HOMFLY 抛物限制、缺陷 skein 理论与 Turaev 余乘法

Juan Ramón Gómez García

Institut de Mathématiques de Jussieu-Paris Rive Gauche UMR 7586 巴黎西岱大学、索邦大学、法国国家科学研究中心，法国巴黎 F-75013

arXiv:2601.03196v1 [math.QA] 6 Jan 2026

摘要。 我们定义了抛物子群 P ⊆GL$_{m+n}$ （由分块三角矩阵构成）的量子表示范畴 Rep$_q$P 的 HOMFLY版本。与该范畴相伴，我们构造了若干函子，在 GL$_{m+n}$、P 与分块对角矩阵构成的子群 L ⊆GL$_{m+n}$ 之间插值通常的限制函子，从而得到抛物限制形式体系的泛版本。基于这一形式体系，我们构造了中心代数和中心化双模，作为在带有曲面缺陷和线缺陷的 3-流形上定义 skein 理论的代数构件。作为该理论的一个特例，我们恢复了 HOMFLY skein 代数上的 Turaev 余乘法。特别是，该余乘法与曲面的切割与粘合相容。

目录

1 引言.2
1.1 背景与动机 .2 1.2 HOMFLY范畴与抛物限制.4 1.3 缺陷 skein 理论 .5 1.4 Turaev余乘法 .6 1.5 展望.6

2 背景 .7
2.1 刚性范畴概览 .7 2.2 幺半范畴的图形语言 .8 2.3 编织范畴 .12 2.4 抛物限制 .12 2.5 范畴与双模.14 2.6 分层空间.15

3 HOMFLY范畴与普通限制 .16
3.1 HOMFLY 范畴 Rep$_q$GL$_t$ .16 3.2 HOMFLY 范畴 Rep$_q$L$_t$.18 3.3 限制函子 .20 3.4 平面范畴 Rep^{q}P$_t$.22

4 泛抛物限制.25
4.1 中心代数结构 .25 4.2 中心双模 Rep$_q$L$_t$ .28

5 缺陷平面理论 .29
5.1 单色理论 .30 5.2 缺陷线周围的平面模型.31 5.3 平面缺陷理论 .34

6 缺陷三维理论 .35 6.1 抛物曲面缺陷.35 6.2 缺陷线.37 6.3 三维缺陷理论 .38 7 HOMFLY skein 双代数 .41 7.1 余乘映射.41 7.2 余单位 .45

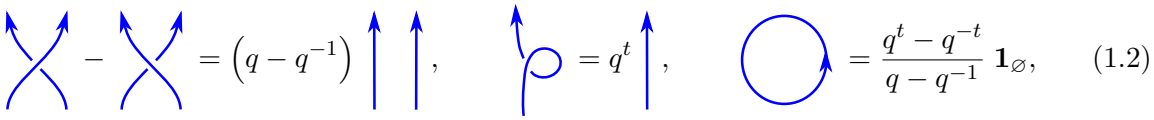
1 引言

1.1 背景与动机。 琼斯多项式问世不久后 [Jon85],Reshetikhin 和 Turaev [RT90] 提出了一个统一并推广链环多项式不变量的框架。他们的工作表明，带状范畴 的代数结构由所谓的带状图的拓扑所支配，从而开启了低维拓扑与表示论之间富有成果的相互作用。更确切地说，给定一个带状范畴 $\mathcal{A}$，Reshetikhin 和 Turaev 定义了一个函子

$$\mathrm{RT}_{\mathcal{A}}\colon \mathrm{Rib}_{\mathcal{A}} \to \mathcal{A} \tag{1.1}$$

从一个范畴 $\mathrm{Rib}_{\mathcal{A}}$出发，其态射是由$\mathcal{A}$的对象和态射装饰的图，映到其底层带状范畴 $\mathcal{A}$ 本身。它将任意纽结或链环映射为幺半群单位对象 $\mathbf{1}_{\mathcal{A}}$的一个自同态，该自同态在同痕下保持不变。

求值函子 $\mathrm{RT}_{\mathcal{A}}$ 是满的，但不是忠实的。其核由纽结关系描述，这些关系是$\mathcal{A}$中代数关系的拓扑对应物。带状范畴的典型例子是量子群的表示范畴：若 G 是一个约化仿射代数群，且 $q \in \mathbb{k}^{\times}$ 足够一般（我们始终作此假设），则范畴 Rep$_q$G 等价于 G 的代数表示范畴 Rep G，但前者具有非平凡的带状结构，它是 Rep G 上（平凡）带状结构的变形。对于 $\mathrm{G} = \mathrm{GL}_N$，纽结关系以一种简单的方式依赖于维数 $N \in \mathbb{N}$。将 N 替换为这些关系中的形式参数 t，便得到 *HOMFLY* 关系



(1.2)

其中 $\mathbf{1}_{\varnothing}$ 是空图。随后将 *HOMFLY* 范畴 $\mathrm{Rep}_q\mathrm{GL}_t$ 定义为这样一个范畴：其态射是 $\mathbb{R}^2 \times [0,1]$ 中的缠结，并模去 HOMFLY 关系。该范畴是 Deligne 范畴 Rep GL_t [De07、CW11] 的量子类比，并已在 [Bru17]中得到广泛研究。它是 Rep$_q\mathrm{GL}_N$ 的泛版本，其含义是，后者可以通过对 Rep$_q\mathrm{GL}_t$ 在 $t = N$处进行特化（的一个商）得到。

通过 Reshetikhin–Turaev 构造得到的 $\mathcal{A} = \mathrm{Rep}_q\mathrm{GL}_t$ 的多项式链环不变量是 *HOMFLY* 多项式 [FYH+85,PT87]。用 $H_{q,t}(D)$ 表示链环图 D 的 HOMFLY 多项式。在 [Jae89], 中，Jaeger 给出了一个复合公式，可将 $H_{q,t_1+t_2}(D)$ 计算为关于 $H_{q,t_1}(D_1)$ 和 $H_{q,t_2}(D_2)$ 的状态和，其中 D_1, D_2 是 D 的一些子图。具体而言，链环图 D 是一个四价图，具有两类特殊顶点：正交叉和负交叉。给定一个顶点 v，我们用 a （分别用 b）表示上方（分别为下方）的入边，用 c （分别用 d）表示上方（分别为下方）的出边，如下图所示：



令 E_D 为 D 的边集。容许标记 是一个映射 $f\colon E_D \to \{1,2\}$，满足对于任意顶点 v，要么 $f(a) = f(c)$ 且 $f(b) = f(d)$，要么 $f(a) = f(d) > f(b) = f(c)$。当第二个条件成立时，我们称 v 为切割顶点。给定一个容许标记 f 和一个顶点 v，我们定义

$$\langle v \mid f\rangle := \begin{cases} \operatorname{sgn}(v)(q-q^{-1}), & \text{if } v \text{ is a cutting vertex,} \\ 1, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

其中，若 v 是正交叉，则 $\operatorname{sgn}(v)$ 为 1；否则为 -1。我们将 与 D与 f 之间的相互作用定义为

$$\langle D \mid f\rangle := \prod_{v} \langle v \mid f\rangle,$$

其中，乘积遍历 D 的顶点集合。

定理 *([Jae89])*. 对于任意链环图 D,

$$H_{q,t_1+t_2}(D) = \sum_{f \text{ admissible}} \langle D \mid f\rangle \left(q^{-t_1}\right)^{r(D_{f,1})} \left(q^{t_2}\right)^{r(D_{f,2})} H_{q,t_1}(D_{f,1}) H_{q,t_2}(D_{f,2}), \tag{1.3}$$

其中 $D_{f,\,i} := f^{-1}(i)$，且 $r(D_{f,\,i})$ 是 $D_{f,\,i}$ 的旋转数，其中 $i \in \{1,\,2\}$。 ■

该公式可以解释为 GL_{m+n} 到 $\mathrm{GL}_m \times \mathrm{GL}_n$ 的自然表示限制的泛版本。粗略地说，我们有如下图示:

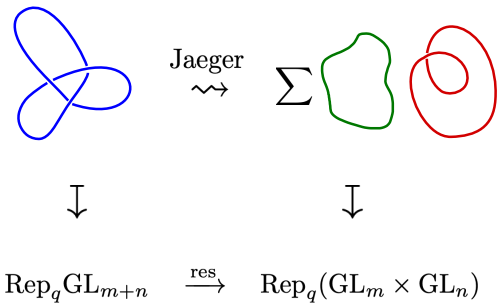


图 1：Jaeger 公式是沿着 GL_{m+n}，$\to \mathrm{GL}_m \times \mathrm{GL}$ 的限制的泛版本 $_n$.

受 Jaeger 构造的启发，Turaev 在 [Tur91] 中证明了 HOMFLY skein 代数上余乘法的存在，这也启发了本文。skein 理论研究的是将量子链环不变量推广到任意 3-流形时所产生的模、代数和范畴。给定一个 3-流形 M 和一个带状范畴 A，skein 模 $\mathrm{Sk}_{\mathcal{A}}(M)$ 的生成元是 M 中链环的同痕类，并对由 Reshetikhin–Turaev 构造经 A 诱导的局部/skein 关系取商。它们最早见于 [Tur88, Prz91]。当 $M = S \times [0,1]$ 为定向曲面 S 时，可以通过叠放两个圆柱副本并重新缩放第二个坐标来定义乘法，由此得到曲面的 skein 代数 S。若进一步允许开分支（即缠结），便得到 skein 范畴的定义。给定一个定向曲面 S，范畴 $\mathrm{SkCat}_{\mathcal{A}}(S)$ [Coo19, JF19, Wal06] 的对象是 S 上带框架的着色点的构型，态射则是 $S \times [0,1]$ 中 A-着色缠结的线性组合。

我们将 S 的 *HOMFLY skein* 代数记为 $\mathrm{Sk}_{\mathrm{GL}_t}(S)$，它是通过取 $\mathcal{A} = \mathrm{Rep}_q \mathrm{GL}_t$ 得到的。由于限制函子是幺半的，Jaeger 公式可推广为一个线性 映射

$$\Delta_f\colon \mathrm{Sk}_{\mathrm{GL}_t}(S) \to \mathrm{Sk}_{\mathrm{GL}_t}(S) \otimes \mathrm{Sk}_{\mathrm{GL}_t}(S)$$

对任意带框曲面（S，f）。然而，这个函子并非编织的，因此先验地没有理由认为此映射是乘法性的。不过，Turaev 证明了以下结论:

定理（*[Tur91]*）。设（S， f）是一个带框曲面。线性映射

$$\Delta_f : \mathrm{Sk}_{\mathrm{GL}_t}(S) \to \mathrm{Sk}_{\mathrm{GL}_t}(S) \otimes \mathrm{Sk}_{\mathrm{GL}_t}(S) \tag{1.4}$$

由扩展 Jaeger 公式定义的映射是一个代数同态。它是余结合的，因此 $\mathrm{Sk}_{\mathrm{GL}_t}(S)$ 是一个双代数。■

为说明这一问题，请看下图：

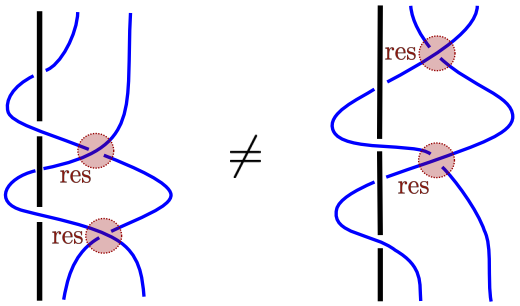


图2：底层缠结是同痕的。然而，由于限制函子不是编织的，它不保持交叉，因此所得的图不再表示同一个态射。

将限制函子朴素地扩展到 skein 范畴后，与缠结的复合不 相容。在本文中，我们利用抛物限制和带缺陷的辫子理论的形式化方法，将 Turaev 余乘法扩展到 skein 范畴（即缠结）。我们的构造具有函子性，这解释了 Turaev 构造的乘法性。此外，它以一种非显然的方式与曲面的切割与粘合相容，并提供了一种非常局部的方法来计算给定图表上的余乘法。

1.2 HOMFLY 范畴与抛物限制。我们的第一项工作是定义抛物子群 $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{GL}_{m+n}$（由分块三角矩阵组成，见第 3 节）的量子表示范畴 $\mathrm{Rep}_q\mathrm{P}$ 的 HOMFLY 版本。具体而言，令 $\mathrm{G} = \mathrm{GL}_{m+n}$ 和 $\mathrm{L} = \mathrm{GL}_m \times \mathrm{GL}_n$ 分别与 G 的 Levi 子群相对应，其中元素为分块对角矩阵。我们将图示范畴 $\mathrm{Rep}_q\mathrm{P}_t$ 定义为刚性范畴 $\mathrm{Rep}_q\mathrm{L}_t = \mathrm{Rep}_q\mathrm{GL}_t \boxtimes \mathrm{Rep}_q\mathrm{GL}_t$的某个子范畴；后者是 $\mathrm{Rep}_q\mathrm{L}$ 的 HOMFLY 类比。与 $\mathrm{Rep}_q\mathrm{P}_t$一起，我们构造四个函子

$$\begin{array}{ccc} & \mathrm{Rep}_q\mathrm{P}_t & \\ {\scriptstyle \iota_t^*} \nearrow & & \searrow {\scriptstyle j_t^*} \\ \mathrm{Rep}_q\mathrm{GL}_t & \xrightarrow{\mathrm{res}_t} & \mathrm{Rep}_q\mathrm{L}_t \end{array} \quad , \qquad \mathrm{Rep}_q\mathrm{P}_t \xleftarrow{\pi_t^*} \mathrm{Rep}_q\mathrm{L}_t$$

在相应的表示范畴之间插值普通限制函子。在第 4 节中，我们证明以下结论（见定理 4.4）：

定理 1.1. 函子 $\iota_t^* \otimes \pi_t^*$ 可提升为一个编织幺半函子

$$Rep_q GL_t \boxtimes (\overline{Rep_q L_t}) \to Z(Rep_q P_t),$$

其中 $\overline{(-)}$ 表示反向编织范畴，而 $Z(Rep_q P_t)$ 是 $Rep_q P_t$的 *Drinfeld* 中心。因此，$Rep_q P_t$ 是一个 $(Rep_q GL_t,\ Rep_q L_t)$- 中心代数，含义见 *[BJS21* 、 *DGNO10]*。

■

除了这种中心代数结构之外，我们的构造还具有另一种重要的底层结构。范畴 $\mathrm{Rep}^q\mathrm{L}_t$ 是一个 $(\mathrm{Rep}^q\mathrm{L}_t,\ \mathrm{Rep}^q\mathrm{P}_t)$-双模范畴，其上 $\mathrm{Rep}^q\mathrm{P}_t$ 的作用由限制函子诱导。正如我们在第 5.2 节所解释的，这种双模结构相对于 $\mathrm{Rep}^q\mathrm{P}_t$ 和 $\mathrm{Rep}^q\mathrm{L}_t$.

1.3 缺陷 skein 理论。 中心代数和中心化双模分别是 Morita 4-范畴 BrTens 中 cp-刚性编织张量范畴的 1-态射和 2-态射，相关研究见 [BJS21]。Brochier、Jordan 和 Snyder 证明了该范畴是 3-可对偶的，因此根据配边假设 [Lur09，BD95]，其对象确定了3-扩展的带框拓扑场论，将范畴赋予曲面，将函子/向量空间赋予三维流形。skein 理论是这一拓扑场论存在的一个特殊结果 [BBZ18a，BH24，Coo19，Haï25]。[1]

在这一框架中，中心代数 $\mathrm{Rep}^q\mathrm{P}_t$ 为 $\mathrm{Rep}^q\mathrm{GL}_t$ 理论和 $\mathrm{Rep}^q\mathrm{L}_t$ 理论之间提供了一个自然变换，该变换可以利用 [BJ25]中发展的缺陷 skein 模形式加以 skein 理论描述。设 M 为一个二分三维流形，即一个带有余维 1 层的三维流形（见定义 2.23）。曲面缺陷两侧的三维区域分别标记为 $\mathrm{Rep}^q\mathrm{GL}_t$ 和 $\mathrm{Rep}^q\mathrm{L}_t$，而曲面缺陷本身标记为 $\mathrm{Rep}^q\mathrm{P}_t$。二分三维流形 M的抛物 skein 模由嵌入于 M 中的图的同痕类张成，其中各分支根据其所在区域着以相应颜色。曲面缺陷周围的局部关系通过从三维区域进行投影而产生，将出现的交叉替换为利用中心代数结构得到的相应半态射，并在 $\mathrm{Rep}^q\mathrm{P}_t$.中求值

我们的第二项贡献通过引入装饰有中心双模结构的余维 2 缺陷，扩展了这一形式化框架。在第 5 节中，我们描述了带有由 $\mathrm{Rep}^q\mathrm{L}_t$ 装饰的缺陷线的平面理论。缺陷周围的局部模型由 $\mathrm{Rep}^q\mathrm{L}_t$ 与 $\mathrm{Rep}^q\mathrm{P}_t)$-双模结构诱导，其中 $\mathrm{Rep}^q\mathrm{L}_t$。相对于 $\mathrm{Rep}^q\mathrm{P}_t$ 和 $\mathrm{Rep}^q\mathrm{L}_t$ 的中心代数结构，该双模结构是中心的（详见第 4.2 节），因此这些理论可以提升为 3 维理论，如第 6 节所述（见定理 6.4）：

定理 1.2。 存在一个分层二维框架拓扑场论

$$\mathcal{Z}\colon Bord_2^{bip,mkd} \to \mathit{BIMOD}$$

将 $\mathit{Rep}^q\mathit{L}_t$（分别将 $\mathit{Rep}^q\mathit{P}_t$）赋给标记为 L_t（分别为 P_t）的区间。对于二分框架曲面 S，则赋给它一个双模，其各个分支都是由 $S \times I$ 中的分层带状图张成的向量空间，并对上述局部关系取商。■

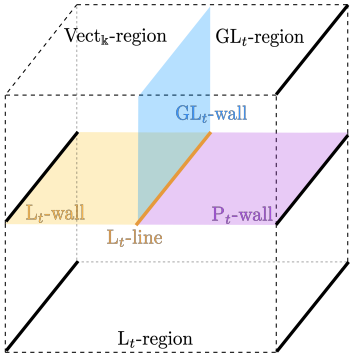


图3：线缺陷周围的局部模型 s.

[1]严格来说，[BJS21] 只定义了一个带框拓扑场论，其构造依赖于配边假设。缠结理论方法绕过了这些要求，从而能够直接构造该理论。

1.4 Turaev余乘法。最后，在末节中，我们将说明这一形式体系如何以一种与缠结的复合和曲面的粘合显然相容的方式，重现并扩展 Turaev构造。对曲面 S 选取恰当的分层，并为上述拓扑场论取空边界条件，即可得到 GL_t-skein 代数对 L_t-skein 代数的作用，其中 S （见第7.1节）：

定理 1.3。 设（S、 f）为一个带框曲面。可以选取一个分层，使得 Z（S）$\varnothing$是（Sk_{GL_t}（S）、Sk_{L_t}（S））-双模，并且作为向量空间同构于 *skein* 代数 Sk_{L_t}（S）。 ■

$\mathrm{Sk}_{\mathrm{GL}_t}(S)$ 作用于空图所诱导的映射给出了 Turaev 余乘法

$$\Delta_f \colon \mathrm{Sk}_{\mathrm{GL}_t}(S) \to \mathrm{Sk}_{\mathrm{GL}_t}(S) \otimes \mathrm{Sk}_{\mathrm{GL}_t}(S)$$

在 HOMFLY skein 代数上。该构造与粘合曲面相容，而函子性自动意味着 Δ_f 是代数同态。

1.5 展望。 在 [BJ25], Brown 和 Jordan 研究了 A-多项式的一种量子化，他们采用了抛物缺陷纽结模的框架。他们的构造依赖于边界纽结代数上的一个模，该模通过针对 SL_2, 的抛物限制来定义，而不是通过代数之间的直接映射来定义。将我们的构造特化到 $t = 2$ （并考虑从GL_2到SL_2的约化）后，我们恢复了他们工作中出现的抛物中心代数的结构。与他们的双模方法不同，我们可以反复应用 Turaev余乘法来构造一个代数同态

$$\Delta_f^N \colon \mathrm{Sk}_{\mathrm{GL}_t}(S) \to \mathrm{Sk}_{\mathrm{GL}_t}(S) \otimes \cdots \otimes \mathrm{Sk}_{\mathrm{GL}_t}(S).$$

将左侧专门取为 $t = N$，右侧取为 $t_1 = \cdots = t_N = 1$ （见注 3.14），我们便得到一个真正的态射（而非双模）

$$\widetilde{\Delta}_f^N \colon \mathrm{Sk}_{\mathrm{GL}_N}(S) \to \mathrm{Sk}_{\mathbb{C}^N}(S)$$

介于曲面上的 GL_N 和 $\mathbb{C}^N$-skein 代数之间。这为 A-多项式的量子化提供了更自然的框架。

另一方面，HOMFLY skein 代数为 Goldman–Turaev 李双代数提供了一种典范量子化 [Tur91], 它构造于由曲面上环路的同伦类张成的向量空间之上 S。这个李双代数带有典范滤过，并且确实是形式的 [AKKN18a，AKKN18b], 即与其伴随分次李双代数同构。此外，近期的研究（同上）揭示了 Goldman–Turaev 李双代数、Kashiwara–Vergne猜想 [KV78] 和 Kontsevich积分 [Mas18]之间令人惊讶的联系。例如，当 S 曲面是“裤子曲面”时，形式性断言等价于 KV猜想。HOMFLY skein 代数的伴随分次结构已在 [Sch05]中得到描述。我们认为，Schedler余乘法可以通过弦图构造，其方式与本文给出的 Turaev 余乘法构造类似。这将是证明 Goldman–Turaev 形式性的量子版本的第一步；其中，与曲面的切割与粘合相容很可能发挥关键作用。

致谢

我谨向我的导师 Adrien Brochier 表达感谢，感谢他提出的想法、与我的讨论以及始终如一的投入。我也感谢我的第二位导师 Emmanuel Wagner 对我的支持，并感谢 Jennifer Brown 与我分享她的论文草稿，该草稿启发了我的一些研究成果。

2 背景

2.1 刚性范畴简述。本节将回顾一些关于刚性范畴的事实，这些事实将在本文中发挥作用。幺半群范畴是指一个范畴$\mathcal{C}$配备了一个函子 $\otimes:\mathcal{C}\times\mathcal{C}\to\mathcal{C}$，该函子在给定的自然同构意义下满足结合律和单位律。每个幺半群范畴都等价于一个严格幺半群范畴，因此我们将假设 $\otimes$ 严格满足结合律和单位律。

定义 2.1. 若幺半群范畴 $\mathcal{C}$ 中的每个对象 X 都有右对偶 X^*，即存在满足以下条件的态射，则称其为右刚性：

$$\mathrm{ev}_X : X\otimes X^*\to\mathbf{1} \qquad \text{and} \qquad \mathrm{coev}_X:\mathbf{1}\to X^*\otimes X$$

它们满足通常的锯齿恒等式。类似地，若$\mathcal{C}$ 中的每个对象 X都有左对偶 ${}^*X$，则称$\mathcal{C}$ 为左刚性；若其同时是左刚性和右刚性的，则称其为刚性。

对偶在典范同构意义下唯一：若 $(X^*,\mathsf{ev}_X,\mathsf{coev}_X)$ 和 $(Y,\widetilde{\mathsf{ev}}_X,\widetilde{\mathsf{coev}}_X)$ 是 X 的右对偶，则

$$\varphi:\ Y\xrightarrow{\mathrm{coev}_X\otimes\mathrm{id}_Y} X^*\otimes X\otimes Y\xrightarrow{\mathrm{id}_{X^*}\otimes\widetilde{\mathrm{ev}}_X} X^* \tag{2.1}$$

是它们之间的同构，且（余）求值之间满足

$$\widetilde{\mathrm{ev}}_X=\mathrm{ev}_X\circ(\mathrm{id}_X\otimes\varphi),\quad \widetilde{\mathrm{coev}}_X=(\varphi^{-1}\otimes\mathrm{id}_X)\circ\mathrm{coev}_X.$$

左对偶也有同样的结论。

当范畴$\mathcal{C}$ 是刚性的，我们总是假定已为每个对象固定了特定的左、右对偶$\{X^*,\ \mathsf{ev}_X,\ \mathsf{coev}_X\}$和$\{{}^*X,\ \mathsf{ev}'_X,\ \mathsf{coev}'_X\}$。因此我们有左、右对偶函子

$${}^*(-),(-)^*:\mathcal{C}^{\mathrm{op}}\to\mathcal{C}$$

它们通常并不相同。

若 (F,J,J_0)：$\mathcal{C}\to\mathcal{D}$是刚性范畴之间的幺半函子，则

$$\mathrm{ev}^F_X:F(X)\otimes F(X^*)\xrightarrow{J_{X,X^*}}F(X\otimes X^*)\xrightarrow{F(\mathrm{ev}_X)}F(\mathbf{1})\xrightarrow{J_0}\mathbf{1}$$

and

$$\mathrm{coev}^F_X:\mathbf{1}\xrightarrow{J_0^{-1}}F(\mathbf{1})\xrightarrow{F(\mathrm{coev}_X)}F(X^*\otimes X)\xrightarrow{J^{-1}_{X^*,X}}F(X^*)\otimes F(X)$$

展示 $F(X^*)$ 是 $F(X)$ 的一个右对偶（左对偶的情形也类似）。若 $F(X)^*$是$\mathcal{D}$中 $F(X)$ 的特定对偶，则同构

$$\varphi_X:F(X^*)\to F(X)^* \tag{2.2}$$

由（2.1）得到，它关于 X是自然的。

定义 2.2。枢轴范畴是一个右刚性范畴$\mathcal{C}$ （带有指定对偶），并赋有一个幺半自然同构

$$\iota_X:X^{**}\to X.$$

范畴之间的幺半函子 $F:\ \mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 若其同构为 幺半范畴，则称其为

$$\eta_X:F(X)^{**}\xrightarrow{\varphi^*_X}F(X^*)^*\xrightarrow{\varphi^{-1}_{X^*}}F(X^{**})\xrightarrow{F(\iota^{\mathcal{C}}_X)}F(X) \tag{2.3}$$

与$\mathcal{D}$的枢轴结构一致。

利用枢轴结构，我们可以将$\mathcal{C}$ 的特定右对偶表示为左对偶。具体而言，这些态射

$$\mathrm{ev}'_X : X^* \otimes X \xrightarrow{\mathrm{id}_{X^*}\otimes\iota_X^{-1}} X^* \otimes X^{**} \xrightarrow{\mathrm{ev}_{X^*}} \mathbf{1}$$

and

$$\mathrm{coev}'_X : \mathbf{1} \xrightarrow{\mathrm{coev}_{X^*}} X^{**} \otimes X^* \xrightarrow{\iota_X\otimes\mathrm{id}_{X^*}} X \otimes X^*$$

满足之字形恒等式。因此，对于这一左对偶的指定选取，我们得到一个典范幺半同构 $(–)^* \cong {}^*(–)$。

回顾一下，编织的 幺半范畴$\mathcal{C}$ 是指带有自然同构的幺半群范畴

$$c_{X\otimes Y} : X \otimes Y \to Y \otimes X$$

满足众所周知的六边形公理。

定义 2.3. 平衡范畴 是指带有自然同构的辫编织幺半范畴$\mathcal{C}$

$$\theta_X : X \to X,$$

称为扭结，使得

$$\theta_{X\otimes Y} = c_{Y,X} \circ c_{X,Y} \circ (\theta_X \otimes \theta_Y).$$

若$\mathcal{C}$ 是带状的，则称其为带状范畴；也就是说，它是刚性的、平衡的，并且还有

$$\theta_{X^*} = \theta_X^*,$$

对所有的 $X \in \mathcal{C}$。

命题 2.4 ([HPT16，推论 A.3])。设 $\mathcal{C}$ 是一个刚性编织范畴。那么，枢轴结构与 $\mathcal{C}$ 上的扭结之间存在一一对应关系。建立这种对应关系恰有两种方式。 ■

In 特别是，如果$\mathcal{C}$ 是一个辫 pivotal 范畴，那么有两种扭结选择，分别由 y

$$\theta_X^{(1)} = (\mathrm{id}_X \otimes \mathrm{ev}_{X^*}) \circ (c_{X^{**},X} \otimes \mathrm{id}_{X^*}) \circ (\mathrm{id}_{X^{**}} \otimes \mathrm{coev}_X) \circ \iota_X$$

and

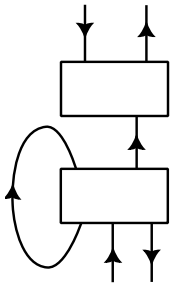
$$\theta_X^{(2)} = \iota_X^{-1} \circ (\mathrm{ev}_X \otimes \mathrm{id}_{X^{**}}) \circ (\mathrm{id}_{X^*} \otimes c_{X^{**},X}) \circ (\mathrm{coev}_{X^*} \otimes \mathrm{id}_X).$$

命题 2.5 ([HPT16，命题 A.4])。设 $\mathcal{C}$ 是一个编织的枢轴范畴。那么，$(\mathcal{C}\ \theta^{(i)})$ 对于任一 $i = 1,\ 2$ 当且仅当 $\theta^{(1)} = \theta^{(2)}$. ■

2.2 幺半范畴的图形语言。 HOMFLY 范畴 Rep 的定义$q\mathrm{P}_t$ 及其中心代数结构（参见第 3 节和第 4节）将依赖于幺半范畴的图形演算，我们将在此简要回顾。关于更全面的综述，请参见 [Sel09] ，另见 [HPT16第 2 节。1] 其中有很好的概述。

⋆ **刚性范畴。** 对于刚性幺半范畴$\mathcal{C}$，我们考虑 Γ 嵌入于 $\mathbb{R} \times [0, 1]$ 中的有向“垂直”平面图，其端点位于 $\mathbb{R} \times \{0、1\}$中。所谓垂直，是指边从不水平延伸。局部极值（即杯与帽）将被视为顶点。

其余顶点都是优惠券，关联边连接在顶面或底面上。例如，



是这种类型的平面图。我们用成对的 $(C,\ n)$ 标记图的边，其中 $C \in \mathcal{C}$ 且 $n \in \mathbb{Z},$ ，规则如下：如果一条边朝上，则 n 为偶数；如果朝下，则 n 为奇数。为保持一致， n必须在局部极大值和极小值处改变：逆时针转动使 n 增加 1，顺时针转动

使 n 减少 1。将 $(C,\ n)$ 解释为 $C^{*^{\times n}\cdots}$ 和 $(C,\ -n)$ 通过 ${}^{\times n}{}^{*\cdots}C$，对于每个 $n \in \mathbb{N}$，与优惠券底面和顶面相接的边集确定两个对象 $s,\ t \in \mathcal{C}$。因此，优惠券将标记一个态射 $f\colon s \to t$。如果两个平面图可以通过平面的一次直线同伦 彼此关联，且该同伦不会旋转优惠券，我们就认为它们等价。

定义 2.6. 范畴 Rig($\mathcal{C}$) 包含：

- 对象：由成对元素组成的有限序列 (C, n)，其中 $C \in \mathcal{C}$ 且 $n \in \mathbb{Z}$;
- 态射：如上所述的带装饰平面图的等价类，其源和靶分别由底部和顶部端点的装饰决定。复合通过将图表垂直堆叠来定义。

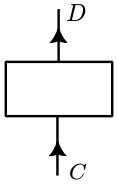
该范　　畴具有由对象的连接和态射的水平堆叠给出的幺半结构
射的 ms.

范畴 Rig($\mathcal{C}$) 是由 $\mathcal{C}$生成的自由刚性范畴：它配备了一个幺半群评价函子

$$\mathrm{ev}_{\mathcal{C}} : \mathrm{Rig}(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$$

将 (C, n) 映为 $C^{*^{\times n}\cdots *}$，将 $(C, -n)$ 映为 ${}^{*^{\times n}\cdots}C$，对每个 $n \in \mathbb{N}$ 都成立。装饰有 f 的优惠券被映为 f 其自身，而杯与帽的像分别是$\mathcal{C}$中指定的求值态射和余求值态射。

⋆ **幺半范畴**。如上一节所述，枢轴结构给出了典范幺半同构 $(-)^* \cong {}^*(-)$ 和 $(-)^{**} \cong (-)$。由于多个对偶被典范地识别，因此，只需从刚性范畴的图形演算中去掉整数标记，就能得到幺半范畴的图形演算。具体而言，我们考虑与上一节相同的一类图，并按如下方式标记：边只用 $\mathcal{C}$ 中的对象着色。对于每个优惠券，将 $(C, \uparrow)$ 解释为 C，将 $(C, \downarrow)$ 解释为 C^*，关联边便再次确定两个对象 $s, t \in \mathcal{C}$。因此，优惠券标记为一个态射 $f\colon \tilde{s} \to \tilde{t}$，其中 $\tilde{s}, \tilde{t}$ 是通过枢轴结构与 $s,\ t$ 典范识别的对象。若两个图可由平面同痕相互变换，则称它们等价。特别地，现在我们允许将优惠券旋转 2π 的同痕。注意，这产生的图类比之前更一般，例如，

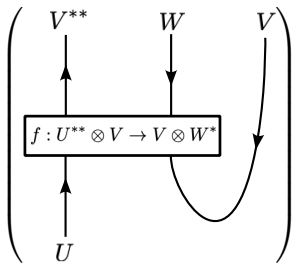


可以标记为 $f : C \to D$ 或 $f : C \to D^{**}$ 形式的态射（以及许多其他可能形式）。

与前一种情况一样，我们得到一个范畴 $\mathbf{Piv}(\mathcal{C})$，其态射是平面图，并配有一个求值函子

$$\mathrm{ev}_{\mathcal{C}} \colon \mathrm{Piv}(\mathcal{C}) \to \mathcal{C},$$

which 是以 $\mathcal{C}$ 为基础的自由幺半对偶范畴（枢轴结构是平凡的）。例如 e,

$$\mathrm{ev}_{\mathcal{C}}\left(\begin{array}{c}\text{}\\ \text{}\end{array}\right) = \left(\iota_V^{-1}\otimes \mathrm{id}_W \otimes \mathrm{id}_V\right)\circ(f\otimes \mathrm{id}_{V^*})\circ\left(\iota_U^{-1}\otimes \mathrm{coev}'_V\right),$$

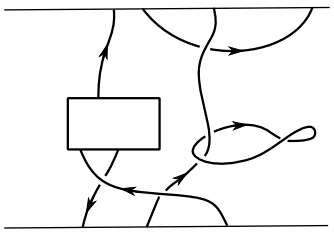
其中 ι 是$\mathcal{C}$。的枢轴结构

⋆ **编织幺半对偶范畴**。编织幺半对偶范畴的图形演算由三维图支持:

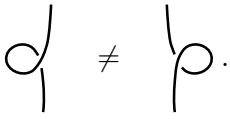
定义 2.7。设$\mathcal{C}$ 是一个编织幺半对偶范畴。范畴 $\mathbf{BrPiv}(\mathcal{C})$ 具有:

- 对象：由若干对组成的有限序列 (C, ε)，其中 $C \in \mathcal{C}$ 且 $\varepsilon \in \{\uparrow, \downarrow\}$;
- 态射：嵌入在 $\mathbb{R}^2 \times [0,1]$ 中且端点位于 $\mathbb{R} \times \{0\} \times \{0,1\}$ 的有向图的等价类，其顶点为优惠券，并按照与幺半范畴相同的规则进行装饰。

范畴 $\mathbf{BrPiv}(\mathcal{C})$ 本身是一个编织幺半范畴，具有平凡的枢轴结构，且其编织由线股交叉给出。图将通过投影到$\mathbb{R} \times [0,1]$ 所得的图表来表示，同时记录交叉处线股的相对位置。例如,



这是表示此类三维图的图表。如果两个图可通过正则同痕相互关联，则它们等价；也就是说，一个图表可通过有限次 Reidemeister II 型和 III 型变换及平面同痕得到另一个图表。特别地,



(2.4)

(2.4中的两个图表以图示方式表示了将 $\mathbf{BrPiv}(\mathcal{C})$转化为平衡范畴的两族扭结（参见命题 2.4）。

范畴 $\mathbf{BrPiv}(\mathcal{C})$ 是由 $\mathcal{C}$ 生成的自由辫子范畴 。同样，我们有一个求值函子

$$\mathrm{ev}_{\mathcal{C}} : \mathrm{BrPiv}(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$$

将正交叉映射为编织。

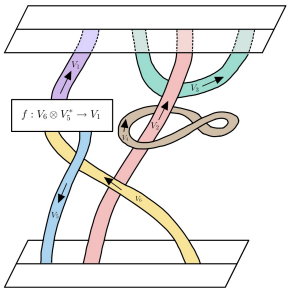


图 4：着色带图。

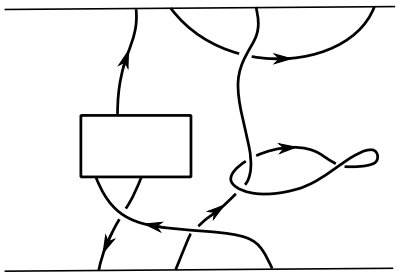


图 5：带状图。

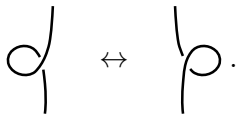
⋆ **带状范畴。** (2.4)中的不等式表明，从拓扑观点来看，编织幺半对偶范畴仍不够自然。带状范畴定义为这样一类编织幺半对偶范畴，其中两个项相等。带状范畴的图形演算由所谓的带状图支撑。

带状图是边为厚带的三维图。更准确地说，它是嵌入在 $\mathbb{R}^2 \times [0,1]$ 中的紧致定向曲面 Ω，由以下基本部件组成：

1. 带，即与正方形 $[0,1] \times [0,1]$ 同胚且其核心定向的副本；2. 环带，即与圆柱 $\mathbb{S}^1 \times [0,1]$ 同胚且其核心也定向的副本；3. 优惠券，具有指定的上底边和下底边。

带只能在优惠券的指定底边处与优惠券相接。另一方面，为 Ω 选择定向后，会确定一个“优选侧”。我们要求带的自由底边（即不与任何优惠券相接的底边）分别在 $\mathbb{R} \times \{0\}\{0\}$ 和 $\times\{1\}$ 处与平面 $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ 和 $\mathbb{R}^2 \times \{1\}$ 正交相交，并使 Ω 的优选侧朝上。带、优惠券和环带的着色规则与幺范畴中的规则相同。

带状图将视同痕而视为等价：带状图的同痕是指$\mathbb{R}^2 \times [0,1]$ 在 $\mathbb{R}^2 \times \{0,1\}$ 上的恒等态射，并且保持带、环带和优惠券的分解不变。通过施行这样的同痕，任意带状图都等价于一个其带、优惠券和环带处处平行于竖直平面的图。这样的图可以表示为一个带状图：将带和环带投影到其核心上，再将所得图投影到 $\mathbb{R} \times [0,1]$ （见图5）。如果两个带状图可通过有限序列的 Reidemeister II 型和 III 型变换、平面同痕以及如下形式的变动相互得到，则它们表示同一个带状图



定义 2.8 *([Tur94, 第 I 节。2])。* 设 $\mathcal{C}$ 是一个带状范畴。范畴 Rib($\mathcal{C}$)具有：

- 对象：由成对元素组成的有限序列 (C, ε)，其中 $C \in \mathcal{C}$ 且 $\varepsilon \in \{\uparrow, \downarrow\}$；
- 态射：嵌入在 $\mathbb{R}^2 \times [0,1]$ 中的有向带图（定义如下）的同痕类，并按通常方式赋予 $\mathcal{C}$ 颜色。

这是一个带状范畴，其扭结由 给出。 

如同 t 在前述情形中，Rib($\mathcal{C}$) 是由$\mathcal{C}$生成的自由辫带范畴，并且我们有一个求值 n

函子

$$\mathrm{ev}_{\mathcal{C}} : \mathrm{Rib}(\mathcal{C}) \to \mathcal{C},$$

称为*Reshetikhin–Turaev* 求值函子。

2.3 Skein 范畴。 带状范畴的图形演算可推广到任意定向曲面，从而得到 skein 范畴的概念。Skein 范畴是定向曲面的范畴不变量，是 skein 代数概念的推广。它们由[Wal06、JF19] 引入，并以带状范畴$\mathcal{C}$ 作为代数组成部分：

定义 2.9。 （[Coo19，定义 1。3]）设 S 为一个定向曲面。一个$\mathcal{C}$-着色带图在 S 中，是指一个 $\mathcal{C}$-着色带图到 $S \times [0,1]$ 的嵌入，使其自由基映至 $S \times \{0，1\}$，其余部分则位于 $S \times (0，1)$。

定义 2.10。 （[Coo19，定义 1。5]）设 $\Bbbk$ 为一个交换基环。带状图范畴$categoryRib(\mathcal{C}\ S)$ 中 S 具有：

- 对象：有限集 $\left\{x_{(C_1,\varepsilon_1)}\,1\,,\ldots,\underset{m}{x_{(C_m\,\varepsilon_m}}\right\}_{,)}$，由互不相交的带框点组成 $x_i \in S$，其颜色由有序对 (C_i, ε_i) 指定，其中 $C_i \in \mathcal{C}$ 且 $\varepsilon_i \in \{\uparrow, \downarrow\}$；
- 从 $\left\{x_{(C_1,\varepsilon_1)}\,1\,,\ldots,\underset{m}{x_{(C_m\,\varepsilon_m}}\right\}_{,)}$ 到 $\left\{y_{(D_1,\eta_1)}\,1\,,\ldots,\underset{n}{y_{(D_m\,\eta_n}}\right\}_{,)}$ 的态射是 $\Bbbk$-线性组合，由 S 中 $\mathcal{C}$-着色带图的同痕类构成，其底部和顶部依次分别为 $\left\{x_{(C_1,\varepsilon_1)}\,1\,,\ldots,\underset{m}{x_{(C_m\,\varepsilon_m}}\right\}_{,)}$ 和 $\left\{y_{(D_1,\eta_1)}\,1\,,\ldots,\underset{n}{y_{(D_m\,\eta_n}}\right\}_{,)}$。

复合由将 $S \times [0,1]$ 的两个副本沿垂直方向堆叠，并将 $S \times [0,2]$ 收缩至 $S \times [0,1]$ 给出。特别地，$\mathrm{Rib}(\mathcal{C}\ \mathbb{R}^2) = \mathrm{Rib}(\mathcal{C})$。

定义 2.11. ([Coo19, 定义 1.9]) 设$\mathcal{C}$ 为一个带状范畴， S 为一个定向曲面。skein 范畴 $\mathrm{SkCat}_{\mathcal{C}}(S)$ 是 $\mathrm{Rib}(\mathcal{C}\ S)$ 关于以下关系的商：态射 $\sum_i \lambda_i \Omega_i \sim 0$ 当且仅当存在一个保定向嵌入 $\iota\colon \mathbb{R}^2 \times [0,1] \hookrightarrow S \times [0,1]$ 使得：

1. 每个 Ω_i 与 $\iota(\mathbb{R}^2 \times [0,1])$ 的边界的交集仅由横截带构成，这些横截带分别与 $\iota(\mathbb{R} \times \{0\} \times \{0\})$ 和 $\iota(\mathbb{R} \times \{0\} \times \{1\})$ 相交；
2. 在 $\iota(\mathbb{R}^2 \times [0,1])$ 之外，Ω_i 彼此相等；
3. 我们有

$$\sum_i \lambda_i \mathrm{ev}_{\mathcal{C}}\left(\iota^{-1}\left(\Omega_i \cap \iota(\mathbb{R}^2 \times [0,1])\right)\right) = 0.$$

注意，skein 范畴一般不是幺半范畴。当 $S = C \times I$ 对某个一维流形成立时，可以通过将 $C \times I$ 的两个副本上下叠放来定义张量积。以下结论可由定义直接推出：

命题 2.12. 设 C 是一个带状范畴。那么，

$$SkCat_{\mathcal{C}}(\mathbb{R}^2) \simeq \mathcal{C}$$

作为带状范畴。 ■

2.4 抛物限制。 设 $\Bbbk$ 为一个特征零域，且 $q \in \Bbbk^{\times}$。固定 $N \in \mathbb{N}$，并假设 q不是单位根。代数 $U_q(\mathfrak{gl}_N)$ 由生成元 $e_i, f_i, d_j, d_j^{-1}, i = 1, \ldots, N-1,\ j = 1, 2, \ldots, N$ 及以下关系定义：

$$d_i d_j = d_j d_i, \quad d_i d_i^{-1} = d_i^{-1} d_i = 1,$$

$$d_i e_j d_i^{-1} = q^{\delta_{ij}-\delta_{i,j+1}} e_j, \quad d_i f_j d_i^{-1} = q^{-\delta_{i,j}+\delta_{i,j+1}} f_j,$$
$$e_i f_j - f_j e_i = \delta_{ij} \frac{d_i d_{i+1}^{-1} - d_i^{-1} d_{i+1}}{q - q^{-1}},$$
$$e_i e_j = e_j e_i, \quad f_i f_j = f_j f_i, \quad |i-j| \geq 2,$$
$$e_i^2 e_{i\pm1} - (q+q^{-1}) e_i e_{i\pm1} e_i + e_{i\pm1} e_i^2 = 0,$$
$$f_i^2 f_{i\pm1} - (q+q^{-1}) f_i f_{i\pm1} f_i + f_{i\pm1} f_i^2 = 0.$$

该代数在余乘法 Δ 下成为一个 Hopf 代数: $U_q(\mathfrak{gl}_N) \to U_q(\mathfrak{gl}_N) \otimes U_q(\mathfrak{gl}_N)$ 在生成元上的定义如下:

$$\Delta(e_i) = d_i^{-1} d_{i+1} \otimes e_i + e_i \otimes 1, \quad \Delta(f_i) = 1 \otimes f_i + f_i \otimes d_i d_{i+1}^{-1}, \quad \Delta(d_i^{\pm1}) = d_i^{\pm1} \otimes d_i^{\pm1}.$$

余单位 ε: $U_q(\mathfrak{gl}_N) \to \mathbb{k}$和对极 S: $U_q(\mathfrak{gl}_N) \to U_q(\mathfrak{gl}_N)$ 分别定义为

$$\varepsilon(e_i) = 0, \quad \varepsilon(f_i) = 0, \quad \varepsilon(d_i) = 1$$

and

$$S(e_i) = -d_i d_{i+1}^{-1} e_i, \quad S(f_i) = -f_i d_i^{-1} d_{i+1}, \quad S(d_i) = d_i^{-1}.$$

定义 n 2.13. 自然表示 ρ: $U_q(\mathfrak{gl}_N) \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^N)$ $U_q(\mathfrak{gl}_N)$ 定义为 y

$$\rho(d_i) = qE_{i,i} + \sum_{i \neq j} E_{j,j}, \quad \rho(e_i) = E_{i,i+1}, \quad \rho(f_i) = E_{i+1,i},$$

其中 $E_{i,j}$ 是矩阵，其在 (i,j) 位置上的元素为 1，其余位置为 0。我们将此表示记为 V_N。

固定 $m, n \in \mathbb{N}$，并考虑由$\{d_i, e_j, f_j \mid j \neq m\}$生成的子代数 $U_q(\mathfrak{l})$，它是 $U_q(\mathfrak{gl}_{m+n})$ 的子代数。我们可以通过映射将 $U_q(\mathfrak{l}) \cong U_q(\mathfrak{gl}_m) \otimes U_q(\mathfrak{gl}_n)$ 识别为

$$d_i \mapsto d_i, \qquad e_j, f_j \mapsto \begin{cases} e_j \otimes 1, f_j \otimes 1, & \text{for } 0 \leq j \leq m-1, \\ 1 \otimes e_{j-m}, 1 \otimes f_{j-m}, & \text{for } m+1 \leq j \leq m+n-1, \end{cases}$$

使得 $U_q(\mathfrak{l})$ 作用于 V_m 和 V_n。类似地，令 $U_q(\mathfrak{p})$ 为由$\{d_i, e_i, f_j \mid j \neq m\}$生成的子代数。注意，$U_q(\mathfrak{l})$ 是 $U_q(\mathfrak{p})$ 的子代数，同时也是由 e_m 生成的理想的商。

定义 2.14。我们用 $\mathrm{Rep}_q\mathrm{GL}_{m+n}$、$\mathrm{Rep}_q\mathrm{L}$ 和 $\mathrm{Rep}_q\mathrm{P}$ 分别表示 $U_q(\mathfrak{gl}_{m+n})$、$U_q(\mathfrak{l})$ 和 $U_q(\mathfrak{p})$ 的局部有限维表示范畴,

沿着包含映射和投影态射进行限制，可得到函子

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathrm{Rep}_q\mathrm{P} & & \\ & \overset{\iota^*}{\nearrow} & & \overset{\pi^*}{\nwarrow} \; \overset{j^*}{\searrow} & \\ \mathrm{Rep}_q\mathrm{GL}_{m+n} & & \xrightarrow{\mathrm{res}_{m,n}} & & \mathrm{Rep}_q\mathrm{L}. \end{array} \tag{2.5}$$

注意，$\mathrm{res}_{m,\,n}(V_{m+n}) \simeq V_m \oplus V_n$ 属于 $\mathrm{Rep}_q\mathrm{L}$。

对于任意 $N \in \mathbb{N}$， $U_q(\mathfrak{gl}_N)$ 的泛 R-矩阵是一个可逆元素 $\mathcal{R}$ ，它属于 $U_q(\mathfrak{gl}_N) \otimes U_q(\mathfrak{gl}_N)$ 的某个完备化。它在 $\mathrm{Rep}_q\mathrm{GL}_N$ 上诱导出一个编织，用 Sweedler 记号表示为

$$c_{V,W}(v,w) \coloneqq \mathcal{R}_{(2)} w \otimes \mathcal{R}_{(1)} v,$$

对于 $v \in V$ 和 $w \in W.$，将编织作用于基本表示后，得到一个自同构 β_N：$V_N \otimes V_N \to V_N \otimes V_N$，它可以明确写为

$$\beta_N = q\sum_i (E_{i,i}\otimes E_{i,i}) + \sum_{i\neq j}(E_{i,i}\otimes E_{i,j}) + \left(q-q^{-1}\right)\sum_{i<j}(E_{i,j}\otimes E_{j,i}). \tag{2.6}$$

取 $N = m+n$ 并将其限制到 $U_q(\mathfrak{l})$，该同构分解为

$$\mathrm{res}_{m,n}(\beta_{m+m}) = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \beta_m & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \sigma_{m,n} & 0 \\ \hline 0 & \sigma_{n,m} & (q-q^{-1})\,\mathrm{Id}_{m,n} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \beta_n \end{array}\right) : (V_m \oplus V_n)^{\otimes 2} \to (V_m \oplus V_n)^{\otimes 2} \tag{2.7}$$

在 Rep$_q$L，中，因此幺半函子 res$_{m,\ n}$ 不是编织的。

另一方面，众所周知，范畴 Rep$_q$P 也不是编织的。令 $W \in$Rep$_q$GL$_{m+n}$，并令 $V \in$ Rep$_q$P。$U_q(\mathfrak{gl}_n)$ 的泛 R-矩阵 R 属于$U_q(\mathfrak{b}_+) \otimes U_q(\mathfrak{b}_-) \subseteq U_q(\mathfrak{p}) \otimes U_q(\mathfrak{b}_-)$ 的完备化，其中 $\mathfrak{b}_\pm$ 是 $\mathfrak{gl}_{m+n}.$ 的正、负 Borel 子代数。因此，R 在 $V \otimes \iota^*(W)$ 上有良定义的作用，与张量因子的交换映射复合后，得到 Rep$_q$P 中 $V \otimes j^*(W) \to j^*(W) \otimes V$的一个同构，且该同构关于 V自然。类似地，若 $U \in$ Rep$_q$L，则 $U_q(\mathfrak{l})$ 的 R-矩阵作用于$V \otimes \pi^*(U)$，从而给出一个$V \otimes \pi^*(U) \to \pi^*(U) \otimes V$，且其关于 V自然。

命题 2.15. 限制函子 ι^*: *Rep$_q$GL$_{m+n}$* $\to$ *Rep$_q$P* 和 π^*: *Rep$_q$L* $\to$ *Rep$_q$P* 可提升为一个编织函子

$$\iota^* \otimes \pi^* : Rep_q GL_{m+n} \boxtimes \overline{Rep_q L} \to Z\left(Rep_q P\right),$$

其中 $\overline{Rep_q P}$ 是 *Rep$_q$L* 作为编织范畴的对立范畴，而 $Z($*Rep$_q$P*$)$ 是 *Rep$_q$P* 的 *Drinfeld* 中心。■

定义 2.16. 我们将前一个命题中的结构称为抛物中心代数。

2.5 范畴与双模。 本节回顾一些将在构造中反复出现的范畴论概念。我们固定一个基环 $\Bbbk$，并将 Vect 记为 $\Bbbk$-模的范畴。$\Bbbk$-线性范畴 是一个以 Vect 为富集范畴的范畴$\mathcal{C}$。小型 $\Bbbk$-线性范畴及其 $\Bbbk$-线性函子的范畴 Cat 是对称幺半的：

定义 2.17. 给定 $\mathcal{C}$,$\mathcal{D} \in$ Cat，我们将 $\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}$ 定义为如下的 $\Bbbk$-线性范畴：其

- 对象是形如 (c,d) 的有序对，其中 $c \in \mathcal{C}$ $d \in \mathcal{D}$;
- 态射由以下内容给出

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}\boxtimes\mathcal{D}}((c_1,d_1),(c_2,d_2)) \coloneqq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c_1,c_2) \otimes_{\Bbbk} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(d_1,d_2).$$

定义 2.18。 设 F: $\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{D}$ 是一个 $\Bbbk$-线性双函子，并假设$\mathcal{D}$ 是余完备的。F 的余端是对象

$$\int^{c\in\mathcal{C}} F(c,c) \coloneqq \mathrm{colim}\left(\prod_{f:\ c\to c'} F(c,c') \underset{F(c,f)}{\overset{F(f,c')}{\rightrightarrows}} \prod_{c\in\mathcal{C}} F(c,c)\right) \in \mathcal{D}.$$

若$\mathcal{D}$ =Vect，则其明确形式为

$$\int^{c\in\mathcal{C}} F(c,c) = \bigoplus_{c\in\mathcal{C}} F(c,c)\,/_{\sim},$$

其中，我们对形如.....的态射的像取商

$$F(c,c') \xrightarrow{F(f,c')-F(c,f')} F(c,c)\oplus F(c',c').$$

定义 2.19. 范畴BIMOD具有：

- 对象：小型 $\Bbbk$-线性范畴；
- 态射：从 $\mathcal{C}$ 到$\mathcal{D}$ 的态射是形如 $F\colon\ \mathcal{C}\ \boxtimes\mathcal{D}_{\mathrm{op}}\to$ Vect。的函子。

The $F\colon\ \mathcal{C}\ \boxtimes\mathcal{D}^{\mathrm{op}}\to$ Vect 与 $G\colon\ \mathcal{D}\ \boxtimes\mathcal{E}^{\mathrm{op}}\to$ Vect 的复合由 coen 给出 d

$$(G\circ F)(c,e) \coloneqq \int^{d\in\mathcal{D}} F(c,d)\otimes_{\Bbbk} G(d,e).$$

$\mathcal{C}$ 的恒等态射是双模 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,\ -)$。 $\Bbbk$-线性范畴的张量积赋予 Bimod 对称幺半范畴的结构。

注 2.20。 范畴 Cat 嵌入到 Bimod。 事实上，给定一个 $\Bbbk$-线性函子 $F\colon\mathcal{C}\ \to\mathcal{D}$，我们得到一个双模

$$F^*\colon \mathcal{C}\boxtimes\mathcal{D}^{\mathrm{op}}\to \mathrm{VECT},\quad c\boxtimes d\mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(d,F(c)).$$

◊

最后，我们回顾以下完备化的概念：

定义 2.21。范畴 $\mathcal{C}$ 的柯西完备化 是一个加性范畴 Cauchy($\mathcal{C}$)，并配有一个嵌入 $\mathcal{C}\ \to$ Cauchy($\mathcal{C}$)，使得每个幂等元都在 Cauchy($\mathcal{C}$) 中分裂，且 Cauchy($\mathcal{C}$) 对这一性质具有泛性质。

2.6 分层空间。 在第 5 节和 6节中，我们将在带有线缺陷和曲面 缺陷的 3-流形上定义一种 skein 理论。这里，我们介绍后文将使用的分层空间术语和约定。

定义 **2.22**。 (i) 分层空间 是一个拓扑空间 X，其上赋有一个连续的 m ap

$$\phi\colon X\to P,$$

其中 P 是一个偏序集，其拓扑的开集由 $P_{>p}$ 生成：$=\{x\in P\mid x>p\}$，对于 $p\in P.$。对于每个 $p\in P$，子集 $X_p\coloneqq\phi^{-1}(p)$ 是一个层。

(ii) (X,ϕ) 与 (Y,ψ) 之间的分层空间态射由一对连续映射 $f\colon\ X\to Y$, $F\colon\ P\to Q$ 组成，使得该图表

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ {\scriptstyle\phi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\psi} \\ P & \xrightarrow{F} & Q \end{array}$$

是交换的。若对每个$p \in P$，f 和 $f|_{X_p}$ 都是嵌入，则称其为分层嵌入

(iii) 两个分层嵌入 (f, F)，(g, G)之间的分层同痕：$X \to Y$是分层空间的态射 (h, H)：$X \times I \to Y$，满足对每个 $t \in I$,$h(-, 0) = f$和 $h(-, 1) = g$，$h(t, -)$ 都是嵌入。这里，$X \times I$上的分层由 $\varphi(x, t) = \phi(x)$ 给出，其中ϕ 是 X上的分层。特别地，X 的分层同痕是指一族连续的嵌入 $f_t\colon X \to X$，使得

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f_t} & X \\ & \searrow^{\phi} & \downarrow{\scriptstyle \phi} \\ & & P \end{array}$$

对每个 $t \in [0,1]$ 和 $f_0 = \mathrm{id}_X$，图表交换

我们通常讨论分层三维流形，并称 X_p 为线缺陷，当 $\dim(X_p) = 1$ 时；当 $\dim(X_p) = 2.$ 时，称其为曲面缺陷

定义 2.23。二分曲面 是一个定向曲面 S，配备了一个分层

$$\phi\colon S \to (A \geq B \leq C)$$

使得 $S_B = \phi^{-1}(B)$ 是一条光滑曲线，构成开分层S_A 与 S_C的公共边界。

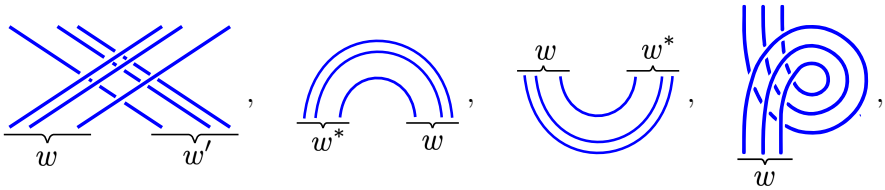
3 HOMFLY categories and ordinary restriction

在本文余下部分中，我们固定基环为

$$\Bbbk = \mathbb{C}(q)[q^{\pm t}, \delta] \Big/ \langle (q - q^{-1})\,\delta = q^t - q^{-t} \rangle.$$

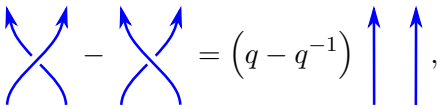
本节回顾 HOMFLY 范畴 Rep$_q$GL$_t$ ([Bru17, De07]) 的定义及其双色版本 Rep$_q$L$_t$。接下来，我们定义抛物子群 P$_q$P$_t$量子表示范畴 Rep $\subseteq$GL$_{m+n}$的 HOMFLY 版本。

3.1 HOMFLY 范畴 Rep$_q$GL$_t$。我们研究的主要对象之一是 HOMFLY 范畴 Rep$_q$GL$_t$，我们按照 [Bru17]的做法引入该范畴。令 T 为单色带框定向缠结范畴，其对象是由 {↑,↓} 构成的有限字，其态射是 $\Bbbk$-线性组合，取自 $\mathbb{R}^2 \times [0,1]$ 中带框定向缠结（即不含优惠券的带状图）的同痕类。该范畴具有带状结构。张量积由对象的连接以及态射的水平并置给出。对象 $w = w_1 \cdots w_k$的右对偶是对象 $w^* := w_k^* \cdots w_1^*$，其中 $(-)^*$ 交换 ↑和 ↓。编织、求值、余求值和扭结由下列图表示

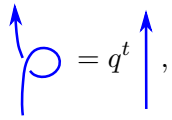


其中方向由图示的字确定。在求值和余求值映射中交换 w 和 w^*，我们可以展示 w^* 是 w 的左对偶；因此，$\mathcal{T}$ 具有严格枢轴结构。

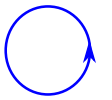
定义 3.1。范畴 $\mathrm{Rep}^q\mathrm{GL}_t$ 是 $\mathcal{T}$ 关于 *HOMFLY skein* (3.1)、扭结 (3.2) 和维数 (3.3) 关系所得的商：



$$= \left(q - q^{-1}\right) \quad , \tag{3.1}$$



$$= q^t \quad , \tag{3.2}$$



$$= \delta\ \mathbf{1}_{\varnothing}, \tag{3.3}$$

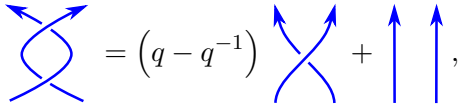
其中 $\mathbf{1}_{\varnothing}$ 是空图。

该范畴从$\mathcal{T}$继承了带状结构，并且可以由生成元与关系表示：

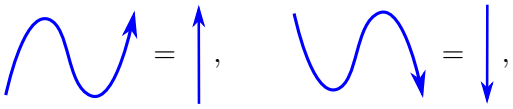
命题 3.2 ([Bru17，定理 1。1])。*Rep^{q}GL$_t$* 作为一个 $\Bbbk$-线性严格幺半群范畴，由对象 $\uparrow$ 和 $\downarrow$以及态射生成



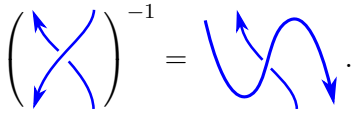
满足以下关系



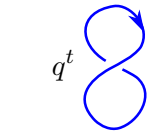
$$= \left(q - q^{-1}\right) \quad + \quad , \tag{3.4}$$



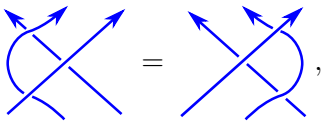
$$= \quad , \qquad = \quad , \tag{3.5}$$



$$= \quad . \tag{3.6}$$



$$= \delta\ \mathbf{1}_{\varnothing}. \tag{3.7}$$



$$= \quad , \tag{3.8}$$

■

De **定义 3.3**。*HOMFLY* 范畴 $\mathrm{Rep}^q\mathrm{GL}_t$ 是 $\mathrm{Rep}^q\mathrm{GL}$ 的柯西完备化 $_t$.

注 3.4。HOMFLY 范畴 $\mathrm{Rep}^q\mathrm{GL}_t$ 在局部有限表示的范畴 $\mathrm{Rep}^q\mathrm{GL}_N$之间进行插值，其中 $U_q(\mathfrak{gl}_N)$。更确切地说，对于任意整数 $N \in \mathbb{N}$，考虑求值映射

$$\varphi_N : \Bbbk \to \mathbb{C}(q), \quad q^t \mapsto q^N, \quad \delta \mapsto \frac{q^N - q^{-N}}{q - q^{-1}}.$$

存在一个 φ_N-线性满带状函子

$$\mathrm{ev}_N^{\mathrm{G}} : \mathrm{Rep}_q \mathrm{GL}_t \to \mathrm{Rep}_q \mathrm{GL}_N$$

将对象 $\uparrow$ 映射到自然表示 V_N。然而，该函子并不忠实：它的核是 $\mathrm{Rep}_q \mathrm{GL}_t$ 的可忽略态射理想（参见 [Bru17，定理 13]，其中给出了精确表述）。$\Diamond$

3.2 HOMFLY 范畴 $\mathbf{Rep}_q \mathbf{L}_t$。 接下来，我们将以图表方式描述双色 *HOMFLY* 范畴 $\mathrm{Rep}_q \mathrm{L}_t$，它内插了由局部有限 $U_q(\mathfrak{l})$-模组成的范畴 $\mathrm{Rep}_q \mathrm{L}$。

定义 3.5。 双色 *HOMFLY* 范畴 $\mathrm{Rep}_q \mathrm{L}_t$ 是 $\mathrm{Rep}_q \mathrm{GL}_t \boxtimes_{\mathbb{C}(q)} \mathrm{Rep}_q \mathrm{GL}_t$ 的柯西完备化。

在前面的定义中，符号表示 $\boxtimes_{\mathbb{C}(q)}$ 表示张量积是在 $\mathbb{C}(q)$-线性范畴范畴中取的（而不是在 $\Bbbk$-线性范畴中）。因此，$\mathrm{Rep}_q \mathrm{L}_t$ 是富化于 $\Bbbk \otimes_{\mathbb{C}(q)} \Bbbk$ 的。我们将记

$$q^{t_1} := q^t \otimes 1, \quad q^{t_2} := 1 \otimes q^t, \quad \delta_1 := \delta \otimes 1, \quad \text{and} \quad \delta_2 := 1 \otimes \delta$$

表示该环的生成元。下面的结论显然成立：

Pro命题 3.6。 *$\mathrm{Rep}_q L_t$ 具有带状结构，该结构由 $\mathrm{Rep}_q GL_t$. 中各因子的带状结构给出* ■

我们将用图示来表示这个范畴（参见命题 2.12），并采用以下颜色约定：

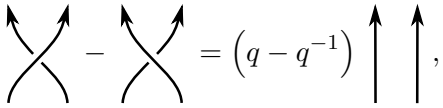
$$\blacksquare := (\blacksquare, \varnothing), \quad \blacksquare := (\varnothing, \blacksquare) \quad \text{and} \quad \blacksquare := \blacksquare \oplus \blacksquare.$$

表示绿色/红色与橙色之间的包含映射和投影的优惠券将表示为

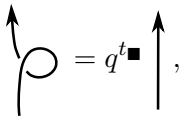


根据定义，$\mathrm{Rep}_q \mathrm{L}_t$ 中成立以下关系：

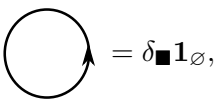
- 单色的 skein、扭结和维数关系：



(3.9)



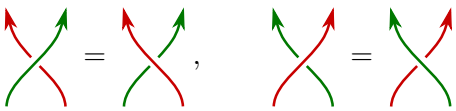
(3.10)



(3.11)

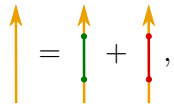
所有线股均采用相同颜色 $\blacksquare \in \{\blacksquare = 1, \ \blacksquare = 2\}$；

- 双色交叉关系：



(3.12)

- 关系



(3.13)

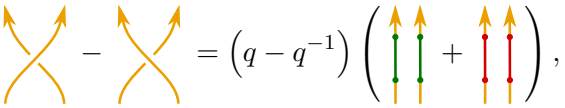


(3.14)

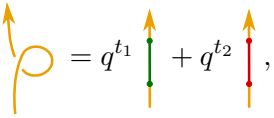
表达了以下事实：■ = ■ ⊕ ■.

由于关系（3.12），我们将不再区分正负双色交叉。此外，请注意，HOMFLY、扭结和维数关系不适用于橙色对象。相反，我们有：

引理 3.7。 以下关系在 $Rep_q L_t$ 中成立：



(3.15)

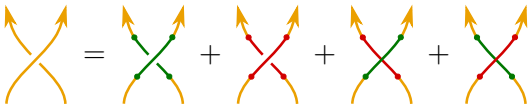


(3.16)



(3.17)

证明。 应用（3.13），我们可以写成



(3.18)

负交叉也同样如此。因此，陈述中的第一个关系由绿色和红色 skein 关系推出。同样，蓝色扭结关系和维数关系也是绿色和红色关系的直接推论。

□

注 3.8。 再次地，$\mathrm{Rep}_q \mathrm{L}_t$ 在范畴 $\mathrm{Rep}_q \mathrm{L}$ 中具有泛性。将 t_1 和 t_2 特化为整数值 m，$n \in \mathbb{N}$，我们得到一个求值态射

$$\varphi_{m,n} : \Bbbk \otimes_{\mathbb{C}(q)} \Bbbk \to \mathbb{C}(q),$$

并且存在一个规范的求值函子

$$\mathrm{ev}^{\mathrm{L}}_{m,n} : \mathrm{Rep}_q \mathrm{L}_t \to \mathrm{Rep}_q \mathrm{L}$$

映射 ↑ 和 ↑ 到 $U_q(\mathfrak{gl}_m)$ 和 $U_q(\mathfrak{gl}_n)$的自然表示，分别，并将 ↑映射到它们的直和。 ◊

引理 3.9。 对于任意定向曲面 S，我们有一个$(\Bbbk \otimes_{\mathbb{C}(q)} \Bbbk)$-线性范畴的等价

$$SkCat_{L_{t,t}}(S) \cong SkCat_{GL_t}(S) \boxtimes SkCat_{GL_t}(S).$$

特别是，这诱导出一个代数同构

$$Sk_{L_{t,t}}(S) \cong Sk_{GL_t}(S) \otimes_{\mathbb{C}(q)} Sk_{GL_t}(S).$$

证明。 我们定义一个函子 $\mathrm{Rib}_{\mathrm{Rep}_q \mathrm{L}_t}(S) \to \mathrm{SkCat}_{\mathrm{GL}_t}(S) \boxtimes \mathrm{SkCat}_{\mathrm{GL}_t}(S)$，方法是分别将第一因子和第二因子上的绿色与红色分开。根据 $\mathrm{Rep}_q \mathrm{L}_t$ 的定义，它与 skein 关系相容，因此可经由 skein 范畴分解，从而得到所需的等价。

□

3.3 限制函子。 限制函子

$$\mathrm{res}_{m,n}\colon \mathrm{Rep}_q\mathrm{GL}_{m+n} \to \mathrm{Rep}_q\mathrm{L}$$

还具有一个 HOMFLY版本，我们将在本节中以图表方式构造它。我们首先通过设定来定义一个余乘法 $\Delta\colon \ \Bbbk \to \Bbbk \otimes_{\mathbb{C}(q)} \Bbbk$

$$\Delta\left(q^t\right) = q^{t_1}q^{t_2}, \quad \Delta(\delta) = \delta_1\, q^{t_2} + q^{-t_1}\, \delta_2 \tag{3.19}$$

在生成元上，并以 $\mathbb{C}(q)$-线性方式延拓。

引理 3.10。 映射 $\Delta\colon \ \Bbbk \to \Bbbk \otimes_{\mathbb{C}(q)} \Bbbk$ 是良定义的且为余结合的。

证明。 这是一个简单的计算。首先，

$$\begin{aligned}\Delta(q^t - q^{-t}) &= q^{t_1}q^{t_2} - q^{-t_1}q^{-t_2}\\ &= (q^{t_1} - q^{-t_1})q^{t_2} + q^{-t_1}(q^{t_2} - q^{-t_2})\\ &= (q - q^{-1})(\delta_1 q^{t_2} + q^{-t_1}\delta_2) = (q - q^{-1})\Delta(\delta),\end{aligned}$$

因此该映射是良定义的。对于余结合性，我们有

$$(1 \otimes \Delta) \circ \Delta(q^t) = q^{t_1}q^{t_2}q^{t_3} = (\Delta \otimes 1) \circ \Delta(q^t),$$

and

$$\begin{aligned}(1 \otimes \Delta) \circ \Delta(\delta) &= \delta_1(q^{t_2}q^{t_3}) + q^{-t_1}(\delta_2 q^{t_3} + q^{-t_2}\delta_3)\\ &= (\delta_1 q^{t_2} + q^{-t_1}\delta_2)q^{t_3} + (q^{-t_1}q^{-t_2})\delta_3 = (\Delta \otimes 1) \circ \Delta(\delta).\end{aligned}$$

□

注 3.11。 将公式（3.19）分别特化于 $t = m + n$、 $t_1 = m$ 和 $t_2 = n$，其中 $m,\ n \in \mathbb{N}$即可恢复以下恒等式

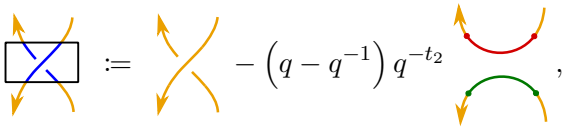
$$q^{m+n} = q^m q^n, \qquad [m+n]_q = q^n[m]_q + q^{-m}[n]_q,$$

将 $U_q(\mathfrak{gl}_{m+n})$ 的基本表示的量子维数表示为 $U_q(\mathfrak{gl}_m)$ 和 $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ 的基本表示的量子维数的形式。再次，我们可以将 Δ 视为这些公式的插值。$\Diamond$

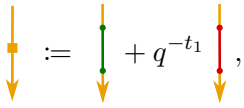
我们引入以下记号：



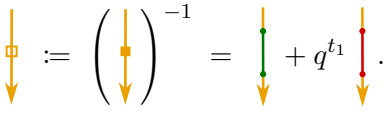
(3.20)



(3.21)



(3.22)



(3.23)

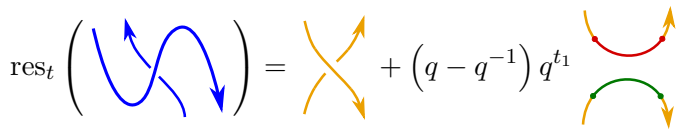
定理 3.12. 存在一个唯一的 Δ-线性函子

$$res_t : Rep_q GL_t \to Rep_q L_t \tag{3.24}$$

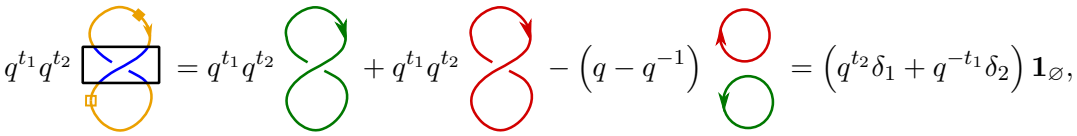
保持张量积，并且满足



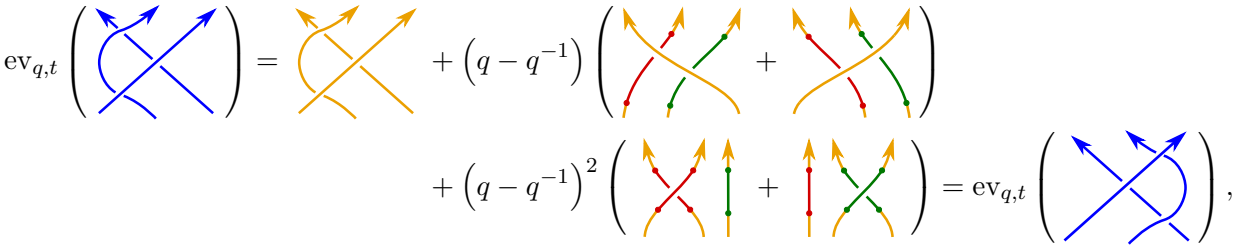
证明。 命题 3.2给出了 $\mathrm{Rep}_q\mathrm{GL}_t$ 的生成元与关系表示。由于 res_t在生成元上定义，因此若其定义良好，则它是唯一的。我们检验它保持关系（3.4）–（3.8）。对于编织关系（3.4）和之字形关系（3.5），利用相应的绿色与红色关系以及（3.14）可直接计算得到。将函子作用于（3.6）的右侧，我们得到



与其复合，并对其中涉及（余）求值的项应用单色扭转关系后，我们得到恒等态射，因此（3.6）得以保持。另一方面，



因此关系（3.7）得以保持。最后，利用注 3.15中的关系，我们得到



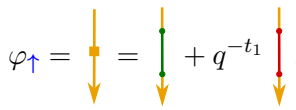
因此 Reidemeister 关系（3.8）也得以保持。 □

注 3.13。与注 3.4 和注 3.8相似，函子 res_t 在 $\mathrm{res}_{m,n} : \mathrm{Rep}_q\mathrm{GL}_{m+n} \to \mathrm{Rep}_q\mathrm{L}$ 之间插值限制函子。也就是说，该图表

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Rep}_q\mathrm{GL}_t & \xrightarrow{\mathrm{res}_t} & \mathrm{Rep}_q\mathrm{L}_t \\ {\scriptstyle \mathrm{ev}^{\mathrm{G}}_{m+n}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{ev}^{\mathrm{L}}_{m,n}} \\ \mathrm{Rep}_q\mathrm{GL}_{m+n} & \xrightarrow{\mathrm{res}_{m,n}} & \mathrm{Rep}_q\mathrm{L} \end{array}$$

对任意 $m,\ n \in \mathbb{N}.$ 都可交换 ◊

注 3.14.限制函子 res_t 是严格幺半的，但它不保留特定对偶。由 (2.2) 给出的自然同构由下式确定：



此外，res_t 不是枢轴的：范畴 $\mathrm{Rep}^q\mathrm{GL}_t$ 和 $\mathrm{Rep}^q\mathrm{L}_t$ 都赋有平凡的枢轴结构，但该同构

$$\eta^r_{\uparrow}\colon \uparrow = \mathrm{res}_t(\uparrow)^{**} \xrightarrow{(\varphi^r_{\uparrow})^*} \mathrm{res}_t(\uparrow^*)^* \xrightarrow{(\varphi^r_{\downarrow})^{-1}} \mathrm{res}_t(\uparrow^{**}) \xrightarrow{\mathrm{res}_t(\mathrm{id}_{\downarrow})} \mathrm{res}_t(\uparrow) = \uparrow$$

由（2.3）表示为

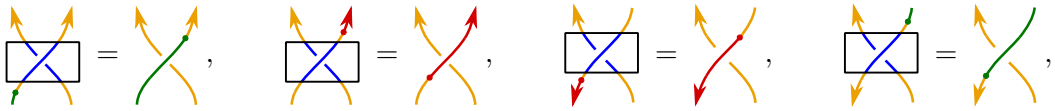
$$\eta^r_{\uparrow} = q^{t_2}$$  $$+ q^{-t_1}$$  $$, \tag{3.25}$$

它不是 $\uparrow$ 在 $\mathrm{Rep}^q\mathrm{L}_t$中的恒等态射。类似地，对于由 $\mathrm{Rep}^q\mathrm{GL}_t$ 和 $\mathrm{Rep}^q\mathrm{L}_t$的带状结构所诱导的左对偶，我们得到一个同构

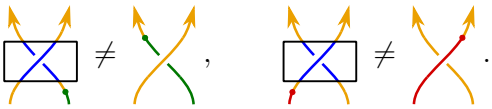
$$\eta^l_{\uparrow} = q^{-t_2}$$  $$+ q^{t_1}$$  $$. \tag{3.26}$$

◊

注 3.15. 利用（3.18）以及方框的定义，很容易验证 t



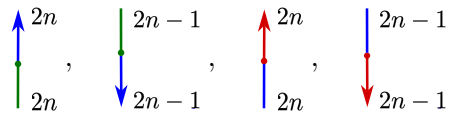
但例如，

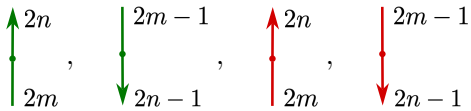


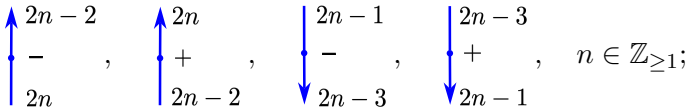
这是一个图示对应，反映了 R-矩阵 $U_q(\mathfrak{gl}_{m+n})$ 属于（某个完备化中的） $U_q(\mathfrak{b}^+) \otimes U_q(\mathfrak{b}^-)$ 这一事实，其中 $\mathfrak{b}^{\pm}$ 是相应的正、负 Borel 子代数。因此，将 $\mathrm{Rep}^q\mathrm{GL}^{m+n}$ 的编织限制到 $\mathrm{Rep}^q\mathrm{L}$ 后，对于与 $U_q(\mathfrak{p})$ 的作用相容的 $U_q(\mathfrak{l})$-模态射，在第一因子（分别地，在第二因子）上是自然的。◊

3.4 平面范畴 $\mathbf{Rep}^q\mathbf{P}_t$。 最后，我们基于第 2.2 节介绍的刚性范畴图形演算，定义范畴 $\mathrm{Rep}^q\mathrm{P}_t$。由局部有限$^q\mathrm{Rep}U_q(\mathfrak{p})$-模构成的范畴不具有与 $\mathrm{Rep}^q\mathrm{GL}^{m+n}$ 和 $\mathrm{Rep}^q\mathrm{L}$ 的枢轴结构相容的枢轴结构。这是因为 $\mathrm{Rep}^q\mathrm{GL}^{m+n}$ 的枢轴结构对于来自 $\mathrm{Rep}^q\mathrm{L}$ 的态射并非自然。因此，我们利用刚性范畴的（平面）图形演算，定义 $\mathrm{Rep}^q\mathrm{P}$ 的泛版本。正如我们将看到的，选定框架后，这种演算可以扩展到曲面上。

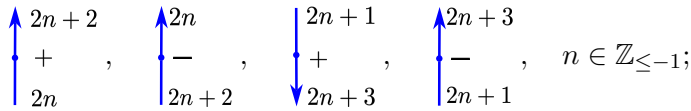
与第 2.2 节一样，我们考虑嵌入在 $\mathbb{R} \times [0,1]$ 中的垂直平面图的直线同伦类。边的颜色为 ■、■ 或 ■，端点按照该节定义的相同规则标记为整数。顶点是优惠券，可带有以下装饰：

 $$, \quad n \in \mathbb{Z}; \tag{3.27}$$

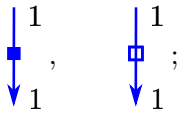
 $$, \quad m, n \in \mathbb{Z},\ m \neq n; \tag{3.28}$$



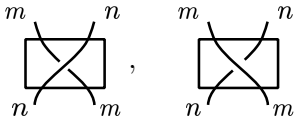
$n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$; (3.29)



$n \in \mathbb{Z}_{\leq -1}$; (3.30)

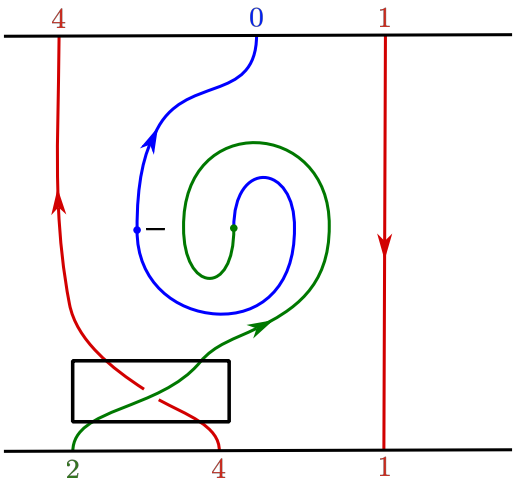


(3.31)



与 m、$n \in \mathbb{Z}$ 以及所有可能的颜色和定向。 (3.32)

令 Rig(P) 为一个 $(\Bbbk \otimes_{\mathbb{C}(q)} \Bbbk)$-线性范畴，其对象是由定向点组成的序列，这些点带有与定向相容的整数值（参见第 2.2 节），并以 ■、■ 和 ■。同态空间由如上装饰的平面图的直线同伦类张成。例如，图表



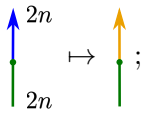
表示 Rig(P) 中的一个态射。注意，图的各个分支的装饰由源和靶唯一确定。

我们定义一个函子

$$\mathrm{ev}^{\mathrm{P}} : \mathrm{Rig}(\mathrm{P}) \to \mathrm{Rep}_q \mathrm{L}_t$$

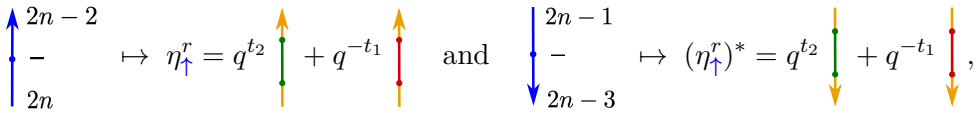
如下。在对象上，它只需遗忘整数标记并切换颜色 ■ $\rightsquigarrow$ ■。在态射上，我们将生成元解释如下：

- （3.27）中的态射表示包含映射 ■ $\equiv V_m \to V \equiv$ ■和投影 ■ $\equiv V \to V_n \equiv$ ■，因此求值函子只需忘掉整数标记并切换颜色 ■ $\rightsquigarrow$ ■；例如，



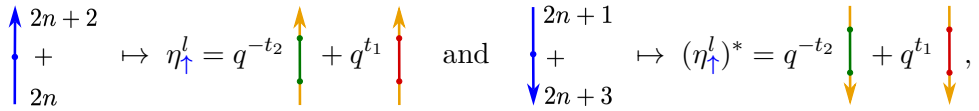
- （3.28）中的态射表示 Rep$_q$L$_t$的枢轴结构的限制，而该结构是平凡的，因此它们都被映射为相应的恒等态射；

- （3.29）中的态射表示 $\mathrm{Rep}_q\mathrm{GL}_t$ 的枢轴结构在限制函子（见（2.3））下的像，因此它们在求值函子下的像为



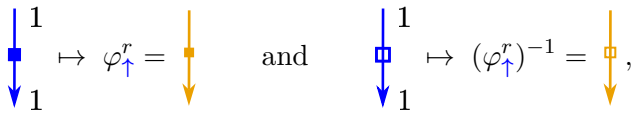
另外两个态射是这些态射的逆态射；

- 类似地，对于 $n \in \mathbb{Z}_{\leq -1}$，我们定义



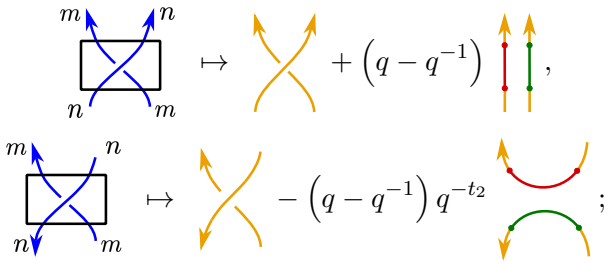
式（3.30）中的另外两个态射是这些态射的逆态射；

- 式（3.31）中的态射表示从式（2.2）给出的自然同构，该同构将限制函子诱导的对偶与 $\mathrm{Rep}_q\mathrm{L}_t$的特定对偶对应起来，因此



其中 φ^r 是式（3.3）中的同构；

- 对于两条线股均为蓝色的交叉，我们采用计算限制函子（3.24）时的相同规则，即



- 对于（3.32）中的其余态射，求值函子只需将优惠券替换为其底层交叉。

引理 3.16。 求值函子 $ev^P\colon\ Rig(P) \to Rep_q L_t$ 是定义良好的。

证明。 这是显然的，因为直线同痕关系在 $\mathrm{Rep}_q\mathrm{L}_t$ 中成立。 □

定义 3.17。 我们将范畴 $\mathrm{Rep}_q\mathrm{P}_t$ 定义为 Rig(P) 关于 ev^{P}.的核的商

由构造可知，求值函子诱导出一个忠实函子

$$j_t^*: \mathrm{Rep}_q\mathrm{P}_t \to \mathrm{Rep}_q\mathrm{L}_t \tag{3.33}$$

类似于限制函子 j^*: $\mathrm{Rep}_q\mathrm{P} \to \mathrm{Rep}_q\mathrm{L}$。

命题 3.18。 令 n、$m \in \mathbb{N}$ 和 $\varphi_{m,\,n}$: $\Bbbk \otimes_{\mathbb{C}(q)} \Bbbk \to \mathbb{C}(q)$ 为备注 3.8 中定义的求值态射。则存在一个幺半 $\varphi_{m,\,n}$-线性函子

$$ev^P_{m,n}\colon Rep_q P_t \to Rep_q P$$

映射

$$(\uparrow, 2n) \mapsto \iota^*(V_{m+n}), \quad (\uparrow, 2n) \mapsto \pi^*(V_m), \quad (\uparrow, 2n) \mapsto \pi^*(V_n),$$

其中， ι^* 和 π^* 是第2.4节中定义的限制函子。

证明。 限制函子 $j^*\colon \mathrm{Rep}_q\mathrm{P} \to \mathrm{Rep}_q\mathrm{L}$ 是忠实的，因此我们可以将 $\mathrm{Rep}_q\mathrm{P}$ 描述为 $\mathrm{Rep}_q\mathrm{L}$ 的一个子范畴。根据构造，其像

$$\mathrm{Rep}_q\mathrm{P}_t \xrightarrow{j_t^*} \mathrm{Rep}_q\mathrm{L}_t \xrightarrow{\mathrm{ev}^{\mathrm{L}}_{m,n}} \mathrm{Rep}_q\mathrm{L}$$

属于该子范畴，因此它提升为幺半函子 $\mathrm{ev}^{\mathrm{P}}_{m,\ n}$ 如陈述中所述。 □

我们得到一个由函子构成的交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Rep}_q\mathrm{P}_t & \xrightarrow{j_t^*} & \mathrm{Rep}_q\mathrm{L}_t \\ {\scriptstyle \mathrm{ev}^{\mathrm{P}}_{m,n}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{ev}^{\mathrm{L}}_{m,n}} \\ \mathrm{Rep}_q\mathrm{P} & \xrightarrow{j^*} & \mathrm{Rep}_q\mathrm{L}, \end{array}$$

因此，我们可以再次将函子 j_t^* 理解为对函子 j^*进行插值，其中 $m,\ n \in \mathbb{N}$.

4 Universal parabolic restriction

在本节中，我们构造稍后定义缺陷 skein 理论时将使用的代数输入。在本节的第一部分，我们构造一个 $(\mathrm{Rep}_q\mathrm{GL}_t,\ \mathrm{Rep}_q\mathrm{L}_t)$-中心代数结构，它作用于 $\mathrm{Rep}_q\mathrm{P}_t$，这是第2.4节所述结构的泛版本。接下来，我们描述 $\mathrm{Rep}_q\mathrm{L}_t$上的一个中心化 $(\mathrm{Rep}_q\mathrm{L}_t,\ \mathrm{Rep}_q\mathrm{P}_t)$-双模结构。

4.1 中心代数结构。 我们定义函子 HOMFLY版本

$$\iota_t^* : \mathrm{Rep}_q\mathrm{GL}_t \to \mathrm{Rep}_q\mathrm{P}_t \qquad \text{and} \qquad \pi_t^* : \mathrm{Rep}_q\mathrm{GL}_t \boxtimes \mathrm{Rep}_q\mathrm{GL}_t \to \mathrm{Rep}_q\mathrm{P}_t$$

限制函子 $\mathrm{Rep}_q\mathrm{GL}_{m+n} \xrightarrow{\iota^*}\mathrm{Rep}_q\mathrm{P}$ 和 $\mathrm{Rep}_q\mathrm{L} \xrightarrow{\pi^*}\mathrm{Rep}_q\mathrm{P}$，它们来自第2.4节。我们先引入一些术语，这些术语稍后也将用于把刚性范畴的图形演算扩展到带框曲面。

设 S 是一个带框曲面，即一个赋有切丛平凡化 $f = (v_p,\ w_p)_{p\in S}$ 的曲面 S。设 $\alpha : I \to S$ 是一条浸入曲线，使得 $\dot\alpha(0)$ 和 $\dot\alpha(1)$ 分别沿着 $w_{\alpha(0)}$ 和 $w_{\alpha(1)}$ 的方向。考虑映射

$$u_\alpha^f \colon I \xrightarrow{\dot\alpha} \mathrm{T}S \setminus \{0\} \xrightarrow{f} S \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \xrightarrow{\text{proj.}} \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \xrightarrow{\frac{x}{||x||}} \mathbb{S}^1.$$

根据定义，$u_\alpha^f(0) = \pm i$，我们可以设

$$u_\alpha^f(t) = \exp\left(-i\pi\left(\theta_\alpha^f(t) \mp \frac{1}{2}\right)\right),$$

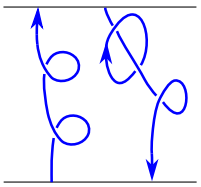
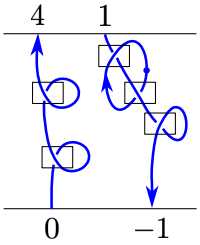
其中 $\theta_\alpha^f(0) = 0$。对 α 的限制条件意味着 $\theta_\alpha^f(1) \in \mathbb{Z}$。

定义 4.1。 α 相对于 f 的旋转数 是整数

$$\mathrm{rot}^f(\alpha) \coloneqq \theta_\alpha^f(1) \in \mathbb{Z}.$$

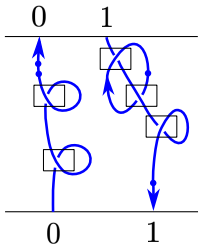
在本小节余下部分中，我们固定带有典范框架的 $S = \mathbb{R} \times [0,1]$。对于给定的 $\widehat{}$带状图 Γ，位于 $\mathbb{R} \times [0,1]$，我们按如下方式构造装饰平面图 Γ。 Γ 的每条开弦都定义一条浸入曲线 $\alpha :\ I \to \mathbb{R} \times [0,1]$。如果 α 在 $\alpha(0)$ 处朝上定向，我们

就在这个端点添加装饰 $n_{\alpha(1)} = 0$；否则，令 $n_{\alpha(0)} = 1$。通过设定 $n_{\alpha(1)} = n_{\alpha(0)} + \mathrm{rot}^f(\alpha)$，即可唯一确定 $\alpha(1)$ 的装饰。接下来，如果 α 是一条旋转数为 $r_\alpha = \mathrm{rot}^f(\alpha)$ 的闭合股线（即一个链环分量），我们就在 $\alpha(0)$ 处添加 $\left|\frac{r_\alpha}{2}\right|$ 个点。最后，将每个交叉替换为相应的优惠券。例如：

$\Gamma\ =$  $\rightsquigarrow$ 

.

再次对（3.29）–（3.30）中的态射进行前复合和后复合后，我们可以修改所得平面图的源和靶，使得所有朝上（分别朝下）的点都装饰为 0 （分别为 -1）。令 $\hat{\Gamma}$ 为由此得到的带装饰的平面图。例如，对于上方所示的带状图，我们得到

$\hat{\Gamma} =$ 

.

粗略地说，这一过程相当于忘掉$\hat{}$$\mathrm{Rep}_q\mathrm{GL}_t$的编织结构和枢轴结构，因此平面图 Γ 表示的态射与 Γ 所表示的相同，不过是在带状范畴 $\mathrm{Rep}_q\mathrm{GL}_t$底层的刚性范畴中。

回想一下，我们有一个限制函子 $\iota^*\colon \mathrm{Rep}_q\mathrm{GL}_{m+n} \to \mathrm{Rep}_q\mathrm{P}$。此函子是忠实的，但它不保持指定对偶。我们通过如下修改 $\uparrow$的指定对偶，以图表方式体现这一点。令

$\varphi_0 :=$  and $\varphi_1 :=$ 

.

给定一个序列 $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots\ldots, \varepsilon_k)$，其中 $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$，我们定义

$$\varphi_\varepsilon := \varphi_{\varepsilon_1} \otimes \cdots \otimes \varphi_{\varepsilon_k}. \tag{4.1}$$

最后，如果 $D\colon\ \varepsilon_1 \to \varepsilon_2$ 是两个此类序列之间的平面图，我们定义

$$\iota_t^*(D) := \varphi_{\varepsilon_2} \circ D \circ \varphi_{\varepsilon_1}^{-1}.$$

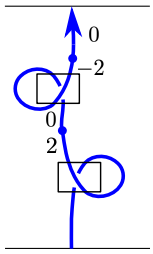
$\hat{}$**命题 4.2**。赋值 $\uparrow \mapsto 0$、$\downarrow \mapsto 1$、$\Gamma \mapsto \iota_t^*(\Gamma)$ 给出一个良定义的严格幺半函子

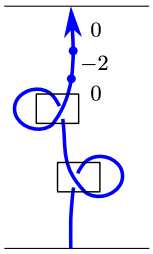
$$\iota_t^*\colon Rep_q GL_t \to Rep_q P_t. \tag{4.2}$$

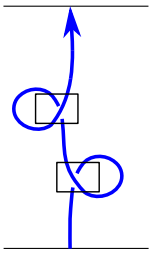
此外，$res_t = j_t^* \circ \iota_t^*$，其中 j_t^* 是 （3.33）中的函子。

证明。首先注意到，同构 $\eta^r_{\uparrow}$、$\eta^l_{\uparrow}$ 和 $\varphi^r_{\uparrow}$ 与 $\mathrm{Rep}_q\mathrm{L}_t$ 中 $\uparrow\hat{}$ $\hat{}$ $\hat{}$的每个自同态都可交换。这意味着，对于任意一对可复合的图 $\hat{}$ $\hat{}$$\Gamma_1$、$\Gamma_2$，都有 $\iota_t^*(\Gamma_1 \circ \Gamma_2) = \iota_t^*(\Gamma_1) \circ \iota_t^*(\Gamma_2)$。事实上，我们可以滑动 $\iota_t^*(\Gamma_1) \circ \iota_t^*(\Gamma_2)$ 中出现在 Γ_1 和 Γ_2 之间的点，使它们

全部位于相应弦的末端。将以这种方式出现的每一对点—逆点用恒等态射替换后，我们恰好得到 $\iota_t^*(\Gamma_1 \circ \Gamma_2)$。例如，

$\iota_t^*(\widehat{\Gamma}_1) \circ \iota_t^*(\widehat{\Gamma}_2) =$ 

$=$ 

$=$  $= \iota_t^*(\widehat{\Gamma_1 \circ \Gamma_2})$。

此外，显然有 $\iota_t^*(\Gamma_1 \otimes \Gamma_2) = \iota_t^*(\Gamma_1) \otimes \iota_t^*(\Gamma_2)$，因此该函子是严格幺半的。

另一方面，容易验证，若 Γ 是 $\mathsf{Rep}_q\mathrm{GL}_t$ 的一个生成元（参见命题 3.2），则 $j_t^*(\Gamma) \circ \iota_t^*(\Gamma) = \mathrm{res}_t(\Gamma)$。与复合和张量积的相容性进而表明，对任意图表 Γ，同样结论均成立。特别地，若 Γ_1和 Γ_2 是表示 $\mathsf{Rep}_q\mathrm{GL}_t$中同一态射的两个图表，则

$$j_t^* \circ \iota_t^*(\widehat{\Gamma}_1) = \mathrm{res}_t(\Gamma_1) = \mathrm{res}_t(\Gamma_2) = j_t^* \circ \iota_t^*(\widehat{\Gamma}_2).$$

由于 j_t^* 是忠实，因此我们得到 $\iota_t^*(\Gamma_1) = \iota_t^*(\Gamma_2)$，这就证明了该函子定义良好。 □

命题 4.3。该指派

$$(\uparrow, \varnothing) \mapsto 0, \quad (\downarrow, \varnothing) \mapsto 1, \quad \Gamma \mapsto \widehat{\Gamma},$$
$$(\varnothing, \uparrow) \mapsto 0, \quad (\varnothing, \downarrow) \mapsto 1, \quad \Gamma \mapsto \widehat{\Gamma},$$

给出了一个定义良好的严格幺半函子

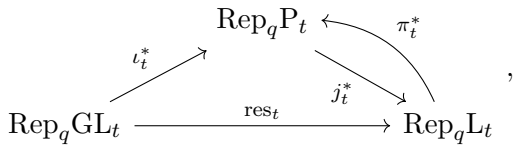
$$\pi_t^* \colon Rep_q L_t \to Rep_q P_t. \tag{4.3}$$

证明。与前一个证明采用相同的论证，可知该指派具有函子性且严格幺半。它定义良好的事实再次源于 j_t^* 是忠实的。事实上，我们有 $j_t^* \circ \pi_t^* = \mathrm{id}_{\mathrm{Rep}_q \mathrm{L}_t}$。因此，若 Γ_1 表示 $\mathsf{Rep}_q\mathrm{L}_t$中的同一态射，则等式

$$j_t^* \circ \pi_t^*(\Gamma_1) = \Gamma_1 = \Gamma_2 = j_t^* \circ \pi_t^*(\Gamma_2)$$

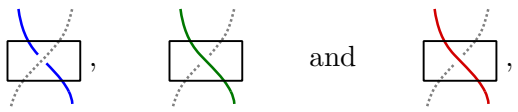
这意味着 $\pi_t^*(\Gamma_1) = \pi_t^*(\Gamma_2)$。 □

总而言之，我们有四个函子



, (4.4)

使得内三角形可交换，而外三角形不可交换。这是第 2.4 节所述情形的图示版本。现在我们将看到，函子 ι_t^* 和π_t^* 诱导出一个 $(\mathsf{Rep}_q\mathrm{GL}_t, \mathsf{Rep}_q\mathrm{L}_t)$-中心代数结构，定义在 $\mathsf{Rep}_q\mathrm{P}_t$ 上。根据备注 3.15 以及定义 $\mathsf{Rep}_q\mathrm{L}_t$ 的关系，以下态射族由下式给出：



其中带点的线股可以替换为任意颜色，它们是 $\mathrm{Rep}_q\mathrm{P}_t$. 中的自然同构。因此，它们定义了一个幺半函子

$$Z\colon \mathrm{Rep}_q\mathrm{P}_t \to Z(\mathrm{Rep}_q\mathrm{P}_t).$$

Let

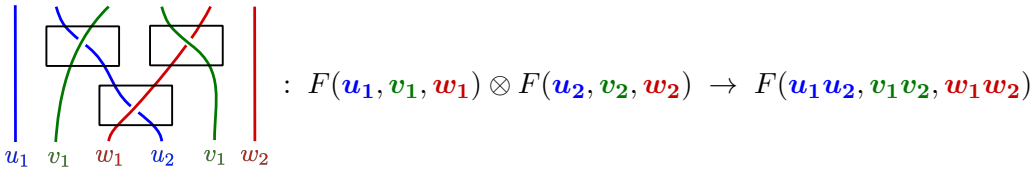
$$\begin{array}{rccc} F \coloneqq \iota_t^* \boxtimes \pi_t^*\colon & \mathrm{Rep}_q\mathrm{GL}_t \boxtimes \mathrm{Rep}_q\mathrm{L}_t & \to & \mathrm{Rep}_q\mathrm{P}_t, \\ & (\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) & \mapsto & \boldsymbol{uvw} \\ & (\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_3) & \mapsto & \iota_t^*(\widehat{\Gamma}_1)\widehat{\Gamma}_2\widehat{\Gamma}_3. \end{array} \tag{4.5}$$

定理 4.4。 F 提升为一个编织幺半函子

$$(Z\circ F, J)\colon Rep_qGL_t \boxtimes \overline{Rep_qL_t} \to Z(Rep_qP_t),$$

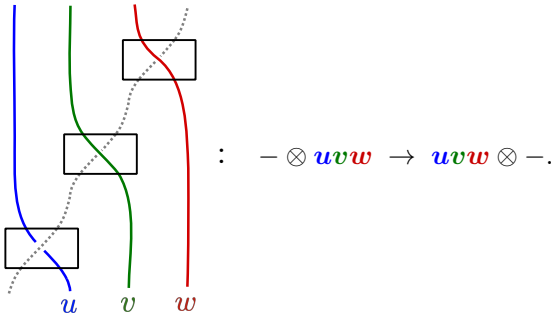
其中 $\overline{(-)}$ 表示反向编织范畴。特别地，Rep_qP_t 是一个 (Rep_qGL_t, Rep_qL_t)-中心代数。

证明。 同构族



定义了一个 幺半结构于 $Z\circ F$ 上。验证 $(Z\circ F, J)$ 是编织的是一个简单的计算 n. □

注意，对于对象 $\boldsymbol{uvw}$，半编织由下式给出



4.2 中心双模 $\mathrm{Rep}_q\mathrm{L}_t$。 现在我们将简要介绍由上一节构造的函子所诱导的附加结构，这些结构将为本文稍后给出的拓扑构造提供动机。除了上一节中定义的 $\mathrm{Rep}_q\mathrm{GL}_t$,$\mathrm{Rep}_q\mathrm{L}_t$ 中心结构 $\mathrm{Rep}_q\mathrm{P}_t$ 之外，我们还将考虑以下三个中心代数：

- $\mathrm{Rep}_q\mathrm{GL}_t$ 是一个 $(\mathrm{Vect}_{\Bbbk}, \mathrm{Rep}_q\mathrm{GL}_t)$-中心代数，其中心函子为

$$\mathrm{VECT}_{\Bbbk} \boxtimes \mathrm{Rep}_q\mathrm{GL}_t \simeq \mathrm{Rep}_q\mathrm{GL}_t \xrightarrow{\mathrm{id}} \mathrm{Rep}_q\mathrm{GL}_t,$$

- $\mathrm{Rep}_q\mathrm{L}_t$ 是一个带有中心函子的 $(\mathrm{Vect}_{\Bbbk}, \mathrm{Rep}_q\mathrm{L}_t)$-中心代数

$$\mathrm{VECT}_{\Bbbk} \boxtimes \mathrm{Rep}_q\mathrm{L}_t \simeq \mathrm{Rep}_q\mathrm{L}_t \xrightarrow{\mathrm{id}} \mathrm{Rep}_q\mathrm{L}_t,$$

- 最后，$\mathrm{Rep}_q\mathrm{L}_t$ 也是一个带有中心结构的 $(\mathrm{Rep}_q\mathrm{L}_t,\ \mathrm{Rep}_q\mathrm{L}_t)$-中心代数 e

$$\mathrm{Rep}_q\mathrm{L}_t \boxtimes \mathrm{Rep}_q\mathrm{L}_t \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}} \mathrm{Rep}_q\mathrm{L}_t.$$

这四个代数定义了 Morita1-范畴4-态射BrTens中所研究的 [BJS21]。将 $\mathrm{Rep}_q\mathrm{P}_t$ 与 $\mathrm{Rep}_q\mathrm{GL}_t$复合，我们得到一个中心函子

$$\mathrm{Vect}_{\Bbbk} \boxtimes \mathrm{Rep}_q\mathrm{L}_t \to \mathrm{Rep}_q\mathrm{GL}_t \underset{\mathrm{Rep}_q\mathrm{GL}_t}{\boxtimes} \mathrm{Rep}_q\mathrm{P}_t \simeq \mathrm{Rep}_q\mathrm{P}_t,$$

其中，$\mathrm{Rep}_q\mathrm{L}_t$ 的作用由函子 π_t^*. 诱导。类似地，将 $\mathrm{Rep}_q\mathrm{L}_t$上的两个中心结构复合，我们得到另一个中心函子

$$\mathrm{Vect}_{\Bbbk} \boxtimes \mathrm{Rep}_q\mathrm{L}_t \to \mathrm{Rep}_q\mathrm{L}_t \underset{\mathrm{Rep}_q\mathrm{L}_t}{\boxtimes} \mathrm{Rep}_q\mathrm{L}_t \simeq \mathrm{Rep}_q\mathrm{L}_t,$$

其中，$\mathrm{Rep}_q\mathrm{L}_t$ 通过恒等函子作用于自身。另一方面，注意到 $\mathrm{Rep}_q\mathrm{L}_t$ 通过函子成为一个 $(\mathrm{Rep}_q\mathrm{P}_t,\ \mathrm{Rep}_q\mathrm{L}_t)$-双模

$$\mathrm{Rep}_q\mathrm{P}_t \boxtimes \mathrm{Rep}_q\mathrm{L}_t \xrightarrow{j_t^*\otimes\mathrm{id}} \mathrm{Rep}_q\mathrm{L}_t$$

并且不难验证，编织诱导出一个 $(\mathrm{Rep}_q\mathrm{P}_t,\ \mathrm{Rep}_q\mathrm{L}_t)$-中心结构（定义见 [BJS21，第 3]节）。中心结构是2-范畴BrTens中的态射，因此我们有如下BrTens中的图表：

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Vect}_{\Bbbk} & \xrightarrow{\mathrm{Rep}_q\mathrm{GL}_t} & \mathrm{Rep}_q\mathrm{GL}_t \\
{\scriptstyle \mathrm{Rep}_q\mathrm{L}_t}\downarrow & \swarrow\!\!\swarrow\ {\scriptstyle \mathrm{Rep}_q\mathrm{L}_t} & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Rep}_q\mathrm{P}_t} \\
\mathrm{Rep}_q\mathrm{L}_t & \xrightarrow[\mathrm{Rep}_q\mathrm{L}_t]{} & \mathrm{Rep}_q\mathrm{L}_t.
\end{array}$$

在因子化代数的语言中（参见 [BJS21，第 3]节及其中的图示），这些结构由以下分层空间中的嵌入圆盘所支配：

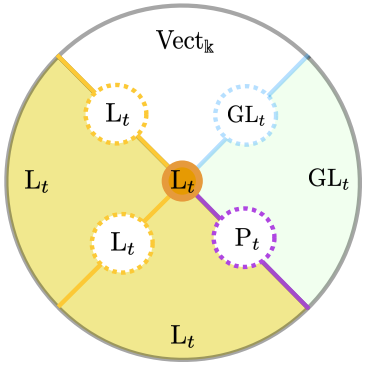


图 6：$\mathrm{Rep}_q\mathrm{P}_t$，$\mathrm{Rep}_q\mathrm{L}_t$-双模结构作为 $\mathrm{Rep}_q\mathrm{L}_t$ 的因子化代数。

5 缺陷平面理论

刚性范畴的图形演算可扩展到带有选定框架的曲面上，从而由刚性幺半范畴的代数数据构造出二维带标架拓扑场论。$\mathrm{Rep}_q\mathrm{L}_t$、$\mathrm{Rep}_q\mathrm{P}_t$在$\mathrm{Rep}_q\mathrm{L}_t$ 上赋予的模结构，在与$\mathrm{Rep}_q\mathrm{L}_t$ 和$\mathrm{Rep}_q\mathrm{P}_t$相关联的理论之间产生一个态射；本节将借助曲面上的线缺陷对其加以描述。

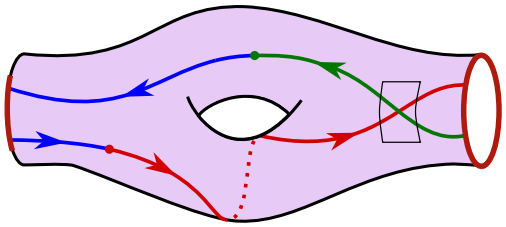


图7：带框曲面上的带装饰的平面图（为简洁起见，省略整数标记）。

5.1 单色理论。 我们在此描述由Rep$_q$P$_t$诱导的平面理论。对于Rep$_q$L$_t$.所对应的刚性范畴，也有类似的描述

定义 5.1。 设 M 为一个 d维定向流形，且 $n \geq d$。 M 的一个 n维框架 定义为一类保定向同构 f：$TM \oplus \mathbb{R}^{n-d} \to M \times \mathbb{R}^n$ 的同伦类，其中同构是向量丛之间的同构，且这些向量丛定义在 M上。当 $n = d$ 时，我们称之为框架。

注意，若 $M = I$ 或 $M = \mathbb{S}^1$，则每种定向选择都恰有一个 2-框架。我们用 I、 $\mathbb{S}^1$ 表示标准正定向，用 $\overline{I}$、 $\overline{\mathbb{S}^1}$ 表示负定向。

定义 5.2。 定向曲面 S 上的标记 是保定向嵌入 C 、$\to \partial S$ （其中 C 是一个一维连通定向流形）的一个（可以为空的）集合 $\mathcal{B}$ 。每个标记都可以分解为$\mathcal{B} = \mathcal{B}_+ \sqcup \mathcal{B}_-$ ，其中分别为正向定向和负向定向子流形。

定义 5.3。 直线嵌入 是带框架流形之间的嵌入 M ，$\to N$ 它在每个方向上都保持框架（允许缩放）。

设 $(S, f, \mathcal{B})$ 是一个带标记的带框曲面。我们考虑嵌入在 Γ中的以下一类平面图 S （见图7）：

- 边的颜色为 ■， ■或 ■；
- 每条边 α 的端点 $\alpha(0)$ 和 $\alpha(1)$ 均附着于某个优惠券或某个带标记的边界分支。此外，它们分别标记为整数 $n_{\alpha(0)}$ 和 $n_{\alpha(1)}$，使得 $n_{\alpha(1)} = n_{\alpha(0)} + \mathrm{rot}^f(\alpha)$;
- 优惠券以直线方式嵌入曲面中，并用 Rep$_q$P$_t$. 的态射装饰

令 $\mathcal{B}_+ = \{C_i\}_{i=1,\dots,m}$ 和 $\mathcal{B}_- = \{C'_j\}_{j=1,\dots,n}$。 Γ 与标记的交点确定了一族点构型 $(a_{C_1}, \dots, a_{C_m}, b_{C'_1}, \dots, b_{C'_n})$，我们称之为边界条件。我们将由具有给定边界条件的平面图生成的（$\Bbbk \otimes_{\mathbb{C}(q)} \Bbbk$）线性空间（模去以下关系）记作 $\mathcal{Z}^{\mathrm{P}_t}(S, f, \mathcal{B})(a_{C_1}, \dots, a_{C_m}, b_{C'_1}, \dots, b_{C'_n})$:

- 直线同痕：指保持曲面 S 固定 ∂S 的同痕，且优惠券在整个同痕过程中始终与框架平行；
- 带框 skein 关系： $\sum_i \lambda_i(\varphi, \Gamma_i) \sim 0$ 若存在直线嵌入 ι： $[0,1]^2$，$\to S$ 使得 $\sum_i \lambda_i \iota^{-1}(\Gamma \cap \iota([0,1])) = 0$ 属于 Rep$_q$P$_t$。

作为一个特例，我们有：

定义 5.4. 令 $(\mathbb{A}, f_{\mathrm{rad}})$ 表示配备径向框架的环带。圆柱范畴 Cyl(Rep$_q$P$_t$) 是一个范畴，其包含：

- 对象：圆上的带颜色的有向点的有限构型 $\mathbb{S}^1$ ，这些点按照与定向相容的方式以整数标记；

- 态射：($\Bbbk \otimes_{\mathbb{C}(q)} \Bbbk$)-平面图的线性组合，定义在($\mathbb{A}$,$f_{\mathrm{rad}}$), 模去矩形同痕和带框 skein 关系。

复合的定义是将一个 $\mathbb{A}$ 副本插入另一个副本中。

我们定义

$$\mathcal{Z}^{\mathrm{P}_t}(I) = \mathrm{Rep}_q \mathrm{P}_t \quad \text{and} \quad \mathcal{Z}^{\mathrm{P}_t}(\mathbb{S}^1) = \mathrm{Cyl}(\mathrm{Rep}_q \mathrm{P}_t),$$

负定向的一维流形对应于对偶范畴。若 $C \in \mathcal{B}_+$,则$\mathcal{Z}^{\mathrm{P}_t}(C)$通过粘合矩形／圆柱作用于$\mathcal{Z}^{\mathrm{P}_t}(S, f, \mathcal{B})$。具体而言， C上的每个点构型都确定$\mathcal{Z}^{\mathrm{P}_t}(C)$的一个对象。若 $\Gamma\colon\ a \to b$是$\mathcal{Z}^{\mathrm{P}_t}(C)$中的一个态射，则沿标记粘合 $C \times I$会诱导一个线性映射

$$\mathcal{Z}^{\mathrm{P}_t}(S, f, \mathcal{B})(\Gamma)\colon \mathcal{Z}^{\mathrm{P}_t}(S, f, \mathcal{B})(-, b, -) \to \mathcal{Z}^{\mathrm{P}_t}(S, f, \mathcal{B})(-, a, -).$$

负定向的情形也类似，因此我们得到一个函子

$$\mathcal{Z}^{\mathrm{P}_t}(S, f, \mathcal{B}) : \left(\bigboxtimes_{C \in \mathcal{B}_+} \mathcal{Z}^{\mathrm{P}_t}(C) \right) \boxtimes \left(\bigboxtimes_{\overline{C} \in \mathcal{B}_-} \mathcal{Z}^{\mathrm{P}_t}(C) \right)^{\mathrm{op}} \to \textsc{Vect}.$$

引理 5.5. 设(S, f, B) 是一个带标记的带框曲面，其中 C,$C \in B$，且 C是某个一维流形。设$(gl_C(S), gl_C(f), gl_C(B))$ 是沿 C粘合 S后得到的带标记的带框曲面。那么，

$$\mathcal{Z}^{P_t}\left(gl_C(S), gl_C(f), gl_C(\mathcal{B})\right)(-,-) = \int^{c \in \mathcal{Z}^{P_t}(C)} \mathcal{Z}^{P_t}(S, f, \mathcal{B})(-, c, c, -).$$

证明。 证明与 [Wal06 中的定理 4.4 相同。2]。 □

现在，我们已具备所有要素，可以定义一个以 Bimod 为目标范畴的带框拓扑场论。令 $\mathrm{Bord}_1^{\mathrm{fr}}(2)$ 表示二维带框协边范畴，其对象是一维 2-带框流形，其态射是带标记的带框协边。由此可直接得出：

定理 5.6。 上述构造定义了一个对称幺半函子

$$\mathcal{Z}^{P_t}\colon Bord_1^{fr}(2) \to \textsc{Bimod},$$

因此得到一个二维带框拓扑场论。 ■

仅将范畴 $\mathrm{Rep}_q \mathrm{L}_t$ 视为刚性幺半范畴，我们便可定义一个相应的二维带框拓扑场论，其描述方式与 $\mathcal{Z}^{\mathrm{P}_t}$ 相同。我们将此理论记为 $\mathcal{Z}^{\mathrm{L}_t}$.

5.2 缺陷线周围的平面模型。$\mathrm{Rep}_q \mathrm{L}_t$ 与 $\mathrm{Rep}_q \mathrm{P}_t$ 上的 $\mathrm{Rep}_q \mathrm{L}_t$ 双模结构，可以通过分层正方形上的平面图作拓扑解释。我们暂且忽略其 $\mathrm{Rep}_q \mathrm{L}_t$ 与 $\mathrm{Rep}_q \mathrm{P}_t$ 中心结构，稍后在讨论曲面上的三维理论时，将于第 6.2 节描述该结构。回顾一下式 (3.33) 中定义的函子 j^*: $\mathrm{Rep}_q \mathrm{P}_t \to \mathrm{Rep}_q \mathrm{L}_t$ 。它诱导出 Bimod 中的两个态射，即双模函子

$$F_1 \coloneqq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}_q \mathrm{L}_t}(-, j^*(-))\colon \mathrm{Rep}_q \mathrm{P}_t \boxtimes \mathrm{Rep}_q \mathrm{L}_t^{\mathrm{op}} \to \textsc{Vect}$$

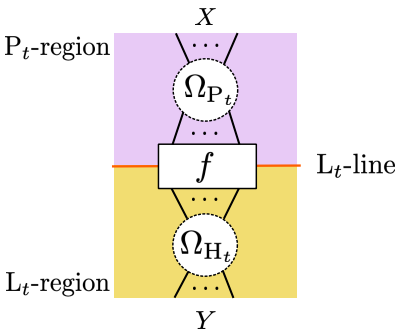


图8：分层正方形上的平面图。

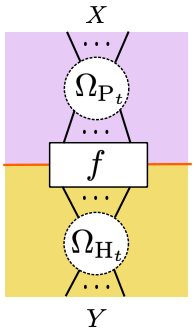
and

$$F_2 \coloneqq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}_q \mathrm{L}_t}(j^*(-), -) \colon \mathrm{Rep}_q \mathrm{L}_t \boxtimes \mathrm{Rep}_q \mathrm{P}_t^{\mathrm{op}} \to \textsc{Vect}.$$

令 I^* 为中间标有一点的单位区间， $E = I \times I^*$ 为带有水平线缺陷的正方形 $I \times \left\{ \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\}$。我们将 L_t 区域 (分别将 P_t 区域)称为缺陷下方（分别为上方）的半正方形。缺陷本身也标记为 L_t ，并称之为L_t-线。我们考虑以下形式的平面图 Ω ，其中 E （见图 8）：

- 端点连接到正方形的上下底边；
- Ω 在 P_t-区域上由 $\mathrm{Rep}_q \mathrm{P}_t$ 着色（在 L_t-区域上则由 $\mathrm{Rep}_q \mathrm{L}_t$着色）；
- 边可以在一个优惠券处与线缺陷横向相交，该优惠券以 $\mathrm{Rep}_q \mathrm{L}_t$ 中的一个态射装饰，并满足相容性：若来自 L_t-区域（来自 P_t-区域）的边分别以 $X_1, \dots, X_m$ （分别以 $Y_1, \dots, Y_k$）着色，则该优惠券以态射 $f \colon X_1 \otimes \cdots \otimes X_m \to j^*(Y_1) \otimes \cdots \otimes j^*(Y_k)$. 装饰。

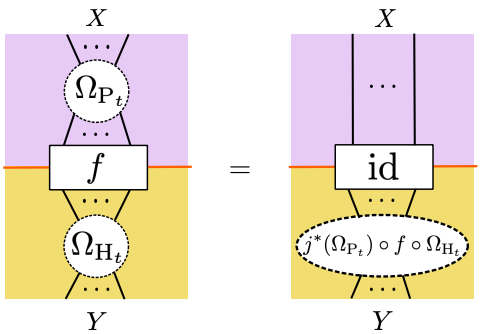
固定 X 和 Y，赋值



$$\mapsto \quad j^*(\Omega_{\mathrm{P}_t}) \circ f \circ \Omega_{\mathrm{L}_t} \in \text{同调}^{\mathrm{Rep}_q \mathrm{L}_t}(Y, \ j^*(X)),$$

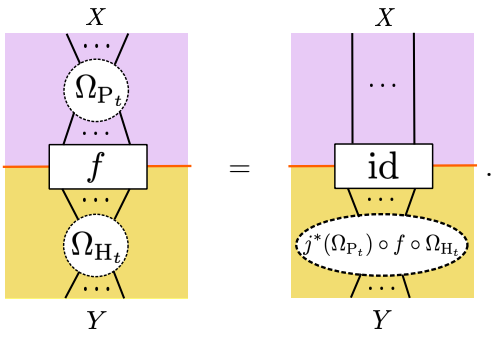
扩展为定义在由这些图表张成的（$\Bbbk \otimes_{\mathbb{C}(q)} \Bbbk$）线性空间上的线性映射。其核由以下内容生成：

- 缺陷线两侧分别由 $\mathrm{Rep}_q \mathrm{L}_t$ 和 $\mathrm{Rep}_q \mathrm{P}_t$ 导出的平面 skein 关系；
- 形式的关系



. (5.1)

对所有这些关系取商后，我们得到 F_1 的图示描述，其中 $\mathrm{Rep}_q\mathrm{P}_t$ 和 $\mathrm{Rep}_q\mathrm{L}_t$ 的作用就是在上方和下方堆叠态射。注意，由于每个分层图 Ω 都表示 $\mathrm{Rep}_q\mathrm{L}_t$ 中的一个态射，因此 (5.1) 中的关系意味着$\tilde{\quad}$ $\tilde{\quad}\Omega$ 等价于另一个图 Ω，其中 Ω^{P_t} 和 f 都只是恒等态射，即：



我们不会在图中表示恒等券，因此每当一组线股穿过 L_t-线（改变其颜色）时，都应将其视为连接到一个恒等券上。双模 F_2 也可以通过在图中交换 P_t 和 L_t区域来等价地描述。类似地，我们有函子

$$G_1 \colon \mathrm{Cyl}(\mathrm{Rep}_q\mathrm{P}_t) \boxtimes \mathrm{Cyl}(\mathrm{Rep}_q\mathrm{L}_t)^{\mathrm{op}} \to \textsc{Vect},$$

$$G_2 \colon \mathrm{Cyl}(\mathrm{Rep}_q\mathrm{L}_t) \boxtimes \mathrm{Cyl}(\mathrm{Rep}_q\mathrm{P}_t)^{\mathrm{op}} \to \textsc{Vect},$$

将一个对象映射 $X \boxtimes Y$ 到由边界条件为 $(X,\ Y)$ 的分层圆柱 $\mathbb{S}^1 \times I^*$上的平面图所张成的线性空间，再对缺陷两侧的纽结关系以及缺陷附近图示于 (5.1) 中的局部关系取商。

引理 5.7. 在 *BIMOD*中，我们有

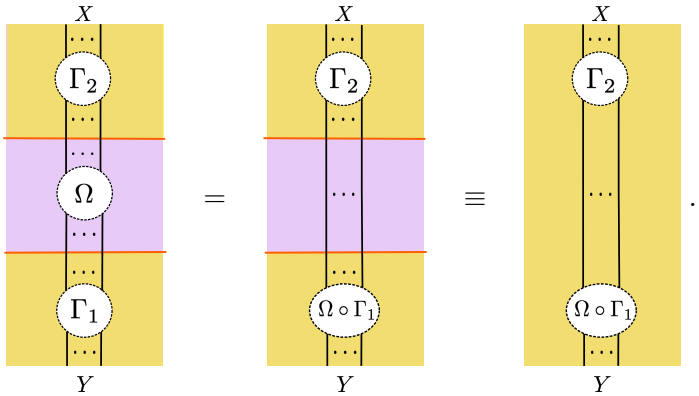
$$F_2 \circ F_1 = id_{Rep_q L_t} \quad and \quad G_2 \circ G_1 = id_{Cyl(Rep_q L_t)}.$$

证明。 根据定义，

$$(F_2 \circ F_1)(X \boxtimes Y) = \int^{Z \in \mathrm{Rep}_q \mathrm{P}_t} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}_q \mathrm{L}_t}(X, j^*(Z)) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}_q \mathrm{L}_t}(j^*(Z), Y),$$

而典范映射 $f \otimes g \to g \circ f$给出了右侧余端与 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}_q\mathrm{L}_t}(X,\ Y)$之间的同构。 对于 $G_2 \circ G_1$.，同样成立 □

注 5.8。 我们可以用图示来理解证明。余端可以表示为正方形中的图，其中有两条水平的 L_t-缺陷。它们之间的区域标记为 P_t，而上方和下方的区域标记为 L_t。应用关系（5.1），得到



这表明，我们或许可以修改分层，使得与 L_t 相关的平面理论中出现或消失标记为 P_t的区域。正如我们将看到的，GL_t-skein 代数作用于与 P_t相关的平面理论。我们可以利用这一点，通过使 P_t-区域出现并作用于这些区域，在 L_t-理论上诱导出 GL_t- skein 代数的作用。稍后我们将通过对第 4.1 节和第 4.2 节中的中心代数与中心双模作拓扑描述，使这些想法更加精确。 $\Diamond$

5.3 平面缺陷理论。 平面理论 $\mathcal{Z}^{\mathrm{P}_t}$ 和 $\mathcal{Z}^{\mathrm{L}_t}$ 分别由刚性范畴 $\mathrm{Rep}_q\mathrm{P}_t$ 和 $\mathrm{Rep}_q\mathrm{L}_t$诱导，它们通过双模结构粘合在一起，从而在分层曲面上得到一个二维理论。回顾一下，二分曲面（参见定义 2.23）是带有分层的曲面 S 。

$$\phi\colon S \to (A \geq B \leq C)\,.$$

我们分别将 $\phi^{-1}(A)$ 和 $\phi^{-1}(C)$ 标记为 L_t 和 P_t，并称它们为L_t-区域和P_t-区域。一维分层 $\phi^{-1}(B)$装饰有 L_t ，我们称之为L_t-线。

定义 5.9。 (S, f, ϕ) 的相容标记 是一个标记$\mathcal{B}$，其每个分支都包含在 L_t-区域或 P_t-区域中。因此，我们有如下分解：$\mathcal{B} = \mathcal{B}_{\mathrm{L}_t} \sqcup \mathcal{B}_{\mathrm{P}_t}$。

设 $(S, f, \phi, \mathcal{B})$ 是一个带有相容标记的二分框架曲面。对于每个 $C \in \mathcal{B}$，我们定义

$$\mathcal{Z}(C) \coloneqq \begin{cases} \mathcal{Z}^{\mathrm{L}_t}(C), & \text{if } C \in \mathcal{B}_{\mathrm{L}_t}, \\ \mathcal{Z}^{\mathrm{P}_t}(C), & \text{if } C \in \mathcal{B}_{\mathrm{P}_t}. \end{cases}$$

对每个 $C \in \mathrm{B}$ 取 $U_C \in \mathrm{Z}(C)$，并考虑如第 5.1 节所述、由平面图张成的 $(\Bbbk \otimes_{\mathbb{C}(q)} \Bbbk)$-线性空间；这些平面图具有给定的边界条件，在 L_t-区域（分别为 P_t-区域）中用 $\mathrm{Rep}_q\mathrm{L}_t$ （分别为 $\mathrm{Rep}_q\mathrm{P}_t$）着色，并在优惠券处横截地穿过缺陷，这些优惠券上装饰有来自 $\mathrm{Rep}_q\mathrm{L}_t$ 的态射，具体如第 5.2节所述。我们将其关于以下关系的商记为 $\mathrm{Z}(S, f, \phi, \mathrm{B})\,((U_C)_{C\in\mathcal{B}})$：

- 由 $\mathrm{Rep}_q\mathrm{L}_t$ 和 $\mathrm{Rep}_q\mathrm{P}_t$ 在二维区域内部诱导的纽结关系；
- 围绕 L_t-线的分层纽结关系：这些关系由上一节所述的局部模型诱导。

该赋值

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{Z}(S,f,\phi,\mathcal{B})\colon & \left(\boxtimes_{C\in\mathcal{B}^+}\mathcal{Z}(C)\right)\boxtimes\left(\boxtimes_{\bar{C}\in\mathcal{B}_-}\mathcal{Z}(C)\right)^{\mathrm{op}} & \to & \mathrm{VECT}, \\ & (U_C)_{C\in\mathcal{B}} & \mapsto & \mathcal{Z}(S,f,\phi,\mathcal{B})\left((U_C)_{C\in\mathcal{B}}\right) \end{array}$$

是良定义的并且具有函子性，因为 $\mathrm{Rep}_q\mathrm{L}_t$ 和 $\mathrm{Rep}_q\mathrm{P}_t$ 中的所有关系都成立。在不会引起混淆时，我们将简单地记作 $\mathcal{Z}(S)$。

引理 5.10 ([Wal06，定理 4.4。2])。 设 $(S,\ f,\ \phi,\ \mathcal{B})$ 是一个带有相容标记的二分框架曲面。令 $gl_C(S)$ 为沿边界分支 S 粘合C所得的曲面，其中 $C,\ C \in \mathcal{B}^{P_t}$ (或者，在 $\mathcal{B}^{L_t}$中)。于是，

$$\mathcal{Z}(gl_C(S))(-) = \int^{U\in\mathcal{Z}(C)} \mathcal{Z}(S)(-, U, U),$$

其中，等式右边由 U 装饰的分支为 C 和 C。 ∎

定理 5.11。该映射

$$\mathcal{Z}\colon Bord_1^{bip,fr}(2) \to \textsc{Bimod}$$

定义了一个从2维二分带框余 *cobordism* 范畴出发的对称幺半函子，因此得到一个2维带框拓扑场论。

证明。 根据前一个引理，该构造与沿单一颜色的边界分支粘合曲面相容。对于一般情形，由于我们使用的是相容标记，只需注意我们可以先沿标记为 P_t 的子区域粘合，再沿标记为 L_t. 的子区域粘合。其余部分显而易见。

□

6 Defect three-dimensional theories

在本节中，我们将上述理论扩展到三维理论。曲面缺陷和线缺陷周围的局部模型由第 2.4 节中描述的代数结构给出。

6.1 抛物曲面缺陷。 依照 [BJ25], ，我们利用第 $q\mathrm{P}_t$ 4.1 节中引入的 Rep $S = [0,1]^2$ 上的中心代数结构，构造曲面缺陷的局部模型。令 I^* 带有其典范框架，并令 $1/2$为在 E^* 处标记的单位区间，于是$= [0,1]^2 \times I^*$ 是一个带有框架缺陷墙 $1/2$ 的分层立方体。我们考虑 E^* 中以下这类分层带状图（见图 9）：

- 端点附着在以下区域之一：

$$E_0 \coloneqq [0,1] \times \{0\} \times \{0\}, \qquad E_{1/2} \coloneqq [0,1] \times \{1/2\} \times \{0,1\} \quad \text{or} \quad E_1 \coloneqq [0,1] \times \{1\} \times \{1\};$$

- 缺陷墙将带状图 Ω 切分为三部分：
  1. $\Omega^{\mathrm{L}} \coloneqq \Omega \cap \left([0,1]^2 \times \left[0, \frac{1}{2}\right)\right)$ 表示 $\mathsf{SkCat}^{\mathrm{L}_t}([0,1]^2)$ 的一个态射；
  2. $\Omega^{\mathrm{G}} \coloneqq \Omega \cap \left([0,1]^2 \times \left(\frac{1}{2}, 1\right]\right)$ 表示 $\mathsf{SkCat}^{\mathrm{GL}_t}([0,1]^2)$ 的一个态射；
  3. $\Omega^{\mathrm{P}} \colon = \Omega \cap ([0,1] \times \{1/2\})$ 是第 3.4 节中定义的平面图，唯一的区别在于，我们允许端点位于 S 的内部，前提是它们附着在 Ω^{G} 或 Ω^{L}；
- Ω_{G} 和 Ω_{L} 在与线股颜色兼容的 Ω_{P} 优惠券处横截地相交缺陷。

若 Ω 是这样的带状图，我们定义

$$V \coloneqq \Omega \cap E_0, \quad W \coloneqq \Omega \cap E_1, \quad a \coloneqq \Omega \cap [0,1] \times \{1/2\} \cap \{0\}, \quad b \coloneqq \Omega \cap [0,1] \times \{1/2\} \cap \{1\}$$

为由其端点确定的 $\mathrm{Rep}^q\mathrm{GL}_t$、$\mathrm{Rep}^q\mathrm{L}_t$ 和 $\mathrm{Rep}^q\mathrm{P}_t$ 中的对象，并称 Ω 为圆盘上的 分层 (a,b,V,W)-带状图。考虑由分层 (a,b,V,W)-带状图张成的 $(\Bbbk \otimes_{\mathbb{C}(q)} \Bbbk)$-线性空间 $\mathcal{L}_{a,b,V,W}$，模掉

- 发生在缺陷墙一侧或缺陷墙本身上的局部关系。具体而言，$\sum_i \lambda_i \Omega_i \sim 0$ 满足以下任一条件时： $\sum_i \lambda_i \Omega_{\mathrm{G}_i} = 0$ 属于 $\mathrm{Rep}^q\mathrm{GL}_t$； $\sum_i \lambda_i \Omega_{\mathrm{L}_i} = 0$属于 $\mathrm{Rep}^q\mathrm{L}_t$；或 $\sum_i \lambda_i \Omega_{\mathrm{P}_i} = 0$ 通过第 3.4 节中引入的局部关系作用于缺陷；

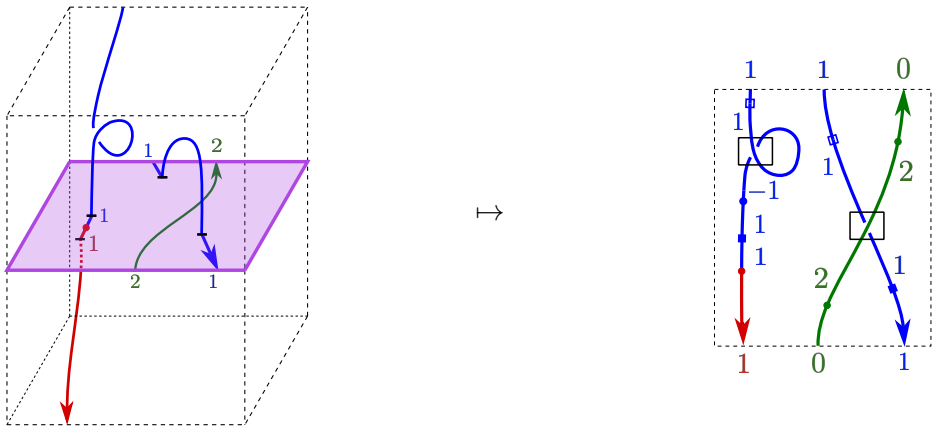


图 9：左侧是在圆盘上的分层带状图；右侧是它在 $\mathrm{Rep}_q\mathrm{P}_t$ 中的求值。

- 带框架的分层同痕：即对 E^* 进行同痕，使边界保持固定、缺陷内部保持不变，并且缺陷中的优惠券在整个同痕过程中始终与框架平行。

我们按如下方式为分层带状图定义求值态射。对于上述分层的 $(a,\ b,\ V,\ W)$-带状图 Ω，我们关联 $\mathrm{Rep}_q\mathrm{P}_t$ 中的一个态射，如下所示：

- 我们按限制函子的定义（Ω_{G} ）修改4.2，即：

  1. 根据定向，将任意开弦的初始点标记为 α 或 $n_{\alpha(0)}=0$ ；2. 将端点标记为 $n_{\alpha(0)}=1$ rot $n_\alpha+$ ；3. 使用 $\mathrm{Rep}^f{}_\alpha\mathrm{GL}_q$的枢轴结构（（3.29）和（3.30）中的态射）将每个端点的标记切换为0或1；4. 将由此得到的图Ω^{G} 替换为$\varphi_{\varepsilon_2}^{-1}\circ\ \tilde{}\Omega^{\mathrm{G}}\circ\varphi_{\varepsilon_1}$，其中是（4.1）中的同构；

- 我们对 Ω_{L} 应用相同的过程（此处枢轴结构是平凡的）；
- 我们通过与 $\mathrm{Rep}_q\mathrm{GL}_t$ 和 $\mathrm{Rep}_q\mathrm{L}_t$ 的枢轴结构（式（3.28）、（3.29）和（3.30中的态射）复合，将 Ω_{P} 的每个端点的装饰切换为 0 或 1 ；
- 我们将所得的带状图投影到缺陷墙上，并将出现的所有交叉替换为 Z（$\mathrm{Rep}_q\mathrm{P}_t$）中的相应半扭（参见第 5.1节）。

令 Ω为对 Ω应用此过程所得的对象。将 E_0 和 E_1 投影到 $E_{1/2}$上，我们得到两组带标签的点 V_a 和 W_b。因此，平面图 Ω表示一个态射$f_\Omega\in\mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}_q\mathrm{P}_t}(V_a,\ W_b)$（示例见图 9 ）。我们定义求值态射 为：

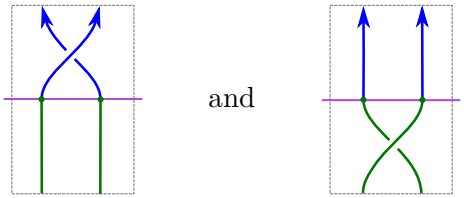
$$\begin{array}{rccc}\mathrm{ev}_{a,b,V,W}: & \mathcal{L}_{a,b,V,W} & \to & \mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}_q\mathrm{P}_t}(V_a,W_b),\\ & \Omega & \mapsto & f_\Omega,\end{array}\tag{6.1}$$

在生成元上定义，并线性延拓。

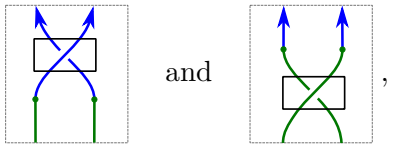
引理 6.1。 求值态射 $ev_{a,\ b,\ V,\ W}$ 是良定义的，即 f_Ω 不依赖于 Ω 在 $L_{a,\ b,\ V,\ W}$中的等价类。

证明。 我们需要验证 f_Ω 在对Ω应用编织关系和同痕关系时保持不变。对于编织关系，这正是限制函子 ι_t^* 和 π_t^* （参见图（4.4））

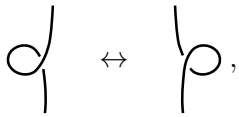
是良定义的。对于拓扑关系，首先要注意，分层同痕不会固定缺陷墙，因此弦与缺陷墙相交的位置可能会改变。特别是，通过应用这样的同痕，我们可以将两条弦横向穿过缺陷墙时形成的交叉从一侧移到另一侧。例如，从正面观察，下列分层带状图分别表示为



同痕，但它们的求值



在 Rep$_q$P$_t$. 中并不同痕。蓝色交叉的自然性（参见注3.15）保证了它们具有相同的求值。因此，由于交叉可以穿过缺陷，我们只需证明求值在缺陷一侧或缺陷本身发生的带框 Reidemeister 变换下保持不变。对于 Reidemeister II 型和 III 型变换，只需注意到交叉在 $Z(\mathrm{Rep}_q\mathrm{P}_t)$中映为半编织，因此它们可逆且满足相应的杨-巴克斯特方程。对于带框 Reidemeister 变换 I



这是限制 3.24 定义良好，以及 Rep$_q$P$_t$ 中成立的所有关系qL$_t$.中的关系均可推出这一事实的结果。 □

6.2 缺陷线。 我们最终引入由 Rep$_q$L$_t$ 装饰的缺陷线，并使用（Rep$_q$L$_t$，Rep$_q$P$_t$）-中心结构来定义其周围的局部关系。令 $E = I^3$ 为立方体，并赋予它由下图定义的分层：

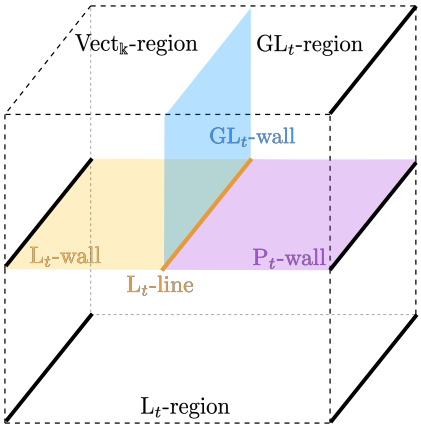


图 10：我们考虑两面水平缺陷墙，分别以 Rep$_q$L$_t$ 和 Rep$_q$P$_t$ 装饰；另有一面垂直墙，以 Rep$_q$GL$_t$ 装饰。这些墙交汇于一个以 Rep$_q$L$_t$ 装饰的一维分层。水平墙下方的区域是 L$_t$ 区域，L$_t$ 墙上方的区域是 Vect$_{\Bbbk}$ 区域，最后，P$_t$ 墙上方的区域是 GL$_t$ 区域。

我们考虑以下带状图 Ω 类，它推广了上一节中引入的带状图：

- Ω 的端点位于粗体区间上，并且我们假设它们的深度各不相同，因此将它们投影到水平墙上不会产生交叉；
- 图的每个部分都根据其所在区域进行装饰。特别是，$\mathrm{Vect}_{\Bbbk}$-区域为空；

- 每条边都完全位于某个分层中，并且可以连接到位于某个分层中的优惠券，该分层的维数与其相差至多一（也就是说，它们不能直接穿过缺陷线，从三个三维区域之一进入另一个区域）。

与往常一样，我们将这些图视为在立方体的带框分层同痕下等价。

固定粗体区间上的一个带色有向点配置 P，并令 $E(\mathrm{P})$ 为由端点与 P 相匹配的带状图的同痕类张成的 $(\Bbbk \otimes_{\mathbb{C}(q)} \Bbbk)$-线性空间。将 P 投影到水平墙上，得到两个配置 X 和 Y，分别表示 $\mathrm{Rep}_q\mathrm{L}_t$ 和 $\mathrm{Rep}_q\mathrm{P}_t$ 中的对象。设 $\Omega \in E(\mathrm{P})$ 为一个带状图。按照 (6.1) 中求值态射的定义，我们可以将 Ω 投影到水平缺陷上，用相应的半编织替换出现的交叉，并引入枢轴结构，从而$\widetilde{\ }$得到分层正方形上的一个平面图 Ω，如图8所示，它表示一个态射$f_\Omega \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}_q\mathrm{L}_t}(Y, j^*(X))$.

引理 6.2。 由以下赋值定义的线性映射

$$\begin{array}{ccc} E(\mathcal{P}) & \to & Hom_{\mathrm{Rep}_q\mathrm{L}_t}(Y, j^*(X)), \\ \Omega & \mapsto & f_\Omega, \end{array}$$

是良定义的，也就是说，它不依赖于Ω的同痕类。

证明。将垂直墙向上延伸至立方体底部，会把带状图 Ω 切分为两个子图：位于 L_t-墙下方的 Ω_1，，以及位于 P_t-墙下方和上方的 Ω_2，。随后，分别投影 Ω_1 和 Ω_2 ，并沿 L_t-缺陷线将它们粘合，即可得到平面图 $\widetilde{\Omega}$。投影 Ω_1 和 Ω_2 的构造方式与 (6.1) 中求值态射的定义相同：对 Ω_1 使用 $\mathrm{Rep}_q\mathrm{L}_t$ 的平凡 $(\mathrm{Vect}, \mathrm{Rep}_q\mathrm{L}_t)$-中心结构，对 Ω_2. 使用 $\mathrm{Rep}_q\mathrm{L}_t$ 的 $(\mathrm{Rep}_q\mathrm{GL}_t, \mathrm{Rep}_q\mathrm{L}_t)$-中心结构。因此，按照引理 6.1 中相同的论证，它们不依赖于 Ω_1 和 Ω_2的同痕类。这说明，对于完全发生在垂直墙一侧的分层立方体同痕， f_Ω保持不变。还需验证，当图表的一部分穿过垂直墙移动时，f_Ω 也保持不变。这在图示上对应于双模 $\mathrm{Rep}_q\mathrm{L}_t$ 具有中心结构这一事实：L_t-区域既可以通过 P_t-墙作用于缺陷线，也可以通过 L_t-墙作用于缺陷线；我们要证明这两种作用实际上相同。这可由关系 (5.1) 和中心结构的定义推出。事实上，将 Ω 投影到缺陷中时，我们会把出现的所有交叉替换为相应的半编织。特别地，当其中一条相关线股来自 L_t-区域时（这是唯一需要考虑的情形），该半编织就是 $\mathrm{Rep}_q\mathrm{L}_t$ 的编织 β （参见第 4.1 节）。因此，投影到 P_t-墙时，会出现一个由 $\pi^*(\beta)$ 装饰的优惠券；而应用同痕并投影到 L_t-墙时，则会出现一个由 β 自身装饰的优惠券。关系 (5.1) 以及 $j^* \circ \pi^* = \mathrm{id}_{\mathrm{Rep}_q\mathrm{L}_t}$ 这一事实表明，这两个图表表示 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}_q\mathrm{L}_t}(Y, j^*(X))$ 中的同一个态射。

□

6.3 三维缺陷理论。最后，我们引入带缺陷的三维理论。设$(S,\ f,\ \phi)$ 为一个二分框架曲面（参见定义 2.23）。我们将 $\phi^{-1}(A)$

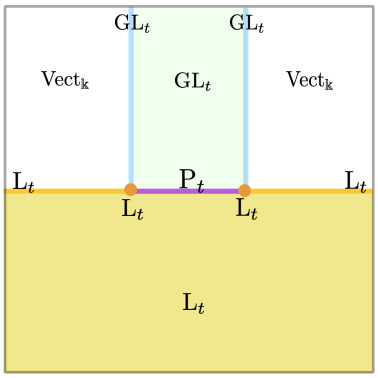


图11：装饰圆柱剖面的示意图。水平线表示缺陷墙。橙色的点是缺陷线的截面。蓝色垂直线表示 GL_t-墙。

以及 $\phi^{-1}(B)$，其中 L_t；以及 $\phi^{-1}(C)$，其中 P_t。分层 ϕ 在圆柱 $S \times I$ 上诱导出如下分层（见图 11）：

- 水平墙 $S \times \left\{\frac{1}{2}\right\}$ 装饰为 (S, ϕ);
- 圆柱 $\phi^{-1}(C) \times \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ 和垂直墙 $\phi^{-1}(B) \times \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ 均标记为 GL_t;
- 圆柱 $\phi^{-1}(A) \times \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ 标记为 $\mathrm{Vect}_{\Bbbk}$;
- 水平墙下方的区域 $S \times \left[0, \frac{1}{2}\right)$ 完全用 L_t 装饰。

设 $\mathcal{B}$ 为曲面的一个相容标记。我们考虑带状图 Ω 在 S 上的同痕类（见图12），满足：

- Ω 不与 $\mathrm{Vect}_{\Bbbk}$ 区域相交，并根据其他区域上的标记为其着色；
- Ω 的端点连接到 $S \times \{\pm 1\}$，或连接到水平墙边界上标记的某个分支；
- 每条边都完全位于某个分层中，并且可以连接到一个以直线方式嵌入某个分层中的优惠券上，该分层的维数之差至多为一（这再次意味着，它们不能直接从 GL_t 区域通向 L_t 线）。

将 S^{P_t} 用 P_t 装饰的 S 区域称为该区域，并为每个 $C \in \mathrm{B}$ 固定边界条件 $X \in \mathrm{SkCat}^{\mathrm{GL}_t}(S^{\mathrm{P}_t})$、$Y \in \mathrm{SkCat}^{\mathrm{L}_t}(S)$ 和 $U_C \in \mathrm{Z}(C)$。对于由上述带状图张成的线性空间，我们记为 $E^S(X, Y, (U_C)_{C \in \mathcal{B}})$；对其取商，其中模掉三维区域中由 $\mathrm{Rep}^q\mathrm{GL}_t$ 和 $\mathrm{Rep}^q\mathrm{L}_t$ 诱导的局部关系，以及缺陷附近由第6.1节和第6.2节所描述的局部模型诱导的局部关系。该赋值

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(S, f, \phi, \mathcal{B}): \quad \left(\boxtimes_{C \in \mathcal{B}} \mathcal{Z}(C)\right) \boxtimes \mathrm{SkCat}_{\mathrm{GL}_t}(S^{\mathrm{P}_t}) \boxtimes \mathrm{SkCat}_{\mathrm{L}_t}(S)^{\mathrm{op}} &\to \mathrm{VECT}, \\ ((U_C)_{C \in \mathcal{B}}, X, Y) &\mapsto E^S\left(X, Y, (U_C)_{C \in \mathcal{B}}\right), \end{aligned}$$

具有函子性。对态射的作用由沿缺陷墙上标记的分量水平粘合圆柱，以及垂直堆叠表示编织范畴中态射的图来给出。

引理6.3。 设 (S, f, ϕ, B) 是一个带有相容标记的二分框架曲面。将 S 沿边界分支 C 粘合后得到曲面 $gl_C(S)$，其中 $C, C \in B^{P_t}$ *(altern*

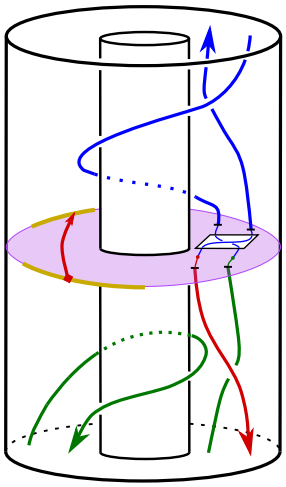


图12：环带上的分层带状图，其标签全为 P_t。

atively，in B_{L_t}*). Then,*

$$\mathcal{A}(gl_C(S))(-) = \int^{U\in\mathcal{Z}(C)} \mathcal{A}(S)(-,U,U),$$

其中，等式右边由 U 装饰的分支为 C 和 C。

证明。同样，这基本上与 [Wal06，定理 4.4 中的证明相同。2]沿 C粘合会诱导态射

$$\mathrm{gl}_U\colon \mathcal{A}(S)(-,U,U) \to \mathcal{A}(\mathrm{gl}_C(S))(-)$$

对每个 $U \in \mathcal{Z}(C)$ 都成立。此外，若 $f\colon U \to V$ 是 $\mathcal{Z}(C)$ 中的一个态射，Ω 是表示 $\mathcal{A}(S)(-,U,V)$ 中某个元素的分层带状图，而 $f\star\Omega$（分别是 $\Omega\star f$）是沿 C（分别是 C）与 Ω 粘合 f 后得到的图，那么图 $\mathrm{gl}_U(f\star\Omega)$ 和 $\mathrm{gl}_V(\Omega\star f)$ 可通过支撑在 ∂S 的管状邻域上的同痕相互关联。因此，它们定义了 $\mathcal{A}(\mathrm{gl}_C(S))(-)$ 中的同一个元素，并且图表

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathcal{A}(S)(-,U,U) & & \\ & \overset{-\star f}{\nearrow} & & \overset{\mathrm{gl}_U}{\searrow} & \\ \mathcal{A}(S)(-,U,V) & & & & \mathcal{A}(\mathrm{gl}_C(S))(-) \\ & \underset{f\star-}{\searrow} & & \underset{\mathrm{gl}_V}{\nearrow} & \\ & & \mathcal{A}(S)(-,V,V) & & \end{array} \tag{6.2}$$

可交换。我们将证明 $\mathcal{A}(\mathrm{gl}_C(S))(-)$ 对这一性质具有泛性质。设 E 是一个向量空间，并配有线性映射

$$\varphi_U\colon \mathcal{A}(S)(-,U,U) \to E$$

使等价的图表交换。我们必须证明存在唯一的线性映射

$$\varphi\colon \mathcal{A}(\mathrm{gl}_C(S))(-) \to E$$

使得对于每个 $U \in \mathrm{Z}(C)$，$\varphi_U = \varphi \circ \mathrm{gl}_U$。设 Ω 是 $\mathrm{gl}_C(S)$ 中的一个分层带状图，表示 $\mathrm{Z}(\mathrm{gl}_C(S))(-)$ 的一个元素。应用同痕和分层纽结关系，我们可以将 Ω 局部投影到缺陷上，因此不妨设在 $C\times I$ 的某个邻域内，Ω 由包含于缺陷中的一个平面图表示（见图 13）。令 U 为 Ω 与 $C\times\left\{\frac{1}{2}\right\}$ 的交，它确定了 $\mathrm{Z}(C)$ 的一个对象。沿着

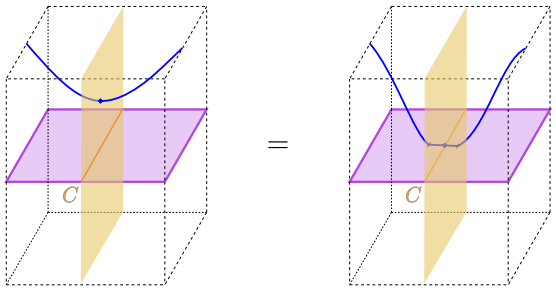


图 13：应用同痕和纽结关系，我们总能沿着一个平面分支切开一个图。

$C \times I$ 切割后，我们得到 $S \times I$ 中的一个带状图 Ω_U，它定义了 $\mathcal{A}(S)(-, U, U)$ 的一个元素。如果 φ 存在，则 $\varphi(\Omega) = \varphi_U(\Omega_U)$，因此它是唯一确定的。

为证明其存在性，首先假设 Ω 是另一个分层带状图，它表示 $\mathrm{A}(\mathrm{gl}_C(S))(-)$ 中的同一元素，并且 Ω 与它之间存在一个同痕，该同痕使领圈邻域沿着 $C \times I$ 移动。于是，沿着 $C \times I$ 切开后得到带状图 Ω_V，它位于 $S \times I$ 中；又由于可以假设它在 $C \times I$ 附近是平面的，(6.2) 的交换性意味着 $\mathrm{gl}_U(\Omega_U) = \mathrm{gl}_V(\Omega_V)$。另一方面，如果 Ω 和 Ω 之间存在一个由立方体支撑的 $\mathrm{gl}_C(S)$ 同痕，且该立方体不与 $C \times I$ 相交，那么 Ω_U 和 Ω_U 之间也存在 S 的同一同痕，因此它们表示 $\mathrm{A}(S)(-, U, U)$ 中的同一元素，且 $\varphi_U(\Omega_U) = \varphi_U(\Omega_U)$。因此，$\varphi$ 与同痕相容。最后，如果 Ω 和 Ω 之间存在一个发生在不与 $C \times I$ 相交的立方体上的纽结关系，那么 Ω_U 和 Ω_U 之间也存在同一关系，且它们表示同一元素。如果纽结关系发生在与 S 相交的立方体上，我们可以通过同痕将它移开 $C \times I$。这样得到的分层带状图 Ω' 和 Ω' 之间存在一个发生在不与 $C \times I$ 相交的立方体上的纽结关系，因此 $\mathrm{gl}_{U'}(\Omega'_{U'}) = \mathrm{gl}_{U'}(\Omega'_{U'})$。此外，$\varphi$ 的同痕不变性意味着 $\mathrm{gl}_U(\Omega_U) = \mathrm{gl}_{U'}(\Omega'_{U'})$ 且 $\mathrm{gl}_U(\Omega) = \mathrm{gl}_{U'}(\Omega_{U'})$。这证明了 φ 与纽结关系相容。

□

定理 6.4。赋值

$$\mathcal{A}\colon Bord_1^{bip,fr}(2) \to BIMOD$$

定义了一个从2维二分带框协边范畴出发的对称幺半函子，因此给出一个2维带框拓扑场论。它在一维流形上与平面理论 Z 一致。

证明。与定理5.11一样，曲面的粘合与切割相容性由前一个引理以及我们考虑的是相容标记这一事实推出。 □

7 HOMFLY skein 双代数

最后，我们将 HOMFLY skein 代数上的 Turaev 余乘法视为前几节所发展的带缺陷 skein 理论形式体系的一个特例，从而重新得到它。

7.1 余乘映射。考虑一个带有相容标记的二分框架曲面 $(S, f, \phi, \mathcal{B})$。如上所述，将 S^{P_t} 记为以 P_t 装饰的 S 区域。应用上文定义的三维拓扑场论 $\mathcal{A}$，得到一个函子

$$\mathcal{A}(S)\colon \left(\boxtimes_{C\in\mathcal{B}} \mathcal{Z}(C)\right) \boxtimes \mathrm{SkCat}_{\mathrm{GL}_t}(S_t^{\mathrm{P}}) \boxtimes \mathrm{SkCat}_{\mathrm{L}_t}(S) \to \mathrm{VECT}.$$

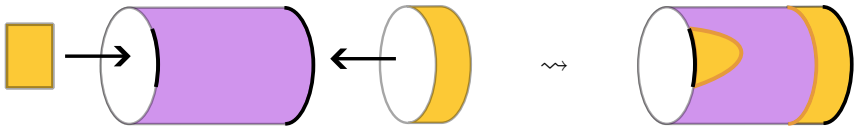


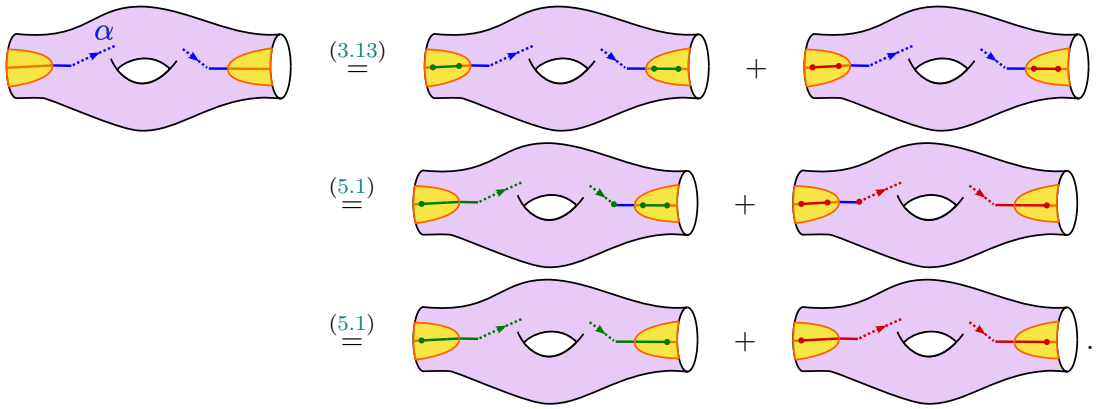
图14：沿边界粘合分层圆柱会改变分层。

为标记在边界上的每个分支 $C \in \mathcal{B}$ 选择边界条件 $U_C \in \mathcal{Z}(S)$，并在 $S \times I$的上下底边上分别固定空构形 $\varnothing \in \mathrm{SkCat}^{\mathrm{GL}_t}(S^{\mathrm{P}_t})$ 和 $\varnothing \in \mathrm{SkCat}^{\mathrm{L}_t}(S)$。根据构造，由 $\mathcal{A}(S)$ 得到的向量空间 $E^S((U_C)_{C\in\mathcal{B}})$ 分别带有 skein 代数 $\mathrm{Sk}^{\mathrm{GL}_t}(S^{\mathrm{P}_t})$ 和 $\mathrm{Sk}^{\mathrm{L}_t}(S)$ 的左作用与右作用。通过选择适当的分层 ϕ，该向量空间确实同构于 $\mathrm{Sk}^{\mathrm{L}_t}(S)$：

命题 7.1。设 $\mathcal{B} \neq \varnothing$ 并且 ϕ 由沿标记分支插入的一族圆柱组成，如图 *14*所示。那么，存在一族自然的向量空间同构

$$\mathcal{A}(S)(-,\varnothing,\varnothing) \cong \mathcal{Z}^{\mathrm{L}_t}(-).$$

证明。固定边界条件 U，令 Ω 为一个分层带状图，它表示 $\mathrm{A}(S)(U,\varnothing,\varnothing)$ 中的一个元素。由于没有弦连接到 $S \times \{\pm 1\}$，三维分层纽结关系允许将 Ω 完全投影到缺陷上，因此可将其表示为 $S \times \left\{\frac{1}{2}\right\}$ 上的平面图，在 P_t 区域中以 Rep^q 着色，在 L_t 区域中以 Rep^q 着色。我们先证明，该图可以写成线性组合，其中不含以 ■. 着色的弦。事实上，假设 α 是一个以蓝色着色的分支。若 α 是一条开弦，则它连接到边界上标记的某个区间/圆，因此穿过一维 L_t 缺陷。交叉这些缺陷线会使其颜色在端点附近变为 ■ 。然后，我们可以在 L_t 圆盘/圆柱内应用关系 (3.13)，使每一项中出现的一个包含映射/投影穿过缺陷（关系 (5.1)），并沿着α 滑动（根据自然性，参见注 3.15 ），直至到达另一端点（见下图）。现在，α 位于 P_t 区域内的部分完全以 ■ 和 ■着色：



类似地，如果 α 是一条闭合股线，我们可以通过施加一次同痕，将它推近一个有标记的分支。然后，关系 (5.1) 允许我们将它部分投影到 L_t-区域中，在那里我们可以应用相同的技巧，将它写成一个绿色分支和一个红色分支的线性组合。

~我们称Ω 通过以下方式得到的图表为Ω 经由前述变换得到的图表。由于它完全由 ■、 ■ 和 ■着色，因此它表示$\mathcal{Z}^{\mathrm{L}_t}(S)(U)$中的一个元素。此元素定义良好，因为所有用于将 ■换成 ■ 的关系，都是 $\mathrm{Rep}^q\mathrm{L}_t$中的局部关系，因此它们在$\mathcal{Z}^{\mathrm{L}_t}(S)(U)$中成立。由此得到一个线性映射

$$\mathcal{A}(S)(U,\varnothing,\varnothing) \to \mathcal{Z}^{\mathrm{L}_t}(S)(U), \quad \Omega \mapsto \widetilde{\Omega}.$$

该映射的逆映射构造如下。给定一个在 Γ 上、 S 由 Rep$_q$L$_t$着色的平面图，我们可以运用同痕和自然性，使所有“禁用”的态射沿开弦滑动，并任意靠近边界的标记分支，从而使它们都位于定义某个 L$_t$-区域的嵌入圆盘/圆柱之一内。注意，可以唯一地做到这一点，使弦与 P$_t$-区域的交段着色为$\hat{}$或 ■ 。这样便得到分层缺陷墙上的一个良定义图 Γ ，并且很容易看出它$\hat{}$定义了下方线性映射的逆映射。自然性源于这些映射不会改变标记边界分支管状邻域内的图表。

□

因此，缺陷墙边界附近存在由 Rep 着色的区域$_q$L$_t$ ，使得可以对由 （3.13） ■着色的分支应用关系，从而得到如下恒等
■ = ■. 如果有开弦连接到 $S\times\{\pm1\}$，则此恒等仍然成立，但仅对闭分支成立：

命题 7.2。设 B 和 ϕ 如上一命题所述，并在缺陷上标记的每个分支上固定空边界条件。那么，

$$\mathcal{A}(S)(\varnothing,-,-)\cong pRes(S)(\varnothing,-,-)\Big/\langle \blacksquare = \blacksquare \ on\ closed\ components\ on\ the\ defect\ wall\rangle\cdot$$

证明。 证明思路与上一命题相同：我们可以将图表的一部分推至边界上的某个 L$_t$区域附近，在两个空间之间构造线性映射，然后应用关系（5.1），将其投影到 L$_t$区域，并使态射沿闭分支滑动。由此，我们可以将由 ■ 着色的闭分支分解为绿色图和红色图的线性组合，从而得到恒等 ■ = ■。对于开弦，这不会导出新的关系：由于它们都连接到 $S\times\{\pm1\}$，“禁用”的态射无法化简，因此使它们出现只会以不同方式表示同一个态射，并不会导出任何关系。

□

结合这两个命题，我们看到$\mathcal{A}(S)(\varnothing)$作为线性空间同构于 Sk$_{\mathrm{L}_t}(S)$，并且由$\mathcal{A}(S)$的函子性可知，现在 Sk$_{\mathrm{GL}_t}(S)$ 和 Sk$_{\mathrm{L}_t}(S)$ 都作用于其上：

定理 7.3. 设(S,f,B) 是一个带标记的带框曲面，且 $B\neq\varnothing$。那么，$Sk_{GL_t}(S)$ –$Sk_{L_t}(S)$-双模 $A(S)(\varnothing)$ 作为线性空间同构于 $Sk_{L_t}(S)$。特别地，在此同构下，$Sk_{L_t}(S)$ 成为一个左 $Sk_{GL_t}(S)(S)$- 模。■

现在我们讨论环面的情形 $S=\mathbb{T}^2$. 设 $(\mathbb{T}^2,f,\phi)$ 是一个带有分层 ϕ 的带框环面，其中 H_t-区域仅由嵌入于 $\mathbb{T}^2$. 中的一个圆盘构成。根据命题7.1和 7.2证明中的相同论证，

$$\mathcal{A}(\mathbb{T}^2,f,\phi)(\varnothing)\cong \mathrm{Sk}_{\mathrm{L}_t}(\mathbb{T}^2)$$

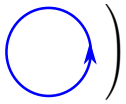
此外，P$_t$-区域与 $\mathbb{T}^2\setminus\mathbb{D}^2$ 同胚，因此我们有一个作用

$$\mathrm{Sk}_{\mathrm{GL}_t}(\mathbb{T}^2\setminus\mathbb{D}^2)\otimes\mathrm{Sk}_{\mathrm{L}_t}(\mathbb{T}^2)\to\mathrm{Sk}_{\mathrm{L}_t}(\mathbb{T}^2)$$

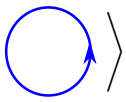
在这个穿孔环面的 GL$_t$-skein 代数上。

命题 7.4. 上述作用下降为环面上的 GL_t-*skein* 代数的作用。

证明. 绕穿孔的环路 α 的作用是乘以

$$\pi_t^* \circ \mathrm{res}_t \left(\right.$$

$$\left. \right)$$

在 L_t-圆盘上，因此该作用下降到商上

$$\mathrm{Sk}_{\mathrm{GL}_t}(\mathbb{T}^2 \setminus \mathbb{D}^2) \Big/ \left\langle \alpha = \right.$$

$$\left. \right\rangle \cong \mathrm{Sk}_{\mathrm{GL}_t}(\mathbb{T}^2).$$

□

令(S, f)为任意带框曲面，并选择$\mathcal{B} \neq \varnothing$若 $\partial S \neq \varnothing$. 令 ϕ为 S的一个分层，如命题7.1 和7.4中所述，从而 $\mathbf{Sk}_{\mathrm{GL}_t}(S)$ 作用于 $\mathbf{Sk}_{\mathrm{L}_t}(S)$:

推论 7.5。通过作用于空图定义的态射 $Sk_{GL_t}(S) \to A(S)(\varnothing, \varnothing)$ 诱导出一个 $\mathbb{C}(q)$-代数同态

$$\widetilde{\Delta}_f \colon Sk_{GL_t}(S) \to Sk_{L_t}(S).$$

■

Com $\widetilde{\ }$与引理3.9中的同构复合后，我们得到一个 $\mathbb{C}(q)$-代数态射

$$\Delta_f \colon \mathrm{Sk}_{\mathrm{GL}_t}(S) \to \mathrm{Sk}_{\mathrm{GL}_t}(S) \otimes_{\mathbb{C}(q)} \mathrm{Sk}_{\mathrm{GL}_t}(S) \tag{7.1}$$

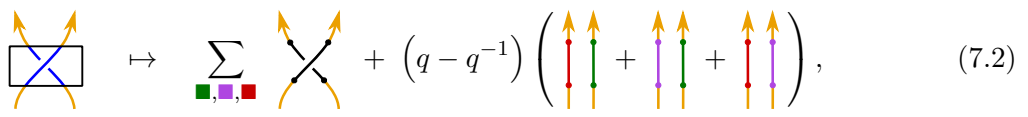
其在 $\Bbbk \cong \Bbbk \cdot \mathbf{1}_\varnothing$ 上的限制为（3.19）。根据构造，它可以通过以下方式在链环上计算：取曲面上的一个图，其中每个交叉、杯和帽都被限制函子（3.24）的像所替代，并应用关系（3.20）–（3.3）和（3.13），将该图分成两个着色图；我们将它们视为位于 $\mathbf{Sk}_{\mathrm{GL}_t}(S)$的两个不同副本中。这里，杯和帽指的是图中旋转数增加或减少1的部分。

命题 7.6。 式 (7.1)中的余乘法是余结合的。

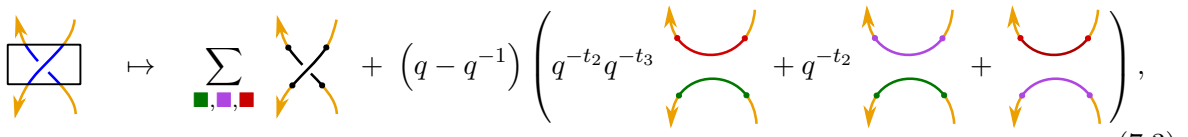
证明。 映射

$$(\Delta_f \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta_f \colon \mathrm{Sk}_{\mathrm{GL}_t}(S) \to \mathrm{Sk}_{\mathrm{GL}_t}(S) \otimes_{\mathbb{C}(q)} \mathrm{Sk}_{\mathrm{GL}_t}(S) \otimes_{\mathbb{C}(q)} \mathrm{Sk}_{\mathrm{GL}_t}(S)$$

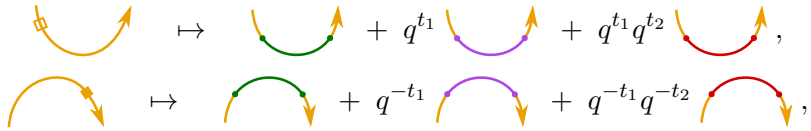
$\widetilde{\ }$可按如下方式计算。给定一幅链环图 Γ，我们首先像上一段那样计算 $\Delta_f(\Gamma) \in \mathrm{Sk}_{\mathrm{L}_t}(S)$ 。然后，我们将绿色部分分成两种颜色（第一份 $\mathbf{Sk}_{\mathrm{GL}_t}(S)$ 仍用绿色，第二份用紫色），并采用相同的规则：将所有绿色交叉、杯与帽替换为它们在限制函子下的像（3.24），并在适当选择颜色后应用关系$\widetilde{\ }$(3.20)–(3.3)和(3.13)。由于应用 Δ 不会产生新的交叉，因此我们可以利用以下关系，从初始图一次性完成这一切：



(7.2)



(7.3)



(7.4)

(7.5)

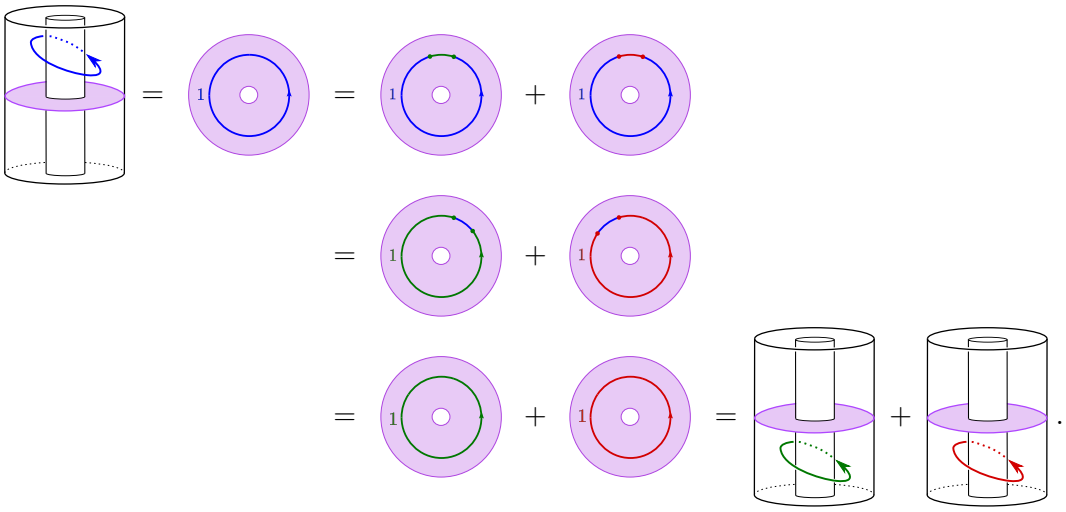
其中，各个和式遍历所涉及线股的所有可能颜色组合，并且

$$q^{t_1} = q^t \otimes 1 \otimes 1, \qquad q^{t_2} = 1 \otimes q^t \otimes 1, \qquad q^{t_3} = 1 \otimes 1 \otimes q^t,$$

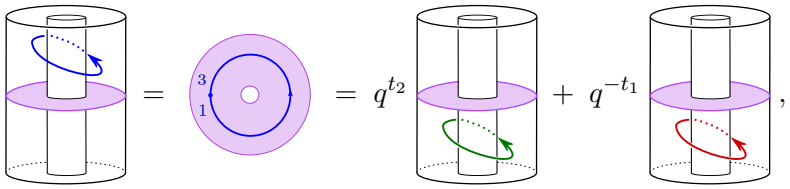
在 $\Bbbk \otimes_{\mathbb{C}(q)} \Bbbk \otimes_{\mathbb{C}(q)} \Bbbk$. 中，同样的公式计算出 $(\mathrm{id} \otimes \Delta_f) \circ \Delta_f$，因此余乘法是余结合的。

□

注 7.7。 余乘法 Δ_f 取决于框架 f的选择。例如，设$S = \mathbb{A}$ 为环带，它可以配备径向框架，也可以配备由 $\mathbb{R}^2$诱导的框架。先考虑 f 为径向框架的情形。我们有



另一方面，如果 f 是由 $\mathbb{R}^2$诱导的框架，那么将链环投影到缺陷中的局部关系会用到 $\mathrm{Rep}_q\mathrm{GL}_t$的枢轴结构：



其中最后一个等式是根据 $\mathrm{Rep}_q\mathrm{GL}_t$ 的枢轴结构定义得出的，推导过程与上一段中的相同。◊

7.2 余单位。 令 $\mathrm{Rep}_q\mathrm{GL}_n$ 为将下式特化后得到的 $\mathbb{C}$-线性范畴

$$q^t \rightsquigarrow q^n, \qquad \delta \rightsquigarrow \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}}$$

定义 3.1中，其中 $q \in \mathbb{C}^\times$ 且 $q^2 \neq 1$。这是 [Bru17]中的范畴 $\dot{\mathcal{OS}}(q - q^{-1}, q^n)$。设 $\varphi_n\colon \Bbbk \to \mathbb{C}(q)$ 为注 3.4中的求值态射。那么，求值函子 $\mathrm{ev}^{\mathrm{G}}_{q,n}$ 可分解为

$$\mathrm{Rep}_q\mathrm{GL}_t \to \overline{\mathrm{Rep}_q}\mathrm{GL}_n \to \mathrm{Rep}_q\mathrm{GL}_n,$$

其中，第一个箭头是一个 φ_n-线性函子，第二个箭头是 $\mathbb{C}$-线性的。

定义 7.8([De07]) 设 $\mathcal{C}$ 是一个带状范畴。态射 $f\colon X \to Y$ 称为 可忽略的，如果 $\mathrm{Tr}_{\mathcal{C}}(f \circ g) = 0$ 对所有 $g\colon Y \to X$ 属于 $\mathcal{C}$。

定理 7.9。([De07, Bru17]) 函子 $Rep_q GL_n \to \overline{Rep_q} GL_n$ 诱导出一个幺半等价

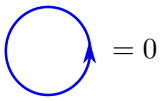
$$\Phi\colon \overline{Rep_q} GL_n \,/_{\mathcal{N}} \xrightarrow{\approx} Rep_q GL_n,$$

其中 N 是 $Rep_q GL_n$ 的张量理想，由可忽略态射组成。

特别地，GL_0 是平凡群，因此表示就是向量空间，我们有一个等价

$$\mathrm{Rep}_q \mathrm{GL}_0 \simeq \textsc{Vect}.$$

此外，若 $n = 0$，则 $\delta = 0$，且维数关系



在 $\overline{\mathrm{Rep}_q}\mathrm{GL}_0$ 中蕴含恒等态射是一个可忽略态射。因此，所有非空图表在 $\mathrm{Rep}_q \mathrm{GL}_n/\mathcal{N}$ 中都为零，我们得到一个 $\mathbb{C}(q)$-线性函子

$$\mathcal{E}\colon \mathrm{Rep}_q \mathrm{GL}_t \to \overline{\mathrm{Rep}_q}\mathrm{GL}_0 \,/_{\mathcal{N}} \simeq \textsc{Vect}$$

它消去所有非空图表。若 S 是任意定向曲面，这显然可扩展为一个函子

$$\mathcal{E}^S\colon \mathrm{SkCat}_{\mathrm{GL}_t}(S) \to \textsc{Vect}.$$

命题 7.10。线性映射

$$\varepsilon\colon Sk_{GL_t}(S) \to \mathbb{C}(q)$$

obt通过限制 $\mathcal{E}^S$ 到 $Sk_{GL_t}(S)$ 为 *Turaev* 余乘法 (7.1提供了余单位).

证明。 回顾局部关系（3.20）–（3.3）。由于 ε消去非空图并将q^t 映射到 1，映射 $(1 \otimes \varepsilon) \circ \Delta_f$ 只需将 ■ 与 ■交换。当 ε 作用于第二个因子时也会发生同样的情况，因此它是 Δ_f的余单位。 □

参考文献

[AKKN18a] A. Alekseev、N. Kawazumi、Y. Kuno 和 F. Naef。零亏格中的 Goldman–Turaev 李双代数与 Kashiwara–Vergne 问题。数学进展 (2018)。326:1–53。[AKKN18b] A. Alekseev、N. Kawazumi、Y. Kuno 和 F. Naef。高亏格中的 Goldman-Turaev 李双代数与 Kashiwara-Vergne 问题。arXiv:1804.09566 [math.GT][BD95] J. Baez 和 J. Dolan。高维代数与拓扑量子场论。*J.Math. Phys.*, 36(11):6073–6105, 1995。[BBZ18a] D. Ben-Zvi、A. Brochier 和 D. Jordan。曲面上的量子群积分。拓扑学杂志 (2018)。11(4):873–916。[BJS21] A. Brochier、D. Jordan 和 N. Snyder。关于编织张量范畴的可对偶性。数学汇刊, 157(3):435–483, 2021。[BJ25] J. Brown 和 D. Jordan。抛物型 skein 模。arXiv:2505.14836 [math.QA], 2025。

[BH24] J. Brown 和 B. Haïoun。非半单情形中的 skein 范畴。arXiv:2406.08956v1[math.QA], 2024。[Bru17] J. Brundan。定向 skein 范畴的表示。arXiv:1712.08953v1 [math.RT],2017。[Coo19] J. Cooke。skein 范畴的切除与因子化同调。arXiv:1910.02630[math.QA], 2019。[CW11] J. Comes 和 B. Wilson。Deligne 范畴 Rep(GL_δ) 与一般线性超群的表示。美国数学会表示论 16 (16), 568-609[De07] P. Deligne。对称群的表示范畴，当 S_t 不是自然数时。载于：代数群与齐性空间，2007。[DGNO10] V. Drinfeld、S. Gelaki、D. Nikshych 和 V. Ostrik。关于辫融合范畴 I。Selecta Mathematica, (2010)。16(1):1–119。[FYH+85] P. Freyd、D. Yetter、J. Hoste、W.B.R. Lickorish、K. Millett 和 A. Ocneanu。一种新的纽结与链环多项式不变量。Bull. Amer. Math. Soc. 12 (1985), 239-246。[Haï25] B. Haïoun。Crane-Yetter 边界处的非半单 WRT。arXiv:2503.20905[math.QA], 2025。[HPT16] A. Henriques、D. Penneys 和 J. Tener。编织张量范畴上的模张量范畴的范畴化迹。Doc. Math., 21:1089–1149, 2016。[Jae89] F. Jaeger。HOMFLY 多项式的复合积与模型。Enseign. Math., 35:323–361, 1989。[Jon85] V. Jones。通过冯 · 诺依曼代数定义的纽结多项式不变量。Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.), 12(1):103–111, 1985。[JF19] T. Johnson-Freyd。海森堡绘景量子场论。载于《表示论、数学物理与可积系统》，Progr. Math. 第340卷，第371–409页。Birkhäuser/Springer, Cham, 2021。[KV78] M. Kashiwara 和 M. Vergne。Campbell-Hausdorff 公式与不变超函数。Inventiones mathematicae (1978年)。47(3):249–272。[Lur09] J. Lurie。关于拓扑场论的分类。Current developments in mathematics, 2008, 第129–280页。Int. Press, Somerville, MA, 2009。[Mas18] G. Massuyeau。Turaev 环路运算的形式描述。Quantum Topology, 9:39–117, 2018。[Prz91] J. Przytycki。3-流形的 skein 模。Bull. Polish Acad. Sci. Math., 39(1-2):91–100, 1991。[PT87] J.H. Przytycki 和 P. Traczyk。Conway 型链环不变量。Kobe J. Math. 4 (1987), 115-139。[RT90] N. Yu. Reshetikhin 和 V. G. Turaev。由量子群导出的带状图及其不变量。Comm. Math. Phys., 127:1–26, 1990。[Sch05] T. Schedler。一种与箭图典范关联的项链李代数的 Hopf 代数量子化。International Mathematics Research Notices (2005)。2005(12):725– 760。[Sel09] P. Selinger。幺半范畴图形语言综述。载于《物理学的新结构》，第289–355页。Springer, 2010。[Tur88] V.G. Turaev。实心环面的 Conway 模与 Kauffman 模。J Math Sci 52, 2799–2805 (1990)。[Tur91] V. G. Turaev。曲面上环路 Poisson 代数的纽结量子化。Ann. Sci. École Norm. Sup., 4 : 24 (1991) pp. 635–704[Tur94] V.G. Turaev。《纽结与三维流形的量子不变量》，Studies in 第18卷。

数学。 De Gruyter，1994。

[Wal06] K. Walker。《拓扑量子场论》。 http://canyon23.net/math/tc.pdf。