arXiv:2601.03183v1 [math.MG] 6 Jan 2026

平坦单形与相切多胞体

Antoine Deza

McMaster University, Hamilton, Ontario, Canada
e-mail: deza@mcmaster.ca

Lionel Pournin

Université Paris 13, Villetaneuse, France
e-mail: lionel.pournin@univ-paris13.fr

摘要

我们研究包含在超立方体 $[0,k]^d$中的格单纯形可以有多平坦。这个问题与相切多胞体的概念有关：包含在超立方体 $[0,k]^d$ 中的两个格多胞体若互不相交，且它们之间的距离尽可能小，则称它们相切。我们证明，当 P 包含在立方体 $[0,k]^3$中时，它到同一立方体内一个不包含 P 的格三角形的最小可能距离为

$$\frac{1}{\sqrt{3k^4-4k^3+4k^2-2k+1}}$$

当 k 至少为 2 时。我们还改进了 d 至少为 4 且 k 至少为 2 时相切多胞体距离的已知下界。

1. 引言

考虑一个包含于 $\mathbb{R}^d$中的满维单纯形 S。我们称 S 的两个真面 P 和 Q 为对向的，当且仅当 P 的顶点集与 Q 的顶点集构成 S的顶点集的一个划分。我们关心的是，在 S 为格点（d,k）单纯形这一约束下， P 与 Q之间可以有多近，或者等价地， S 可以有多扁平。这里以及下文中，格点（d,k）多胞体指包含于 $[0,k]^d$ 中且顶点为格点的多胞体。具体而言，我们将研究格点（d,k）单纯形的一个 i维面与其对向的（$d-i-1$）维面之间可能达到的最小距离ε_i（d,k）。关于两个多胞体之间可以有多近的类似度量

d	k			
	1	2	3	$k \geq 4$
2	$\sqrt{2}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{13}$	$\sqrt{(k-1)^2+k^2}$
3	$\sqrt{6}$	$5\sqrt{2}$	$\sqrt{299}$	$\sqrt{2(2k^2-4k+5)(2k^2-2k+1)}$
4	$3\sqrt{2}$	$2\sqrt{113}$	$11\sqrt{71}$	
5	$\sqrt{58}$			
6	$\sqrt{202}$			

表1. $1/\varepsilon(d,\ k)$ 的已知取值。

也出现在优化 [2, 7, 8, 9, 10, 11]和组合学 [1, 6]中。这个量也与相切多胞体有关：我们用 ε（d, k）表示两个不相交的格点（d, k）多胞体之间可能达到的最小距离，并称距离为 ε（d, k）的两个格点（d, k）多胞体为相切的，此处沿用 [3, 4, 5]中的记号和术语。事实上，

$$\varepsilon(d,k) = \min\left\{\varepsilon_i(d,k) : 0 \leq i \leq \frac{d-1}{2}\right\}. \tag{1}$$

文献 [5] 已证明了 $\varepsilon(d,k)$ 的一般上界和下界，并在文献 [3, 4] 中确定了 $\varepsilon(2,k)$ 和 $\varepsilon(3,k)$ 的表达式。此外，一种计算机辅助策略在 d 和 k 相当小时，得以计算出 $\varepsilon(d,k)$ 的其他取值 [4]。迄今已知的 $\varepsilon(d,k)$ 取值列于表1中。文献 [4] 证明了 $\varepsilon(2,k)$ 始终是一个点与一条线段之间的距离。换言之，它始终等于 $\varepsilon_0(2,k)$。注意，当 d 等于 2 时，$\varepsilon_i(2,k)$ 不可能有其他取值，因为 $\varepsilon_0(2,k)$ 与 $\varepsilon_1(2,k)$ 重合（一般而言，$\varepsilon_i(d,k)$ 与 $\varepsilon_{d-i-1}(d,k)$ 相等）。然而，当 d 至少为 3 时，文献 [3, 4] 证明，$\varepsilon(d,k)$ 的所有已知取值均等于 $\varepsilon_1(d,k)$。在这些情况下，$\varepsilon_0(d,k)$ 尚未知晓，即使在 $\varepsilon(d,k)$ 本身已知的情形下也是如此（例外情况是 $\varepsilon_0(d,1)$，它始终等于 $1/\sqrt{d}$，见 [5, 引理 2.4]）。本文的首要目的是给出当 d 至少为 3 且 k 至少为 2 时，与 $\varepsilon(d,k)$ 的每个已知取值相对应的 $\varepsilon_0(d,k)$ 的取值。具体而言，我们证明如下结果。

THEOREM 1.1: 如果 k 至少为2，那么

$$\varepsilon_0(3,k) = \frac{1}{\sqrt{3k^4-4k^3+4k^2-2k+1}}$$

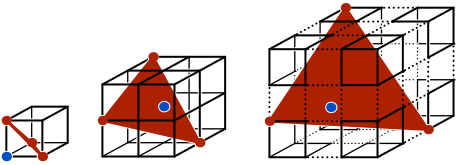


图1. 一个格点和一个格三角形，分别在 k 等于1、2和至少3时（从左到右）达到$\varepsilon_0(3,\ k)$。

并且在对称性意义下，该距离唯一地实现于点$(1,\ 1,1)$与顶点为$(0,\ 0,\ 1)$、$(k,\ k-1,\ 0)$和$(0,\ k,\ k)$的三角形之间

当 d 至少为4时，利用 [4]中的计算策略，可以得到与已知 $\varepsilon(d,\ k)$值相对应的 $\varepsilon_i(d,\ k)$值。表2和表3列出了迄今已知的所有 $\varepsilon_0(d,\ k)$和 $\varepsilon_i(d,\ 1)$值，其中粗体条目对应的是我们首次报告的值。

我们将从不同的视角考察格（d,k）单纯形有多扁平：考虑一个 d 维格（d,k）单纯形的 i 维面的仿射包与其对面（$d-i-1$）维面的仿射包之间可能的最小距离 $\varepsilon_i^u(d,k)$，其中指数 u表示无界。Ronald Graham 和 Neil Sloane [6] 以及 Noga Alon 和 V˘an V˘u [1] 研究过 $\varepsilon_0^u(d,1)$，并证明

$$\frac{2^{d-1}}{\sqrt{d}^{d+3}} \le \varepsilon_0^u(d,1) \le \frac{4^{d+o(d)}}{\sqrt{d}^{d}}.$$

d	k			
	1	2	3	$k \ge 4$
2	$\sqrt{2}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{13}$	$\sqrt{(k-1)^2+k^2}$
3	$\sqrt{3}$	$\boldsymbol{\sqrt{29}}$	$\boldsymbol{\sqrt{166}}$	$\boldsymbol{\sqrt{3k^4-4k^3+4k^2-2k+1}}$
4	2	$\boldsymbol{\sqrt{209}}$	$\boldsymbol{\sqrt{3022}}$	
⋮	⋮			
d	$\sqrt{d}$			

表2. 已知的 $1/\varepsilon_0(d,\ k)$值。

d	i		
	0	1	2
2	$\sqrt{2}$		
3	$\sqrt{3}$	$\sqrt{6}$	
4	2	$3\sqrt{2}$	
5	$\sqrt{5}$	$\sqrt{58}$	$\boldsymbol{\sqrt{55}}$
6	$\sqrt{6}$	$\sqrt{202}$	$\boldsymbol{\sqrt{199}}$

表3。已知的 $1/\varepsilon_i(d,\ 1)$ 的值。

类比于 $\varepsilon_i(d,k)$，我们将记作

$$\varepsilon^u(d,k)=\min\left\{\varepsilon_i^u(d,k):0\le i\le\frac{d-1}{2}\right\}. \tag{2}$$

首先要指出，$\varepsilon(d,\ k)$ 的所有已知值都与 $\varepsilon^u(d,\ k)$ 相同：表1中报告的 $\varepsilon(d,\ k)$ 所有值的计算策略是先计算 $\varepsilon^u(d,\ k)$，以便仅处理仿射包（而非凸包）来简化论证，然后注意到一对明确给出的不相交格点 $(d,\ k)$-多胞体 P 和 Q 满足

$$d(P,Q)=\varepsilon^u(d,k).$$

更准确地说，[4] 中证明了，对于所有正的 k，

$$\varepsilon(2,k)=\varepsilon_0(2,k)=\varepsilon_0^u(2,k)$$

并且在 [3] 中，对于所有正的 k，

$$\varepsilon(3,k)=\varepsilon_1(3,k)=\varepsilon_1^u(3,k).$$

d	k		
	1	2	3
4	$\boldsymbol{\sqrt{7}}$	$\boldsymbol{\sqrt{209}}$	$\boldsymbol{\sqrt{3142}}$
5	$\boldsymbol{\sqrt{19}}$		
6	$\boldsymbol{\sqrt{59}}$		

表4。已知的 $1/\varepsilon_0^u(d,\ k)$ 的值。

我们将在计算 $\varepsilon_0(3,k)$ 时看到，对于所有正的 k,

$$\varepsilon_0(3,k)=\varepsilon_0^u(3,k).$$

当 d 至少为 4 时，使用 [4] 中的计算机辅助策略计算 $\varepsilon_i^u(d,k)$，结果表明 $\varepsilon_i(d,k)$与 $\varepsilon_i^u(d,k)$并不总是相等。更确切地说，除$\varepsilon_0^u(d,1)$（当$4\le d\le 6$时）和 $\varepsilon_0^u(4,3)$之外，所有已知的 $\varepsilon_i^u(d,k)$值都等于 $\varepsilon_i(d,k)$。当 d至少为 4 时，已知的 $\varepsilon_0^u(d,k)$值列于表4中（表4中的条目以粗体标出，以说明这些值均为首次报告）。值得注意的是，当 d至少为 4 时， $\varepsilon_0(d,1)$大于 $\varepsilon_0^u(d,1)$。我们给出了任意 d和 k下$\varepsilon^u(d,k)$的一个下界，这改进了 [5]中定理1.1和定理2.3所给出的 $\varepsilon(d,k)$下界。我们还重新得到了 Ronald Graham 和 Neil Sloane 给出的$\varepsilon_0^u(d,1)$下界，并略微改进了它 [6]。

Theorem 1.2: 对于每个正整数 d,

$$\varepsilon_0^u(d,1)\ge\frac{2^{d-1}}{\sqrt{d}^{d+1}}$$

对于任意正整数 d和 k,

$$\varepsilon^u(d,k)\ge\frac{1}{k^{d-1}\sqrt{d}^{d}}.$$

本文的组织结构如下。我们将 $\varepsilon_i(d,\ k)$中若干已在 $[3,\ 4,\ 5]$ 针对 $\varepsilon(d,\ k)$陈述的结果加以推广，并在第 2 节证明 (1)。随后，我们在第3节证明定理1.2，并在第4节和第5节证明定理 1.1。

2. $\varepsilon_i(d,\ k)$ 和 $\varepsilon_i^u(d,\ k)$的若干性质

由 [5, 定理 5.1]， $\varepsilon(d,\ k)$ 是 d 的递减函数——这里指严格递减——对所有固定的 k 均如此。我们首先将这一性质推广到 $\varepsilon_i(d,\ k)$

Theorem 2.1: 对于任意正整数 k 和非负整数 i， $\varepsilon_i(d,\ k)$、$\varepsilon_i^u(d,\ k)$以及 $\varepsilon^u(d,\ k)$ 都是 d 的递减函数。

证明。考虑格（$d,\ k$）单纯形 S 的两个相对面 P 和 Q，并用 i 表示 P的维数。将 $\mathbb{R}^d$ 视为由前 d 个坐标张成的 $\mathbb{R}^{d+1}$ 超平面。设 v 是 P 的一个顶点，并考虑点 $\tilde{v}$: 它在 $\mathbb{R}^d$ 上的正交投影为 v，且最后一个坐标等于 1。 v 和 Q 的凸包是一个（$d-i$）维格

˜ $(d+1,\ k)$ 单纯形，与 P不相交，我们将其记为 Q。比较˜ P 与 Q 之间的距离和 P 与 Q之间的距离。

设 p 是 P 中的一个点，q 是 Q 中的一个点，使得 p 与 q 之间的距离等于 P 与 Q 之间的距离。取一个满足 $0 \leq \lambda \leq 1$ 的实数 λ，并考虑以下两点

$$\begin{cases} x = \lambda v + (1-\lambda)p, \\ y = \lambda \tilde{v} + (1-\lambda)q. \end{cases}$$

˜ 根据凸性，x 属于 P，且 y 属于 Q。特别地，

$$d(P, \tilde{Q}) \leq d(x, y). \tag{3}$$

由于向量 $\tilde{v} - v$ 和 $q - p$ 正交，根据勾股定理可得

$$d(x,y)^2 = \lambda^2 + (1-\lambda)^2 d(p,q)^2$$

因此，

$$\frac{\partial d(x,y)^2}{\partial \lambda} = 2\lambda\big(1 + d(p,q)^2\big) - 2d(p,q)^2.$$

因此，x 与 y 之间的距离是 λ 的递减函数，当

$$0 \leq \lambda < \frac{d(p,q)^2}{1 + d(p,q)^2}. \tag{4}$$

由于当λ 等于 0 时，x 与 y 之间的距离至少等于 p 与 q 之间的距离，因此对于满足 (4) 的任意正 λ，x 与 y 之间的距离小于 P 与 Q之间的距离。结合 (3) 得到

$$d(P, \tilde{Q}) < d(P, Q).$$

注意，重复这一论证，令 p 和 q 分别为 P 的仿射包中的一点和 Q 的仿射包中的一点，且两点之间的距离等于这两个仿射包之间的距离，可得

$$d\big(\mathrm{aff}(P), \mathrm{aff}(\tilde{Q})\big) < d\big(\mathrm{aff}(P), \mathrm{aff}(Q)\big).$$

˜根据构造，P和 Q 是一个（$d+1$）维格点（$d+1, k$）单纯形的相对面。因此，选择 P和 Q 使得它们之间的距离等于 ε_i（d, k），可得

$$\varepsilon_i(d+1, k) < \varepsilon_i(d, k)$$

并选择它们，使其仿射包之间的距离为 $\varepsilon_i(d, k)$，可得

$$\varepsilon_i^u(d+1, k) < \varepsilon_i^u(d, k).$$

由后一个不等式立即可知，对于每个固定的 i 和 k， $\varepsilon^u(d,k)$ 是关于 d 的递减函数，正如所需。 ∎

定理 2.1 所述性质有如下推论。

注 *2.2*： 考虑两个正整数 d 和 k 以及一个满足$0 \le i < d$的整数 i 。回顾一下，$\varepsilon_i(d,\ k)$与 $\varepsilon_{d-i-1}(d,\ k)$一致。因此

$$\varepsilon_i(d,k) = \varepsilon_{d-i-1}(d,k) < \varepsilon_{d-i-1}(d+1,k) = \varepsilon_{i+1}(d+1,k)$$

现在陈述定理 2.1（以及注 2.2）的一个推论，稍后将用它来建立 $\varepsilon_0(3,\ k)$ 的表达式。

Corollary 2.3: 考虑一个 d维格点(d, k)单纯形的两个相对面 P和 Q，其中 P 的维数为 i。如果

$$d(P,Q) = \varepsilon_i(d,k)$$

then

$$d(P,Q) = d\big(\mathrm{aff}(P), \mathrm{aff}(Q)\big).$$

证明。假设 P与 Q 之间的距离等于 $\varepsilon_i(d,\ k)$，并反设该距离小于 P与 Q 的仿射包之间的距离。在这种情况下， P与 Q 之间的距离必定是 P的一个面 F与 Q 的一个面 G 之间的距离，并且满足以下条件之一： F是（$i-1$）维的且 G 等于 Q，或者 F等于 P且 G 是（$d-i-2$）维的。特别地，存在 $\mathbb{R}^d$ 的一个超平面 H，它包含 F和 G。记 a 为一个与 H正交的非零向量。由于 a 非零，该向量的坐标不可能全为零；不失一般性，我们可以假设 a_d 非零，必要时只需对 $\mathbb{R}^d$的坐标进行置换，因为这不会改变 P与 Q之间的距离。

现在将 $\mathbb{R}^{d-1}$与由 $\mathbb{R}^d$ 的前 $d-1$个坐标张成的超平面等同，并用 π 表示从 $\mathbb{R}^d$ 到 $\mathbb{R}^{d-1}$的正交投影。由于 a_d 非零， π 诱导出从 H 到 $\mathbb{R}^{d-1}$的双射。此外，该双射将包含在 H中的格点 $(d,\ k)$-多胞体映为格点 $(d-1,\ k)$-多胞体。回想一下， P与 Q 之间的距离等于 F与 G之间的距离。由于 π 是 1-利普希茨映射，因此

$$d\big(\pi(F), \pi(G)\big) \le \varepsilon_i(d,k). \tag{5}$$

根据构造， $\pi(F)$ 和 $\pi(G)$ 是一个 $(d-1)$ 维格点 $(d-1,\ k)$-单纯形的两个相对面，其中 $\pi(F)$ 的维数为 i 或 $(i-1)$。若 $\pi(F)$ 的维数为 i，则由 (5) 可知，$\varepsilon_i(d-1,\ k)$ 至多为 $\varepsilon_i(d,\ k)$，这与定理 2.1 矛盾；若 $\pi(F)$ 的维数为 $(i-1)$，则 (5) 意味着$\varepsilon_{i-1}(d-1,\ k)$ 至多为 $\varepsilon_i(d,\ k)$，这与注 2.2 矛盾。 ∎

注 *2.4*：对于固定的 d 和 k，[4] 中提出的计算过程就是穷举所有可能的配对 P 和 Q，并计算它们的仿射包之间的距离。因此，它实际计算的是 $\varepsilon_i^u(d,\ k)$。然而，[3, 4, 5] 中研究的量是 $\varepsilon(d,\ k)$。事实证明，对于迄今为止考察的所有 d 和 k 的取值，$\varepsilon(d,\ k)$ 都与 $\varepsilon^u(d,\ k)$ 相同。实际上，对于这些 d 和 k 的取值，总存在一对 P 和 Q 满足

$$d(P,Q) = d\big(\mathrm{aff}(P), \mathrm{aff}(Q)\big) = \varepsilon^u(d,k)$$

这证明了 $\varepsilon(d,\ k)$ 与 $\varepsilon^u(d,\ k)$ 相同。正如我们在引言中提到的，这一观察并不适用于 $\varepsilon_i(d,\ k)$ 和 $\varepsilon_i^u(d,\ k)$。然而，由推论 2.3 可知，[4] 中的穷举枚举过程在此情形下仍可用于计算 $\varepsilon_i(d,\ k)$：只需在该过程中检查所考察的一对 P 和 Q 之间的距离是否与其仿射包之间的距离相同，并使用 [4, 注 2。

现在回顾一下，$\varepsilon(d,\ k)$按照 [5] 的定义，是两个不相交的格点（$d,\ k$）-多胞体之间可能达到的最小距离。然而，在引言中，我们将 $\varepsilon_i(d,\ k)$定义为一个 d维格点（$d,\ k$）-单纯形的i维面与其相对的（$d-i-1$）维面之间可能达到的最小距离。单纯形的相对面必然不相交，但反过来却不成立，因此（1）并非显然成立。[5] 中的定理 5.2 对证明（1）大有助益。事实上，该定理指出，$\varepsilon(d,\ k)$可由两个格点（$d,\ k$）-单纯形 P和 Q之间的距离取得，且它们的维数之和为 $d-1$。因此，只需证明 P 和 Q 是某个单纯形的相对面，或者等价地，证明 P 和 Q 的仿射包是$\mathbb{R}^d$。我们将证明，对于 $\varepsilon_i(d,\ k)$，这一性质更一般地成立。

THEOREM 2.5: 对于任意正整数 d和 k，两个不相交的格点（d,k）-单形之间可能的最小距离，其中一个的维数为 i，另一个的维数为（$d-i-1$），等于 ε_i（d,k）。

证明。对 d 使用归纳法。首先注意，当 d 等于 1 时，结论显然成立，因为 $\varepsilon_0(1,\ k)$ 等于 1，而这是两个不同整数之间可能的最小距离。假设 d 至少为 2，并考虑两个不相交的格点 $(d,\ k)$-单形 P 和 Q，其中 P 的维数为 i，Q 的维数为 $d-i-1$。反设

$$d(P,Q) < \varepsilon_i(d,k). \tag{6}$$

根据 $\varepsilon_i(d,\ k)$ 的定义可知，P 和 Q 不可能是一个 d 维单纯形的相对面。等价地，存在 $\mathbb{R}^d$ 中的一个超平面 H，它包含 P 和 Q。设 a 为一个与 H 正交的非零向量。由于 a 非零，a 的坐标中至少有一个非零；必要时对 $\mathbb{R}^d$ 的坐标进行置换（这不会改变 P 和 Q 之间的距离），不失一般性，可设 a_d 非零。现在，将 $\mathbb{R}^{d-1}$ 视为由 $\mathbb{R}^d$ 的前 $d-1$ 个坐标张成的超平面，并将从 $\mathbb{R}^d$ 到 $\mathbb{R}^{d-1}$ 的正交投影记为 π。由于 a_d 非零，π 在 H 和 $\mathbb{R}^{d-1}$ 之间诱导出一个双射；又因为 π 是 1-利普希茨，

$$d\big(\pi(P),\pi(Q)\big) \le d(P,Q). \tag{7}$$

取 P 中的一点 p 和 Q 中的一点 q，使得 $\pi(P)$ 与 $\pi(Q)$ 之间的距离等于 $\pi(p)$ 与 $\pi(q)$ 之间的距离。注意，若 p 位于 P 的一个真面上，则由归纳法

$$\varepsilon_{i-1}(d-1,k) \le d\big(\pi(P),\pi(Q)\big) \tag{8}$$

类似地，如果 q 位于 Q 的真面中，那么根据归纳法

$$\varepsilon_i(d-1,k) \le d\big(\pi(P),\pi(Q)\big). \tag{9}$$

在前一种情形下，结合 (6)、(7) 和 (8) 会与注 2.2 矛盾。在后一种情形下，结合 (6)、(7) 和 (9) 会与定理 2.1 矛盾。因此，只需证明 $\pi(P)$ 与 $\pi(Q)$ 之间的距离必定由 $\pi(P)$ 中的一个点和 $\pi(Q)$ 中的一个点取得，且其中一个点位于相应单纯形的真面上。假设 p 和 q 各自都包含于相应单纯形的相对内部（否则结论已经成立）。在这种情况下，注意到 $\pi(P)$ 和 $\pi(Q)$ 必定都与 $\pi(q-p)$ 正交。因此，$\pi(P)-\pi(p)$ 和 $\pi(Q)-\pi(q)$ 是包含在 $\mathbb{R}^{d-1}$ 上与 $\pi(q-p)$ 正交的线性超平面内的两个单纯形。由于这两个单纯形的维数之和为 $d-1$，它们的交集必定是一个正维数的多胞体。取该交集某个真面上的一点 x。根据构造，

要么 $x+\pi(p)$ 位于 $\pi(P)$ 的一个真面上，要么 $x+\pi(q)$ 位于$\pi(Q)$ 的一个真面上。由于 $x+\pi(p)$ 与 $x+\pi(q)$ 之间的距离等于 $\pi(p)$ 与 $\pi(q)$ 之间的距离，证明至此完成。 ∎

本节的其余部分将回顾在 [4] 中引入的 $\varepsilon(d,k)$ 的代数模型。我们将在 $\varepsilon_i^u(d,k)$ 的情形下陈述这一模型，它将成为第3、4和5节证明的主要要素之一。考虑格 (d,k)-单纯形 S 的两个相对面 P 和 Q，并记 P 的维数为 i。进一步记 P 的顶点为 p^0 至 p^i，记 Q 的顶点为 q^0 至 q^{d-i-1}，并考虑 $d\times(d-1)$ 矩阵 A，其列 j 在 j 不超过 i 时为向量 p^j-p^0，否则为向量 $q^{j-i}-q^0$。由于 P 和 Q 是 S 的相对面，这些向量共同张成 $\mathbb{R}^d$ 的一个超平面，因此 A 的秩为 $d-1$。进一步记向量 q^0-p^0 为 b。根据 [4, 引理 2],，如果 A^tA 是非奇异的，则

$$d\big(\mathrm{aff}(P),\mathrm{aff}(Q)\big)=\big\|A(A^tA)^{-1}A^tb-b\big\|.$$

不过，在我们的情形下，A^tA 必然是非奇异的。事实上，根据柯西–比奈公式 [12, 例 10.31] 该矩阵的行列式为

$$\det\big(A^tA\big)=\sum_{j=1}^{d}\det(A_j)^2 \tag{10}$$

其中，A_j 表示从矩阵 A中删除第 j 行后得到的 $(d-1)\times(d-1)$ 矩阵。由于 A 的秩为 $d-1$，从 A_1 到 A_d 的矩阵中必有一个是非奇异的，而 (10) 表明 A^tA 也是非奇异的。

注*2.6*：采用这些记号，格向量

$$a=\big(\det(A_1),-\det(A_2),\dots,(-1)^{d+1}\det(A_d)\big)$$

与 P 和 Q都正交。事实上，$a\cdot(p^j-p^0)$ 是将 p^j-p^0 作为第一列添加到 A 之前所得的$d\times d$ 矩阵的行列式。由于其中有两列相同，该矩阵必然是奇异的，这证明了 $a\cdot(p^j-p^0)$ 等于 0，因此 a 与 P正交。同样的论证表明，$a\cdot(q^j-q^0)$ 也为 0，并且 a 也与 Q 正交。

A 各项都是两个不超过 k 的非负数之差，因此属于区间 $[-k,k]$。如果 k 等于 1，利用单位超立方体 $[0,1]^d$ 的对称性，我们总可以假设 q^0是 $\mathbb{R}^d$的原点。此外，如果 i 等于 0，那么 A的列向量是

向量 q^1 到 q^{d-1}，因此，A 的每一项不是 0 就是 1。由这些观察可得以下结论。

LEMMA 2.7: 存在一个 $d\times(d-1)$ 矩阵 A 和一个来自 $\mathbb{R}^d$ 的向量 b，二者的整数元素的绝对值均不超过 k，使得

(i) A^tA是非奇异的，且(ii) $\varepsilon_i^u(d,k) = \left\|A(A^tA)^{-1}A^tb - b\right\|$。

此外，若 i 等于0 且 k 等于1，则还可以进一步要求矩阵 A的元素均为二进制数。

注 *2.8*：尽管后文不会用到这一点，但根据推论 2.3，将 $\varepsilon_i^u(d,1)$替换为 $\varepsilon_i(d,1)$后，引理 2.7 仍然成立。反过来，根据定理 2.5，将 $\varepsilon_i^u(d,1)$替换为 $\varepsilon(d,1)$后，该引理也仍然成立；根据（2），将 $\varepsilon_i^u(d,1)$替换为 $\varepsilon^u(d,1)$后，亦是如此。

3. 关于 $\varepsilon(d,k)$ 的改进下界

本节旨在改进 $\varepsilon(d,k)$ 的下界（该下界来自 [5] ），以及 $\varepsilon_0^u(d,1)$ 的下界（该下界来自 [6]）。前一项改进实际上是通过独立于 i 对 $\varepsilon_i^u(d,k)$ 给出下界来实现的，从而得到 $\varepsilon^u(d,k)$ 的下界，进而得到 $\varepsilon(d,k)$ 的下界。所有证明都基于对引理 2.7 的改进，该改进借助矩阵代数中的论证得出。

PROPOSITION 3.1: 若 M 是一个系数为实数的对称幂等矩阵，且 b 是来自 $\mathbb{R}^n$ 的一个向量，则

$$\|Mb-b\|^2 = \|b\|^2 - b^tMb.$$

证明。用 I 表示 $n\times n$单位矩阵。若 M 是对称的，则

$$\begin{aligned}\|Mb-b\|^2 &= (Mb-b)^t(Mb-b)\\ &= b^t(M-I)^t(M-I)b\\ &= b^t(M-I)^2b.\end{aligned}$$

此外，若 M 是幂等的，则

$$\begin{aligned}(M-I)^2 &= M^2-2M+I\\ &= I-M\end{aligned}$$

由此即可得出该命题。 ∎

回顾一下，引理 2.7 给出了 $\varepsilon_i^u(d,\ k)$ 关于 A 和b 的函数公式。借助命题 3.1，我们可以将该公式进一步细化如下。

LEMMA 3.2: 存在一个 $d\times(d-1)$ 矩阵 A 以及一个向量 b，二者均来自 $\mathbb{R}^d$，且整数元素的绝对值至多为 k，使得

(i) A^tA是非奇异的，并且(ii) $\varepsilon_i^u(d,\ k)=\sqrt{\|b\|^2-b^tA(A^tA)^{-1}A^tb}$。

此外，若 i 等于0 且 k 等于1，则还可以要求矩阵 A的元素为二进制值。

证明。 根据引理 2.7，存在一个 $d\times(d-1)$ 矩阵 A 以及一个来自 $\mathbb{R}^d$ 的向量b，使得 A^tA 是非奇异的，并且

$$\varepsilon_i^u(d,k)=\|A(A^tA)^{-1}A^tb-b\|. \tag{11}$$

此外， A 和 b 的整数元素的绝对值均至多为 k。由于 $A(A^tA)^{-1}A^t$ 是对称且幂等的，根据命题 3.1 可得

$$\|A(A^tA)^{-1}A^tb-b\|^2=\|b\|^2-b^tA(A^tA)^{-1}A^tb.$$

将此与 (11) 结合，即完成证明。 ∎

注记 *3.3:* 根据注 2.8，引理 3.2 仍然成立，只需将其陈述中的 $\varepsilon_i^u(d,k)$ 替换为 $\varepsilon_i(d,k)$、 $\varepsilon^u(d,k)$ 或 $\varepsilon(d,k)$。

现在我们将用 A^tA 的行列式给出 $\varepsilon_i^u(d,k)$ 的下界。需要指出的是，根据 (10)，这个行列式非负。

THEOREM 3.4: 存在一个 $d\times(d-1)$ 矩阵 A，其整数元素的绝对值至多为 k，且 A^tA 是非奇异的，并且

$$\varepsilon_i^u(d,k)\geq\frac{1}{\sqrt{\det(A^tA)}}.$$

此外，如果 i 等于 0 且 k 等于 1，那么还可以要求矩阵 A的元素为二进制值。

证明。 根据引理 3.2，存在一个 $d\times(d-1)$ 矩阵 A和一个来自 $\mathbb{R}^d$ 的向量b，二者的整数元素的绝对值均不超过 k，且 A^tA 是非奇异的，并且 $\varepsilon_i^u(d,\ k)$ 可以表示为

$$\varepsilon_i^u(d,k)=\sqrt{\|b\|^2-b^tA(A^tA)^{-1}A^tb}. \tag{12}$$

此外，如果 i 和 k 分别等于 0 和 1，则 A 具有二进制元素。记 C 为 A^tA的余子式矩阵，

$$(A^tA)^{-1} = \frac{C^t}{\det(A^tA)}.$$

因此，

$$\|b\|^2 - b^tA(A^tA)^{-1}A^tb = \frac{\|b\|^2 \det(A^tA) - b^tAC^tA^tb}{\det(A^tA)}.$$

然而，由于 A、 b和 C 的各项都是整数，右侧的分子是一个整数。此外，左侧为正，且根据（10）， A^tA的行列式非负，

$$\|b\|^2 - b^tA(A^tA)^{-1}A^tb \geq \frac{1}{\det(A^tA)}.$$

结合（12），证明即告完成 ∎

我们通过证明定理1.2来结束本节。

定理*1.2*的证明。根据定理 3.4,

$$\varepsilon_i^u(d,k) \geq \frac{1}{\sqrt{\det(A^tA)}},$$

其中， A 是一个 d×$(d-1)$矩阵，其整数元素的绝对值至多为 k，且 A^tA 是非奇异的。此外，若 i 等于 0 且 k 等于 1，则 A具有二进制元素。根据 (10)，该不等式可改写为

$$\varepsilon_i^u(d,k) \geq \frac{1}{\sqrt{\sum_{j=1}^{d} \det(A_j)^2}}. \tag{13}$$

其中， A_j 是从 A 中删除第 j行后得到的$(d-1)$×$(d-1)$矩阵。然而，根据 Hadamard 不等式,

$$|\det(A_j)| \leq k^{d-1}\sqrt{d-1}^{d-1}$$

由（13）可得

$$\varepsilon_i^u(d,k) \geq \frac{1}{\sqrt{d}k^{d-1}\sqrt{d-1}^{d-1}}$$

这就推出了前述第二个不等式。最后，假设 i等于 0，且 k 等于 1。在这种情况下， A 因此 A_j 具有二进制元素。于是可以将 Hadamard 不等式改进为

$$|\det(A_j)| \leq \frac{\sqrt{d}^d}{2^{d-1}}$$

w这与（13）结合，便证明了第一个所述不等式。 ∎

4. 格点到格三角形的距离

文献 [3] 证明，当 k 至少为 4 时，

$$\varepsilon_1(3,k) = \frac{1}{\sqrt{2(2k^2-4k+5)(2k^2-2k+1)}}. \tag{14}$$

还证明了对于所有正的k， $\varepsilon(3,\ k)$始终严格小于 $\varepsilon_0(3,\ k)$（见定理 1.2]）。特别可得

$$\varepsilon(3,k) = \varepsilon_1(3,k) < \varepsilon_0(3,k).$$

本节旨在建立一个类似于（14）的表达式，但适用于 $\varepsilon_0(3,\ k)$。首先注意，坐标为 (1，1，1) 的点 $P^\star$ 与顶点分别为 (0，0，1)、(k，$k-1$，0) 和 (0，k，k) 的三角形 $Q^\star$ 满足

$$d(P^\star, Q^\star) = \frac{1}{\sqrt{3k^4-4k^3+4k^2-2k+1}} \tag{15}$$

对于每个 k ，至少为 2。特别地， $\varepsilon_0(3,k)$ 不超过 (15) 式右侧的值。我们将证明， $\varepsilon_0(3,k)$ 的这个上界总是紧的。

当 k 较小时，可以通过 [4] 中的穷举枚举过程计算得到 $\varepsilon_0(3,k)$。该过程还可以找出 $[0,k]^3$ 中的所有格点，以及距离等于 $\varepsilon_0(3,k)$ 的格点 $(3,k)$-三角形。通过该过程，我们得到以下结论。

PROPOSITION 4.1: 如果 k 至少为 2 且至多为 8，那么

$$\varepsilon_0(3,k) = \frac{1}{\sqrt{3k^4-4k^3+4k^2-2k+1}}$$

并且，在对称性意义下，这个距离唯一地由 $P^\star$ 和 $Q^\star$ 实现。

请注意，得出命题 4.1 的穷举枚举过程也表明，当 $2 \leq k \leq 8$ 时， $\varepsilon_0(3,k)$ 与 $\varepsilon_0^u(3,k)$ 重合。

我们将把命题 4.1 的结论推广到所有大于 8 的整数 k 。考虑一个格点 P，它包含在立方体 $[0,k]^3$ 中，以及一个格 (3, k)-三角形 Q，满足 P 不包含在 Q 的仿射包中（因此 P 和 Q 确实是一个格四面体的相对面）。用 q^0、q^1 和 q^2 表示 Q 的顶点。按照我们在第 2 节末尾回顾的 [4] 的代数模型，我们用 A 表示一个矩阵，其第一列为 q^1-q^0，第二列为 q^2-q^0；用 b 表示向量 q^0-P。如第 2 节所述，A^tA 是非奇异的，并且

$$d\big(\mathrm{aff}(P),\mathrm{aff}(Q)\big)=\big\|A(A^tA)^{-1}A^tb-b\big\|. \tag{16}$$

现在考虑超立方体 $[-k,k]^9$ 中的格点 x，其坐标可以通过将 A和 b的各项对应起来得到:

$$A=\begin{bmatrix} x_1 & x_4\\ x_2 & x_5\\ x_3 & x_6\end{bmatrix} \tag{17}$$

and

$$b=\begin{bmatrix} x_7\\ x_8\\ x_9\end{bmatrix}. \tag{18}$$

A^tA 的行列式于是为函数 g，它由 x 定义如下:

$$g(x)=(x_1x_5-x_2x_4)^2+(x_1x_6-x_3x_4)^2+(x_2x_6-x_3x_5)^2. \tag{19}$$

该行列式非零且为平方和，因此 $g(x)$始终为正。采用这一记法，式 (16) 的右端可以表示为

$$\|A(A^tA)^{-1}A^tb-b\|=\frac{|f(x)|}{\sqrt{g(x)}} \tag{20}$$

其中 f 是由 x定义的函数:

$$f(x)=(x_1x_5-x_2x_4)x_9-(x_1x_6-x_3x_4)x_8+(x_2x_6-x_3x_5)x_7. \tag{21}$$

应当注意，通过置换 q^0、q^1 和 q^2，可以从 P 和 Q 得到至多六个不同的点 x 。我们将用 $\mathcal{X}_{P,Q}(k)$ 表示 $[-k,k]^9$ 中所有可按刚才所述通过置换 q^0、q^1 和 q^2，或对 P 和 Q 同时施加 $[0,k]^3$ 的等距变换而从 P 和 Q 得到的格点 x 。请注意，这些等距变换将格点 (3, k)-多胞体

变为格点 $(3,k)$-多胞体，因为它们包含对 $\mathbb{R}^3$ 的坐标进行置换，并关于形如以下形式的平面对称

$$\{x \in \mathbb{R}^3 : x_i = k/2\}$$

其中 i 等于 1、2 或 3。我们的策略是证明：当 k 至少为 9，且 P 与 Q 的仿射包之间的距离为 $\varepsilon_0^u(3,\ k)$ 时，可以从一个与 k 无关的格点有限集 $\mathcal{A}$ 中恢复 $\mathcal{X}_{P,\ Q}(k)$ 中的某个点 x。更准确地说，$\mathcal{A}$ 将是包含于 $[0,6]^2\times[-4,6]\times[0,6]^3$ 中且 a_6 至少为 $-a_3$ 的格点 a 所组成的集合。

为了建立 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{X}_{P,\ Q}(k)$ 之间的联系，我们定义仿射映射 $\phi_k : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^6$，使得 $\phi_k(a)$ 的第 i 个坐标为

$$\big[\phi_k(a)\big]_i = \begin{cases} a_i \text{ if } i \text{ is equal to 3 or 4,} \\ k - a_i \text{ otherwise.} \end{cases}$$

从现在起，我们将 $\mathbb{R}^6$ 认作由前六个坐标张成的 $\mathbb{R}^9$ 子空间。第5节旨在建立以下定理，该定理给出了从 $\mathcal{X}_{P,\ Q}(k)$ 到 $\mathcal{A}$ 的既定约化。

THEOREM 4.2: 设格点 P 位于立方体 $[0,k]^3$ 内，并设有一个格点 $(3,k)$ 三角形 Q。若 k 至少为 9，且 P 与 Q 的仿射包之间的距离等于 $\varepsilon_0^u(3,k)$，则存在一点位于 $\mathcal{X}_{P,Q}(k)$ 中，其在 $\mathbb{R}^6$ 上的正交投影包含于 $\phi_k(\mathcal{A})$ 中。

本节余下部分将说明定理 4.2 如何在 k 至少为 9 时计算 $\varepsilon_0(3,k)$。首先陈述两个命题。第一个命题已在 [3,引理 3.2] 的证明中得到。

PROPOSITION 4.3: 设格点 P 位于立方体 $[0,k]^3$ 内，并设有一个格点 $(3,k)$ 三角形 Q。若 Q 的仿射包不包含 P，则对于 $\mathcal{X}_{P,Q}(k)$ 中的每个点 x，三个平方 $(x_1x_5-x_2x_4)^2, (x_1x_6-x_3x_4)^2$，和 $(x_2x_6-x_3x_5)^2$ 均小于或等于 k^4。

第二个命题由 (16)、(20) 和命题 4.3 得出。

PROPOSITION 4.4: 考虑一个包含在立方体 $[0,k]^3$ 中的格点 P，以及一个格点 $(3,k)$-三角形 Q。如果 P 到 Q 的仿射包的距离等于 $\varepsilon_0^u(3,k)$，那么对于 $\mathcal{X}_{P,\ Q}(k)$ 中的每个点 x，

(i) $f(x)$ 等于1 或等于 -1 且

(ii) $g(x)$ 等于 $1/\varepsilon_0^u(3,k)^2$。

证明。 假设 P 与 Q 的仿射包之间的距离等于$\varepsilon_0^u(3,\ k)$。由（16）和（20）可得

$$\varepsilon_0^u(3,k)=\frac{|f(x)|}{\sqrt{g(x)}}. \tag{22}$$

由于 $f(x)$是整数且 $\varepsilon_0^u(3,\ k)$非零，因此 $f(x)$的绝对值至少为 1。下面还需证明该绝对值至多为 1。这不仅将表明 $f(x)$等于 1 或 -1，还将表明，由于（22），$g(x)$是 $\varepsilon_0^u(3,\ k)$的平方倒数。

反设 $f(x)$的绝对值大于 1。在这种情况下，由（22）以及 $f(x)$的整性可推出

$$\varepsilon_0^u(3,k)\geq\frac{2}{\sqrt{g(x)}}.$$

然而，由（19）和命题 4.3 可知 $g(x)$至多为 $3k^4$，从而得到$\varepsilon_0^u(3,\ k)$，因此 $\varepsilon_0(d,\ k)$至少为 $2/(\sqrt{3}k^2)$，这与 $\varepsilon_0(3,\ k)$至多为（15）右端的事实相矛盾。 ∎

令 $\tilde{f}\colon \mathbb{Z}^9\backslash\{0\}\to\mathbb{N}$ 为满足以下条件的映射：$\tilde{f}(x)$ 是 $x_1x_5-x_2x_4$、$x_1x_6-x_3x_4$ 和 $x_2x_6-x_3x_5$ 的最大公因数。根据 (21)，若 $|f(x)|$ 等于 ± 1，则这三个量必定互质，因此 $f(x)$ 也必定等于 1。换言之，在命题 4.4 的表述中，用 f 替换 $\pm f$ 后，命题仍然成立。现在，一个关键的观察是，$f(x)$ 和 $g(x)$ 只取决于 x 的前六个坐标。特别地，结合定理 4.2 和命题 4.4，可以通过考察有限多个函数 $k\to f\circ\phi_k(a)$ 和 $k\to g\circ\phi_k(a)$ 来计算 $\varepsilon_0(3,\ k)$，其中 a 遍历 $\mathcal{A}$。下面说明如何利用符号计算做到这一点。首先注意到，$f\circ\phi_k(a)$ 是以下各项的最大公因数的绝对值

$$\begin{cases} k^2-(a_1+a_4+a_5)k+a_1a_5+a_2a_4,\\ k^2-(a_1+a_6)k+a_1a_6-a_3a_4,\\ k^2-(a_2+a_3+a_6)k+a_2a_6+a_3a_5. \end{cases}$$

对于任意给定的点 $a\in\mathcal{A}$，可以通过符号计算验证：当这三个二次多项式的最大公因数是关于 k 的一次或二次函数时，只要 k 至少为 9，其绝对值就不会等于 1。这只需解两个一次或二次方程，

用符号计算即可轻松完成。因此，由定理 4.2 和命题 4.4 可知，对于某个点 $a \in \mathcal{A}$ ， $\varepsilon_0^u(3, k)$ 是 $\sqrt{g \circ \phi_k(a)}$ 的逆元，并且上述三个二次多项式的最大公因数次数为 0。现在考虑所有不同多项式 $k \to g \circ \phi_k(a)$ 构成的集合，其中 a 遍历 $\mathcal{A}$ 的那个特定子集。符号计算表明，任意两个此类多项式之差的最大实根小于 9。因此，当 k 遍历 $[9, +\infty[$ 时，其中一个多项式始终大于其他所有多项式。这个多项式是 $3k^4 - 4k^3 + 4k^2 - 2k + 1$ ，且它仅在 $\mathcal{A}$ 中的以下四个点处取得：(0，0，-1，1，0，1)、(0，0，1，0，1，0)、(0，1，-1，0，0，1) 和 (0，1，0，1，0，0)。利用这些计算结果，我们现在证明定理 1.1。

定理 *1.1* 的证明。当 k 至少为 2 且至多为 8 时，结论由命题 4.1 得出，因此从现在起我们假设 k 至少为 9。首先注意，根据 (15)，

$$\varepsilon_0(3, k) \leq \frac{1}{\sqrt{3k^4 - 4k^3 + 4k^2 - 2k + 1}}. \tag{23}$$

我们将证明反向不等式。考虑一个包含在立方体 $[0, k]^3$ 中的格点 P ，以及一个格（3, k）三角形 Q ，使得P与 Q 的仿射包之间的距离等于 $\varepsilon_0^u(3, k)$。根据定理 4.2，存在一点 x 属于$\mathcal{X}_{P,Q}(k)$，以及一点 a属于 $\mathcal{A}$ ，使得 $\phi_k(a)$是 x 在 $\mathbb{R}^6$ 上的正交投影。根据命题 4.4， $f(x)$的绝对值为 1，因此~ $f \circ \phi_k(a)$也为 1。此外， $g(x)$是 $\varepsilon_0^u(3, k)^2$的倒数，因此 $g \circ \phi_k(a)$也是如此。由于 $\varepsilon_0^u(3, k)$至多为 $\varepsilon_0(3, k)$，(23) 推出

$$g \circ \phi_k(a) \geq 3k^4 - 4k^3 + 4k^2 - 2k + 1. \tag{24}$$

~然而，由于 $f \circ \phi_k(a)$ 等于 1，上述计算结果表明 (24) 中等号成立，因此，

$$\varepsilon_0(3, k) \geq \varepsilon_0^u(3, k) = \frac{1}{\sqrt{3k^4 - 4k^3 + 4k^2 - 2k + 1}}$$

结合（23）即可得到所需的 $\varepsilon_0(3, k)$ 表达式，并说明 $\varepsilon_0^u(3, k)$ 与 $\varepsilon_0(3, k)$ 重合。此外， a 是以下四个点之一：(0，0，-1，1，0，1)、(0，0，1，0，1，0)、(0，1，-1，0，0，1)和(0，1，0，1，0，0)。这些点中每一点在 ϕ_k 下的像都给出超立方体 $[-k, k]^9$ 中一个格点的前六个坐标，据此可以重构一个格三角形 Q 。由这些点重构出的所有三角形，除对称性外均重合

在 $[0,k]^3$ 的对称性作用下，均与三角形 $Q^\star$ 重合，这证明 Q 与 $Q^\star$ 在对称性意义下重合。还需证明 $P^\star$ 是立方体 $[0,k]^3$ 中唯一一个与 $Q^\star$ 的距离等于 $\varepsilon_0(3,\ k)$ 的格点。

反设 P 不等于 $P^\star$，但其到 $Q^\star$ 的距离与 $P^\star$ 相同，并注意到根据推论 2.3,

$$d(P,Q^\star)=d\big(\mathrm{aff}(P),\mathrm{aff}(Q^\star)\big).$$

因此， P 和 $P^\star$ 在 $Q^\star$的仿射包上的投影都必须属于 $Q^\star$。这意味着，将 $P^\star-P$ 加到 $Q^\star$ 的每个顶点上或从中减去 $P^\star-P$ 所得到的点中，有一个是包含于 $Q^\star$中的格点 q。注意， q 不可能是 $Q^\star$的顶点。事实上，否则，端点为 P 和 $P^\star$ 的线段将是 $Q^\star$的一条边的平移。在这种情况下， P 和 $P^\star$ 在 $Q^\star$ 的仿射包上的正交投影必然是 $Q^\star$ 的两个顶点，否则其中一个将位于 $Q^\star$ 之外。这将意味着 $\varepsilon_0(3,k)$ 是两个格点之间的距离，因而至少为 1。因此， q 是包含于 $Q^\star$ 中的格点，并且不同于其三个顶点。但在这种情况下， $Q^\star$ 包含一个严格更小的格点 $(3,k)$-三角形，其到 P或 $P^\star$ 的距离为 $\varepsilon_0(3,k)$，这是不可能的，因为任何这样的三角形都必须在对称性意义下与 $Q^\star$ 重合。

∎

5. 定理 4.2 的证明

为了证明定理 4.2，我们首先需要在 $\mathcal{X}_{P,Q}(k)$ 中选出一个代表点，其中 P 是 $[0,k]^3$ 中的格点，而 Q 是一个仿射包不包含 P 的格点 $(3,k)$- 三角形。可以按如下方式做到这一点。

LEMMA 5.1: 对于 $[0,k]^3$ 中的任意格点 P 以及任意格点$(3,k)$-三角形 Q，若 P 和 Q 不相交，则存在一点 x，使得$\mathcal{X}_{P,Q}(k)$ 满足

(i) x_1、 x_2和 x_4 到 x_6 均为非负数，(ii) x_1x_5 至少为 x_2x_4，并且(iii) x_4 至多为 x_2。

证明。 考虑包含在 $[0,k]^3$ 中的格点 P，以及一个格点 $(3,k)$-三角形Q，使得 P 与 Q 不相交。将 $\mathbb{R}^2$ 视为由 $\mathbb{R}^3$ 的前两个坐标张成的平面，并记 $\pi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ 为到 $\mathbb{R}^2$ 的正交投影。注意， $\pi(Q)$ 是一个三角形或一条线段。

考虑包含 $\pi(Q)$ 的最小形如 $[a,b]\times[c,d]$ 的矩形。由于 $\pi(Q)$ 至多有三个顶点，矩形 $[a,b]\times[c,d]$ 的某一条边的相对内部不含 $\pi(Q)$ 的顶点。因此，该边必以 $\pi(Q)$ 的某个顶点为端点；否则，在仍包含 $\pi(Q)$ 的情况下，可以将 $[a,b]\times[c,d]$ 缩小。利用立方体 $[0,k]^3$ 的对称性，可以假设 (a,c) 是 $\pi(Q)$ 的一个顶点，同时保持 P 与 Q 之间的距离不变。在这种情况下，Q 至少有一个顶点在 $\mathbb{R}^2$ 上的正交投影为 (a,c)，我们将 Q 的这样一个顶点记为 q^0。令 q^1 和 q^2 为 Q 中异于 q^0 的两个顶点。由于 $\pi(q^0)$ 等于 (a,c)，且 $\pi(q^1)$ 和 $\pi(q^2)$ 均包含于 $[a,b]\times[c,d]$，因此 q^1-q^0 和 q^2-q^0 的前两个坐标均非负。

现在记 A 为这样一个 3×2 矩阵：其第一列为 q^1-q^0，第二列为 q^2-q^0。进一步记 b 为向量 q^0-P，记 x 为 $\mathcal{X}_{P,\,Q}(k)$ 中由 A 和 b 通过 (17) 和 (18) 得到的格点。由于 q^1-q^0 和 q^2-q^0 的前两个坐标均为非负数，因此 x_1、x_2、x_4 和 x_5 均为非负数。现在注意到，x_1x_5 可能小于 x_2x_4。然而，通过交换 q^1 和 q^2 的标签，可以恢复这一性质，从而得到一个点 x；根据该集合的定义，它仍属于 $\mathcal{X}_{P,\,Q}(k)$。注意，交换这些标签不会影响 x_1、x_2、x_4 或 x_5 的符号。

类似地，通过交换 q^1 与 q^2，并置换 $\mathbb{R}^3$ 的前两个坐标，可以使 x_4 至多为 x_2。注意，这两个操作的组合不会影响 x_1、x_2、x_4、x_5 或 $x_1x_5-x_2x_4$ 的符号，并得到一个点 x，该点仍属于 $\mathcal{X}_{P,\,Q}(k)$。

最后，如果 q^2-q^0 的第三个坐标（因此 x_6 的第三个坐标）为负，我们可以将 P 和 Q 都替换为它们关于.....的对称点，从而使该坐标变为非负，同时不改变 x_1、x_2、x_4、x_5、$x_1x_5-x_2x_4$ 或 x_2-x_4 的符号

$$\{x\in\mathbb{R}^3 : x_3 = k/2\}.$$

由此得到一个具有所需性质的点 x，它位于 $\mathcal{X}_{P,\,Q}(k)$ 中。 ∎

假设 P 和 Q 之间的距离等于 $\varepsilon_0(3,k)$，我们将给出满足引理 5.1 陈述中断言 (i)、(ii) 和 (iii) 的点 x 在 $\mathcal{X}_{P,Q}(k)$ 中的坐标的界。为此，我们将使用以下关于多项式表达式的三个下界

$$r(k) = k^4 - 4k^3 + 4k^2 - 2k + 1$$

这些下界的证明很直接，只需解关于 k 或 $\sqrt{2k+1}$ 的次数至多为 4 的多项式不等式，因此略去。

PROPOSITION 5.2: 如果 k 至少为 9，则

(i) $r(k)$ 大于 $k^2(k-3)^2$,(ii) $r(k)$ 至少为 $\left(k^2-2k-1\right)^2$，且(iii) $r(k)$ 至少为 $\left(k^2-4(k-\sqrt{2k+1})\right)^2$,

x 坐标的已知界取决于 x_3的符号。以下引理处理 x_3 为非负的情形。

LEMMA 5.3: 假设 k 至少为9。考虑包含于 $[0,k]^3$ 中的一个格点 P 以及一个格 $(3,\ k)$-三角形 Q，使得 P到 Q 的仿射包的距离为 $\varepsilon_0^u(3,\ k)$。进一步考虑$\mathcal{X}_P$ 中的一个点 $x_{,\ Q}(k)$，使得

(i) x_1、 x_2和 x_4 至 x_6 均为非负数,

(ii) x_1x_5 至少为 x_2x_4，且(iii) x_4 至多为 x_2。

若 x_3 为非负数，则 x_1、 x_5和 x_6 至少为 $k-2$，而 x_4 至多为 3。此外，x_2 至少为 $k-2$ 且 x_3 至多为 3，或者反过来，x_3 至少为 $k-2$ 且 x_2 至多为 3。

证明。 假设 P 到 Q 的仿射包的距离等于 $\varepsilon_0^u(3,k)$，由命题 4.4 可得

$$\varepsilon_0^u(3,k)=\frac{1}{\sqrt{g(x)}}$$

进而由 (15) 可得

$$g(x)\geq 3k^4-4k^3+4k^2-2k+1. \tag{25}$$

由 (19) 和命题 4.3 可得

$$(x_1x_5-x_2x_4)^2\geq r(k). \tag{26}$$

由于 (26) 左侧的所有 x_i 均为非负数，且 x_1x_5 至少为 x_2x_4，因此 $x_1^2x_5^2$ 至少为 $r(k)$。现在回想一下， x_1 和 x_5 的绝对值至多为 k。根据命题 5.2， $r(k)$大于 $k^2(k-3)^2$,，因此 x_1 和 x_5 均至少为 $k-2$。

同样，由式 (26) 可得

$$\left(k^2-x_2x_4\right)^2\geq r(k).$$

然而，根据命题 5.2， $r(k)$ 至少为 $(k^2-2k-1)^2$，因此 x_2x_4 至多为 $2k+1$。综上，我们已经证明

$$\begin{cases} x_1 \geq k-2, \\ x_5 \geq k-2, \\ x_2x_4 \leq 2k+1. \end{cases} \tag{27}$$

由于 x_4 至多为 x_2，由第三个不等式可知 x_4 至多为$\sqrt{2k+1}$。现在，根据 (25)、(19) 和命题 4.3，

$$(x_1x_6 - x_3x_4)^2 \geq r(k). \tag{28}$$

注意， x_1x_6 必定至少为 x_3x_4。事实上，否则，由于 x_3 至多为$\sqrt{2k+1}$，(28) 的左侧将小于 $k^2(2k+1)$，进而小于 $k^2(k-3)^2$,，这将与命题 5.2 矛盾。由于 x_1x_6 至少为x_3x_4，借用我们证明 (27) 时所用的论证可得

$$\begin{cases} x_6 \geq k-2, \\ x_3x_4 \leq 2k+1. \end{cases} \tag{29}$$

在证明的其余部分，我们根据 x_2x_6 是否至少为 x_3x_5 分两种情形讨论。首先，若 x_2x_6 至少为 x_3x_5，则我们用于证明 (27) 和 (29) 的论证还可进一步推出

$$\begin{cases} x_2 \geq k-2, \\ x_3x_5 \leq 2k+1. \end{cases} \tag{30}$$

由于 x_2 至少为 $k-2$，由（27）可得

$$x_4 \leq \frac{2k+1}{k-2} \tag{31}$$

由于 x_5 至少为 $k-2$，由（30）可得

$$x_3 \leq \frac{2k+1}{k-2}. \tag{32}$$

由于 k 至少为 9，(31) 和 (32) 的右侧至多为 3，因此我们得到 x_1、 x_2、 x_5 和 x_6 均至少为 $k-2$，而 x_3 和 x_4 至多为 3，正如所需。最后，如果 x_2x_6 小于 x_3x_5，那么采用相同的论证，但将 x_2 与 x_3 互换，并将 x_5 与 x_6 互换，可知 x_1、 x_3、 x_5 和 x_6 均至少为 $k-2$，而 x_2 和 x_4 至多为 3。

∎

为了证明一个与引理 5.3 类似的结论，但针对 x_3 为负的情形，我们将使用 $\mathcal{X}_{P,Q}(k)$ 中的点所满足的以下约束；该约束源于将 P 和 Q 嵌入 $[0,k]^3$。

PROPOSITION 5.4: 取 $[0,k]^3$ 中的一个格点 P和一个格$(3,k)$-三角形Q，使得 P 与 Q 不相交。对于$\mathcal{X}_P$中的每个点 x ,$_Q(k)$,

$$|x_3 - x_6| \leq k.$$

证明。 取$\mathcal{X}_P$中的一个点 x ,$_Q(k)$。根据$\mathcal{X}_{P,Q}(k)$的定义，存在一个格点 $\tilde{P}$，属于 $[0,k]^3$，以及一个格$(3,k)$-三角形 $\tilde{Q}$，它们分别在 $[0,k]^3$ 的某个等距变换下与 P和 Q 重合，并且满足

$$\begin{cases} x_3 = \tilde{q}_3^1 - \tilde{q}_3^0 \text{ and} \\ x_6 = \tilde{q}_3^2 - \tilde{q}_3^0, \end{cases}$$

其中 $\tilde{q}^0$、 $\tilde{q}^1$和 $\tilde{q}^2$ 恰当地标记了 $\tilde{Q}$的顶点。因此

$$x_3 - x_6 = \tilde{q}_3^1 - \tilde{q}_3^2$$

由于点 $\tilde{q}^0$、 $\tilde{q}^1$和 $\tilde{q}^2$ 都包含在立方体 $[0,k]^3$中，因此 $x_3 - x_6$ 的绝对值至多为 k，证毕。 ∎

借助命题 5.4 给出的约束，我们可以界定$\mathcal{X}_{P,Q}(k)$中满足引理 5.1 陈述中的断言 (i)、(ii) 和 (iii)，且第三个坐标为负的点 x 的坐标。

LEMMA 5.5: 假设 k 至少为9。考虑一个包含于 $[0,k]^3$ 中的格点 P，以及一个格$(3,k)$三角形 Q，使得 P到 Q 的仿射包的距离为 $\varepsilon_0(3,k)$。进一步考虑一个位于$\mathcal{X}_{P,Q}(k)$ 中的点 x，使得

(i) x_1、 x_2和 x_4 到 x_6 均为非负，

(ii) x_1x_5 至少为 x_2x_4，且(iii) x_4 至多为 x_2。

若 x_3 为负，则 x_1 和 x_5 至少为 $k-2$，而 x_2 和 x_6 至少为 $k-6$。此外，x_3 至少为 -4，且 x_4 至多为6。

证明。 证明的开头与引理 5.3 完全相同。特别地，我们得到

$$g(x) \geq 3k^4 - 4k^3 + 4k^2 - 2k + 1 \tag{33}$$

and

$$\begin{cases} x_1 \geq k-2, \\ x_5 \geq k-2, \\ x_2x_4 \leq 2k+1. \end{cases}$$

由于 x_4 至多为 x_2，因此 x_4 至多为 $\sqrt{2k+1}$。现在，结合（19）、（33）和命题 4.3，我们得到

$$(x_1x_6 - x_3x_4)^2 \geq r(k) \tag{34}$$

假设 x_3 为负数，由于 x_1 至多为 k，x_4 至多为$\sqrt{2k+1}$，并且根据命题 5.4，x_6 至多为 $k + x_3$，这意味着

$$\left(k^2 + \left(k - \sqrt{2k+1}\right)x_3\right)^2 \geq r(k).$$

展开左边，并用 k 表示 $r(k)$，得到

$$\left(k - \sqrt{2k+1}\right)^2 x_3^2 + 2k^2\left(k - \sqrt{2k+1}\right)x_3 + 4k^3 - 4k^2 + 2k - 1 \geq 0.$$

将其视为关于 $(k - \sqrt{2k+1})x_3$的二次不等式，其判别式为 $4r(k)$，由于 k 至少为 9，该判别式为正。因此，或者

$$\left(k - \sqrt{2k+1}\right)x_3 \leq -k^2 - \sqrt{r(k)} \tag{35}$$

or

$$\left(k - \sqrt{2k+1}\right)x_3 \geq -k^2 + \sqrt{r(k)}. \tag{36}$$

然而，根据命题 5.2，$r(k)$至少为 $k^2(k-3)^2$，而 (35) 意味着

$$x_3 \leq -k\frac{2k-3}{k - \sqrt{2k+1}}.$$

由于该不等式右边小于 $-k$，且 x_3 至少为 $-k$，此不等式不可能成立，这就证明了 (36) 成立。因此，

$$x_3 \geq \frac{\sqrt{r(k)} - k^2}{k - \sqrt{2k+1}}. \tag{37}$$

由命题 5.2，右侧的分子的值大于其分母的 −4 倍，因此我们得到 x_3 至少为 -4。

现在我们来给 x_6设定一个上界。由于 x_1 和 x_4 都不超过 k，由（34）可知，$r(k)$不超过 $k^2(x_6 - x_3)^2$，因此也不超过 $k^2(x_6+4)^2$。这就证明了x_6 至少为 $k-6$，因为根据命题 5.2，$r(k)$大于 $k^2(k-3)^2$。

我们再次结合（19）、（33）和命题 4.3，从而得到

$$(x_2x_6 - x_3x_5)^2 \geq r(k)$$

由于 x_5 和 x_6 至多为 k，且 x_3 至少为 -4，因此可得

$$x_2 \geq \frac{\sqrt{r(k)}}{k} - 4$$

根据命题 5.2，$r(k)$ 大于 $k^2(k-3)^2$，因此 x_2 至少为 $k-6$。最后，根据 (27)，x_2x_4 至多为 $2k+1$，

$$x_4 \leq \frac{2k+1}{k-6}.$$

由于 k 至少为 9，这个不等式右侧小于 7。因此，x_4 不大于 6，正如所需。 ∎

结合引理 5.1、5.3 和 5.5，我们现在证明定理 4.2。

定理 *4.2* 的证明。假设 k 至少为 9，且 P 与 Q 的仿射包之间的距离为 $\varepsilon_0^u(3, k)$。根据引理 5.1，存在一个点 x，它属于 $\mathcal{X}_{P,\,Q}(k)$，其前六个坐标除第三个外均为非负，同时 x_1x_5 至少为 x_2x_4，且 x_2 至少为 x_4。根据 x_3 的符号，我们分两种情况讨论，分别对应引理 5.3 或引理 5.5。

首先，如果 x_3 为非负数，那么根据引理 5.3可知，x_4 至多为 3，而 x_1、x_5 和 x_6 至少为 $k-2$。此外，要么 x_2 至少为 $k-2$且 x_3 至多为 3，要么 x_3 至少为 $k-2$ 且 x_2 至多为 3。注意，当 i 分别等于 2、5 和 8 时，交换 x_i 和 x_{i+1} 会得到一个坐标满足相同界限的格点。此外，所得的点仍属于 $\mathcal{X}_{P,\,Q}(k)$，因为这三次交换相当于通过置换 $\mathbb{R}^3$ 的第二和第三个坐标来变换 P 和Q。因此，不妨设 x 是 $\mathcal{X}_{P,Q}(k)$ 中的一个点，使得 x_1、x_2、x_5 和 x_6 至少为 $k-2$，而 x_3 和 x_4 均至多为 3。

然而，如果 x_3 为负数，那么由引理 5.5 可知，x_1、x_2、x_5 和 x_6 至少为 $k-6$，而 x_3 至少为 -4，x_4 至多为 6。

特别地，在这两种情形下，当 i 等于 1、2、5 或 6 时，满足 a_i 等于 $k-x_i$ 的来自 $\mathbb{R}^6$ 的格点 a 属于 $[0,6]^2\times[-4,6]\times[0,6]^3$；当 i 等于 3 或 4 时，满足 a_i 等于 x_i 的格点 a 属于 $[0,6]^2\times[-4,6]\times[0,6]^3$。根据构造，$\phi_k(a)$ 恰好是 x 在 $\mathbb{R}^6$ 上的正交投影。为了证明 a 属于 $\mathcal{A}$，因此只需证明 a_6 至少为 $-a_3$。根据命题 5.4，x_6-x_3 至多为 k，用 a 的坐标表示，这意味着 a_6 至少为 $-a_3$。因此，a 属于 $\mathcal{A}$，如所需。 ∎

参考文献

[1] Noga Alon 和 V˘an H. V˘u, *Anti-Hadamard matrices, coin weighing, threshold gates, and indecomposable hypergraphs*, 《组合理论杂志》A辑 79 (1997), 133–160。[2] Amir Beck 和 Shimrit Shtern, *Linearly convergent away-step conditional gradient fornon-strongly convex functions*, 《数学规划》164 (2017), 1–27。[3] Antoine Deza、Zhongyuan Liu 和 Lionel Pournin, *Kissing polytopes in dimension 3*, 《实验数学》, *to appear* (2025)。[4] Antoine Deza、Zhongyuan Liu 和 Lionel Pournin, *Small kissing polytopes*, 《越南数学杂志》53 (2025), 第 4 期, 901–913。[5] Antoine Deza、Shmuel Onn、Sebastian Pokutta 和 Lionel Pournin, *Kissing polytopes*, 《SIAM离散数学杂志》38 (2024), 第 4 期, 2643–2664。[6] Ronald L. Graham 和 Neil J. A. Sloane, *Anti-Hadamard matrices*, 《线性代数及其应用》62 (1984), 113–137。[7] David H. Gutman 和 Javier F. Pe˜na, *The condition number of a function relative to aset*, 《数学规划》188 (2021), 255–294。[8] Simon Lacoste-Julien 和 Martin Jaggi, *On the global linear convergence of Frank–Wolfe optimization variants*, 《第 28 届国际神经信息处理系统会议（NIPS）论文集》, 2015 年, 第 496–504 页。[9] Javier F. Pe˜na, *Generalized conditional subgradient and generalized mirror descent: du-ality, convergence, and symmetry*, arXiv:1903.00459 (2019)。[10] Javier F. Pe˜na 和 Daniel Rodr´ıguez, *Polytope conditioning and linear convergence ofthe Frank–Wolfe algorithm*, 《运筹学数学》44 (2019), 第 1 期, 1–18。[11] Luis Rademacher 和 Chang Shu, *The smoothed complexity of Frank–Wolfe methods via conditioning of random matrices and polytopes*, 《数理统计与学习》5 (2022), 273–310。[12] Igor R. Shafarevich 和 Alexey O. Remizov, *Linear algebra and geometry*, Springer, 2013。