arXiv:2601.03188v1 [math.AP] 6 Jan 2026

次主控准模与谱不稳定性

PELLE BROOKE BORGEKE

摘要。本文将在一系列文章中探讨半经典准模态 $u(h,b)$，即近似解 $P(h)u(h) \sim 0$，它们取决于$0 < h \leq 1$和 b（次主符号）。我们研究一个伪微分算子 $P(x,hD_x; h^n B_{n\geq 1})$，其双特征线横截相交，且主符号具有二重重数$p = dp = 0$，位于 $(x_0,\xi_0,) \in \Omega \subset T^*(X)$ $X \subset \mathbb{R}^{2n}$ 中。鉴于这一点，我们转而研究次主符号 $B_1(x,\xi) = b = \alpha(x,\xi) + i\beta(x,\xi)$，并得出结论：我们得到的输运方程取决于 b；对于 β，符号发生变化时，可得到支集较小的近似解。这些模态可用于估计谱不稳定性或伪谱。我们还探讨了将模型算子分解为 $P(h) = h^2 D_1 D_2 + hB(x,hD_x) = h^2 P_1 P_2$ 的可能性，这样实际上便消除了次主符号，因此不存在 β-条件。在后续文章中，我们将考察具有更复杂算子及双特征线相切交点的不同情形，从而推广本文的研究结果。

1. 引言

本文是系列论文之一，研究半经典拟模存在的条件， $u(h,\ b)$，即近似满足 $P(h)u(h,\ b) = 0$的函数。它们依赖于小参数$h \in (0,1],$，在本文中也依赖于我们模型算子的次主符号 b，$P(h) = h^2 D_1 D_2 + hB(x,\ hD_x)$（符号， $p_1 p_2 + b,\ \ b \in S^1$），该算子是伪微分算子的简化微局部替代，通常还带有$D_x = -i\partial_x$

$$P(x,hD_x; h^n B_{n\geq 1}) = P(x,hD_x) + hB_1(x,hD_x) + h^2 B_2(x,hD_x)\dots \tag{1.1}$$

该算子在小邻域 Ω $p = dp = 0$ 内的主符号具有二重重数，因此我们转而得到次主控拟模态。如果存在这些拟模态 $u(h,\ b)$，我们可以预期出现谱不稳定性或伪谱。本研究的新意在于，除了研究谱分析中的此类拟模态外，我们还发现拟模态出现或不存在需要满足若干不同条件，

日期：2026年1月6日。2010数学主题分类。主要分类。关键词和短语。半经典拟模、标准形、次主符号、输运方程、伪谱。

例如，通过因式分解为 $P_1(x,\ hD_x)P_2(x,\ hD_x;\ hB(x,\ hD_x))$，从而实际上消除了次主控。我们探讨了不同类别的算子，并进一步发展和完善了最初在局部可解性的偏微分方程理论中提出的证明方法。在这篇首篇文章中，我们考察一类具有横截双特征线交点的算子。在第二篇文章中，我们考虑一类更复杂的算子，其主符号同样具有重特征 p，但双特征线交点为相切交点。伪谱范数估计见下方流程。 [1]

$$(u(h,b))[h][P(h)][\dot{\zeta}][\dot{\xi}_1][\dot{\xi}_2](|R(h,\zeta)| = \frac{\|u(h,b)\|}{\|P(h)u(h,b)\|_{L_2}} \longrightarrow \infty; \tag{1.2}$$

$$(u(h,b)) \in C^\infty, ||(u(h,b))|| = 1, P(x,\xi) = \xi_1\xi_2, p = dp = 0 \wedge (\xi_1 = 0, \xi_2 = 0), \tag{1.3}$$

$$0 < h \leq 1, h \to 0, \zeta = 0;\ b(x,\xi) = \alpha + i\beta). \tag{1.4}$$

我们将在此找出并证明次主控所需的条件，以便将其添加到上文的自由变量 $b(x,\ \xi)$中（若变量（1.2）—（1.4）不在量词中，则称其为“自由”变量）。我们使用 $P(h)$ [2]，在试探形式 v_h下寻找近似解

$$[P(h)][v_h][B(x,hD_x)](P(h)v_h = h^2D_1D_2v_h + hB_0(x,hD_x)v_h \sim 0; \tag{1.5}$$

$$B(x,hD_x) = A_1hD_1 + A_2hD_2 + R(x) \in \Psi^1 \wedge A_1, A_2, R(x) \in \Psi^0, \tag{1.6}$$

$$C^\infty \ni v_h(b) = e^{ig/h^\alpha}a(x,b);\ g = x_2\xi_2)\ . \tag{1.7}$$

这里，“α”是 h 指数中所使用的参数之一，用于控制输运方程组。在主定理中，我们发现，在此设置下获得拟模态的条件是：次主符号的虚部 $\beta(x,\ \xi)$必须在一条极限双特征线上变号。[3] 随后，我们称算子 (1.1) 在 Ω。中具有 β-条件的横截次主标准形。在第4节中，我们研究一个具有相同条件的算子，但由于该算子的因式分解，我们无法构造拟模态。全文安排如下：在第2节中，我们介绍证明方法并讨论若干问题。在第3节中，我们证明定理。第4节是关于上述因式分解的例子。此后，我们添加了附录，以使本文

[1]我们在此采用这种格式，将陈述和条件集中放在协议（规则和条件）中，并首先列出量词：对所有 (x)，存在 $[x]$ 且唯一的 $[\dot{x}]$。这里使用。点号，仅在显而易见的情况下使用，以避免过多括号。我们在此受到 [11] 的启发。更多详情见附录C。[2]在此，我们将预解式 $R(h,\ \zeta)$ 化为 $R(h,\ 0) = R(h)$。若将 $P(h) = (P(h)+\zeta)$ 作为算子来研究，那么给 $P(h)$ 加上一个常数，结果的变化至多为一个平移。因此，可以忽略（减去）ζ在 $(P(h)u(h) - \zeta)^{-1}$ 中的作用。[3]由于我们有 $dp = 0$，哈密顿方程 $(\partial_\xi p,\ -\partial_x p)$ 的解在 $\xi_1 = \xi_2 = 0$ 处为零，而此处的双特征线就只是一个点。因此，我们研究的是该点，而不是一条极限双特征线。更多详情见附录A或 [4]。

内容自洽。其中，首先介绍一些预备知识，以及为适应我们对谱问题的研究而对几何所作的必要重新定义；随后，在第二个附录（B）中简要介绍伪谱；最后，在（C）中对本系列文章所使用的记号和术语进行说明。

2. 证明方法

在证明中，我们使用了一组输运方程，这组方程曾被 Hörmander [6] 用于研究线性微分算子的可解性问题，也被 Dencker 在 [4] 、Mendoza 和 Uhlmann 在 [8], 中采用；他们同样研究了具有二重重数的算子，此外还有其他研究类似问题的学者。在这里，我们将这一框架的部分内容用于另一个领域——半经典分析，以寻找准模态，从而使$Pu(h) \sim 0$ 能够与伪谱问题联系起来。我们对证明方法作了调整和简化，以确保它能顺利处理此处所需的所有参数和细节。诚然，证明仍会相当技术化，但我们会在证明过程中讨论其中的一些细节。我们还证明了若干引理，将证明拆分成较小的部分，从而简化下一节的内容。这样，我们就得到了一个更短、更简单的主要证明，篇幅略多于三页。我们将使用 Duistermaat [5] 给出的通常渐近展开的半经典版本（经 e^{-ig/h^α}共轭），来计算模型算子作用于试探形式 $v_h(b) = e^{ig/h^\alpha}a(x)$的结果。

$$e^{-ig/h^\alpha}(P(h)e^{ig/h^\alpha}a)(x) = p(x, h\partial_x g/h^\alpha) \tag{2.1}$$

$$+hb(x, h^{1-\alpha}\partial_x g)a + h\sum_j \frac{\partial}{\partial\xi_j}p(x, h^{1-\alpha}\partial_x g)D_j a \tag{2.2}$$

$$+\frac{1}{2}h^2\sum_{ij}\frac{\partial^2}{\partial\xi_i\partial\xi_j}p(x, h^{1-\alpha}\partial_x g)D_iD_j a + \mathcal{O}(h^3). \tag{2.3}$$

对于我们的算子类，由于主符号只是 $p = \xi_1\xi_2$，因此程函[4] 方程 $p(x, h^{1-\alpha}\partial_x g)a = 0$，若我们取仅依赖于 x 变量之一的 $g(x)$，使得 $g(x) = \xi_2 x_2$。因此，次主符号会出现在第一个输运方程中。我们研究的主符号为 p，在微局部意义下可在邻域 Ω 内分解为因子 $p = p_1p_2$ 。标准形的化简取自 [1], ，其中通过 $h = 1$完成。此处并无限制，因为我们总能通过变量变换重新缩放到这种情形，正如 [12]第 57 页所示。

$$\tilde{x} := h^{-1/2}x,\ \tilde{\xi} := h^{-1/2}\xi,\ a_h(\tilde{x}, \tilde{\xi}) := a(x, \xi). \tag{2.4}$$

之后，我们改用半经典傅里叶积分算子。首先介绍三个参数。

[4]“程函”一词源自希腊语 $\epsilon\iota\kappa\omega\nu$ ，意为像，或仅仅是图标。

引理2.1。 我们输运方程组中的参数 α、β 和 γ 构成半经典参数 $1 < h \leq 1$ 的单位分解，使得$h = h^{\alpha+\beta+\gamma}$。它们是实数，用于半经典变量的指数中，以平衡方程组并调整次主符号，满足

$$[\alpha, \beta, \gamma](\alpha + \beta + \gamma = 1, 0 < \beta < \gamma \leq \alpha < 1;\ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}(0, 1)). \tag{2.5}$$

它是 $\mathbb{R}^3$ 中的一个平面，其顶点为 $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$。

证明。 我们可以写成 $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, 0, 0) + s(-1, 0, 1) + t(0, -1, 1)$,由此得到

$$\begin{cases} 1.\ \alpha = 1 - s \\ 2.\ \beta = -t \\ 3.\ \gamma = s + t \\ 4.\ \alpha + \beta + \gamma = 1 \end{cases} \tag{2.6}$$

若取 s, t 为正数，我们发现 $(0 < \beta < \gamma \leq \alpha < 1)$。 方程 (4.) 来自 h ($\xi \mapsto h\xi \mapsto hD_x$) 中的半经典量子化，以及 $g(x) = x_2 h\xi_2/h^\alpha$ 的微分运算，这使得 $h^{1-\alpha}$ 出现在指数中。坐标变换对长度坐标贡献 γ，对微分运算贡献 $-\gamma$，在这种情况下我们得到 $h^{1-\alpha-\gamma}$。我们定义 $\beta := 1 - \alpha - \gamma$，若使用 $\gamma \leq \alpha$. 中的等式，这可简化为 $\beta = 1 - 2\gamma$。这在某些情况下会很有用；它通过 $1 = 2\gamma + \beta$ 指定参数，然后我们必须选择 $\gamma = 2j_{=2|3}\beta$，这意味着

$$(\beta = 1/(2j_{=2|3} + 1)) \Leftrightarrow (\beta = 1/5 \mid \beta = 1/7).$$

□

参数“γ”改变坐标（ $x_1 = t$和 D_1除外），使得$b(t,\ h^\gamma x,\ h^\beta \xi_2) \mapsto b(t,\ h^\beta \xi_2) + \mathcal{O}(h^\gamma)$ 位于 $\Sigma_2(z)$，即预期发生符号变化的 $t = x_1$ 线上。 γ 的取值也必须足够大，以避免余项变得无界。这意味着，我们采用通常的对应关系：将 S^n 视为符号空间，将 Ψ^n 视为算子空间，

$$(S^n(\mathbb{R}^n) \ni (x_{j>0}, \xi_{j>0}) \mapsto (x_{j>0}, hD_{j>0}) \in \Psi^n) \tag{2.7}$$

$$\wedge (S^1 \in \xi_{j>0} \mapsto h\xi_{j>0} \in \Psi^1). \tag{2.8}$$

但我们通过在（$x_{j>1},\ \xi_{j>1}$）上应用 h^γ ，在算子空间中进行坐标变换，

$$\Psi^n(\mathbb{R}^n) \ni (x_{j>1}, hD_{j>1}) \mapsto (h^\gamma x_{j>1}, h^{1-\gamma} D_{j>1}) \in \Psi^n(\mathbb{R}^n). \tag{2.9}$$

这种尺度变换或重新缩放技术在半经典分析中很常见，其中 h是其标志性特征；而这个字母会因不同目的而采用不同的尺度变换。我们已经重新缩放到 $h = 1$ ，以便使用经典结果；更多相关内容，参见 [12]。下面给出 WKB形式

$$(v_h(x) = e^{ig/h^\alpha} a(x)) \wedge (g(x) = x_2\xi_2) \tag{2.10}$$

是试探形式 v_h，模型算子作用于其上。我们将证明引理并给出与这些参数相关的例子，这些结果

也可以用于下文。稍后我们将看到，使用 Duistermaat´ 公式并采用坐标 ((*t*, *x*) | (*x*1, *x*′)) 后，我们得到

$$h^{2-\alpha}\xi_2 D_1 a + hb(x_1, hx', h^{1-\alpha}\xi_2)a + h^2 D_1 D_2 a + \mathcal{O}(h^2) \tag{2.11}$$

以及展开 $\mathcal{O}(h^2)$ 的余项。思路是得到一个含有 $D_1 a$ 和 ba（即第一项和第二项）的方程，将其作为第一个输运方程，并用积分因子求解，把其他项留给后续方程。这样我们便得到一个依赖于 b 的指数函数 $a(x, b)$。如果对除 x_1 和 D_1 以外的所有项进行尺度变换，并在第二步中对 x' 使用泰勒展开，余项为 $\mathcal{O}(h^{1+\gamma})$，再结合 β 的定义，我们得到

$$h^{1+\beta}\xi_2 D_1 a + hb(x_1, h^\beta \xi_2)a + h^{2-\gamma} D_1 D_2 a + \mathcal{O}(h^{1+\gamma}) + \mathcal{O}(h^{2-\gamma}). \tag{2.12}$$

现在我们可以提出 $h^{1+\beta}$，从而将 $\xi_2 D_1$ 留给第一个输运方程，同时不使余项变得无界；此时余项变为 $\mathcal{O}(h^{\gamma-\beta})$ 和 $h^{1+\beta}\mathcal{O}(h^{1-\gamma-\beta})$。我们将进一步简化，只使用 β 作为单位参数。这是很自然的，因为商 $\gamma/\beta > 1$ 在这里很重要。我们知道 β 整除 γ，并且如果 $\gamma = 2\beta$，就得到 $\alpha = 1-3\beta$。总之，$1-3\beta+\beta+2\beta = 1$。此外，$\alpha/\beta = (1-3\beta)/\beta = 1/\beta - 3 = x - 3$，其中 $x \in \mathbb{N}$ 是模因子。稍后我们会看到，这是系统所需的最少信息。对于一般的余项（也包括 $\mathcal{O}_{\mathcal{G}}$），在对除 D_1 以外的每一项进行尺度变换时，令 γ，因此 $h^\lambda D_1^\lambda$，$h^{\mu-\mu\gamma} D_{x'}^\mu$，且 $h^{\kappa-\kappa\gamma-\kappa\alpha}\xi_2^\kappa$；经过化简、因式分解，并使用 $\beta = 1-\alpha-\gamma$ 和（| : = 异或），我们得到

$$\mathcal{O}(h^{\kappa\beta+\lambda+(1-\gamma)\mu}) \tag{2.13}$$

$$= h^{1+j_{=1|2}\beta}\mathcal{O}(h^{m+(\kappa-j_{=1|2}-(\gamma/\beta)\mu)\beta}) \tag{2.14}$$

$$= h^{1+1|2\beta}\mathcal{O}(h^{m+((\kappa-1|2)-2|3\mu)\beta}) \tag{2.15}$$

借助 $m = \lambda+\mu-1.$，我们将这一结果归纳为一个引理，并将在本文及本系列后续文章中使用。

引理 2.2. 对于双特征线横截和相切交点这两类算子的余项，我们在 *(2.16)* 中分别使用最低数值 $1 \wedge 2$ 和 $2 \wedge 3$，其中 $m = \lambda+\mu-1$。

$$h^{1+1|2\beta}\mathcal{O}(h^{m+((\kappa-1|2)-(2|3\mu))\beta).} \tag{2.16}$$

证明。对于有限余项，我们必须有 $\gamma > \beta$。此外，$\gamma - \beta > 0$.。参数集 $(0, \beta, \gamma, \alpha, 1)$ 中有以下元素，且正如我们

[5]这样，这些参数就起到了平衡因子的作用，例如化学计量学中的化学反应。通过对涉及的分子数量进行尺度变换即可实现这一点。例如，若有 X，Y，Z和 W，且整数为 k，l，m和 n，那么我们必须选择整数（参数k，l，m和 n），使得 $kX + lY \longrightarrow mZ + nW$满足质量守恒。[6]当然，我们也可以使用显式数值，例如 $2/5+1/5+2/5$，这是该函数的最低显式分母，但这些数最终都具有

$1-\ j+1\ \beta+(),\ ,$ 的

$\beta + j\beta = 1\ \ j = 2\ 3.$
形式。

所知的阶数，这给出 $\gamma-\beta=\beta$，所以 $\gamma=2\beta.$。由此可知，若我们提出公因子 $h^{1+2\beta}$，则必有 $\gamma=3\beta$，依此类推。对于 α，我们得到隐式形式$\alpha=1-j_{=3|4}\beta$, ，因此两种方法都可以使用。 [7] □

例2.3. 我们可以用展开中的 $h^{\alpha}D_1D_2a$ 来检验这一点，并且 wit h $j=1$ 我们得到

$$\mathcal{O}(D_1D_2a)=\mathcal{O}(h^{(1+1-1)+(0-1-2)\beta})=\mathcal{O}(h^{1-3\beta}).$$

对于 ξ_2D_1，我们得到 $\xi_2D_1=\mathcal{O}(1)$；但对于第一个输运方程，我们得到 $D_1=\mathcal{O}(h^{-\beta})$，这是因为进行了因式分解。

例2.4. 从另一个输运方程组中，我们提出公因子 $1+2\beta$。于是有 $\gamma=3\beta$ 和 $\alpha=1-4\beta.$。然后我们可以由此确定第一个输运方程

$$h^{1+2\beta}\mathcal{O}(h^{m+((\kappa-2)-3\mu)\beta)}.$$

并且我们得到

$$(\xi_2^jD_1a)=h^{1+2\beta}\mathcal{O}(h^{(\kappa-2)\beta)}$$

它将像上面的例子一样受到有界限制，

$$h^{1+2\beta}\mathcal{O}(h^{((\kappa-2)\beta)})=\mathcal{O}(1)$$

然后 $\kappa=2.$ 我们得出以下结论

$$h^{1+2\beta}\xi_2^2D_1a=hb(t)a\wedge a(t)=e^{-i\int b(t)dt/\xi_2^2h^{2\beta}}. \tag{2.17}$$

现在我们总结一下关于这些参数的结果

引理2.5。 输运方程组中 $1=x\beta$ 的模因子 x 是多余的。我们只需要

$$\begin{cases} 1.\ \alpha=1-(j_{=1|2}+2)\beta \\ 2.\ \beta=\beta \\ 3.\ \gamma=(j_{=1|2}+1)\beta \\ 4.\ \alpha+\beta+\gamma \\ =1-(j_{=1|2}+2)\beta+\beta+(j_{=1|2}+1)\beta=1 \end{cases} \tag{2.18}$$

可能的模因子是横截情形下的5 和7 切向情形下的，正如引理*2.1*的证明中所指出的。

我们还需要一个引理，讨论解 $v_h(x)$ 的试探形式变换

$$v_h(x)=e^{ig/h^{\alpha}}\sum_{j=0}^{N}a_jh^{j\beta},\quad a_j\in C^{\infty}, \tag{2.19}$$

[7]我们用“⊻”表示异或，即XOR(0110)；对于谢弗笔画（与非）(0111)，我们用 ↑，它与（或非）(0001) ↓ 都属于同一类。这是因为异或在数学交流中很有用，而且我们认为用 $a|b:=(a\vee b)\wedge\neg(a\wedge b)$。来表示最为合适。

为 $u(h)$，其中 $\|u(h)\| = 1$. 该结果将给出 $||v_h||$的上界估计和下界估计，我们记作 $\mathscr{B}(t) = \int_0^t b(t)dt/\xi_2$，坐标为 $(t,\ x) = (x_1,\ x')$。该引理源自 [6],，但此处以半经典形式给出。

引理 2.6. 我们在上界估计中假设

$$v_h(x,b) = e^{ig/h^\alpha} \sum_{j=0}^{N} a_j(x,b)h^{j\beta}, \quad a_j \in C^\infty \tag{2.20}$$

我们有

$$(\phi_j)(h)[v_h][a_j][\mathscr{B}(t)]\big(||v_h|| \le C,\ a_j(t,x) = \phi_j(t,x)e^{-i\mathscr{B}(t)/h^\beta}; \tag{2.21}$$

$$\mathscr{B}(t) \in C^\infty, \operatorname{Im}\mathscr{B} \le 0, \phi_j(t,x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n), 0 < h \ll 1\big). \tag{2.22}$$

对于下界估计，我们有

$$[v_h](\phi_0), [\mathscr{B}(0)][\beta, c][h](||v_h|| \ge ch^{(n\alpha+\beta)/2}; \tag{2.23}$$

$$\phi_0(0,0) \ne 0, \mathscr{B}(0) = 0,\ \beta, c > 0, 0 < h \ll 1). \tag{2.24}$$

如果我们对 $\mathscr{B}$ 和$(j)(\phi_j)$有一致有界性，那么这些估计是一致的。

证明。 由于我们有一个实部非正的指数，上界估计是显然的。对于下界估计，我们取 $\psi_h(t,x) = \psi(h^{-\beta}t, h^{-\alpha}x)$ $\psi \in C^\infty 0$, 并考虑

$$\langle \psi_h, v_h\rangle = \int \mathbb{R}^n \int \mathbb{R}\psi(h^{-\beta}t, h^{-\alpha}x)e^{ix\cdot\xi h^{-\alpha}} \sum_j \phi_j(t,x)e^{-i\mathscr{B}(t)/h^\beta}h^{j\beta}dtdx.$$

我们进行坐标变换（$t,\ x$）$\mapsto$（$h^\beta t,\ h^\alpha x$），得到

$$h^{-(n\alpha+\beta)}\langle \psi_h, v_h\rangle = \iint \psi(t,x)e^{ix\cdot\xi} \sum_j \phi_j(h^\beta t, h^\alpha x)e^{-i\mathscr{B}(h^\beta t)/h^\beta}h^{j\beta}dtdx \tag{2.25}$$

$$\to \iint \phi_0(0,0)e^{-i\mathscr{B}'(0)t}\psi(t,x)e^{ix\cdot\xi}dtdx = c_0$$

其中我们使用了泰勒展开，因此 $\mathscr{B}(h^\beta t) \sim h^\beta\mathscr{B}'(0)t$，并使用了控制收敛，因为 $h \to 0$ 当 $||\psi_h||^2 = h^{(n\alpha+\beta)/2}||\psi||^2$ 且系数 $c_0 \ne 0$，对于 ψ的适当选择成立。对于足够小的 h，我们特别有

$$h^{(n\alpha+\beta)/2}\frac{|c_0|}{2} \le h^{-(n\alpha+\beta)/2}|\langle \psi_h, v_h\rangle|.$$

鉴于该极限，利用柯西-施瓦茨不等式和尺度变换，对于充分小的h，有

$$h^{(n\alpha+\beta)/2}\frac{|c_0|}{2} \le h^{-(n\alpha+\beta)/2}|\langle \psi_h, v_h\rangle| \le |\psi||v_h|,$$

由此可得该估计。 □

下面，我们回顾该定理的术语。p 的值域的闭包是

$$\Sigma(P(h)) = \Sigma(p) = \overline{\mathrm{Ran}}(p) \tag{2.26}$$

这些驻点 是

$$\Sigma_2(P(h)) = d_\xi p(x_0, \xi_0) = 0. \tag{2.27}$$

该驻点水平集 $\Sigma_2(z) = p^{-1}(z) \cap \Sigma_2(P(h))$

$$[x_0][\xi_0](p(x_0, \xi_0) = \zeta, d_\xi p(x_0, \xi_0) = 0, \zeta \in \Sigma(P(h))). \tag{2.28}$$

为了证明我们关于预解算子范数的估计，我们将使用以下结果。

定义 2.7。 我们将 $v = v_h(x, b)$ 视为关于 $x \wedge b$的 h-依赖函数以及算子范数

$$\|A\| = \sup_{v \neq 0} \frac{\|Av\|}{\|v\|} \tag{2.29}$$

L^2 中预解算子范数的半经典极限定义为

$$\|R(h)\| = \|(P(h))^{-1}\| = \sup_v \frac{\|(P(h))^{-1}v\|}{\|v\|} = \sup_{v = P(h)u} \frac{\|(P(h))^{-1}v\|}{\|v\|} \tag{2.30}$$

$$= \sup_u \frac{\|u\|}{\|P(h)u\|} \geq \frac{\|u(h)\|}{\|P(h)u(h)\|} \to \infty; \tag{2.31}$$

$$[u(h)][h](\frac{\|u(h)\|}{\|P(h)u(h)\|} \to \infty, ||P(h)u(h)|| \sim 0, \|u(h)\| \sim 1, h \to 0). \tag{2.32}$$

这个极限是判定我们得到的是伪谱、没有模态，还是仅有特征模态的方法；该表达式不存在。

注 2.8。我们还要指出，给出双特征线的 $\gamma' = (\dot{x}(t)\ \xi(t)) = (\partial_\xi p, -\partial_x p)$ 的解在此情形下为 $(\partial_\xi p_1, -\partial_x p_1) = (1, 0)$，因此 $(\gamma = t + c, d)$；但是，由于我们考察的是零双特征线$p(\gamma(t)) = 0$，这只是沿 t 方向的直线(x_1)。对于 p_2，我们得到相同的结果，但此时直线位于 x_2 方向，因此交点是横截的；事实上，这些直线生成平面。在我们的情形下，在 $\Sigma_2(P(h)) = d_\xi p(x_0, \xi_0) = 0$ 处具有二重重数，因此双特征线可能退化为一点。这意味着，我们在辛叶状结构上考察的是从 $\Sigma_2(P(h))$ 外部而来的极限双特征线集合 (Γ_j)，其中开集 $\Omega \supset \Sigma_2(P(h))$。当双特征线按弧长参数化并且在 C^∞ 中一致有界时，Γ_j 是一个闭且有界的集合，因此它是序列紧的；根据博尔查诺–魏尔施特拉斯定理，它具有一个子序列 Γ_{j_k}，该子序列收敛于 $\Sigma_2(P(h))$ 中的一条光滑曲线 Γ（可能是一个点）。更多相关内容请参阅 [4]。

接下来，我们采用 [9], 的半经典单射伪谱，这适用于我们的理论研究。

定义 2.9。 对于 $P(h)$ $0 < h \leq 1$, 作用于 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上的半经典算子族，其谱定义为满足以下条件的 $\sigma_s(P(h)) = z \in \mathbb{C}$： $P(h) - z$ 不可逆。半经典伪谱记为 $\sigma^N_{scps}(P(h))$, 并由 2.33 定义

$$(h_0)[P(h)][h][\zeta](\|(P(h)-\zeta)^{-1}\| \geq Ch^{-N}, 0 < h < h_0, C > 0, N \geq 0, \zeta \in \mathbb{C}).$$

我们可以将表述改为 $(\|(P_h - \zeta)u\| < Ch^N)$ 或 $(\|P_h u\| < Ch^N)$，其中 $||u(h)|| = 1$，以得到族 $P(h)_{0<h\leq 1\cdot}$ 的半经典单射伪谱 $\sigma^N_{scips}(P(h))$。如果不等式对任意 N 都成立，我们就称其具有无穷指标伪谱，并记为 $\zeta \in \sigma^\infty_{scps}(P(h))$ 和 $\zeta \in \sigma^\infty_{scips}(P(h))$。

注 2.10。 可以证明 $\sigma^N_{scips}(P(h)) \subset \sigma^N_{scps}(P(h))$，参见 [9] 和附录 B。由于 $P(h)$ 与 $P^*(h)$ 具有相同的预解范数，而且

$$\sigma^N_{scips}(P(h)) \cup \sigma^N_{scips}(P^(h)) = \sigma^N_{scs}(P(h)) \tag{2.34}$$

并且由于我们考虑的是对 $P(h)$ 和 $P^*(h)$ 都成立的条件，因此我们考虑 $\sigma^N_{scips}(P(h)) = \sigma^N_{scps}(P(h))$，或 $\sigma^\infty_{scips}(P(h)) = \sigma^\infty_{scps}(P(h))$。我们还注意到，如果 $R(h)$ 不是双射，那么定义中的 $z \in \sigma_s(P(h))$ 会成立；在这种情况下，我们定义 $||R(h)|| = \infty$，因此这里我们研究预解式为双射的情况。

我们可以根据需要调整 Duistermaat 公式，加入 $g = x_2\xi_2$，并在进行坐标变换 $(hD_j \mapsto h^{1-\gamma}D_j;\ \xi_2 \mapsto h^{-\gamma}\xi_2)$ 和 $(x_j \mapsto h^\gamma x_j,\ j > 1)$、利用本章中的引理、令 $\beta = 1 - \alpha - \gamma$ 并利用缩放因子 γ 可以确定为 $\gamma = (1 + j)\beta$，其中 $j = 1, 2$。由此得到 $\gamma = 2\beta$。 $1 = x\beta$ 中的模因子 x 是多余的，因此我们取 $\gamma = 2\beta$ 和 $\alpha = 1 - 3\beta$。我们还对 $hb(t,\ h^{2\beta}x,\ h^\beta\xi_2) = hb(t,\ h^\beta\xi_2) + \mathcal{O}(h^{1+2\beta})$ 使用泰勒展开，并且当 $2\beta = \gamma.$ 时，这个余项最大。于是我们得到

引理 2.11。 在横截情形下，展开公式可化简为

$$e^{-ix_1\xi_2/h^{1-3\beta}}(P(h)e^{ix_1\xi_2/h^{1-3\beta}}a)(x) \tag{2.35}$$

$$= hb(t, h^\beta\xi_2)a + h^{1+\beta}\xi_2 D_1 a + h^{2-2\beta}D_1D_2a + \mathcal{O}(h^{(1+2\beta)}). \tag{2.36}$$

对于 α，我们将采用以下几种可能性： $1 - 3\beta$, α 或 2β，以最适合呈现的方式为准。本节最后讨论次主符号的重要性质。

引理 2.12。 次主符号 $b(x, \xi) = \alpha + i\beta = b(t, h^\beta\xi_2)$ 可通过泰勒展开写为

$$b(t, h^\beta\xi) = b(t) + \mathcal{O}(h^\beta). \tag{2.37}$$

我们得到虚部的映射

$$t \mapsto (\beta(t)|_{\Sigma_2(P(h))} + \mathcal{O}(h^\beta)). \tag{2.38}$$

当 h 足够小时，它在 0 附近的某个区间内会变号。因此，我们得到 $D_1 i\int_0^t b_h(t)dt/\xi_2 = b_h(t)/\xi_2$，作为该解的积分因子。

证明。 h 足够小时就会发生这种变化；通过选择 ξ_2 的符号，使其符号由正变负，我们可以令 t 为 $-t$。这意味着 $\mathrm{Im}\int_{t_0}^{t} b(t)dt$ 先在该区间内递增，然后递减，因此它在该区间内有一个最大值。若减去一个常数，我们可以令这个最大值为零，于是 $\mathrm{Im}\int_{t_0}^{t} b(t)dt \leq 0$，且指数有界。我们从这个最大值处开始对 $b(t)$ 积分；经过平移后，可以假设该最大值位于 $t_0 = 0$，于是得到 $\int_0^t b(t)dt$。我们还注意到，函数 $b(t)$ 在 C^∞. □中一致有界

3. 定理的证明

继上一节完成了半数以上的工作之后，我们现在已经为定理做好了准备。

定理 *3.1*。设 $P(x, hD_x; h^n B_{n\geq 1}(x, hD_x))$ 的次主部是 $B(x, hD_x)$ 在 h 中的渐近展开，并且具有实主符号 $p = P(x, \xi)$，该符号在 $(x_0, \xi_0) \in \Omega$ 处微局部分解为因子 $p = p_1 p_2$。假设 $p^{-1}(\zeta)$ 是两个超曲面的并集，它们在 $\Sigma_2(P(h))$ 处具有横截的对合的交，并且 $d^2_\xi p(x_0, \xi_0) \neq 0$ 对于 $\zeta \in \Sigma(P(h))$ 成立。如果次主符号 $\beta(x, \xi)$ 的虚部在 $\Sigma_2(\zeta) \cap \Omega$ 中的一条极限双特征线上变号，那么 $\zeta \in \sigma^\infty_{scips}(P(h))$，即无穷阶的半经典单射性伪谱。

我们从证明中注意到，近似解 $u(h) \in L^2$ to$P(h)u(h) \sim 0$ 支持在邻域 Ω 内，其中标准形$p(x, \xi)|\Omega$ 存在。由于微局部条件允许我们在证明中使用标准形算子，因此可由下述命题通过肯定前件式推出定理。

命题 3.2. 设条件与定理中的相同，且标准形为

$$p(x, \xi)|\Omega = \xi_1 \xi_2 \tag{3.1}$$

在Ω 邻域内，点(x_0, ξ_0) 处的半经典量子化为

$$P(h) = h^2 D_{x_1} D_{x_2} + hB(x, hD_x)$$

其次主符号为 $\sigma_{sub} P(h))|_\Omega = b$。若次主符号的虚部虚部$b = \beta$在$\Sigma_2(z) \cap \Omega$中的一条极限双特征线上变号，则

$$(N)[u(h, b)][a_{j\geq 0}](||(P(h)u(h, b)|| \leq C_N h^N, N \geq 0, \tag{3.2}$$

$$u(h, b) \in L^2, ||u(h, b)|| = 1; N \in \mathbb{N}). \tag{3.3}$$

证明。在证明中，我们首先求该方程的近似解

$$P(h)v_h = P(h)(e^{ix_2\xi_2/h^{1-3\beta}} a(x)) = 0.$$

我们通过一系列专门为满足本文目的而列出的输运方程来完成这一工作。我们使用上一节引理中的适应性展开公式，并提取出 $h^{1+\beta}$

$$h^{1+\beta}(h^{-\beta}b(t,h^{\beta}\xi_2)a+\xi_2 D_1 a+h^{1-3\beta}D_1D_2a+\mathcal{O}(h^{\beta}). \tag{3.4}$$

如果我们求出前两项，就得到（通过这种方式，因式分解起到了新的尺度变换的作用；我们看到，事实上， D_1 导数现在取决于 $-\beta$，因而是不受限的）

$$D_1a=-h^{-\beta}b_h(t)a{\xi_2}^{-1} \tag{3.5}$$

这给出了第三行

$$h^{1-3\beta}D_1D_2a=-h^{1-3\beta}D_2(h^{-\beta}b_h(t)a{\xi_2}^{-1})=\mathcal{O}(h^{1-4\beta}). \tag{3.6}$$

因此，该项随后才进入方程组。我们得到解

$$a=e^{-i\int_0^t b_h(t)dt/\xi_2 h^{\beta}} \tag{3.7}$$

其中 $D_1 i\int_0^t b_h(t)dt/\xi_2=b_h(t)/\xi_2$， $a_0=a$ 以及 $a_j(t,\ x)=\phi_j(x)e^{-i\int_0^t b_{h(t)}$ $dt/\xi_2h^{\beta}}$出现在渐近展开中。我们进行总结，现在使用 $\alpha=1-3\beta=2\beta$，因为我们可以令 $\alpha=\gamma$

$$\begin{aligned}&e^{-ig/h^{2\beta}}P(x,hD)e^{ig/h^{2\beta}}a=\\&h^{1+\beta}(h^{-\beta}b(t,h^{\beta}\xi_2)a+\xi_2D_1a+h^{2\beta}D_1D_2a+\mathcal{O}(h^{\beta}))+h^{1+\beta}\mathcal{O}(h^{2\beta}),\end{aligned} \tag{3.8}$$

这里我们展示泰勒级数的余项和渐近展开。引理 2.12 将给出.....的条件

$$a=e^{-i\int_0^t(b(t)+\mathcal{O}(h^{\beta})dt/\xi_2h^{\beta}}\sim e^{-i/\xi_2h^{\beta}\int_0^t b(t)dt}. \tag{3.9}$$

现在我们在模项 $\mathcal{O}(h^{\beta})$ [8] 中求解，因为这是使残差项最大的最小数。

$$\begin{aligned}&h^{1+\beta}(\xi_2a+h^{-\beta}b(t)a\\&+h^{2\beta}D_1D_2a+\mathcal{O}(h^{\beta})).\end{aligned} \tag{3.10}$$

我们利用渐近展开的结果

$$v_h=e^{ix_2\xi_2h^{2\beta}}\sum_{j\geq 0}a_j(t)h^{\beta}$$

并得出

$$v_h=e^{ix_2\xi_2h^{\alpha}}e^{-i\int b(t)dt/\xi_2h^{\beta}}\sum_{j\geq 0}\phi_j(x)h^{j\beta},\ \phi\in C_0^{\infty}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n),\ \phi(0)=1. \tag{3.11}$$

[8]一开始，我们使用 β 作为单位因子，以使表述更加一般；然而，现在我们改用模系统，以简化结果。

我们使用截断函数 $\phi \in C_0^\infty$，使得 x 满足 $a_j(t,x) = e^{-i\int_0^t b_{(t)}dt/\xi_2 h^\beta}\phi_j(x)$，并将其记作

$$P(h)v_h \sim e^{ix_2\xi_2 h^{2\beta}} h^{1+\beta}\sum_{j\geq 0} c_j h^{j\beta}. \tag{3.12}$$

我们有

$$c_j \sim \xi_2 D_1 a_j + h^{-\beta}b(t)a_j + S_j(h) \ \sim e^{-i\int_0^t b(t)dt/\xi_2 h^\beta}(\xi_2 D_1\phi_j(x) + R_j(h)) = 0.$$

项 $S_j(h)$ 都含有指数项，因此可以将其提取出来。

$$R_j(h) \in (h^{1+j_{1|2}\beta})\mathcal{O}(h^{\lambda+\mu-1+(\kappa-(j_{1|2}+1)\mu-j_{1|2})\beta}),\ j=1$$

剩下的项属于这种类型，它只是 ϕ_k 的微分运算，对于 $k<j$，其范数一致有界，且界仅取决于 ϕ_k 。项 $h^{2\beta}D_1D_2a$ 将代入展开中的第二个输运方程。该系统如下所示：

$$(0)\quad \xi_2 D_1 a_0 + h^{-\beta}b(t)a_0 = 0$$

$$(1)\quad \xi_2 D_1 h^\beta a_1 + h^{-\beta}b(t)h^\beta a_1 = h^{2\beta}D_2(h^{-\beta}b(t)a_1/\xi_2)$$

$$(2)\quad \dots$$

$$(j)\quad \xi_2 D_1 h^{j\beta}a_{j+1} + h^{-\beta}b(t)h^{j\beta}a_{j+1} = -S_n a_j$$

$$\Leftrightarrow e^{-i\int b(t)dt/\xi_2 h^\beta}(\xi_2 D_1\phi_j(x) + R_n(h)) = 0.$$

与之前一样，现在为了正确处理，我们还必须在未缩放坐标所在的位置使用截断函数，从而得到

$$(N)[h](|\exp(-i\int b(t)dt/h^\beta)| < C_N h^N, a_j = \mathcal{O}(h^N); N\in\mathbb{N}, 0<h\leq 1). \tag{3.13}$$

我们不再使用 $u(h,b)$，而是使用 $v_h(b)$，现在利用引理将其转换为 $u(h,b)$。由于下面的陈述对任意 N 都成立，我们可以用 $N + (n(2\beta)+\beta)/2 = N + (2n+1)\beta/2$ 替换 N 。为了完成证明，我们构造 $u(h)$，使其在 L^2-范数下满足 $||u(h)|| = 1$ 。如果令 $u(h) = v_h/||v_h||$，就得到 $||u(h)|| = 1$，并且

$$||P(h)u(h)|| \leq c_1 h^{N+(2n+1)\beta/2}\ /||v_h||.$$

现在，我们将引理 2.6 中的下界估计用于 v_h ，并结合半经典极限

$$||P(h)u(h)|| \leq (c_1/c_2)h^N = Ch^N. \tag{3.14}$$

$$\|R(h)\| \geq \frac{\|u(h)\|}{\|P(h)u(h)\|} \geq \frac{1}{Ch^N} \to \infty,\ h\to 0. \tag{3.15}$$

现在我们可以写出完整的论述，以及横截情形 下预解算子范数的条件，并附上 $\beta-$条件

(3.16)

$$(u(h,b))[b][h][P(h)][\dot{\zeta}][\dot{\xi}_1,\dot{\xi}_2](||R(h,\zeta)|| = \frac{\|u(h,b)\|}{\|(P(h)-\zeta)u(h,b)\|_{L_2}} \to \infty;$$

$$0 < (u(h,b)) \in C^\infty, ||u(h,b)|| = 1, \operatorname{Im} b(t) = \beta(t) \mapsto \pm t, h \to 0,; \tag{3.17}$$

$$P(h) = h^2 D_1 D_2 + hB(x, hD_x), \zeta = 0, .p = dp = 0 \wedge .\xi_1 = \xi_2 = 0). \tag{3.18}$$

□

4. 湮灭算子因式分解 β-条件

为下一篇文章做准备，我们现在给出一个因式分解所导致的湮灭算子 β-条件的例子。这相当于一种共轭，使我们能够忽略低阶项。我们先考虑次主符号之后带有导数的算子；在这种情况下，这意味着我们可以将其因式分解为

(4.1)

$$P(h) = h^2 D_1 D_2 + hB(x, hD_x) hD_2;\ (x = x_1|x_2); B(x, hD_x) hD_2 \in \Psi^2$$

$$P(h) = h^2 (D_1 + B(x, hD_x)) D_2 = h^2 P_1 P_2. \tag{4.2}$$

例如，若取 $B(x,\ hD_x) \in \Psi^0$，$B = -ix$ 则得到

$$h^2 P = h^2 (D_1 - ix) D_2 = h^2 D_2 A_-. \tag{4.3}$$

这里我们遇到了粒子物理中使用的产生算子 $A_+ = (D_1 + ix_1)$[12]。与湮灭算子 $A_- = (D_1 - ix_1)$ 一起，我们有

$$A_+ = A_-^*. \tag{4.4}$$

注意到

$$v(x) = e^{-(x_1^2+x_2^2)/2} \in S(\mathbb{R}^2) \tag{4.5}$$

是 $z = 0$ 的特征模态

(4.6)

$$e^{(x_1^2+x_2^2)/2} Pv = -(e^{(x_1^2+x_2^2)/2}(\partial_{x_2}(\partial_{x_1}(e^{-(x_1^2+x_2^2)/2}) + x_1 \partial_{x_2}(e^{(x_1^2+x_2^2)/2}))$$

$$= -(x_1 x_2 - x_1 x_2) = 0. \tag{4.7}$$

这意味着预解式 $R_h(0) = (P_h)^{-1}$ 不存在，因为 $z = 0$ 是一个特征值，因此我们无法为 $P(h)v = 0$ 构造 $z = 0$ 的拟模态。现在我们来构造需要求解的输运方程。这里没有余项，因此不需要之前的参数；我们将令 $h \to 0$，以此趋近于 $z = 0$。

$$v_h = \exp(x; h)\phi_{\Sigma j}(x; h) = e^{ix_2/h} e^{-x_1^2/2} \sum_{j \geq 0} \phi_j(x_1, x_2) h^j. \tag{4.8}$$

我们选择 $\zeta \in |z| = 1$，然后使用算子 $P - h\zeta$，并让 h 趋于零。这样，我们就能观察预解算子范数如何变化

当我们趋近特征值 $z = 0$ 时。这里给出了 h 量化（带有共轭 $\exp^{-1}(t,\ x;h)$，以及 $(t,\ x) = (x_1,\ x_2)$ 和 $A_t^- = A(t)-$）

$$\exp^{-1}(hD_2(A_t^-)\exp\phi_{\Sigma j} - h\zeta\phi_{\Sigma j} \tag{4.9}$$

我们计算导数

$$\exp^{-1}(hD_2(A_t^-)(\exp\phi_{\Sigma j}) = \exp^{-1}hD_2(A_t^-(\exp)\phi_{\Sigma j} + \exp A_t^-\phi_{\Sigma j}) \tag{4.10}$$

$$\exp^{-1}D_2(\exp A_t^-\phi_{\Sigma j})); \quad [A_t^-(\exp) = 0] \tag{4.11}$$

$$= \exp^{-1}(D_2(\exp)A_t^-\phi_{\Sigma j}) + (\exp)D_2(A_t^-\phi_{\Sigma j})) \tag{4.12}$$

$$= \frac{i}{h}A_t^-\phi_{\Sigma j} + A_t^-D_2\phi_{\Sigma j} \tag{4.13}$$

最后我们得到

$$\sum_{j\geq 0}(iA_t^-\phi_j h^j + A_t^-D_2\phi_j h^{j+1} - \zeta\phi_j h^{j+2}) \tag{4.14}$$

or

$$\sum_{j\geq 0} i(D_1 - it)\phi_j h^j + (D_1 - it)D_2\phi_j h^{j+1} - \zeta\phi_j h^{j+2}) \tag{4.15}$$

第一个输运方程是

$$A_-(x_1)\phi_1 = 0; \quad \phi_1 = -e^{x_1^2/2}$$

因为 $A_-(x_1)$ 会消去这类项。对于 $\phi_1 = e^{-(x_1^2+x^2)/2} \in S(\mathbb{R}^2)$，第二个方程为零，这一点我们之前已经看到过。这使我们得到 $\zeta\phi_j h^{j+2}$，它不会给出任何拟模态，也不存在 β-条件。在 [2], 中，我们将研究更一般化的问题，并会回到 β-条件的因式分解。

参考文献

[1] Borgeke, P.：非主型半经典伪微分算子的谱不稳定性，硕士论文。隆德大学理学院（2012）。[2] Borgeke Brooke, P.：伪谱准模的次主控，II，arXiv，2025）。[3] Dencker, N.：次主型算子，《分析与偏微分方程》，2017。[4] Dencker, N.：可解性与极限双特征线，《伪微分算子杂志》，2016。[5] Duistermaat, J.J, N.：傅里叶积分算子，Birkhäuser，波士顿，1996。[6] Hörmander, L.：线性偏微分算子分析I-IV，施普林格出版社，柏林，1983。[7] Kato T.：线性微分算子扰动理论，施普林格，1980。[8] Mendoza G.A., Uhlmann G.A.：一类具有重特征的算子局部可解性的必要条件，《泛函分析杂志》52，252-256（1983）。[9] Pravda-Starov, K.：旋转谐振子伪谱的完整研究。《伦敦数学会杂志》（2）73（2006）745-761。[10] Trefethen L. N., Embree, M.：谱与伪谱。普林斯顿大学出版社，2005。[11] Whitehead A. N., Russel, B.：数学原理I, Merchant Books，1910。[12] Zworski, M.：半经典分析。《数学研究生教材》，2012。

附录A. 预备知识

这里，我们定义所研究的半经典与谱环境的一些性质。若光滑流形 Σ 属于 T^*X，其中 X是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个开集，且 T^*X 是余切空间，则称其为对合的 [9]，如果它具有以下性质：对于 T^*X 上的所有光滑函数 u，v，

$$\{u,v\}=\sum_1^N \partial_{\xi_j}u\partial_{x_j}v-\partial_{x_j}u\partial_{\xi_j}v=0.$$

我们将考虑非径向对合流形 Σ，其邻域为 $\Omega \ni (x_0, \xi_0)$，其中标准形 $p=p_1p_2|_\Omega$ 存在。我们将给定的函数

$$a:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{C}\quad \text{defined by}\quad a(x,\xi)\in C^\infty, \tag{A.1}$$

其中 x 是位置，ξ 是动量，将其视为相空间上的经典可观测量，并称该函数为符号。全符号 $a(x,\xi)$ 通常也称为经典，如果它是若干项之和；此时第一项是主符号 $p(x,\xi)$，下一项是次主符号，在此记为 $b(x,\xi)$。这两个首要项尤为重要，因为它们决定了量子化算子（见下一段）的大部分行为，并具有其他特殊性质，例如在坐标变换下保持不变，这一点非常有用。在此允许使用更复杂的符号，而不仅限于多项式，例如符号 $\frac{1}{\xi^2+1}$，它量子化后成为算子 $(\Delta+1)^{-1}$。此时我们称该算子为伪微分算子。随后必须限制符号的导数，以使积分（见下文）收敛。由此得到不同的符号类；此处我们仅使用符号类 S^n 和算子类 Ψ^n，因为我们采用的是较简单的标准形算子。对于符号 $a(x,\xi)$，我们关联一个量子可观测量或伪微分算子 $P(x,hD)$，它作用于函数 $u=u(x)$

$$\begin{aligned}P(x,hD_x)u(x)&=\frac{1}{(2\pi h)^n}\iint e^{\frac{i}{h}\langle x-y,\xi\rangle}a(x,\xi)u(y)dyd\xi\\&=\frac{1}{(2\pi h)^n}\int e^{\frac{i}{h}x\xi}a(x,\xi)\hat{u}(\xi)d\xi\end{aligned}\tag{A.2}$$

其中 $h\in(0,1]$ 和 $D_x=\frac{\partial}{i\partial x}$—我们称之为半经典量子化。在我们有 $a(x,\xi)=x^\alpha\xi^\alpha$ 的情况下，量子化很简单：我们得到形如 $P(x,hD_x)u=x^\alpha(hD_x)^\alpha u$ 的算子，其对应关系为 $(x_j,\xi_j)\mapsto(x_j,hD_j)$，一般而言，小参数为 $h=1/|\xi|\in\mathbb{R}^+.$。更多相关内容请参见 Zworski [12]。我们定义一些所需的性质：值域的闭包是

$$\Sigma(P(h))=\Sigma(p)=\overline{\mathrm{Ran}}(p)\tag{A.3}$$

[9]如果愿意，我们可以利用这一点应用 Malgrange 准备定理，从而得到 $f(x,t)=c(t^2+a_1t+a_0)$，再取 $a_0=0$，将其因式分解为 $ct(t+a_1)$。

其中 Ran(p) 是主符号 $p = p(x,\ \xi)$ 的像。我们不再考察特征集 $\Sigma_1(p) = \{(x,\ \xi) : p(x,\ \xi) = 0; dp \neq 0\}$ 和 $\Sigma_2(p) = \{(x,\ \xi) : p(x,\ \xi) = 0; dp = 0\}$，而是对经典算子考察水平集

$$S = p^{-1}(z) = \{(x_0, \xi_0) : p(x_0, \xi_0) = z\} \tag{A.4}$$

对于 $z \in \Sigma(P(h))$。驻点为

$$\Sigma_2(P(h)) = \{d_\xi p(x_0, \xi_0) = 0\} \tag{A.5}$$

并且我们定义驻点水平集 $\Sigma_2(\zeta) = p^{-1}(z) \cap \Sigma_2(P(h))$ 为

$$[x_0][\xi_0](p(x_0, \xi_0) = \zeta, d_\xi p(x_0, \xi_0) = 0, \zeta \in \Sigma(P(h))). \tag{A.6}$$

辛 [10] 空间以经典力学为模型，在经典力学中，我们追踪空间中的物体随时间的变化（t），研究运动 $x(t)$ 和动量 $\xi(t) = mv$ 与速度(v)和质量 (m)的关系。在这个空间中，存在一个非退化（非特征的）形式 $\omega = dx \wedge d\xi$，对其积分 $\int \omega$可以得到一个面积。该面积的大小保持不变；它可以变形，但不会缩小或增大。辛坐标变换是指保持算子特性不变的典范变换。例如，哈密顿向量流（$x(t)\ \xi(t)) = \exp(tH_p)$ 是辛的，这意味着它具有不变性，不依赖于任何特定的坐标系。泊松括号 $\{u, v\}$ 以及$\sigma_{\text{sub}}(P(h))|_\Omega = b(x,\ \xi)$上的次主符号也具有不变性，更多相关内容请参见 [6]。

附录 B. 谱与伪谱

现在我们来介绍经典算子 P in L^2 的伪谱和谱。这部分内容相当通用，旨在面向不太熟悉这一概念的读者。设 H 为复希尔伯特空间。在 $P(h)$ 中，算子族依赖于 h，我们固定 $h_0 \in (0, 1]$ 并定义$P_h := P(h_0)$。

定义 B.1. 这里，$T : H \supset D(T) \to H$ 是一个闭的、稠密定义算子：$D(T) = H$，我们将这个算子记作 $T \in \mathscr{C}(X)$。它具有如下性质：每个序列

$$(u_k)[Tu_k]((u_k \to u, Tu_k \to v) \wedge (u \in D(T), Tu = v); u \in H.)$$

有界算子 $E \in \mathscr{B}(X)$ 满足如下表达式

$$(x)[k](|E(x)| \leq k|x|) \ \wedge \ E \in C^0 \ \wedge \ E \text{ is uniformly } C^0.$$

关于算子理论的入门介绍，参见 Kato [7]，，本文遵循其论述。

[10]源自希腊语：$\pi\lambda\epsilon\kappa\tau\omega$ 意为编织，$\sigma\upsilon\mu$ 意为包含；这两个词合在一起可能表示纠缠。

注释 B.2。线性算子的有界性与例如映射 $f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 并不相同。算子 $T:\ X\to X,$ 由$T(x)=x$ 定义，它作为算子是有界的，但并非作为有界函数有界。当 $h\to 0$ 时，符号 $\xi_1\xi_2$ 是有界的，因为我们有 $h\sim 1/\xi$。这是半经典分析的主要思想之一。我们不会遇到超过 hD_1的无界导数；它之所以无界，是因为表达式在其所属位置进行了因式分解。

定义 B.3。

$$[\zeta][\mathcal{R}](\mathcal{R}(\zeta)=(P_h-\zeta)^{-1},\mathcal{R}\in C^0,\mathcal{R}\in\mathscr{B}(X),\zeta\in\mathbb{C}) \tag{B.1}$$

称为 P_h 的预解式。（对于预解式存在的那些值，我们用希腊语 ζ 表示。在

$$[\zeta](\mathcal{R}(\zeta)=(P_h-\zeta)^{-1};\zeta\in\mathbb{C}) \tag{B.2}$$

称为 $\mathcal{R}$ 的正则值。

我们按照标准方式定义谱和伪谱，例如 [10]，中所用的方式，并用 σ_s 表示谱，进一步为该字母添加下标以表示这一概念的其他形式（且 $\neg[\cdot]:=$ 不存在）。

定义 B.4。 P_h 的谱记作 $\sigma_s(P_h)$，定义如下：

$$(P_h)[z](\neg[(P_h-z)^{-1}];z\in\mathbb{C}) \tag{B.3}$$

预解集 $\rho(P)$ 是所有正则值

$$(P)[\zeta]([(P_h-\zeta)^{-1}],\ \zeta\in\mathbb{C}) \tag{B.4}$$

因此它是谱 $\rho(P_h)=(\sigma_s(P_h))^c.$ 的补集

注 B.5： 伪谱还有其他定义，例如 $(\Lambda(p))$，它是下面集合的闭包以及 $m\in T^*\mathbb{R}^n$ (相空间)

$$\Lambda(p):=p(\{p,\bar{p}\}(m)\neq 0). \tag{B.5}$$

这里，

$$\{p,\bar{p}\}=\sum\partial_{\xi_j}p;\partial_{x_j}\bar{p}-\partial_{x_j}p;\partial_{\xi_j}\bar{p}$$

这是泊松括号。由于主符号的导数为零， $dp=0$，这里无法采用这种方法；括号为零。在 TRE[10] 中也可以找到不同的扭转 条件，例如

$$\mathrm{Im}(\partial_x a)/\partial_\xi a)=C_0>0\Leftrightarrow\mathrm{Im}(\partial_x a-C_0\partial_\xi a)>0.$$

这个导数涉及全符号 $a=a(x,\ \xi)$，因此并不会自动为零。例如，算子 $h^2D^2+ix^2$的全符号为 $a=\xi^2+ix^2$，其扭曲条件为 x/ξ ；对于仅有 $p=\xi^2$ 的情形，该条件并无定义。在同一本书中，我们还可以找到绕数理论，它从几何角度回答了存在性问题。然而，书中指出，相关结果（ [10] 中第 105 页的定理 11.2）仅适用于一维情形。

注 B.6。这里我们通过相减，将预解算子 $R(h,\ \zeta)$ 化为形式$R(h) = P(h)^{-1}$。因此，$R(h)$ 只是算子$P(h)$ 的逆。这是可行的，因为我们从一开始就可以研究算子$Q(h) = (P(h) + \zeta)$。当我们考察 $Q(h) - \zeta = ((P(h) + \zeta) - \zeta)) = P(h)$ 时，无论是否带有常数 ζ，结果都会相同；该常数不过是一个平移，例如在 $(x^2 \sim x^2 + a)$ 或 $(D_x(x^2) = D_x(x^2 + a))$ 中。

定义 B.7. 我们令 $P_h \in \mathscr{C}(X)$ 和 $\epsilon > 0$，并称 ϵ-伪谱 $\sigma_{eps}(P_h)$ 为映射中满足条件的 $\zeta \in \mathbb{C}$ 集合

$$\sigma_{\epsilon ps} : \|\mathcal{R}(\zeta)\| \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

如果我们有

$$(1) \qquad (\|(P_h - \zeta)^{-1}\| > \epsilon^{-1} \ \vee \ \|P_h^{-1}\| > \epsilon^{-1}).$$

对于满足 $\|u\| = 1$ 的函数 u，以下条件等价

$$(2) \qquad (\|(P_h - \zeta)u\| < \epsilon \ \vee \ \|P_h u\| < \epsilon).$$

我们还可以从以下角度看待这一概念

$$(3) \qquad [\dot{E}](z \in \sigma_s(P_h + E), E \in \mathscr{B}(X), \|E\| < \epsilon).$$

（2）右侧的形式属于我们在证明中使用的类型（当然，我们使用的是半经典类型 $||P(h)u(h)||_{L^2}$）。进行数值计算时使用标准定义。在（2）中，ζ 是 P_h 的一个 ϵ-伪特征值，而 v 是相应的 ϵ-伪特征向量或伪-/准模态，我们将在后文中使用它。

命题 B.8. 设条件同上。若 $\|P_h u\| < \epsilon$ 对某个 u成立，且 $\|u\| = 1$，则 $\|P_h^{-1}\| > \epsilon^{-1}$，因此我们有 $(2) \Rightarrow (1)$。

证明。设 u 是方程 $P_h u \sim 0$ 的一个准模态，使得 $\|P_h u\| < \epsilon$。那么，对于某些正数 $\delta < \epsilon$，我们有

$$P_h u = \delta v$$

其中 u 和 v 的范数均为一。若 P_h 可逆，则有

$$(\text{B.6}) \quad P_h^{-1} v = \delta^{-1} u, \|R_h\| = \|P_h^{-1}\| \|v\| > \|\delta^{-1} u\| = |\delta^{-1}| \|v\| = \delta^{-1} > \epsilon^{-1}.$$

□

现在，如果我们看第三个定义，就会发现，当数 z 属于某个扰动算子 $P_h + E$ 的谱时，它就在 ϵ-伪谱中。如果要数值计算特征值，起点是对算子进行离散化。在这里，我们可能会遇到舍入误差以及对初始算子的扰动。在计算时，用于计算特征值的算法所确定的是某个扰动算子的特征值。因此，谱可能是不稳定的；事实上，伪谱就是算子受到微小扰动后的谱。

命题 B.9. 设条件同上。若 $\|P_h u\| < \epsilon$ 对某个 u 满足 $\|u\| = 1$，则 $z \in \sigma_s (P_h + E)$ 对某个 $E \in \mathscr{B}(X)$ 满足 $\|E\| < \epsilon$，因此我们有 (2) $\Rightarrow$(3)。

证明。我们如上所述进行，因此设 u 是方程 $P_h u \sim 0$的一个准模态，使得 $\|P_h u\| < \epsilon$。那么，对于某些正数 $\delta < \epsilon$，我们有

$$P_h u = \delta v u$$

u 和 v 的范数均为 1。这给出 $P_h u - \delta v u = 0$，我们可以将 $-\delta v$ 视为有界算子 E，从而写成 $P_h u + Eu = (P_h + E)u = 0$。这意味着 $P_h + E$ 在 $\zeta = 0$时不可逆，因此它现在属于谱。□

注记 B.10。半经典单射伪谱的定义也可以反过来用作先验估计

$$||u(h)|| = 1 \text{and} \|P(h)u\| > Ch^N. \tag{B.7}$$

这意味着我们不应期待存在准模态。考虑一维调和振子 $P(h) = h^2 D_x + x^2$，我们发现，在 $\langle x,\ x\rangle = |x|^2$,

$$\begin{aligned}
\|P(h)u\|^2 = \langle P(h)u, u\rangle = \langle h^2 D_1^2 u, u\rangle + \langle x_1^2, u\rangle = |hD_1 u|^2 + |xu|^2 \geq 2|hD_1 u||xu| \\
\geq |2\,\mathrm{Im}\langle hD_u, xu\rangle| = |\langle xu, hD_1 u\rangle - \langle hD_1 u, xu\rangle| \quad (2\,\mathrm{Im}\, z = z - \bar{z}) \\
= |\langle hD_1 xu, u\rangle - \langle xhD_1 u, u\rangle| \quad (\langle Tx, x\rangle = \langle x, T^* x\rangle) \\
= \langle (hD_1 x - xhD_1)u, u\rangle \\
= |\langle [hD_1, x]u, u\rangle| \quad ([u, v] = uv - vu) \\
|u|^2; \quad (hD_1 xu - xhD_1 u) = hu/i,
\end{aligned}$$

因此在 $\|P(h)u\| > Ch^N$ 中我们得到 $C = N = 1$.

Appendix C. Terminology and Notations

这里我们使用了一些非正统（以及正统）的记法。例如，量词的表示方式沿用了较早逻辑学著作中的写法，如 WR(《数学原理》)[12](x) 表示“对所有 x”。受此启发，我们采用了 $[x]$表示“存在” x （这个符号确实会让我们想起 $\exists$）以及 $[\dot{x}]$ “ 存在唯一一个 ”x。这样做是为了避免使用可能分散我们注意力的符号；例如，文本中避免使用 %，而是按照记者和作家沿用的一套古老书写规范，在文献中将其拼写为“百分比”。

例 C.1。另一个例子是 $\exists!$，它是未知字母 $\exists$ 与已知符号 ! 的组合。这取自一篇数学文本。

$$(\exists! x : P(x)) \Leftrightarrow \exists x : (P(x) \wedge \forall y : (P(y) \Rightarrow (y = x)))$$

我们写作:

$$([\dot{x}]P(x) := [x](P(x) \wedge (y)(P(y)) \wedge (y = x)).$$

除了符号更加简洁之外，左侧的被定义项也一目了然，而且我们注意到该定义是保守的；它只使用

右侧已知的内容（定义项）。该定义使用了一个双合取项，扫一眼就更容易识别，从而使定义更具结构性。

我们在此使用的这类括号看起来更顺眼。如果括号太多，可以使用点号“.”，这在 WR 中单独使用；不过我们将点号与括号搭配使用，且只在含义显而易见时这样做。 [11] 量词 $((x)\ [y]$，以及 $[\dot{x}])$、陈述 (S_n) 和条件 (c_n) 的排列顺序如下

(C.1)
$$(x)(y)\dots[x][y]\dots[\dot{x}][\dot{y}]\dots(S_1, S_2, \dots; c_1, c_2 \dots;\ \text{有界}\ \ x, y, \dots;\ \text{自由}\ \ x, y, \dots)$$

并在需要时使用 (;) 分隔信息，以便于阅读。变量 $(x,\ y,\ \dots)$ 如果出现在量词中，就称为有界 变量；其他变量则称为“自由”变量。

例 C.2. 我们将其与此处研究的算子值函数 $(h,\ \zeta) \mapsto (P-\zeta)^{-1}$ 的连续性联系起来，更准确地说，是与该函数的范数联系起来。在这种情况下，逐点连续性

$$(\delta)(\zeta)[\epsilon][\dot{\zeta_0}](|\zeta-\zeta_0| < \delta \Rightarrow |\mathcal{R}(\zeta)-\mathcal{R}(\zeta_0))| < \epsilon;\ \delta > 0, \epsilon > 0;\ \delta, \epsilon \in \mathbb{R}^+, \zeta, \zeta_0 \in \mathbb{C})$$

以及对于一致连续性

$$(\delta)(\zeta)(\omega)[\epsilon](|\zeta-\omega| < \delta \Rightarrow |\mathcal{R}(\zeta)-\mathcal{R}(\omega))| < \epsilon;\ \delta > 0, \epsilon > 0; \delta, \epsilon \in \mathbb{R}^+, \zeta, \omega \in \mathbb{C})$$

括号中的条件或陈述用于替代“使得”，它们均处于合取状态，以逗号（,）表示；否则，我们在它们之间使用逻辑联结词 $\wedge$（且）和 $\vee$（或）。在希腊字母中，我们使用 α、β 和 γ 作为输运方程组中的参数。它们是小于 1 的正数，并且将满足 $\alpha+\beta+\gamma = 1$. 字母α和 β也用于复符号 $b = \alpha$（$x,\ \xi$）$+i\beta$（$x,\ \xi$）。如果上下文不够明确，我们通常使用 α（$x,\ \xi$）或 $i\beta$（$x,\ \xi$）。我们使用 λ和 μ 表示导数幂，如 $h^{\lambda+\mu(1-\gamma)}D_1^{\lambda}hD_j^{\mu}$，并且通常$hD_x = \frac{1}{i}\partial_x$. 字母 $0 < h \ll 1$ 表示在半经典极限中趋于零的半经典参数。我们也常写作 $0 < h \leq 1$，因为可以通过重新缩放化为 $h = 1$. 的情形。字母 σ 用于表示谱和伪谱的不同形式，也用于表示算子符号，如 σ（P（h），其中 P（h）是一个半经典算子。我们注意到，指称是一种关系 $\mathcal{R}$： a（$a_1,\ a_2,\ \ldots$）（R） b（$b_1,\ b_2,\ \ldots$），并不总是函数， f，因此我们可以有 $a_1 \mapsto$（$b_1,\ b_2,\ \ldots$），但我们有$f \subset \mathcal{R}$.。对于坐标，我们使用（$t,\ x$）$=$（$x_1,\ x'$）以及 $\tau,\ \xi$）$=$（$\xi_1,\ \xi'$）。

林奈大学电子邮件地址：
pelle.borgeke@lnu.se

[11]此外，还有一种所谓的波兰表示法，它不使用括号，但由于它不同于常见的书写方式，数学家们并未广泛采用，尽管这种前缀表示法有很大优势，而且在简单情况下显而易见，例如 $5(3+4) \mapsto (\times + 345)$，从内向外运算。