交的子空间之并，这些子空间称为胞腔；其次，

对于每个胞腔 $e \subset X$，选取一个所谓的特征映射 $\varphi_e : \mathrm{D}^k \to e \subset X$。这里，$\mathrm{D}^k$ 表示实数集 R^k 中的闭单位圆盘，即开单位圆盘 D^k 的闭包；k 可以依赖于 e，称为 e 的维数，记作 $\dim(e)$。假定特征映射是连续的。此外，要求 φ_e 在 D^k 上的限制 $\varphi_e : \mathrm{D}^k \to e$ 是一个同胚，并且 $\varphi_e(\mathrm{S}^{k-1})$ 包含于维数为 $< k$ 的胞腔之并中。一般来说，φ_e 在 S^{k-1} 上不必是单射，也不必完全覆盖某些胞腔。正则 *CW* 空间按定义是指所有特征映射都是同胚，且每个胞腔的边界都是胞腔之并的 CW 空间。我们只考虑有限 CW 空间，因此省略“有限”一词。有限 CW 空间是紧且可度量化的（特别是豪斯多夫的）。

维数为 k 的胞腔也称为 k-胞腔。将 X 的一个 *CW* 子空间，或将 X 的一个 子复形 定义为由若干胞腔之并表示的闭子空间。正规 *CW* 空间 是指每个胞腔的闭包（等价地说，边界）都是子复形的空间。X 的维数 $\dim(X)$ 定义为 X 所有胞腔维数的最大值。

5.3. 平面上的图示。 二维正则 CW 空间的一个重要例子如下。设 $\mathcal{A}$ 是实数集 ^{2}, 中的一个有限曲线集族，每条曲线都是闭集，且同胚于实数集。假设 $\mathcal{A}$ 中任意两条不同的曲线 L_1、L_2 都在拓扑意义下横截相交，也就是说，对于每个点 $q \in L_1 \cap L_2$，都存在实数集 ^{2} 中的一个开邻域 U，使得 U 通过一个同胚映射同胚于 D^2，且该映射将 $U \cap L_1$ 和 $U \cap L_2$ 映到 D^2 的两条不同直径上。另假设 $\mathcal{A}$ 中属于多于一条曲线的点只有有限个。若满足这些假设，则称 $\mathcal{A}$ 为实数集 ^{2} 中的一个正则图示。对于 $\mathcal{A}$，可如下关联一个正则 CW 空间 X。作为拓扑空间，$X :=$ 实数集 $^2 \cup \{\infty\}$ 是实数集 ^{2} 的一点紧化。X 的胞腔定义为 $\mathcal{A}$ 的原子；不难验证，由此得到的 X 确实是一个正则 CW 空间。

5.4. 半正则 CW 空间。 以下概念推广了正则 CW 空间以及 Δ 第 2 节 [11, 中的复形。令 X 为一个正规 CW 空间。假设对于 X 的每个胞腔 e 以及任意胞腔 $e' \subset e$，存在一个同胚 $\psi_{e,\,e'}$，称为过渡同胚，它将 $\mathrm{D}^{\dim(e')}$ 映到 $\mathrm{D}^{\dim(e)}$ 的一个子集，使得 $\varphi_{e'} = \varphi_e \circ \psi_{e,\,e'}$。由此可知，$\mathrm{D}^{\dim(e')}$ 的 $\psi_{e,\,e'}$-像位于

$\mathrm{D}^{\dim(e)}$的边界球面上，除非 $e' = e$。在这些假设下， X 称为半正则 *CW* 空间。根据定义，任何半正则 CW 空间都是正规的。

考虑半正则 CW 空间 X 中的一个胞腔 $e \subset X$，以及相应的特征映射 $\varphi_e : \mathrm{D}^k \to e$。拉回，即 e 中各胞腔在 φ_e 下完全原像的连通分支，构成 D^k 的一个划分；这给出了 D^k 上的正则 CW 空间结构，其中过渡同胚起着特征映射的作用。将赋予此正则 CW 结构的闭圆盘记作 D_e。注意， $\varphi_e : \mathrm{D}_e \to e$ 成为一个胞腔映射，即它将胞腔映到胞腔，而且每个胞腔都被同胚地映到其像上。不过，D_e 中不同的胞腔可能映到 X 中的同一个胞腔上。

5.5. **例：二维环面**。可以取一个凸多胞体 P，并用例如仿射同胚的映射将其某些面成对识别。于是，所得商空间自然具有半正则 CW 空间结构。例如，将环面 $\mathrm{T}^2 :=$实数集^2/整数集^2 表示为单位正方形 $[0;\,1] \times [0;1]$ 的商空间，其中通过 $(x,\ 0) \sim (x,\ 1)$ 和 $(0,\ y) \sim (1,\ y)$ 进行识别，就可在 T^2 上赋予半正则 CW 空间结构。其胞腔为：正方形的内部、两条边的相对内部（ $[0;1]^2$ 中任意一对平行边都对应于 T^2 的一个 1-胞腔），以及点 $(0,\ 0)$。注意，这个 CW 空间不是正则的。

5.6. **胞腔偏序集**。对于任意 CW空间 X，都可关联一个胞腔偏序集。该偏序集中的元素（=偏序集）是 X的胞腔，而此偏序集上的严格序 $\prec$ 满足：对于两个胞腔 e_1、 e_2，当且仅当$e_2 \subsetneq e_1$（注意包含关系是反向的： $e_1 \prec e_2$ 意味着 e_2在几何上小于 e_1）。回忆一下，偏序集中的序链就是一个线性有序子集。对于 X的胞腔偏序集，序链可以写成 $e_{k_0} \prec \cdots \prec e_{k_l}$，使得指标 k_i 等于相应胞腔 e_{k_i}的余维；此时这些指标严格递增： $k_0 < \cdots < k_l$。

5.7. **重心细分**。回到 X 是半正则 CW 空间的情形。对于 X 的每个胞腔 e，令 $c_e = \varphi_e(0)$，并将此点称为 e 的中心。此外， e 中的径向区间定义为 $\{\varphi_e(tv) \mid t \in (0;\,1)\}$，其中 v 属于 $\mathrm{D}^{\dim(e)}$ 的边界球面。现在，可以讨论 X的重心细分。重心细分的相对开单形可按其维数归纳定义如下。0 维单形是所有胞腔的中心。假设通过归纳，所有 k-单形（即维数为 k 的单形）均已定义，考虑一个胞腔 e（维数为任意 $> k$）以及一个 k-单形 $s \subset e \setminus e$。将 c_e 与所有点

用径向区间连接起来。按定义，这些区间的并集是重心细分的一个（$k+1$）-单形。

很容易验证， X 被划分为重心细分中的单形；赋予这一划分后，X 记作 X_s。因此，我们将重心细分中的单形称为的单形。考虑 X 中的一个胞腔 e 及其对应的特征映射 $\varphi_e : \mathrm{D}^k \to e$。注意， φ_e 将D_e 的重心细分映射到 e的重心细分。将 φ_e 限制在$(\mathrm{D}_e)_s$的闭单形上，便得到 X上某个新CW结构的特征映射，其胞腔为 X_s的单形。事实上，这是一个与几何单纯复形相对应的正则CW结构。

5.8. 例：二维环面 bis. 对于半正则 CW 空间 X， X_s的每个单形都对应胞腔偏序集中的唯一一条序链，也就是说，中心构成给定单形的胞腔是线性有序的。然而，不同的单形可能产生相同的序链，如下例所示。

令 $X = \mathrm{T}^2$ 为如例 5.5 所示的实二维环面。注意， X_s 中有四个不同的 2-单形对应于同一个序链，即 $e_0 \prec e_1 \prec e_2$，其中 e_0 是唯一的二维胞腔，e_1 是水平边，而 e_2 是唯一的零维胞腔。此外，有两个单形对应于序链 $e_0 \prec e_1$，两个单形对应于 $e_1 \prec e_2$，还有四个单形对应于 $e_0 \prec e_2$。

5.9. 基顶点。用 $S = S(X)$ 表示 X_s 的所有单形组成的集合。回忆一下，任意单形 $s \in S$ 都对应于胞腔偏序集中的某个序链 $e_{k_0} \prec \cdots \prec e_{k_l}$。于是， e_{k_l} 的中心称为 s 的基顶点。令 $S^{k_l}_l$ 为所有具有给定 l 和 k_l 的 s 所组成的子集。换言之， S^k_l 由 X 中所有维数为 l 的单形组成，且其基顶点位于余维为 k 的胞腔中。给定任意单形 $s \in S$，令 Γs 为 s 的面（= 余维一面），它包含 s 除基顶点之外的所有顶点。

5.10. 对偶胞腔与星形集。 设 X 是一个半正则 CW 空间。另设 e 是 X 的一个胞腔，其中心为 c_e。将对偶胞腔 $e^\star$ 定义为 e 的并集，其中包含 X 中与序链$e_{k_0} \prec \cdots \prec e_{k_l}$ 相关联的所有相对开单形，且满足 $e_{k_l} = e$。形如 $e^\star$的集合（其中 e 是X的一个胞腔）称为 X的对偶胞腔 。若所有对偶胞腔确实都同胚于开圆盘，则称 X 为非奇异。此外，将星形集$\mathrm{St}(e)$定义为 X 中所有与 e的中心相邻的相对开单形的并集。对于非奇异的 X，胞腔的星形集也同胚于开圆盘。

每个连通非奇异半正则 CW 空间 X 都是一个拓扑流形，其所有胞腔的星形集构成一个图册。特别地， X 的维数 dim(X) 是良定义的。若 dim(X) $= n$，则 X 的每个胞腔都包含在某个 n- 胞腔的闭包中。

5.11. **胞腔链空间**。现在假设 X 是一个维数为 n的非奇异半正则 CW 空间。显然，对偶胞腔在 X 上定义了一个 CW 结构，称为对偶胞腔结构。将 X 视为带有此结构的 CW 空间时，记作 $X_\star$。用 $C_k = C_k(X_\star; \mathbb{Q})$表示 $X_\star$上所有维数为 k 的有理数系数胞腔链构成的空间，并用 $C_\bullet$ 表示 C_k 对从 0 到 n的所有k 取直和所得的空间。一般而言，将一个指标替换为圆点表示对该指标取直和；该直和配有分次，可还原出各个直和项。回顾一下， $k > 0$上有一个自然的边界算子 $\partial : C_k \to C_{k-1}$ ，它使 $C_\bullet$ 成为一个代数链复形。这个复形的同调空间与 X的同调空间相同。

C_k 的生成元可以与 k的定向对偶胞腔相对应，即与 $X_\star$的定向 k-胞腔相对应。注意，任意单纯形 $s \in S^k_k$ 不仅定义了一个余维为 k 的对偶胞腔 $e[s]$ ，还定义了该胞腔的某种定向。如果 s 和 s' 都属于 S^k_k，具有相同的基顶点，并且恰好共有 k个顶点，那么 $e[s] + e[s'] = 0$在 C_k中，即这两个单纯形定义了同一个对偶胞腔的两个相反定向。我们将 C_k 的生成元写作 $e[s]$，并假定满足上述关系。

用这些生成元表示时，边界算子只需去掉基顶点，即取由所有其他顶点张成的面。有$\partial e[s] = \sum_{s'} \pm e[\Gamma s']$，其中求和遍历同一个对偶胞腔中的所有 s' ，也就是与 s具有相同基顶点的对象；符号取正或负，取决于 $e[s'] = e[s]$ 还是 $e[s'] = -e[s]$。注意，在这种边界算子的描述中，恒等式 $\partial^2 = 0$ 源于以下简单观察：每当 $\Gamma^2 s = \Gamma^2 s'$ 对于同一个 k-胞腔中的两个 k-单纯形s、 s' 成立时，就有 $e[s] = -e[s']$，因此 $e[\Gamma s]$ 和 $e[\Gamma s']$在 $\partial e[s]$ 的表达式中以相反的符号出现。

6. Topological arrangements

下面，我们在半正则 CW 空间上定义一种附加结构，它既推广了仿射超平面排列，也推广了环面排列。它还包括 5.3 节所述的平面中的正则图示。

6.1. **拓扑排列**。设 X 是一个非奇异的连通半正则 CW 空间， $\mathcal{A}$ 是其子复形的一个有限集合，并满足以下性质：

(1) $\mathcal{A}$ 的原子恰好是 X的胞腔；(2) $H_1 \cap \cdots \cap H_k$的每个连通分支，其中 $H_1, \ldots, H_k \in \mathcal{A}$，都是维数至少为 $n-k$ 的非奇异空间，其中 $n := \dim(X)$。

若这些性质成立，则称这一对（X， $\mathcal{A}$）为拓扑排列。有时，我们也会将 X 和/或 $\mathcal{A}$称为拓扑排列。 $\mathcal{A}$ 的成员称为 $\mathcal{A}$（或（X， $\mathcal{A}$）或 X）的超平面。 $H_1 \cap \cdots \cap H_k$的连通分支，其中$H_1, \ldots, H_k \in \mathcal{A}$，称为 $\mathcal{A}$的平坦。

6.2. **平坦的对偶胞腔**。考虑 $\mathcal{A}$ 的任意平坦 L ，并令 $L_\star$ 为由 L的对偶胞腔构成的CW空间，也就是说，它由相对于 L 的胞腔结构的对偶胞腔构成，而该胞腔结构由 $\mathcal{A}|_L$诱导。注意，对于 $L \neq X$， L 的对偶胞腔不是 X的对偶胞腔。另一方面， L 的对偶胞腔可理解为 X 的对偶胞腔与 L的交集。此外， $X_\star$中与 L 相交的胞腔和 $L_\star$的胞腔之间存在自然的一一对应；这一对应由与 L的交集给出。

给定 $\mathcal{A}$的一个平坦 L ，定义线性映射 $\pi^L : C_k \to C_k$ ，令$\pi^L(e) = 0$ 或 e ，具体取决于一个对偶 k-胞腔 e是否与 L 相交（若不相交，则 e 的中心位于 L中）。于是 π^L 是将 C_k 投影到其向量子空间 C_k^L 上的线性投影算子：$= \pi^L(C_k)$。注意，$\partial^L := \pi^L \circ \partial$ 在 $C_\bullet^L$上定义了一个边界算子，使后者成为一个代数链复形。来自 C_k^L的链可解释为 $L_\star$ 中的胞腔（$k-l$）链，其系数取自 L的余定向层 $\mathcal{O}_L$ ，其中 l 是 L的余维。尽管我们不会总是明确提及这种解释，但将 C_k^L 中的元素视为（$k-l$）链而非 k链会很有用。注意， C_k 可解释为 C_k^X。

6.3. **旗**。我们把 X （或 $\mathcal{A}$，或 $(X, \mathcal{A})$）的一个旗 定义为一组按包含关系线性有序的平坦。因此， X 的任意旗 $\mathcal{L}$ 都具有形式$L^{k_0} \supset \cdots \supset L^{k_l}$，其中 $k_0 < \cdots < k_l$ 分别是平坦 L^{k_0}、..... L^{k_l} 的余维。令 $[\mathcal{L}] := L^{k_l}$，并称其为 $\mathcal{L}$ 的基平坦 。用 Λ_l 表示所有形如 $L^0 \supset \cdots \supset L^l$ 的旗的集合，其中包含余维从 0 到 l （含）各阶的平坦。给定一个旗$\mathcal{L}$，将其截断 $\Gamma\mathcal{L}$ 定义为从旗 $\mathcal{L}$ 中去掉基平坦后得到的旗。若 $\mathcal{L} \in \Lambda_l$，则 $\Gamma\mathcal{L} \in \Lambda_{l-1}$。换言之，若 $\mathcal{L} = (L^0 \supset \cdots \supset L^l)$ ，则 $\Gamma\mathcal{L} = (L^0 \supset \cdots \supset L^{l-1})$ 。

6.4. 链复形 $C^{(l)}_\bullet$。 将有理向量空间 $C^{(l)}_k$ 定义为对所有旗 $\mathcal{L} \in \Lambda_l$ 的 $C^{\mathcal{L}}_k := C^{[\mathcal{L}]}_k$ 取直和。由于可能有许多旗 $\mathcal{L}$ 具有相同的基平坦 $L = [\mathcal{L}]$，向量空间 $C^{(l)}_k$ 包含 C^L_k 的许多相同副本。回顾一下，对于 $\mathcal{A}$ 的每个平坦 L，$C^L_\bullet$ 都是一个代数链复形，其边界算子为 ∂^L。对于链复形 $C^{\mathcal{L}}_\bullet$，按定义它与 $C^{[\mathcal{L}]}_\bullet$ 同构，其边界算子记作 $\partial^{\mathcal{L}}$。作为链复形的直和，$C^{(l)}_\bullet$也具有链复形结构；相应的边界算子记作 $\partial^{(l)}$。注意，对偶 l 胞腔与余维为 l 的平坦至多在单点处相交。因此，$C^{(l)}_l$ 应被非正式地理解为某种 0-链空间。若 ∂ 的定义域可由上下文明确，则我们用 ∂ 代替 $\partial^{\mathcal{L}}$ 或 $\partial^{(l)}$。然而，重要的是要记住，∂ 对 $C^{(l)}_k$ 的作用与 ∂ 对 C_k 的作用截然不同。

6.5. 生成元的标记。 $C^{(l)}_k$ 的生成元可以用由一对（e，$\mathcal{L}$）标记，其中 k 是一个定向的对偶 e -胞腔，$\mathcal{L} \in \Lambda_l$ 是一个旗，并且满足 $e \cap [\mathcal{L}] \neq \varnothing$。最后一个条件意味着 $k \geqslant l$：任意维数为k 的对偶胞腔都与所有余维为 $l > k$ 的平坦不相交。将如上所述对应于一对（e，$\mathcal{L}$）的生成元记为 $[e, \mathcal{L}]$。可以将 $C^{(l)}_k$ 看作由 $[e, \mathcal{L}]$生成的有理向量空间，唯一的关系是，将 e 的定向反向意味着改变 $[e, \mathcal{L}]$的符号。非正式地说，应将 $C^{(l)}_k$ 视为（$k - l$）-链的空间。也就是说，生成元 $[e, \mathcal{L}]$ 对应于[$\mathcal{L}$]的一个对偶胞腔 $e \cap [\mathcal{L}]$，并配备一个旗，即 $\mathcal{L}$，以及对 e进行定向的选择。边界算子作用于 $[e, \mathcal{L}]$ 时，就是取 $e \cap [\mathcal{L}]$的边界，只是系数系不同于 Q（e 的定向不同于 $e \cap [\mathcal{L}]$ 的定向）。事实上，可以写成

$$C^{\mathcal{L}}_\bullet = C_\bullet([\mathcal{L}]_\star, \mathcal{O}_{[\mathcal{L}]}),$$

其中 $\mathcal{O}_L$ 是平坦 L 的余定向层（取值于 Q）。在任意点 $q \in L$ 的一个小邻域内，层 $\mathcal{O}_L$ 与常值层 Q 同构，但该同构取决于 q 处 L 的局部余定向选择；反转此余定向意味着改变该同构的符号。

6.6. **一个同构。** 对于任意给定的 $\mathcal{L} \in \Lambda_{l-1}$，所有满足 $\Gamma\mathcal{L}' = \mathcal{L}$ 的 $\mathcal{L}' \in \Lambda_l$ 的 $C^{\mathcal{L}'}_l$ 之和都自然同构于 $C^{\mathcal{L}}_l$。因此，$C^{(l-1)}_l$ 自然同构于 $C^{(l)}_l$。

我们将用 $\iota_l : C_l^{(l-1)} \to C_l^{(l)}$ 表示这个自然同构。与本文的其他记号约定类似，当上下文已明确其定义域时，我们有时会省略 ι 的下标 l 。

证明。为每个与 $[\mathcal{L}]$ 相交的维数为 l 的对偶胞腔 e 选定一个定向，便可得到 $C_l^{\mathcal{L}}$ 的一组基，同时也得到 $\bigoplus_{\Gamma\mathcal{L}'=\mathcal{L}} C_l^{\mathcal{L}'}$ 的一组基。注意，前一个空间的每个基向量 $[e,\mathcal{L}]$ 都唯一对应于后一个空间的一个基向量 $[e,\mathcal{L}']$ ，其中 $\mathcal{L}' \supset \mathcal{L}$ 由条件 $[\mathcal{L}']$ 与 e 相交来确定，等价地说， e 的中心包含于 $[\mathcal{L}']$ 中。基向量之间的这种对应关系 ι : $[e,\mathcal{L}] \mapsto [e,\mathcal{L}']$ 是双射：从 $\mathcal{L}'$ 可按 $\mathcal{L} = \Gamma\mathcal{L}'$ 恢复 $\mathcal{L}$ 。由此可知， ι 可唯一地扩展为向量空间 $C_l^{\mathcal{L}}$ 和 $\bigoplus_{\Gamma\mathcal{L}'=\mathcal{L}} C_l^{\mathcal{L}'}$ 之间的线性同构。□

同构 ι 使我们能够定义算子 $\delta : C_l^{(l)} \to C_{l-1}^{(l-1)}$ 为$\partial^{(l-1)} \circ \iota_l^{-1}$ （若∂ 的定义域明确，我们通常记作 $\partial \circ \iota^{-1}$，甚至记作 $\partial\iota^{-1}$）。注意， δ 并不满足关系 $\delta \circ \delta = 0$。

6.7. 上链空间与余边界映射。 设 $C^\bullet$ 为与 $C_\bullet$对偶的上链复形；用 d 表示相应的余边界算子，即 ∂的对偶映射。 C^k 与 C_k 之间自然的非退化双线性配对记作 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$，因此 $\langle f,\ \alpha\rangle$ 表示上链 $f \in C^k$ 在链 $\alpha \in C_k$上的取值。类似地， $C_{\mathcal{L}}^\bullet$ 表示与 $C_\bullet^{\mathcal{L}}$对偶的上链复形；同样的约定也适用于 $C_{(l)}^\bullet$ 和$C_L^\bullet$。用 $d_{\mathcal{L}}$、 $d_{(l)}$和 d_L 表示相应的余边界算子。若余边界算子的定义域可从上下文中明确，则可省略下标，简记为 d。但请务必记住， d 可能会因定义域不同而表示非常不同的映射。根据定义，余边界算子作为相应边界映射的对偶算子作用，即 $\langle df,\ \alpha\rangle := \langle f,\ \partial\alpha\rangle$ （此处， ∂也可能因定义域不同而表示非常不同的映射）。我们采用不带符号的约定；采用不同的符号约定也会得到相同的结果。

为简化记号，从现在起，我们分别用 E_k 和 E^k 表示 $C_k^{(k)}$ 和 $C_{(k)}^k$。在有限环面配置的情形下，这一记号与 3.3 中引入的记号相容。最后， δ 的对偶算子记作 D : $E^k \to E^{k+1}$，或在需要强调k 时记作 $D_{(k)}$ 。由于 δ 可写成 $\partial \circ \iota^{-1}$，对偶映射 D 等于 $\iota^{*-1} \circ d$，其中 ι^* 是 ι的对偶， ι^{*-1} 是 ι^*的逆。给定 $\xi \in E^k$，我们可以如下描述 $D\xi$ 在生成元 $[e,\mathcal{L}] \in E_{k+1}$ 上的作用：

$$D\xi[e,\mathcal{L}] = \xi[e^+,\Gamma\mathcal{L}] - \xi[e^-,\Gamma\mathcal{L}].$$

这里， $\mathcal{L} \in \Lambda_{k+1}$，而 e 是一个穿过平坦 $[\mathcal{L}]$的对偶（$k+1$）胞腔；交集 $e \cap [\Gamma\mathcal{L}]$ 是一个拓扑弧（ $[\Gamma\mathcal{L}]_\star$的对偶 1 维胞腔），其端点为 $e^+ \cap [\Gamma\mathcal{L}]$ 和 $e^- \cap [\Gamma\mathcal{L}]$； e边界上的对偶 k胞腔 $e^\pm$ 由最后一个条件确定。最后， $e^\pm$的定向与 e边界上的定向相同。

7. Varchenko–Gelfand 代数

本节将介绍适用于拓扑排列的一种 Varchenko–Gelfand 代数版本。

7.1. 定义。 考虑一个拓扑排列 $(X, \mathcal{A})$，令$\mathcal{V} = \mathcal{V}(X)$ 表示从 $X \setminus \bigcup \mathcal{A}$ 到 Q 的所有局部常值函数所构成的代数。Gelfand 和 Varchenko [29] 最初的定义仅适用于仿射超平面排列。尽管他们的定义和代数结构可以原样推广到拓扑排列，但要在 $\mathcal{V}$上定义次数滤过，仍需作出一项重要修改。事实上， [29] 最初的方法是将 $\mathcal{V}$ 中的元素表示为 *Heaviside* 函数的多项式，而对于一般的拓扑排列，后者并无意义。 $\mathcal{V}$ 与 [29]的原始代数之间另一个较小的区别是，我们使用有理数而非整数作为系数。

在空间 $\mathcal{V}$ 和 C_0之间存在一个自然的非退化双线性配对 $\langle \cdot,\ \cdot \rangle$；即，

$$\langle f, \alpha \rangle := \sum \alpha_x f(x), \quad \forall f \in \mathcal{V},\ \forall \alpha = \sum_x \alpha_x x \in C_0.$$

这里， $\alpha \in C_0$ 表示为对偶 0 维胞腔 x （ X的 d维胞腔的中心）与系数 $\alpha_x \in$Q的和。因此， $\mathcal{V}$ 可视为 C_0的向量空间对偶，也就是说， $\mathcal{V}$ 与 C^0相对应。例如，讨论子空间 $U \subset C_0$的正交补 $U^\perp$ （=湮灭子）是有意义的；此时 $U^\perp$ 是 $\mathcal{V}$的子空间。

7.2. 次数滤过。定义子空间 $\mathcal{V}_{\leqslant k} \subset \mathcal{V}$ 为 $\delta^{k+1}E_{k+1}$的湮灭子，等价地，定义为 D^{k+1} 的核： $\mathcal{V} \to E^{k+1}$。随着 k增大，空间 $\delta^{k+1}E_{k+1}$ 变小，而空间 $\mathcal{V}_{\leqslant k}$ 变大：

$$\mathcal{V}_{\leqslant 0} \subset \mathcal{V}_{\leqslant 1} \subset \cdots \subset \mathcal{V}_{\leqslant n} = \mathcal{V}.$$

这里，最后一个等式 $\mathcal{V}_{\leqslant n} = \mathcal{V}$ 由 $\delta^{n+1}E_{n+1}$ =0这一事实得出；事实上， $E_{n+1} = 0$。因此，子空间 $\mathcal{V}_{\leqslant k}$ 构成了 $\mathcal{V}$的一个滤过，称为次数滤过。定义次数滤过的商空间，即商空间 $\mathcal{V}_k := \mathcal{V}_{\leqslant k}/\mathcal{V}_{<k}$，其中 $\mathcal{V}_{<k}$ 表示 $\mathcal{V}_{\leqslant k-1}$。对于$k = 0$，令 $\mathcal{V}_0 := \mathcal{V}_{\leqslant 0}$；等价地，也可以令 $\mathcal{V}_{<0} := 0$ ，以便使前面的定义适用。我们可以看到一个清晰的

类比：元素 $f \in \mathcal{V}_{\leqslant k}$的定义性质 $D^{k+1}f = 0$ 与将次数为 k 的多项式描述为一个所有阶数为 $k+1$ 的导数都为零的光滑函数之间的类比；这里， D 被视为一种离散微分。

7.3. 零次。.....的元素 $\mathcal{V}_0$ 都是常值函数。此外， $\mathcal{V}_0$ 与0.....的零上同调空间之间存在自然同构 X。首先注意到，根据 6.6， E_1 与 C_1同构，并且$\delta E_1 = \partial C_1$。回忆一下，空间 C_1 由定向对偶一胞腔张成，而空间 E_1 由形如 $[e, \mathcal{L}]$的对组成，其中 e 是一个定向对偶一胞腔， $\mathcal{L} \in \Lambda_k$ 是形如 $X = L^0 \supset L^1$的旗，并且$e \cap L^1 \neq \varnothing$。由于 $\mathcal{L}$ 由 e确定，因此确实可以将 e 与$[e, \mathcal{L}]$等同，从而将 C_1 与 E_1等同。根据次数滤过的定义，这说明 $\mathcal{V}_0$ 与零上闭链空间重合；也就是说， $\mathcal{V}_0$ 与 $\mathrm{H}^0(X)$之间存在自然同构，后者是 X的零上同调空间。回忆一下， X 是连通的，因此 $\mathrm{H}^0(X) = \mathrm{Q}$。等价地说，零上闭链恰好是常值函数。

7.4. 一次项。 我们还来讨论一次项 $\mathcal{V}_1$。注意， C^1 与 E^1 同构，并且 $d : \mathcal{V} = E^0 \to C^1$ 的核恰好是 $\mathcal{V}_{\leqslant 0}$ （回忆一下， d 是作用于 $C^\bullet$ 上的通常余边界算子，见 6.7，并且 $E^0 = C^0$）。因此， d 诱导出从 $\mathcal{V}_1$ 到 C^1的线性嵌入。给定任意 $f \in \mathcal{V}$，一上链 df度量函数 f 的自变量穿过 $\mathcal{A}$中的某个超平面时所产生的跃变。一上链 df 也可以看作一个 0-上链 g_H ，它定义在 $\mathcal{A}$的每个超平面 H 上，系数取自 H的余定向层 $\mathcal{O}_H$ 。在这种解释下，假设$D^2 f = 0$按定义等价于 $f \in \mathcal{V}_{\leqslant 1}$，这意味着对每个 $H \in \mathcal{A}$， g_H 都是一个 0-余循环。因此可得到如下同构嵌入

$$\mathcal{V}_1 \hookrightarrow \bigoplus \mathrm{H}^0(H, \mathcal{O}_H).$$

注意，右侧的每一项 $\mathrm{H}^0(H, \mathcal{O}_H)$ 都同构于 Q（如果 H 可余定向），或者同构于 0（如果 H 不可余定向）。

假设——这是一个重要的特殊情形—— $\mathcal{A}$的所有超平面都是可余定向的。那么， $\mathcal{V}_1$ 中的元素可以与上共定向超平面的交错函数相对应。更确切地说，我们所说的 $\mathcal{A}$ 的定向超平面，是指 $\mathcal{A}$ 中的一个超平面，并为其指定一种余定向；在这个意义下，同一个几何超平面会产生两个不同的定向超平面，它们仅在余定向上有所不同。 $\mathcal{A}$上的一个函数

如果在超平面反转其余定向时函数值变号，则称其为交错的。

7.5. **空间** $\mathcal{F}_k$。对于每个余维为 k 的平坦 L of $\mathcal{A}$，回忆一下，C_k^L 可以解释为 $L_\star$ 中以 $\mathcal{O}_L$ 为系数的（胞腔）0-链空间。同样，C_L^k 是 $L_\star$ 中以 $\mathcal{O}_L$ 为系数的 0-上链空间。现在固定一个旗 $\mathcal{L} \in \Lambda_k$，并回忆 $C_{\mathcal{L}}^k$ 只是 C_L^k 的一个副本，其中 $L = [\mathcal{L}]$。此外，$C_{\mathcal{L}}^k$ 可以看作 E^k 的一个直和项，因而也是一个向量子空间。特别地，对 $C_{\mathcal{L}}^k$ 中的元素应用 D 是有意义的。对于 $f \in C_{\mathcal{L}}^k$ 而言，条件 $Df = 0$ 意味着 $L_\star$ 中相应的 0-上链是一个余循环。因此，每个满足 $Df = 0$ 的 $f \in C_{\mathcal{L}}^k$ 都定义了 $\mathrm{H}^0(L; \mathcal{O}_L)$ 的唯一元素；此外，这是一个线性嵌入。回忆一下，当 L 可余定向时，$\mathrm{H}^0(L; \mathcal{O}_L)$ 同构于 $\mathbb{Q}$，否则同构于 0。注意，在前一种情况下，这个同构不是规范的——它取决于对 L 的余定向选择。定义

$$\mathcal{F}_k := \bigoplus_{\mathcal{L} \in \Lambda_l} \mathrm{H}^0([\mathcal{L}]; \mathcal{O}_{[\mathcal{L}]}).$$

这是一个定义在 $\mathbb{Q}$ 上的向量空间，它自然是 E^k 的子空间，其中 $[D = E^k \to E^{k+1}]$ 为核。如果所有余维为 k 的平坦都是可余定向的，那么 $\mathcal{F}_k$ 的元素可以理解为定向 k-旗上的交错函数。所谓 定向 k-旗，是指一个旗 $\mathcal{L} \in \Lambda_k$ 配备了 $\mathcal{L}$ 的某种定向，也就是说，配备了 $[\mathcal{L}]$ 的余定向。定向 k-旗上的函数称为 交错函数，若旗每次反转定向时，其函数值都会改变符号。对于一般情形，即并非所有 $\mathcal{L}$ 都可定向时，同样的描述仍然适用；此时，定向旗上的交错函数在那些无法定向的旗上没有定义。

用 $\Lambda_k^{\mathcal{O}}$ 表示配备了定向的旗 $\mathcal{L} \in \Lambda_k$ 的集合。因此，Λ_k 中每个可定向的旗都会对应 $\Lambda_k^{\mathcal{O}}$ 中两个仅定向不同的元素，而 Λ_k 中不可定向的旗则不会对应 $\Lambda_k^{\mathcal{O}}$ 中的任何元素。正如我们先前所述，$\mathcal{F}_k$ 可与所有取值于 $\mathbb{Q}$ 的 $\Lambda_k^{\mathcal{O}}$ 上的交错函数所构成的空间等同。

7.6. **可定向的排列**。若拓扑排列 $(X, \mathcal{A})$ 中的每个平坦都可余定向，则称该拓扑排列为可定向的。在可定向排列中，所有旗都是可定向的，因此，空间 $\mathcal{F}_k$ 的描述最为直接。在可定向情形下，集合 $\Lambda_k^{\mathcal{O}}$ 的元素个数是集合 Λ_k 的两倍，而 $\mathcal{F}_k$ 在 $\mathbb{Q}$ 上的维数等于 Λ_k 的基数。对于可定向排列 $\mathcal{A}$ 的任意平坦 L，上同调空间 $\mathrm{H}^k(L; \mathcal{O}_L)$ 与 $\mathrm{H}^k(L; \mathbb{Q})$ 同构，但该同构仅在相差一个符号的意义下定义。

7.7. 余循环条件。 考虑一个元素 $\xi \in E^k$。若 ξ满足余循环条件，则称之为如此。这里，同构 ι^* 将 ξ 映射到 $C^k_{(k-1)}$，而 d将 $\iota^*\xi$ 映射到 $C^{k+1}{}_{(k-1)}$（回忆一下，ι在 6.6 中定义，且 $d : C^k_{(k-1)} \to C^{k+1}_{k-1\,()}$ 是上链复形 $C^\bullet_{(k-1)}$的余边界算子）。

引理。 $\mathcal{F}_k$ 的所有元素都满足余循环条件。

回顾一下，$\mathcal{F}_k$ 可与 E^k 的一个子空间相对应，该子空间由所有满足 $D\xi = 0$ 的 $\xi \in E^k$ 组成，等价地，即 $d\xi = 0$。在定向情形下，这意味着 ξ 在每个旗 $\mathcal{L} \in \Lambda_k$上都是常数，也就是说，$\xi[e, \mathcal{L}]$ 只取决于 $\mathcal{L}$ 和 e的定向，而不取决于 e 本身。

证明。考虑任意满足 $D\xi = 0$的 $\xi \in E^k$，以及 C^{k+1} 的一个生成元 $[e, \mathcal{L}]$ $_{(k-1)}$，其中 $\mathcal{L} \in \Lambda_{k-1}$，且 e 是一个满足 $e \cap [\mathcal{L}] \neq \varnothing$的定向对偶 $(k+1)$ 胞腔。注意，此时 $e \cap [\mathcal{L}]$ 是 $[\mathcal{L}]_\star$的一个二维胞腔。我们有

$$d\iota^*\xi[e, \mathcal{L}] = \sum_{\mathcal{L}'} \iota^*\xi \left(\partial^{\mathcal{L}'}[e, \mathcal{L}']\right),$$

其中求和遍历所有满足 $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}'$ 和 $e \cap [\mathcal{L}'] \neq \varnothing$ 的 $\mathcal{L}' \in \Lambda_k$，也就是说，对于某个余维 k 的平坦 $M \subset [\mathcal{L}]$，有 $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{M\}$，且该平坦包含 e 的中心。e 的中心包含在唯一一个余维 $k+1$ 的平坦 L 中，并且 $\iota^*\xi\left(\partial^{\mathcal{L}'}[e, \mathcal{L}']\right)$ 等于 $D\xi[e, \mathcal{L}'']$，其中 $\mathcal{L}'' := \mathcal{L}' \cup \{L\}$。由于 $D\xi = 0$，余循环条件成立。□

7.8. **嵌入定理。** 映射 $f \mapsto D^k f$ 诱导出一个将 $\mathcal{V}_k$ 嵌入 $\mathcal{F}_k$ 的同构嵌入。

利用这一嵌入，我们接下来将 $\mathcal{V}_k$ 与 $\mathcal{F}_k$ 中相应的子空间视为同一对象。

证明。根据定义，$D^k f = 0$ 意味着 $f \in \mathcal{V}_{<k}$。因此，$f \mapsto D^k f$ 将商空间 $\mathcal{V}_k = \mathcal{V}_{\leqslant k}/\mathcal{V}_{<k}$ 嵌入 E^k。此外，根据 7.5，像 $D^k f$ 包含于 $\mathcal{F}_k \subset E^k$中。□

向量空间 $\mathcal{F}_k$ 有一个显式基；如果我们能够给出定义 $\mathcal{V}_k$ 作为 $\mathcal{F}_k$ 的子空间的显式线性方程组，就可以对商空间 $\mathcal{V}_k$ 作出显式描述。

8. Relations

前面我们定义了从 $\mathcal{V}_k$ 到 $\mathcal{F}_k$的自然嵌入。我们通常将 $\mathcal{V}_k$ 与该嵌入的像等同起来。我们的下一个目标是描述定义 $\mathcal{V}_k$ 为 $\mathcal{F}_k$的向量子空间的线性关系。

8.1. **互反律**。 在一般拓扑排列的情形下， E^k中元素的互反律与第3.6节中的形式相同。用上链空间 E^k表示，它们可以陈述如下。考虑一个部分旗 $\mathcal{L}^\circ$ ，其中包含余维从0到 k的平坦，但恰好缺少余维为 m 且满足 $0 < m < k$的平坦。若上链 $\xi \in E^k$在$(\mathcal{L}^\circ,\ e)$处满足互反律，其中 e 是一个对偶定向的 k-胞腔，且满足 $e \cap [\mathcal{L}^\circ] \neq \varnothing$，则

$$\sum_M \xi[e, \mathcal{L}^\circ \cup \{M\}] = 0.$$

这里的求和遍及所有满足 $\mathcal{L}^\circ \cup \{M\} \in \Lambda_k$ 的平坦 M。有序对 $(m,\ k)$ 称为相应互反律的类型 。

下面，我们用余边界算子 d 来解释 $k > 1$ 的类型 $(k-1,\ k)$ 互反律。

引理。 元素 $D\eta \in E^k$ 满足所有类型为（$k-1,\ k$）的互反律，当且仅当 $d\iota^*\eta = 0$。

这里，同构 ι^* （见 6.6）将 η 映射为 $C^{k-1}{}_{(k-2)}$ 中的一个元素，随后复形 $C^\bullet_{(k-2)}$的余边界算子 $d = d_{(k-2)}$ 将 $\iota^*\eta$ 映射为 $C^k_{(k-2)}$ 中的一个元素。

证明。 考虑一个形如 $\xi = D\eta$ 的上链 $\xi \in E^k$ ，其中 $\eta \in E^{k-1}$。根据定义，ξ 在 E_k 的生成元 $[e, \mathcal{L}]$ 上的取值为：其中$\mathcal{L} \in \Lambda_k$ 且 e 是一个取向的对偶 k-胞腔，满足 $e \cap [\mathcal{L}] \neq \varnothing$。

$$\xi[e, \mathcal{L}] = \eta_{\Gamma\mathcal{L}}(\partial^{\Gamma\mathcal{L}} e).$$

其中，$\eta_{\Gamma\mathcal{L}} \in C^{k-1}_{\Gamma\mathcal{L}}$ 是 η的 $\Gamma\mathcal{L}$连通分支。现在假设 $\mathcal{L} = \mathcal{L}^\circ \cup \{M\} \in \Lambda_k$，其中 $\mathcal{L}^\circ = \mathcal{L} \setminus \{M\}$固定，而一个余维为$k-1$ 的平坦体 M 在变化。将上述等式两边对 M 求和。在左边，我们得到与 $\mathcal{L}^\circ$处的互反律相同的表达式。另一方面，在右边，对所有 M 求和 $\partial^{\Gamma\mathcal{L}}$ 相当于 $\partial^{\Gamma\mathcal{L}^\circ}$：事实上， e 边界上与 $[\Gamma\mathcal{L}^\circ]$ 相交的每个对偶（$k-1$）胞腔也恰好与一个 M相交。因此，右边得到 $d\iota^*\eta[e, \Gamma\mathcal{L}^\circ]$ 。□

8.2. **涌现**。 以下说明互反律如何从 D^2的作用中涌现。

引理。 对于任意 $k > 1$ 和任意 $\zeta \in E^{k-2}$，上链 $D^2\zeta \in E^k$ 满足类型为 $(k-1、\ k)$ 的互反律。特别地， $\mathcal{V}_k \subset \mathcal{F}_k$ 的所有元素都满足类型为 $(k-1、\ k)$ 的互反律，其中 $k > 1$。

证明。令 $\xi := D^2\zeta$ 且 $\eta := D\zeta$；则有 $\xi = D\eta$。由 8.7 可知，ξ 的类型为 $(k-1,k)$ 的互反律具有形式 $d\iota^*\eta = 0$。回忆 $D = \iota^{*-1}d$，因此，

$$d\iota^*\eta = d\iota^*\iota^{*-1}d\zeta = dd\zeta = 0.$$

因此，ξ 确实满足类型（$k-1$，k）互反律。 □

8.3. **遗传性**。互反律在 D的像下保持遗传。

引理。若对于给定的 m（其中 $0 < m < k$），$\xi \in E^k$ 满足类型（m,k）互反律，则 $D\xi$ 满足类型（$m,k+1$）互反律。特别地，$k > 1$ 下 $\mathcal{V}_k \subset \mathcal{F}_k$ 的所有元素都满足所有满足 $0 < m < k$的类型（m,k）的互反律。

证明。假设对于给定的 m（其中 $0 < m < k$），$\xi \in E^k$ 满足所有类型（m，k）互反律，并考察 $D\xi$。任取一个旗$\mathcal{L}^\circ$，使得对于某个余维为 m 的平坦 M，有 $\mathcal{L}^\circ \cup \{M\} \in \Lambda_{k+1}$；考察 $D\xi$在（e，$\mathcal{L}^\circ$）处的类型（m，$k+1$）互反律的左端：

$$\sum_M D\xi[e, \mathcal{L}^\circ \cup \{M\}] = \sum_M \xi[e^+, \Gamma\mathcal{L}^\circ \cup \{M\}] - \sum_M \xi[e^-, \Gamma\mathcal{L}^\circ \cup \{M\}]$$

这里，$e^\pm$ 的定义与 6.7 中相同，求和遍及所有满足 $\mathcal{L}^\circ \cup \{M\} \in \Lambda_{k+1}$ 或等价地满足 $\Gamma\mathcal{L}^\circ \cup \{M\} \in \Lambda_k$ 的 m-平坦 M。另请注意，$\Gamma\mathcal{L}^\circ \cup \{M\} = \Gamma(\mathcal{L}^\circ \cup \{M\})$，因为 $m < k$。在最后一个公式的右边，两个项都为零，这是由 ξ 的类型（m，k）互反律所致。

定理的最后一个断言由 8.2 和第一个断言推出。□

8.4. **周期消失条件**。设 $\xi \in E^k$ 满足余循环条件。考虑 $\omega := \iota^*\xi \in C^k_{(k-1)}$ 在同构 ι^*下的 ξ 的像。由于 ξ 满足余循环条件，上链 ω 是一个余循环：$d\omega = 0$。我们还可以进一步要求 ω 是一个余边界，即要求 ω 表示平凡的上同调类。更准确地说，考虑任意旗 $\mathcal{L} \in \Lambda_{k-1}$。$\omega$ 的 $\mathcal{L}$-连通分支 $\omega_\mathcal{L}$ 是$C^k_\mathcal{L}$ 中的一个余循环，或者等价地说，是 $C^1([\mathcal{L}]; \mathcal{O}_{[\mathcal{L}]})$中的一个1-余循环。再考虑 $C_1([\mathcal{L}]; \mathcal{O}_{[\mathcal{L}]})$中的一组圈 α_1、…、α_m，其同调类生成向量空间 $\mathrm{H}_1([\mathcal{L}]; \mathcal{O}_{[\mathcal{L}]})$。要求 $\omega_\mathcal{L}$ 的上同调类是平凡的，等价于要求周期 $\langle\omega_\mathcal{L}, \alpha_i\rangle$ 对所有 $i = 1$、…、m都消失。因此，这一条件——即 $\omega_\mathcal{L}$ 是 $C^k_\mathcal{L}$ 中的余边界——在 $\mathcal{L}$处被称为周期消失条件 。下面的引理直接由定义得到。

引理。 如果 $\xi \in E^k$ 满足余循环条件以及所有周期消失条件，那么对于某个 $\eta \in E^{k-1}$，有 $\xi = D\eta$ 。

现在假设 $k = n = \dim(X)$。在这种情况下，余循环条件是空泛的（即自动成立）。注意，元素 $\xi \in E^n$满足周期消失条件，当且仅当对每个旗$\mathcal{L}^\circ \in \Lambda_{n-1}$，都有

$$\sum_{a \in [\mathcal{L}^\circ]} \xi[e_a, \mathcal{L}^\circ \cup \{a\}] = 0,$$

其中求和遍及所有顶点（=零维平坦） a ，这些顶点属于 $\mathcal{A}$ 且满足 $a \in [\mathcal{L}^\circ]$；等价地，满足 $\mathcal{L}^\circ \cup \{a\} \in \Lambda_n$；而 e_a 是包含 a的对偶 n-胞腔。假设所有 e_a 的定向彼此相容；若无法选取相容的定向，则相应的互反律是空泛的。更确切地说，所谓相容的定向，是指 $\sum_a [e_a, \mathcal{L}^\circ] \in C_n^{\mathcal{L}^\circ}$ 为一个圈。注意，$(\iota^* \xi)_{\mathcal{L}^\circ}$ 的唯一周期，是它在$C_1([\mathcal{L}^\circ],\ \mathcal{O}_{[\mathcal{L}^\circ]})$中对应的1-圈上的取值，因此，上面显示的公式确实等价于 ξ的周期消失条件。

显然，本文所定义的周期消失条件，在 $\mathcal{A}$ 是环面中的有理超平面排列时，特化为 3.7 中的周期消失条件。

8.5. **选择函数**。 按定义，层级为 k 的选择函数是一个映射 $\phi:\ \Lambda_k \to X$ ，满足 $\phi(\mathcal{L})$ 是 $[\mathcal{L}]$ 的一个对偶 0 维胞腔，也就是说，是 $[\mathcal{L}]$ 中某个开（最高维）胞腔的中心。在接下来的构造中，对每个 k ，我们固定一个选择函数 $\phi_k:\ \Lambda_k \to X$ ，并用同一个符号 ϕ 表示所有这些选择函数。

8.6. **积分**。 现在假设 $\mathcal{L} \in \Lambda_k$ ，且 $\xi \in C_{\mathcal{L}}^{k+1}$ 是一个余边界，我们希望定义一个满足 $d\eta = \xi$ 的特定 $\eta \in C_{\mathcal{L}}^k$ 。令 a 为 $[\mathcal{L}]$ 的任意一个对偶 0 维胞腔，并令 e 为一个有向 k 胞腔，满足 $e \cap [\mathcal{L}] = \{a\}$。回想一下，平坦 $[\mathcal{L}]$ 是连通的；因此，从 $\phi(\mathcal{L})$ 到 a 存在一条路径，该路径可由一个有限序列表示

$$a_0 = \phi(\mathcal{L}),\ I_1,\ a_1,\ \ldots, a_{m-1},\ I_m,\ a_m = a,$$

其中，对于 $i = 1$，.....， m 是 $[\mathcal{L}]$的对偶 1 维胞腔，而对于 $0 < i < m$， a_i是 I_i 和 I_{i+1}的公共端点，因此它是 $[\mathcal{L}]$的对偶 0 维胞腔。对于每个 i，选择 X 的一个定向对偶 k-胞腔 e_i ，使得 $e_i \cap [\mathcal{L}] = \{a_i\}$。可以选择 e_i 的定向，使得 $e_m = e$（计入定向），并满足以下要求：对于 $0 < i < m$，对偶胞腔 e_i 和 e_{i+1} 的定向

与同一个定向对偶（$k+1$）-胞腔 $e_{i,\ i+1}$的边界一致，该胞腔与 $[\mathcal{L}]$ 的交集等于 I_i。定义

$$\eta(e) := \sum_{i=1}^{m-1} \xi[e_{i,i+1}, \mathcal{L}].$$

我们知道，ξ 是一个余边界，因此它在任意圈上的取值均为 0。由此可知，η 定义良好，也就是说，上述公式给出的取值 $\eta(e)$与从 $\phi(\mathcal{L})$ 到a所选取的路径无关。还要注意，一旦选定了 e 和路径，对偶胞腔$e_{i,\ i+1}$（包括其定向）便唯一确定。通过直接计算可以验证，$d\eta = \xi$ ——事实上，这是一个离散版本的标准“积分”过程，用于对精确 1-形式进行积分，其渊源可追溯至庞加莱。上述定义的上链 η 记作 $\mathrm{I}_\phi(\xi)$。称 I_ϕ 为与选择函数ϕ相对应的积分映射 。积分映射的性质总结如下引理。

引理。对于固定的 ϕ，映射 $\mathrm{I}_\phi : C^{k+1}_{\mathcal{L}} \to C^k_{\mathcal{L}}$ 是一个线性映射，并满足性质 $d\mathrm{I}_\phi = id$ 于 $dC^k_{\mathcal{L}}$ 上。

对所有旗 $\mathcal{L} \in \Lambda_k$取直和，我们得到一个从$C^{k+1}{}_{(k)}$ 到 E^k的映射，也记为 I_ϕ。由引理可知，I_ϕ 是定义在 dE^k上的 d的部分右逆，也就是说，对于每个 $\xi \in dE^k$，都有 $d\mathrm{I}_\phi\xi = \xi$。

注意，复形 $C^\bullet_{\mathcal{L}}$以及积分映射 I_ϕ： $C^{k+1}_{\mathcal{L}} \to C^k_{\mathcal{L}}$ 都只取决于基平坦 $[\mathcal{L}]$ 及其余定向，而与 $\mathcal{L}$ 中的其他平坦无关。因此，在 $\mathcal{L}$ 是一个不属于 Λ_k的部分旗的情形下，我们也可以使用上述引理。

8.7. 积分的性质。下面的引理将 $\xi \in E^k$ 的性质（例如互反律）与 $\mathrm{I}_\phi\xi$的性质联系起来。

引理。假设 $\xi \in E^k$ 满足余循环条件和所有周期消失条件。那么，$\eta := \mathrm{I}_\phi\iota^*\xi$ 定义良好，并且$\xi = D\eta$。此外，若 ξ 满足所有类型（m、k）的互反律，且 $0 < m < k$，那么 η 也满足所有类型（m、$k-1$）的互反律，其中 $m < k-1$，并且满足余循环条件。

证明。假设 $\xi \in E^k$ 满足余循环条件和所有周期消失条件。由 8.4 可得 $\xi \in DE^{k-1}$，等价地，$\iota^*\xi \in dC^{k-1}{}_{(k)}$。由此可知，$\eta := \mathrm{I}_\phi\iota^*\xi$ 定义良好，而且，

$$D\eta = \iota^{*-1}d\eta = \iota^{*-1}\iota^*\xi = \xi.$$

现在进一步假设 ξ 满足所有类型（m,k）的互反律，其中 $0<m<k$。固定 $m<k-1$，并写出 ξ 在（例如） $[e,\mathcal{L}^\circ]$处的一个互反律，即 $\sum_M \xi[e,\mathcal{L}^\circ\cup\{M\}]=0$，其中求和遍及所有满足 $\mathcal{L}^\circ\cup\{M\}\in\Lambda_k$的维数为 m 的平坦 M。将同构 ι^* 应用于等式两边，得到

$$\sum_M \iota^*\xi[e,\Gamma\mathcal{L}_M]=0,\quad \mathcal{L}_M:=\mathcal{L}^\circ\cup\{M\}.$$

注意，$\iota^*\xi\in C^k_{\Gamma\mathcal{L}^\circ}$ 且 $\Gamma\mathcal{L}_M\in\Lambda_{k-1}$。积分算子 $\mathbf{I}_\phi$ 在 $C^k_{\Gamma\mathcal{L}^\circ}$ 上定义良好（尽管 $\mathcal{L}^\circ$ 是不完全旗，缺少一个余维为 m 的平坦；参见 8.6 末尾），并将这个空间映射到空间 $C^{k-1}_{\Gamma\mathcal{L}^\circ}$。因此，在等式两边同时作用 $\mathbf{I}_\phi$，可得 $\eta=\mathbf{I}_\phi\iota^*\xi\in C^{k-1}_{\mathcal{L}^\circ}$ 在所有 $[e'$处的互反律；$\Gamma\mathcal{L}^\circ]$，其中 e' 是 X 的一个定向对偶（$k-1$）胞腔，满足$e'\cap[\Gamma\mathcal{L}^\circ]\neq\varnothing$。因此，$\eta$ 满足所有类型的互反律（$m,\ k-1$），其中 $0<m<k-1$。

对于 $m=k-1$，情况略有不同，也就是说，当我们试图证明 η 的余循环条件时。尽管按照上文相同的方法可以得到 $\sum_M\iota^*\xi[e,\Gamma\mathcal{L}_M]=0$，但现在 $\Gamma\mathcal{L}_M$ 的基平坦是 M，且求和中的不同项对应不同的基平坦。另一方面，利用 $\iota^*\xi=d\eta$ 并根据 d 的定义，我们得到

$$\sum_M \eta[e^+_M,\Gamma\mathcal{L}_M]-\eta[e^-_M,\Gamma\mathcal{L}_M]=0,$$

其中 $e^\pm_M$ 是由 6.7 中的 e 构造为 $e^\pm$ 的；它们取决于 M。根据同构 ι 的定义，项 $\eta[e^\pm_M,\Gamma\mathcal{L}_M]$ 可以替换为 $\iota^*\eta[e^\pm_M,\Gamma\mathcal{L}^\circ]$。回想一下，$\Gamma\mathcal{L}^\circ$ 的基平坦的余维为 $k-2$。最后，将对 M 的求和等于零解释为 $d\iota^*\eta[e,\Gamma\mathcal{L}^\circ]=0$（事实上，$e$ 边界上的每个对偶（$k-1$）-胞腔，按 ∂e 中的定向且穿过平坦 $[\Gamma\mathcal{L}^\circ]$，都可以唯一地识别为 $e^\pm_M$；其中 M 是一个维数为 $m=k-1$ 的平坦，使得 $\mathcal{L}_M\in\Lambda_k$）。由于 e 是任意的，我们得到 η 满足余循环条件。□

9. Affine and pseudoaffine arrangements

仿射空间中的超平面排列并不是拓扑排列，因为仿射空间不是紧空间。不过，它可以通过一种直接的方式得到拓扑排列。只需将仿射空间 $\mathbf{R}^n$一点紧化为 $\mathbf{S}^n=\mathbf{R}^n\cup\{\infty\}$ 即可。这里的 $\mathbf{S}^n$ 当然与 n-球面同胚。这样，$\mathbf{R}^n$ 中的每个仿射超平面排列都会在 $\mathbf{S}^n$中定义一个拓扑排列，其中所有超平面都经过点 ∞。

这是下文所定义的伪仿射拓扑配置的一个特例。

9.1. **伪仿射拓扑排列**。如果一个拓扑排列 $(X, \mathcal{A})$ 满足以下条件，则称其为伪仿射：

(1) $\mathcal{A}$ 的每个维数为 >0 的平坦都同胚于一个球面；(2) 存在一个特殊点 $\infty \in X$，它位于所有超平面上。

回想一下，X 也是一个平坦，因此也假设它是一个拓扑球面。另一方面，我们不要求两个或多个超平面的交集是连通的；它可以有多个连通分支，但每个分支都必须是一个拓扑球面（除非它是零维的）。讨论 $(X, \mathcal{A})$ 时，我们将使用上文为一般拓扑排列引入的符号和术语。注意，伪仿射排列总是可定向的。

9.2. **对 $\mathcal{V}_k$ 在 $k<n$ 上的描述**。Varchenko–Gelfand 代数的商空间 $\mathcal{V}_k$ 可以描述为 $\mathcal{F}_k$ 的向量子空间。还要回想一下，$\mathcal{F}_k$ 是 $\Lambda_k^{\mathcal{O}}$ 上所有交错函数构成的空间。下文假设 $k<n:=\dim(X)$。

定理。$\mathcal{V}_k \subset \mathcal{F}_k$ 中属于 $k<n$ 的元素，恰好是满足所有互反律的 $\Lambda_k^{\mathcal{O}}$ 上的交错函数。

证明。我们已经知道，$\mathcal{V}_k$ 中的所有元素都满足所有互反律，见 8.3。现在设 $\xi \in \mathcal{F}_k$ 满足所有类型（m，k）且具有 $0<m<k$ 的互反律。根据 7.7，上链 ξ 也满足余循环条件。此外，由于对每个 $\mathcal{L} \in \Lambda_{k-1}$，$\mathrm{H}_1([\mathcal{L}]; \mathcal{O}_{[\mathcal{L}]}) = 0$（回想一下，$k<n$，因此 $[\mathcal{L}]$ 是维数至少为 2 的拓扑球面），周期消失条件自动成立。由此可知，$\xi = D\eta$，其中 $\eta \in E^{k-1}$ 定义良好。此外，根据 8.7，ξ 的互反律蕴含余循环条件，也蕴含类型为（m，$k-1$）且具有 $0<m<k-1$ 的 η 的互反律。同样，η 的周期消失条件自动成立，因此可以重复这一论证。我们得出结论：对于某个 $f \in \mathcal{V}_{\leqslant k}$，$\xi = D^k f$。□

9.3. **对 $\mathcal{V}_n$ 的第一种描述**。为了将 $\mathcal{V}_n$ 描述为 $\mathcal{F}_n$ 的一个向量子空间，我们需要使用周期消失条件。

定理。子空间 $\mathcal{V}_n \subset \mathcal{F}_n$ 恰好由定义在 $\Lambda_n^{\mathcal{O}}$ 上的交错函数组成，这些函数满足互反律以及周期消失条件。

证明。$\mathcal{V}_n$ 中的元素满足所有互反律和周期消失条件，这由 8.3 和 8.4 可知。另一方面，假设 $\xi \in \mathcal{V}_n$ 满足所有互反律和周期

消失条件。由 8.4，存在 $\eta \in E^{n-1}$ 使得 $\xi = D\eta$。此外，由 8.7，可以选择 η，使其既满足余循环条件，也满足所有类型的互反律（$k,\ n-1$），其中 $0 < k < n-1$。证明的其余部分与 9.2 相同；只需继续积分，直到得到满足 $D^n f = \xi$ 的 $f \in E^0$。□

伪仿射情形略有特殊之处：周期消失条件只对 $\mathcal{V}_n$ 有必要，对带有 $k < n$ 的 $\mathcal{V}_k$ 则不需要。另一方面，$\mathcal{V}_n$ 有一种不涉及周期消失条件的描述，如下所述。

9.4. **对 $\mathcal{V}_n$ 的另一种描述**。描述 $\mathcal{V}_n$ 的另一种方法如下。设 $\mathcal{F}_n^{\mathbf{c}}$（这里的 **c** 源自**"紧**致**"**）为 $\Lambda_n^{\mathbf{c}}$ 上所有交错函数构成的空间，其中 $\Lambda_n^{\mathbf{c}}$ 由所有定向旗 $\mathcal{L} \in \Lambda_n$ 组成，但不包括那些满足 $[\mathcal{L}] = \{\infty\}$ 的定向旗；也就是说，我们只考虑基于有限点的旗。显然，$\mathcal{F}_n^{\mathbf{c}}$ 在 Q 上的维数恰好等于满足 $[\mathcal{L}] \neq \{\infty\}$ 的旗 $\mathcal{L} \in \Lambda_n$ 的数量；称这类旗为有限旗标。存在一个自然的线性同态 $\rho^{\mathbf{c}} : \mathcal{F}_n \to \mathcal{F}_n^{\mathbf{c}}$，它将 $\Lambda_n^{\mathcal{O}}$ 上的函数限制到 $\Lambda_n^{\mathbf{c}}$。注意，$\rho^{\mathbf{c}}$ 是满射但不是单射。另一方面，$\rho^{\mathbf{c}}$ 在 $\mathcal{V}_n \subset \mathcal{F}_n$ 上是单射，因为对于满足 $[\mathcal{L}] = \{\infty\}$ 的旗 $\mathcal{L} \in \Lambda_n$，$\xi \in \mathcal{V}_n$ 的取值可以由 $\xi[\Gamma\mathcal{L} \cup \{a\}]$ 恢复，其中 a 遍历 $\mathcal{A}$ 在 $[\Gamma\mathcal{L}]$ 中的零维胞腔，并使用 $\Gamma\mathcal{L}$ 处的周期消失条件。因此，只需将 $\rho^{\mathbf{c}}\mathcal{V}_n$ 描述为 $\mathcal{F}_n^{\mathbf{c}}$ 的一个子集。

定理。子空间 $\rho^{\mathbf{c}}\mathcal{V}_n \subset \mathcal{F}_n^{\mathbf{c}}$ 由 $\Lambda_n^{\mathbf{c}}$ 上满足所有互反律的交错函数组成。

尽管从形式上看，互反律是为$\mathcal{F}_n$（或更一般地，为 E^n）中的元素定义的，但它们显然在 $\mathcal{F}_n^{\mathbf{c}}$中也有意义。

证明。设 $\xi^{\mathbf{c}} \in \mathcal{F}_n^{\mathbf{c}}$ 满足所有互反律。根据上文，存在唯一的 $\xi \in \mathcal{F}_n$，使得 $\rho^{\mathbf{c}}\xi = \xi^{\mathbf{c}}$，并且使 ξ满足周期消失条件。ξ 的互反律由 $\xi^{\mathbf{c}}$ 的互反律自动推出（包括旗 $\mathcal{L} \ni \{\infty\}$处的互反律；它们可通过对其他互反律求和得到）。根据 9.3，有 $\xi \in \mathcal{V}_n$，因此 $\xi^{\mathbf{c}} \in \rho^{\mathbf{c}}\mathcal{V}_n$。□

9.5. **多面体上的赋值**。现在我们施加限制：$\mathcal{A}$ 由实数集 $\mathbf{R}^n$ 中的仿射超平面组成，但不再假设 $\mathcal{A}$是有限的。第9.5节的目标是描述一个定义在 $\mathcal{A}$-多面体上的简单赋值空间，也就是说，定义在实数集 $\mathbf{R}^n$ 中所有凸多面体上的空间，这些多面体不一定有界，且其面都位于 $\mathcal{A}$中的超平面内。我们将注意力限于定义在 $\mathcal{A}$-多面体上的余简单简单赋值：

满足以下条件的简单赋值 μ：只要 P 包含一个维数为 >0的仿射子空间，就有 $\mu(P)=0$。令 $\mathcal{V}$ 为关于 $\mathcal{A}$的所有凸链构成的空间，也就是说，它是实数集 $\mathbb{R}^n$上所有在有限个 $\mathcal{A}$中的超平面之外局部常值的函数所构成的空间。这些函数被视为 $L^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{Q})$ 的元素；特别地，如果两个这样的函数仅在一个零测集上不同，就视为相同。于是，向量空间 $\mathcal{A}$ 由（不一定有界的）凸 $\mathcal{A}$-多面体的示性函数张成。空间 E^k、Leray 算子 $D: E^k \to E^{k+1}$、次数滤过 $(\mathcal{V}_{\leqslant k})_k$以及相应的商空间 $\mathcal{V}_k$，均按照第3.3–3.5节中的定义原样定义。此外，对每个 k，考虑由 $\mathcal{A}$中的定向旗上所有交错函数构成的空间 $\mathcal{F}_k^{\mathbf{c}}$；我们用上标 $\mathcal{F}_k^{\mathbf{c}}$ 强调，这里的旗是有限的（不包含 ∞）。空间 $\mathcal{V}_n$ 自然嵌入 $\mathcal{F}_n^{\mathbf{c}}$。注意，定义在 $\mathcal{A}$-多面体上的余简单简单赋值可与 $\mathcal{V}_n$上的线性泛函对应；因此，这类赋值构成的空间为 $\mathcal{V}_n^*$。首先，我们将 $\mathcal{V}_n$ 描述为 $\mathcal{F}_n^{\mathbf{c}}$的一个向量子空间。

定理。 $\mathcal{F}_n^{\mathbf{c}}$ 中的元素属于 $\mathcal{V}_n$，当且仅当它满足所有互反律。

证明。 由于 $\mathcal{F}_n^{\mathbf{c}}$ 中的元素具有有限支撑，只需假设 $\mathcal{A}$ 是有限的；在这种情况下，该陈述与 9.4 相同。□

与主定理的设定类似，第 4 节的方法现在推出了对 $\mathcal{V}_n^*$的如下刻画。

定理。 $\mathcal{A}$-多面体上的余简单简单赋值空间由与定向完备旗 $\mathcal{L}\in\Lambda_n^{\mathcal{O}}$ 相关的 *Hadwiger* 不变量 $\Upsilon_{\mathcal{L}}$ 生成。这些不变量之间的关系由互反律生成。

与前文一样，生成元和关系都允许取无限线性组合。

9.6. 多胞体上的赋值。 令 $\mathcal{A}$ 与 9.5 中相同，但现在考虑 $\mathcal{A}$-多胞体（=有界 $\mathcal{A}$-多面体）上的简单赋值。沿用 9.5 中的记号，用 $\mathcal{V}_{\mathbf{c}}$ 表示由 $\mathcal{A}$-多胞体的示性函数张成的 $\mathcal{V}$ 子空间。等价地，$\mathcal{V}_{\mathbf{c}}$ 由 $\mathcal{V}$中的所有紧支撑函数组成；更确切地说，是由具有紧本质支撑的函数组成（不计其在零测集上可能非零的取值）。

引理。 空间 $\mathcal{V}_{\mathbf{c}}\cap\mathcal{V}_{<n}$ 为零，因此，$\mathcal{V}_{\mathbf{c}}$ 嵌入 $\mathcal{V}_n$。
证明。 反设 $\alpha\in\mathcal{V}_{\mathbf{c}}\cap\mathcal{V}_{<n}$ 非零。我们还可以假设 $\mathcal{A}$ 是有限的，因为只需用到 $\mathcal{A}$ 中的有限多个超平面即可定义 α。只需证明 $D^n\alpha\neq 0$

从而与 $\alpha \in \mathcal{V}_{<n}$矛盾。将 α 表示为一个函数（仍记作同一符号），满足 $\{q \in \mathbf{R}^n \mid \alpha(q) \neq 0\}$ 开。于是，supp(α)是有限个凸 n-多面体的并。归纳地定义完备旗 $\mathcal{L} = (L_0 \supset \cdots \supset L_n)$以及一个（可能非凸的）多面体嵌套序列 $P_0 \supset \cdots \supset P_n$，使其满足 k。令 $L_0 = \mathbf{R}^n$ 且$P_0 = \operatorname{supp}(\alpha)$; 对于 $k > 0$，取 P_k 为 P_{k-1} 的一个面，并令 L_k 为 P_k的仿射包。对于由此定义的完备旗 $\mathcal{L}$， $D^n\alpha$ 在 $[e, \mathcal{L}]$处取非零值，其中 e 是以点 L_n为中心的 $\mathcal{A}$ 的对偶 n-胞腔。与 $\alpha \in \mathcal{V}_{<n}$矛盾。□

由于向量空间 $\mathcal{V}_{\mathbf{c}}$ 自然地包含于 $\mathcal{V}_n$中，因此也可将其视为 $\mathcal{F}_n^{\mathbf{c}}$的子空间。

定理。 子空间 $\mathcal{V}_{\mathbf{c}} \subset \mathcal{F}_n^{\mathbf{c}}$ 由互反律和周期消失条件给出。

证明。 考虑 $\alpha \in \mathcal{F}_n^{\mathbf{c}}$。由于只需有限多个超平面即可定义 α，我们不妨假设 $\mathcal{A}$ 是有限的。令 X 为球面 $\mathbf{S}^n = \mathbf{R}^n \cup \{\infty\}$；则 $\mathcal{A}$ 在 X 中定义了一个伪仿射拓扑配置，仍以同一符号 $\mathcal{A}$表示。将 $\mathcal{F}_n^{\mathbf{c}}$ 嵌入 $\mathcal{F}_n$，具体做法是：对每个 $f \in \mathcal{F}_n^{\mathbf{c}}$，将 f 在以 ∞ 为基点的任意完备旗上的值设为零。于是 $\mathcal{V}_{\mathbf{c}}$ 也嵌入 $\mathcal{F}_n$。根据 9.3，若 $\alpha \in \mathcal{V}_{\mathbf{c}}$，则 α 满足互反律和周期消失条件。现在假设 $\alpha \in \mathcal{F}_n^{\mathbf{c}}$ 满足互反律和周期消失条件。将 8.6 的积分映射应用 n 次于 α，便得到 $\mathcal{V}$的一个元素，这由 9.3 可知。此外，可以通过适当方式进行积分，使所得元素在无穷远处的某个邻域内为零（为此，只需取一个选择函数 ϕ，使得对每个 $\mathcal{L}$， $\phi(\mathcal{L})$ 都位于 $\mathcal{A}|_{[\mathcal{L}]}$的一个无界 dim$[\mathcal{L}]$-胞腔中）；于是它是 $\mathcal{V}_{\mathbf{c}}$ 中与 α对应的一个元素。□

当 $\mathcal{A}$ 由实数集 $\mathbf{R}^n$ 中的所有仿射超平面组成时，上述结果等价于 [6, 定理 3.5]。现在，第 4 节的方法给出了 $\operatorname{Val}(\mathcal{P}_{\mathcal{A}}; 0) = \mathcal{V}_{\mathbf{c}}^*$ 的描述。

定理。 简单赋值空间 $\operatorname{Val}(\mathcal{P}_{\mathcal{A}};0)$ 由 $\mathcal{A}$-多面体上的 *Hadwiger* 不变量生成，这些不变量 $\Upsilon_{\mathcal{L}}$ 与定向完备旗 $\mathcal{L} \in \Lambda_n^{\mathcal{O}}$相关联。这些不变量之间的关系由互反律和周期消失条件生成。

10. Toric and pseudotoric arrangements

回顾一下，整数格 $\mathbf{Z}^n$ 通过平移作用于仿射空间 $\mathbf{R}^n$ ： 给定 $v \in \mathbf{Z}^n$ 和 $q \in \mathbf{R}^n$，我们用 $q + v$ 表示将 q 沿向量 v进行平移所得的平行副本。$\mathbf{R}^n$ 中的有理超平面是

ˆ 定义上指一个仿射超平面 H，它与 $\mathbf{Z}^n \cap H$的仿射包重合；等价地说，$\mathbf{Z}^n \cap H$ 是 H中的一个格。有理超平面也可以刻画为在 Q 上定义的超平面。

10.1. **环面排列**。现在令 X 为实 n维环面 $\mathbf{T}^n = \mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$。记 $\mathrm{p} : \mathbf{R}^n \to X$ 为商投影。将 X 中的有理超平面定义为 $\mathbf{R}^n$中某个有理超平面在 p 下的像。注意，X 中的所有有理超平面都经过同一个特殊点o；对于任意 $v \in \mathbf{Z}^n$，该点都与 $\mathrm{p}(v)$ 重合。若 X 中的有理超平面有限集 $\mathcal{A}$ 满足：对于 $X \setminus \bigcup \mathcal{A}$的每个连通分支 U，$\mathrm{p}^{-1}(U)$ 的每个连通分支都有界（因此它是 $\mathbf{R}^n$中某个凸多胞体的相对内部），则称其为环面超平面排列。

ˆ ˆ ˆ 令 $\mathcal{A}$ 为所有满足 $\mathrm{p}(H) \in \hat{\mathcal{A}}$ 的仿射超平面 $H \subset \mathbf{R}^n$ 的集合。那么 $\mathcal{A}$ 不是有限的，而是局部有限的，也就是说，$\mathbf{R}^n$ 的每个紧子集只与 $\mathcal{A}$中的有限多个超平面相交。通常，符号上方的帽子表示将由这些符号表示的几何对象从X 提升到 $\mathbf{R}^n$。注意，按包含关系极小的 $\mathcal{A}$-多面体，恰好是 $\mathrm{p}^{-1}(U)$ 的连通分支，其中 U 遍历 $\mathcal{A}$的各个区域。

10.2. **伪环面排列**。下面的概念推广了环面排列的概念。设 $(X, \mathcal{A})$ 是一个拓扑排列，使得 $\mathcal{A}$ 的所有平坦都同胚于紧环面 $\mathbf{R}^m/\mathbf{Z}^m$。特别地，由于 X 是一个平坦，它也可视为维数为 n 的环面。称 $\mathcal{A}$ 为伪环面排列。尽管对我们而言最有意义的情形是真正的环面排列，但有许多伪环面排列并非环面排列，即使只考虑同胚意义下也是如此。

从现在起，我们假设 $(X, \mathcal{A})$ 是伪环面的。所有论证都是拓扑性的；因此，假设 $\mathcal{A}$ 是真正的环面排列并不会带来任何实质性的简化。为一般拓扑排列引入的记号 $\mathcal{V}_k$、$\mathcal{F}_k$、E^k 等，同样适用于 X。

10.3. **空间** $\mathcal{V}_1$。回顾一下，$\mathcal{F}_1$ 自然是 E^1 的一个子空间；此外，对于每个 $\xi \in \mathcal{F}_1$，$\iota^*\xi \in C^1$ 自动是一个余循环；参见 7.7。显然，当且仅当 $\iota^*\xi$ 是一个余边界时，$\xi \in \mathcal{V}_1$ 成立；而后者等价于说 ξ 满足周期消失条件，参见 8.4。

引理。$\mathcal{F}_1$ 中的元素表示 $\mathrm{H}^1(X;\mathbb{Q})$中的所有上同调类。换言之，对于任意余循环 $\eta \in E^1$，都存在 $\xi \in \mathcal{F}_1$，使得$\eta + \xi$ 满足周期消失条件。

证明。 首先，考虑来自 $\mathcal{A}$的一个余定向超平面 H 。 H的上同调类 $[H]$ ，也就是 H的基本同调类的庞加莱对偶，由一个函数 $\xi_H \in \mathcal{F}_1$ 表示：该函数在 H 上取值为 ± 1（正负号取决于余定向），在 $\mathcal{A}$中的其他所有超平面上取值为 0。现在只需证明， $\mathcal{A}$ 中的超平面的上同调类生成 $\mathrm{H}^1(X)$。对偶地，需要证明，与所有 $H \in \mathcal{A}$ 都正交的第一同调类必然平凡。我们现在利用 X 是一个环面这一事实：空间 $\mathrm{H}_1(X)$ 同构于 $\pi_1(X, b) \otimes \mathbb{Q}$，其中 b 是位于 $\bigcup \mathcal{A}$之外的某个基点，例如可以取 $\mathcal{A}$中任意一个 n-胞腔的中心。考虑一条以 b 为基点的分段线性闭路 γ ，它与 $\mathcal{A}$ 中的所有超平面横截相交，且与其中任一超平面的交数均为零。我们的目标是证明，此时 γ 必然平凡。

设 $\tilde{\gamma}$ 是路径 γ 到万有覆盖空间 $\mathbb{R}^n$ of$X$ 的一个提升，也就是说，$\mathrm{p} \circ \tilde{\gamma} = \gamma$。固定一个超平面 $H \in \mathcal{A}$ ，并为其选定某个余定向。 γ 与 H 的交点总数（按符号计数）等于零。容易推得，对于 $\mathrm{p}^{-1}(H)$ 的每个连通分支 $\hat{}H$ ， $\tilde{\gamma}$ 的两个端点位于 $\hat{}H$ 的同一侧。由于这对每个 $H \in \mathcal{A}$ 都成立， $\tilde{\gamma}$ 的两个端点 $\hat{}\,\hat{}$ 属于同一个按包含关系极小的 $\mathcal{A}$-多面体 U，因此它在 $\mathcal{A}$ 中投影为一个胞腔 $U = \mathrm{p}(U)$。但是，p 在 $\hat{}U$ 上是一一对应的，而 $\tilde{\gamma}$ 的两个端点映射到同一个点 $b \in U$。因此， $\tilde{\gamma}$ 的两个端点重合，且 $\tilde{\gamma}$ 是一个环路；这意味着 γ 是平凡的，证毕。□

现在我们可以计算 $\mathcal{V}_1$的维数。

推论。 如果 N 是 $\mathcal{A}$的基数，那么 维数 $\mathcal{V}_1 = N - n$。

证明。 考虑一个从 $\mathcal{F}_1$ 到 $\mathrm{H}^1(X)$的线性映射，它将每个 $\xi \in \mathcal{F}_1$映到 1-余循环 $\iota^* \xi$的上同调类；根据上述定理，该映射是满射。根据 8.4，该映射的核与 $\mathcal{V}_1$一致。根据一般的线性代数，核的维数等于 $\mathcal{F}_1$的维数N 减去像的维数 n。□

特别地，对于每个伪拟托里排列 $\mathcal{A}$，我们必须有 $N \geqslant n$。这是因为，任意数量为 $N < n$ 的超平面都不足以将 X 分割成胞腔，也就是说，不足以生成 $\mathrm{H}^1(X)$。

10.4. 一个抽象引理。 考虑一个有限指标集 Λ 和一个 Λ-分次 $\mathbb{Q}$-向量空间 $V := \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$。形如$\sum_{\lambda \in \Lambda} c_\lambda v_\lambda = 0$ 的线性关系称为 Λ-关系。这里， $v_\lambda \in V_\lambda$ 是满足给定关系的向量 $v \in V$ 的分量，而 $c_\lambda \in \mathbb{Q}$ 是一些系数。注意，谈论相同的

Λ-关系在不同的 Λ-分次向量空间中也是有意义的。现在考虑两个 Λ-分次向量空间 U 和 V。将线性映射 $f\colon U \to V$ 称为 Λ-对角线性映射，如果对每个 $\lambda \in \Lambda$，都有 $f(U_\lambda) \subset V_\lambda$。容易看出，Λ-对角线性映射是满射，当且仅当每个限制 $f_\lambda := f|_{U_\lambda}$也都是满射。

引理。设 $f : U \to V$ 是两个 Λ 分次向量空间 U 和 V 之间的 Λ-对角线性映射。取满足给定一组 Λ-关系的 $v \in f(U)$。那么存在一个向量 $u \in U$，满足相同的 Λ-关系，且使得 $f(u) = v$。

证明。首先，给定的一组 Λ-关系可以关于 Λ 的一个子集求解，也就是说，给定的关系等价于那些用 $u_{\lambda'}$ 表示 $\lambda' \in \Lambda'$（通过 $u_{\lambda''}$ 表示 $\lambda'' \in \Lambda''$）的关系，其中 $\Lambda = \Lambda' \sqcup \Lambda''$ 是一个不交并表示。换言之，如果对所有 $\lambda'' \in \Lambda''$ 任意选取向量 $u_{\lambda''} \in U_{\lambda''}$，那么对所有 $\lambda' \in \Lambda'$，都可以利用给定的 Λ-关系唯一确定向量 $u_{\lambda'}$。其次，对每个 $\lambda'' \in \Lambda''$，选取 $u_{\lambda''}$，使得 $f(u_{\lambda''}) = v_{\lambda''}$，其余情况下任意选取。利用给定的 Λ-关系，恢复所有 $\lambda' \in \Lambda'$ 对应的 $u_{\lambda'}$。由于 $f(u)$ 满足相同的 Λ-关系，因此对于所有 $\lambda' \in \Lambda'$，有 $f(u)_{\lambda'} = v_{\lambda'}$。□

刚刚证明的引理将应用于 $C^k_{(l)}$ 中的上循环子空间；该空间是一个带有 $\Lambda = \Lambda_l$ 的 Λ-分次向量空间。它还将应用于将每个上循环映射到其上同调类的 Λ-对角线性映射。

10.5. 对 $\mathcal{V}_k$ 的描述。回到一个伪环面排列 $(X, \mathcal{A})$。下面，我们描述次数滤过的商空间 $\mathcal{V}_k$。回想一下，$\mathcal{V}_k$ 可视为 $\mathcal{F}_k$ 的一个向量子空间；$\mathcal{F}_k$ 是定义在定向旗集合 $\Lambda^{\mathcal{O}}_k$ 上的所有交错函数构成的空间。在下述定理中，周期消失条件按 8.4 的含义理解（这与 3.7 相容）。

定理。子空间 $\mathcal{V}_k \subset \mathcal{F}_k$ 由定义在 $\Lambda^{\mathcal{O}}_k$ 上、满足互反律和周期消失条件的交错函数构成。

证明。给定一个满足互反律和周期消失条件的元素 $\xi \in \mathcal{F}_k$，我们需要能够按需要对 ξ进行多次（即 k 次）“积分”，从而得到 E^0中的一个元素。由于周期消失条件，第一次积分是可行的：存在某个 $\eta \in E^{k-1}$，使得 $\xi = D\eta$。此外，根据 8.7，可以假设 η 满足类型 $(m,\ k-1)$ 的所有互反律（其中 $m < k-1$），以及余循环条件。然而，一个问题是，η不一定满足周期消失条件。

考虑 $\zeta := \iota^* \eta \in C^{k-1}{}_{(k-2)}$。对于任意旗 $\mathcal{L} \in \Lambda_{k-2}$，令 $\zeta_{\mathcal{L}}$ 为 ζ 的$\mathcal{L}$-连通分支；它是 $C^{k-1}_{\mathcal{L}}$ 中的一个余循环，在此处被视为 $C^1([\mathcal{L}]; \mathcal{O}_{[\mathcal{L}]})$ 中的一个 1-余循环。用 $[\zeta_{\mathcal{L}}] \in \mathrm{H}^1([\mathcal{L}]; \mathcal{O}_{[\mathcal{L}]})$ 表示 $\zeta_{\mathcal{L}}$的上同调类。根据 10.3，存在一个 1-余循环 $\zeta'_{\mathcal{L}}$，它在 $[\mathcal{L}]$ 中的所有维数为 $k-1$ 的平坦上均为常值，并且代表同一个上同调类 $[\zeta_{\mathcal{L}}]$。现在，元素 $\zeta'' := \bigoplus_{\mathcal{L}} (\zeta_{\mathcal{L}} - \zeta'_{\mathcal{L}})$ 满足周期消失条件。另一方面，对于“不恰当”的 $\zeta'_{\mathcal{L}}$取值，该元素可能不满足互反律。根据 10.4，可以选取一个“恰当”的值，使其满足相关的互反律。令 $\eta' := \iota^{*-1}\zeta''$，便得到元素 $\eta' \in E^{k-1}$，其中 $\xi = D\eta'$，且 η' 满足周期消失条件以及所有类型 $(m,\ k-1)$（其中 $0 < m < k-1$）的互反律。后续的积分步骤类似。

由上述积分过程，可得到一个满足 $\xi = D^k f$的 $f \in \mathcal{V}$，这意味着 $\xi \in \mathcal{V}_k$，正如所需。□

请注意，在伪环面情形下，也可以对 $\mathcal{V}_n$ 作出类似于 9.4 的另一种描述；这种描述考虑 Λ_n 的所有旗，但排除以 $\{o\}$ 为基平坦的旗，并且无需满足周期消失条件。由于 $k < n$仍然需要周期消失条件，因此这种替代描述不如伪仿射情形中的描述有用。

10.6. 主定理的证明。现在令 $\mathcal{A}$ 为 T^n 中一个任意的有理超平面集合，其中至少包含一组交集为零维的 n元超平面。现在，记号 $\mathcal{V}_k$、 $\mathcal{F}_k$等均指这个可能无限的集合 $\mathcal{A}$。由于 $\mathcal{V}_k$ 的每个元素都由 $\mathcal{A}$中的有限个超平面定义，嵌入 $\mathcal{V}_k \subset \mathcal{F}_k$ 的描述与 10.5 中相同。换言之，我们得到 3.8 的定理。根据第 4 节的结果，这意味着主定理。

References

[1] J.-L. Brylinski 和 D. A. McLaughlin。多维互反律。 *Jour-nal f¨ur die reine und angewandte Mathematik*, 475：125–148，1996。[2] F. Callegaro、M. D’Adderio、E. Delucchi、L. Migliorini 和 R. Pagaria。环面配置上同调代数的 Orlik–Solomon 型表示。美国数学会汇刊，373(3)：1909–1940，2020。[3] C. De Concini 和 C. Procesi。论环面配置的几何。 *Trans-formation Groups*，10：387–422，2005。.[4]M. Dehn。论体积。数学年刊，55(3)：465–478，1901。[5] J. L. Dupont。多胞体代数与旗复形的同调。大阪数学杂志，19(1)：599–641，1982。

[6]J. L. Dupont。《剪刀合同、群同调与特征类》，第1卷。World Scientific，2001。[7] W. Fulton 和 B. Sturmfels。环面簇上的交理论。Topology，36(2)：335–353，1997。[8] H. Groemer。凸集类上可加泛函的延拓。Pacific Journal of Mathematics，75(2)：397–410，1978。[9] H. Hadwiger。关于体积、表面积和等周学的讲义。Springer- Verlag，2013。[10] H. Hadwiger 和 P. Glur。平面多边形的分割等价。Elemente der Mathematik，6：97–106，1951年。[11] A. Hatcher。《代数拓扑》。Cambridge University Press，2002。[12] B. Jessen 和 A. Thorup。仿射空间中的多胞体代数。Mathematica Scandinavica，43(2)：211–240，1978。[13] Børge Jessen。多面体代数与Dehn–Sydler定理。Mathematica Scandinavica，22(2)：241–256，1968。[14]A. Khovanskii。对数泛函与互反律。Contemporary Mathematics，460：221–230，2008。[15] K. Kusejko 和 L. Parapatits。平移等分解的赋值理论方法。Advances in Mathematics，297：174–195，2016。[16] V. Lomadze。论代数几何中的留数。Mathematics of The USSR-izvestiya，19：495–520，1982。[17] P. McMullen。有理多胞体上的格不变赋值。《数学档案》，31(1)：509–516，1978。[18] P. McMullen。多胞体代数。Advances in Mathematics，78(1)：76–130，1989。[19] P. McMullen。多胞体代数中的分离。Contributions to Algebra and Geometry，34(1)：15–30，1993。[20]P. McMullen。格多胞体上的赋值。Advances in Mathematics，220(1)：303–323，2009。[21] P. McMullen 和 R. Schneider。凸体上的赋值。载于《凸性及其应用》，第170–247页。Springer，1983。[22]R. Morelli。平移剪切合同。Advances in Mathematics，100(1)：1–27，1993。[23] A. N. Parshin。论二维概形的算术。I. 分布与留数。Mathematics of the USSR-Izvestiya，10(4)：695，1976年8月。[24] M. A. Perles 和 G. T. Sallee。胞腔复形、赋值与欧拉关系。Canadian Journal of Mathematics，22(2)：235–241，1970。[25] A. V. Pukhlikov 和 A. G. Khovanskii。虚多面体的有限可加测度。Algebra i Analiz，4(2)：161–185，1992。[26] C. Sah。《希尔伯特第三问题：剪刀合同》。数学研究笔记。Pitman，1979。[27] V. V. Schechtman 和 A. N. Varchenko。超平面配置与李代数同调。Inventiones mathematicae，106(1)：139–194，1991。[28] A. N. Varchenko。实空间中仿射超平面配置的组合学与拓扑。Funktsional. Anal. i Prilozhen，21(1)：11–22，1987。[29] A. N. Varchenko 和 I. M. Gel’fand。超平面构型的Heaviside函数。Functional Analysis and its Applications，21(4)：255–270，1987。

[30] W. Volland. 欧几里得空间中可加的 Eipolyeder 泛函的延拓定理。《数学档案》，8(2):144–149，1957。[31] I. Zakharevich. 关于剪刀全等的观点。《美国数学会通报》，53(2):269–294，2016。[32] V. B.Zylev. 关于两个可等补多面体的等分可分性。苏联科学院通报，161(3):515–516，1965。