实闭域上半单代数群的广义仿射建筑

RAPHAEL APPENZELLER

Abstract. 我们运用实代数几何构造与半单代数群的 $\mathbb{F}$-点相关联的仿射 Λ 建筑$\mathcal{B}$，其中 $\mathbb{F}$ 是赋值实闭域。我们刻画无穷远处的球面建筑以及基点处的局部建筑。我们计算 $\mathcal{B}$ 的若干子集的稳定子，并得到群分解。

arXiv:2601.03226v1 [math.GR] 6 Jan 2026

1. Introduction

建筑由 Jacques Tits 引入，作为代数群的黎曼对称空间的类比。在其开创性工作 [BT72, BT84a], 中，Bruhat 和 Tits 将（不一定是离散的）仿射建筑与实值赋值域上的约化群相关联。此后，人们又从格、半范数 [BT84b, BT87, Par00] 以及渐近锥 [KL97]的角度找到了其他仿射建筑构造。在这项工作中，我们从实代数的视角研究对称空间，遵循[Bru88b, KT02]中的思路，构造与实闭赋值域上的代数群相关联的非离散仿射建筑。实际上，我们采用更一般的仿射Λ建筑框架；这类建筑由 [Ben94] 引入，以允许赋值取值于任意有序阿贝尔群 Λ。最近， [HIL23]也将 Bruhat-Tits 构造推广到了这一框架中。

非紧型黎曼对称空间由其对称群决定，而这些对称群是李群，它们（本质上）是半单代数群 $G < \mathrm{SL}_n$ 的 $\mathbb{R}$点 $G_{\mathbb{R}}$。在本文中，我们将实数$\mathbb{R}$ 替换为带有取值于某个有序阿贝尔群 Λ的赋值的实闭域 $\mathbb{F}$ 。类比于从 $G_{\mathbb{R}}$构造对称空间的方式，我们利用 $G_{\mathbb{F}}$ 定义一个 Λ-度量空间 $\mathcal{B}$，群 $G_{\mathbb{F}}$ 在其上以等距变换的方式作用。在一个技术性假设下，我们证明 $\mathcal{B}$ 具有仿射 Λ-建筑的结构。

定理 5.1. 若李群 $G_{\mathbb{R}}$ 的根系 Σ 是约化的（$\alpha \in \Sigma$蕴含 $2\alpha \notin \Sigma$），则 $\mathcal{B}$ 是一个类型为 $\mathbb{A} = \mathbb{A}(\Sigma^\vee, \Lambda, \Lambda^{\mathrm{rk}(G)})$ 的仿射 Λ-建筑。

在第6节中，我们研究无穷远建筑 $\partial_\infty\mathcal{B}$ 以及基点 $o \in \mathcal{B}$处的局部建筑$\Delta_o\mathcal{B}$，这些概念由 [Ben94] 和 [Sch09] 引入。

定理 6.4。群 $G_{\mathbb{F}}$ 在 $\partial_\infty\mathcal{B}$上强传递地作用，因此 $\partial_\infty\mathcal{B}$可以视为与 $G_{\mathbb{F}}$相关的球面建筑。

日期：2026年1月7日。2020年数学主题分类：51E24，20G25，14P10，12J25。关键词和短语：仿射建筑、对称空间、代数群、实代数几何、实闭域、赋值。地址：德国海德堡大学数学系。电子邮箱：rappenzeller@mathi.uni-heidelberg.de。

定理 6.1。设 k 是赋值域 $\mathbb{F}$ 的剩余域， G_k 是 $G_{\mathbb{F}}$的 k-扩张。群 G_k 在 $\Delta_o\mathcal{B}$上强传递地作用，因此 $\Delta_o\mathcal{B}$可以视为与 G_k相关的球面建筑。

实闭域 $\mathbb{F}$ 是与实数具有相同一阶逻辑理论的有序域。在 [App25], 中，作者运用模型论中的迁移原理，在 $G_{\mathbb{F}}$的框架下重新证明了李群的许多结果；其中包括群分解、子群结构和 Kostant 凸性。本文可将[App25] 视为前置读物，因为本文用到了其中的所有结果。

1.1. $\mathcal{B}$的构造。由于 $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ 在

$$P_{\mathbb{R}} \coloneqq \left\{x \in \mathbb{R}^{n\times n} \colon x = x^{\mathsf{T}},\, \det(x) = 1,\, x \text{ is positive definite } \right\}$$

上具有传递作用（根据 $g.x \coloneqq gxg^{\mathsf{T}}$），且恒等元 $\mathrm{Id} \in P_{\mathbb{R}}$ 的稳定子为 $\mathrm{SO}(n)$, 因此 $P_{\mathbb{R}}$ 是 $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})/\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ 对称空间的一个半代数模型（由多项式的等式和不等式定义）。每个非紧型对称空间都可以实现为 $P_{\mathbb{R}}$的一个全测地子流形。事实上，对于每个非紧型对称空间 M，都存在一个半单自伴（$\forall g \in G_{\mathbb{R}}, g^{\mathsf{T}} \in G_{\mathbb{R}}$）代数子群 $G_{\mathbb{R}} < \mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$, 使得轨道$\mathcal{X}_{\mathbb{R}} \coloneqq G_{\mathbb{R}}.\mathrm{Id} \subseteq P_{\mathbb{R}}$ 是 M [的半代数模型（参见 Ebe96，定理 2.6）。5]对称空间 $\mathcal{X}_{\mathbb{R}}$ 配备了一个 $G_{\mathbb{R}}$-不变的黎曼距离：极大平坦与一个欧几里得向量空间等距；并且任意两点都包含在某个极大平坦中，因此距离等于向量空间中对应两点之差的范数。

建筑 $\mathcal{B}$ 的构造与上述描述非常相似，主要区别在于我们现在是在赋值实闭域 $\mathbb{F}$ 上进行讨论，定义见第 3 节和第 4 节。在实代数几何中，半代数集是在一般实闭域上考虑的。我们将 $\mathbb{F}$ 对称空间 $\mathcal{X}_{\mathbb{F}}$ 的 $\mathcal{X}_{\mathbb{R}}$ 扩张称为非标准对称空间。 $\mathbb{F}$ 的 $G_{\mathbb{F}}$ 扩张 $G_{\mathbb{R}}$ 在 $\mathcal{X}_{\mathbb{F}}$ 上传递作用，其稳定子为

$$K_{\mathbb{F}} \coloneqq G_{\mathbb{F}} \cap \mathrm{SO}(n,\mathbb{F}) = \mathrm{Stab}_{G_{\mathbb{F}}}(\mathrm{Id}).$$

令 $A_{\mathbb{F}} < G_{\mathbb{F}}$ 为包含单位元 [的 $G_{\mathbb{F}}$ 的极大自伴 $\mathbb{F}$-分裂环面之半代数连通分支的 $\mathbb{F}$ 扩张，见 App25，定理 4.17]。对于任意两个点 x、$y \in \mathcal{X}_{\mathbb{F}}$，取 $g \in G_{\mathbb{F}}$ 使得 $y = g.x$。于是可利用 Cartan 分解 $G_{\mathbb{F}} = K_{\mathbb{F}}A_{\mathbb{F}}K_{\mathbb{F}}$ [（见 App25，定理 5.9] ）得到 $a \in A_{\mathbb{F}}$，使得对某些 k、$k' \in K_{\mathbb{F}}$，有 $g = kak'$。事实上， a 可以取在非标准基本 Weyl 锥中

$$A_{\mathbb{F}}^{+} \coloneqq \{a \in A_{\mathbb{F}} \colon \chi_\alpha(a) \geq 1 \text{ for all } \alpha \in \Sigma_{>0}\},$$

其中， χ_α 是与 $G_{\mathbb{R}}$的根系 Σ 相关联的代数特征。我们证明这定义了一个映射。

引理 4.2. Cartan 投影 $\delta_{\mathbb{F}}\colon \mathcal{X}_{\mathbb{F}} \times \mathcal{X}_{\mathbb{F}} \to A_{\mathbb{F}}^{+}, (x,y) \mapsto a$ 定义良好，且在 $G_{\mathbb{F}}$的作用下保持不变。

接下来，我们定义半代数乘法范数

$$N_{\mathbb{F}} \colon A_{\mathbb{F}} \to \mathbb{F}_{\geq 1},\ a \mapsto \prod_{\alpha\in\Sigma} \max\left\{\chi_\alpha(a), \chi_\alpha(a)^{-1}\right\}.$$

在实数上， $d := \log \circ N_{\mathbb{R}} \circ \delta_{\mathbb{R}}$ 在 $\mathcal{X}_{\mathbb{R}}$上定义了一个芬斯勒度量。然而，对数可能无法在 $\mathbb{F}$上定义，因为它不是半代数函数，但我们可以用与序相容的赋值 v: $\mathbb{F}_{\neq 0} \to \Lambda$替代 log，其中 Λ 是一个有序阿贝尔群，从而得到一个对称的非负函数

$$d\colon \mathcal{X}_{\mathbb{F}} \times \mathcal{X}_{\mathbb{F}} \to \Lambda,\ (x,y) \mapsto (-v)\left(N_{\mathbb{F}}\left(\delta_{\mathbb{F}}(x,y)\right)\right).$$

函数 d 并不完全是一个 Λ-度量，因为存在一些点 $x \neq y \in \mathcal{X}_{\mathbb{F}}$ ，使得$d(x,y) = 0$, 但我们有以下结论。

定理 4.5。函数 $d\colon \mathcal{X}_{\mathbb{F}} \times \mathcal{X}_{\mathbb{F}} \to \Lambda$ 是一个伪距离。

定理 4.5 的证明依赖于岩泽回缩，其性质由 Kostant 凸性推出，参见 [App25, 定理 5.7 和 5.29]。

定理 4.4。岩泽回缩 $\rho\colon \mathcal{X}_{\mathbb{F}} \to A_{\mathbb{F}}$. Id 是到 $A_{\mathbb{F}}$.Id 的一个 d-缩减回缩。

我们研究的主要对象定义为商 $\mathcal{B} := \mathcal{X}_{\mathbb{F}}/\sim$，其中当且仅当 $d(x,y) = 0 \in \Lambda$ 时， $x \sim y$ 。由定理 4.5， $\mathcal{B}$ 是一个 Λ- 度量空间。我们注意到， $G_{\mathbb{F}}$ 在 $\mathcal{B}$上通过等距变换传递地作用。令 $o := [\mathrm{Id}] \in \mathcal{B}$。在第 4.4 节中，我们验证 $\mathbb{A} := A_{\mathbb{F}}.o \subseteq \mathcal{B}$ 是仿射建筑意义下的一个公寓。包含关系 $f_0\colon \mathbb{A} \to \mathcal{B}$ 可用于定义一个图册$\mathscr{F} := \{g.f_0\colon \mathbb{A} \to \mathcal{B}\colon\ g \in G_{\mathbb{F}}\}$。主要结果定理 5.1 表明，当$\Sigma$ 约化时， Λ-度量空间 $\mathcal{B}$ 连同图册 $\mathscr{F}$ 构成一个仿射 Λ-建筑。

$\mathcal{B}$ 的定义相较于布吕阿-蒂茨 [BT72] 中建筑的定义，需要的关于代数群结构的结果相对较少。然而，我们关于 $\mathcal{B}$ 是一个仿射 Λ-建筑的主要结果的证明，确实依赖于对 $G_{\mathbb{F}}$ 及其在 $\mathcal{B}$上的 $G_{\mathbb{F}}$ 的深入理解。关于 $G_{\mathbb{F}}$ 和 $\mathcal{X}_{\mathbb{F}}$ 的大多数结果，都可以利用实代数几何中的迁移原理，由李群的已知结果推导出来。然而，由于赋值v 不是半代数的，关于 $\mathcal{B}$ 的陈述通常必须通过更直接的方式加以证明。我们重点介绍其中一些具有独立意义的结果。

1.2. $G_{\mathbb{F}}$ 在 $\mathcal{B}$上的作用。定理 5.1 的证明中的一个核心主题，是研究公寓 $\mathbb{A} \subseteq \mathcal{B}$ 的子集的逐点稳定子。回想一下，在 [App25 的第 5] 节中，根系 Σ 上的一个序使我们能够将 $U_{\mathbb{F}}$ 定义为与正根对应的根空间之和的指数。设 $N_{\mathbb{F}}$ 和 $M_{\mathbb{F}}$ 为半代数群$N_{\mathbb{R}}$ 的 $\mathbb{F}$-扩张：$= \mathrm{Nor}_{K_{\mathbb{R}}}(A_{\mathbb{R}})$ 和 $M_{\mathbb{R}} := \mathrm{Cen}_{K_{\mathbb{R}}}(A_{\mathbb{R}})$。令 $O := \{a \in \mathbb{F}\colon (-v)(a) \leq 0\}$ 为与赋值 v 相关联的赋值环，并令 $E_{\mathbb{F}}(O) := E_{\mathbb{F}} \cap \mathrm{SL}(n, O)$，其中 $E_{\mathbb{F}} \subseteq G_{\mathbb{F}}$ 为任意半代数子集。

当 $\mathbb{F}$ 是 Robinson 域时， $o \in \mathcal{B}$ 的稳定子由 [Tho02] 计算得出。对于一般的域， [KT02] 曾提出这一结果，随后 [BIPP25] 独立证明了它。

定理 4.19。 $o \in \mathcal{B}$ 在 $G_{\mathbb{F}}$ 中的基点的稳定子为 $G_{\mathbb{F}}(O)$。

作为岩泽收缩定理 4.4 的推论，我们给出了 o 的稳定子的岩泽分解。

推论 4.20. 存在一个岩泽分解 $G_{\mathbb{F}}(O) = U_{\mathbb{F}}(O)A_{\mathbb{F}}(O)K_{\mathbb{F}}$，这意味着对于每个 $g \in G_{\mathbb{F}}(O)$，都存在唯一的 $u \in U_{\mathbb{F}}(O)$、$a \in A_{\mathbb{F}}(O)$ 和$k \in K_{\mathbb{F}} = K_{\mathbb{F}}(O)$，使得 $g = uak$。

在第 5 节中，我们在半代数情形下实现了 [BT72] 中的一些想法。对于 $\alpha \in \Sigma$，根群为 $(U_\alpha)_{\mathbb{F}} \coloneqq \exp((\mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha})_{\mathbb{F}})$，我们在第 5.2 小节中引入了显式的根群赋值 φ_α: $(U_\alpha)_{\mathbb{F}} \to \Lambda \cup \{-\infty\}$。进一步考察幂零群后，我们注意到，如果 $u \in U_{\mathbb{F}}$ 将公寓中的某个点映到公寓中的另一个点，那么这两个点必定相同。

命题 5.7. 对所有 $u \in U_{\mathbb{F}}$ 和 $a \in A_{\mathbb{F}}$，$ua.o \in \mathbb{A} \iff ua.o = a.o.$

事实上，$(U_\alpha)_{\mathbb{F}}$ 中元素的不动点集是一个半公寓。

命题 5.8. 设 $\alpha \in \Sigma$。对于 $u \in (U_\alpha)_{\mathbb{F}}$，我们有

$$\{p \in \mathbb{A} \colon u.p \in \mathbb{A}\} = \{a.o \in \mathbb{A} \colon \varphi_\alpha(u) \leq (-v)(\chi_\alpha(a))\}$$

因此，当 $u \neq \mathrm{Id}$ 时，该集合是一个半公寓。

对于 $U_{\mathbb{F}}$，这可以推广为半公寓的有限交。

命题 5.10. 对于 $u \in U_{\mathbb{F}}$，存在 $k_\alpha \in \Lambda \cup \{-\infty\}$，使得对于 $\alpha \in \Sigma_{>0}$，

$$\{p \in \mathbb{A} \colon u.p \in \mathbb{A}\} = \{a.o \in \mathbb{A} \colon k_\alpha \leq (-v)(\chi_\alpha(a)) \ \textit{for all}\ \alpha \in \Sigma_{>0}\}$$

因此，不动点集合是半公寓的有限交。若 u 固定 $\mathbb{A}$中的所有点，则 $u = \mathrm{Id}$。

我们接下来描述整个公寓 $\mathbb{A}$、半公寓的逐点稳定子

$$H_\alpha^+ \coloneqq \{a.o \in \mathbb{A} \colon (-v)(\chi_\alpha(a)) \geq 0\}$$

以及基本魏尔室的逐点稳定子

$$C_0 \coloneqq \bigcap_{\alpha > 0} H_\alpha^+.$$

定理 5.19. $\mathbb{A}$ 在 $G_{\mathbb{F}}$ 中的逐点稳定子是 $A_{\mathbb{F}}(O)M_{\mathbb{F}}$。

定理 5.20. 设 $\alpha \in \Sigma$。H_α^+的逐点稳定子是$(U_\alpha)_{\mathbb{F}}(O)A_{\mathbb{F}}(O)M_{\mathbb{F}}$。

定理 5.17. C_0 在 $G_{\mathbb{F}}$ 中的逐点稳定子是 $U_{\mathbb{F}}(O)A_{\mathbb{F}}(O)M_{\mathbb{F}}$.

在小节 5.6 中，我们更仔细地考察 App25 第 5.9] 节中引入的秩一子群 $(L_{\pm\alpha})_{\mathbb{F}} < G_{\mathbb{F}}$ [。现在我们将范围限制在具有约化根系的群 $G_{\mathbb{F}}$ 上，以便利用雅各布森-莫罗佐夫引理找到元素 $m(u) \in N_{\mathbb{F}}$，使其表示沿某个仿射超平面M_α 的反射$\ell = \{a.o \in \mathbb{A} \colon (-v)(\chi_\alpha(a)) = \ell\}$，其中 $\alpha \in \Sigma$ 和 $\ell \in \Lambda$。对秩一子群 $L = \langle (U_\alpha)_{\mathbb{F}}、(U_{-\alpha})_{\mathbb{F}} \rangle < (L_{\pm\alpha})_{\mathbb{F}}$ 的仔细分析，得出了其稳定子的以下分解。

命题 5.39。假设 Σ 是约化的。设 $\alpha \in \Sigma$, $\Omega \subseteq \mathbb{A}$ 是一个非空有限子集。逐点稳定子

$$\begin{aligned} L_\Omega &\coloneqq L \cap \mathrm{Stab}_{G_\mathbb{F}}(\Omega), \\ U_{\alpha,\Omega} &\coloneqq (U_\alpha)_\mathbb{F} \cap \mathrm{Stab}_{G_\mathbb{F}}(\Omega), \\ U_{-\alpha,\Omega} &\coloneqq (U_{-\alpha})_\mathbb{F} \cap \mathrm{Stab}_{G_\mathbb{F}}(\Omega), \\ N_\Omega &\coloneqq \mathrm{Nor}_{G_\mathbb{F}}(A_\mathbb{F}) \cap \mathrm{Stab}_{G_\mathbb{F}}(\Omega) \end{aligned}$$

满足 $L_\Omega = \langle U_{\alpha,\ \Omega}, U_{-\alpha,\ \Omega}, (N_\Omega \cap L)\rangle = U_{\alpha,\ \Omega} U_{-\alpha,\ \Omega} (N_\Omega \cap L)$。

在第 5.7 小节中，我们将秩一结果推广到 $G_\mathbb{F}$。对于 $\Omega \subseteq \mathbb{A}$，令

$$\begin{aligned} \hat{P}_\Omega &\coloneqq \langle N_\Omega, U_{\alpha,\Omega} \colon \alpha \in \Sigma \rangle, \\ U_\Omega^+ &\coloneqq \langle U_{\alpha,\Omega} \colon \alpha \in \Sigma_{>0} \rangle, \\ U_\Omega^- &\coloneqq \langle U_{\alpha,\Omega} \colon \alpha \in \Sigma_{<0} \rangle. \end{aligned}$$

定理 5.49。假设 Σ 是约化的。任意子集的逐点稳定子$\Omega \subseteq \mathbb{A}$满足 稳定子$_{G_\mathbb{F}}(\Omega) = \hat{P}_\Omega = U^+{}_\Omega\, U^-{}_\Omega\, N_\Omega$.

定理 5.49 的证明与仿射建筑公理 (A2) 的证明紧密交织在一起。它首先依赖于以下针对 $G_\mathbb{F}$ 的混合岩泽分解。

定理 5.42。假设 Σ 是约化的。则 $G_\mathbb{F} = U_\mathbb{F} \cdot$ 正规化子$_{G_\mathbb{F}}(A_\mathbb{F}) \cdot G_\mathbb{F}(O)$。

借助混合岩泽分解，我们在有限子集 $\Omega \subseteq \mathbb{A}$的情形下得到了定理 5.49。关于有限子集的这一论述已足以证明公理 (A2) 的第二部分。完整的定理 5.49 随即由公理 (A2) 的这一部分推出，而公理 (A2) 的其余部分则由完整的定理 5.49 推出。我们还得到了 $\mathbb{A}$ 的稳定子（不一定是逐点稳定子）的描述。

命题 5.52。 $\mathbb{A}$ 的稳定子为正规化子$_{G_\mathbb{F}}(A_\mathbb{F}) = A_\mathbb{F} M_\mathbb{F}$。

1.3. 相关工作。对称空间与建筑之间存在多种联系。Mostow 将无穷远建筑与非紧型对称空间联系起来，以证明高秩李群中格的刚性结果[Mos73]。Kleiner 和 Leeb 证明了非紧型对称空间的渐近锥是一个非离散的仿射 $\mathbb{R}$-建筑，并利用这一结果证明了非紧型对称空间中拟等距的刚性 [KL97]。当域 $\mathbb{F}$ 是 Robinson 域 [BIPP25, 定理 1.11]时，渐近锥是建筑 $\mathcal{B}$ 的一个特殊情形。为了给出拟等距刚性的一种更简单证明，Kramer 和 Tent [KT02] 提出了 $\mathcal{B}$ 的构造，而本工作将对该构造进行详细阐述。

一个较新的、有前景的方向是研究曲面上的几何结构，更一般地说，是研究特征簇； $\mathcal{B}$ 在其中发挥着重要作用。综述参见 [Wie18]。特征簇是离散群到李群的表示（等价类）所构成的空间。可以借助各种紧化来研究它们的性质。Thurston [Thu88] 构造了一个紧化，将曲面基本群到双曲平面等距变换群的离散且忠实表示空间

纳入其中，其中曲面的亏格至少为二。Thurston 用对某些 $\mathbb{R}$-树的作用来描述边界点，并运用不动点定理对映射类群中的元素进行分类。在高秩情形下，人们也发展了类似的紧化，例如标记长度紧化 [Bon88, Par12]。实谱紧化 [Bru88a, BIPP21, BIPP25] 是一种更精细的紧化，具有一些良好性质，例如能够保留连通分支。与 Thurston 的描述类似， [Bru88a, Bru88b] 和 [BIPP25, 定理 1.1] 表明，边界点对应于对 $\mathcal{B}$的一个作用；在秩一情形下，Λ 是一个树，更一般地说则是一个建筑，正如我们在定理 5.1 中所证明的。关于边界点的其他解释，参见 [Jae25]。实谱紧化所采用的实代数方法与 $\mathcal{B}$的构造密切契合。这种方法也已证明有助于研究 Hitchin 分支和射影结构 [Fla22, FP25]。统一研究几何结构的一种方法是考察 Θ-正表示：如今已知，所有 Θ-正分支都由离散且忠实的表示构成 [BGL$^+$24]。我们想指出，定理 5.1 中关于根系的技术条件在 Θ-正表示的情形下总是满足的[GW25]。关于 $\mathcal{B}$ 全局与局部结构的定理 6.1 和 6.4，是理解几何结构退化的有前景的工具。当 $\Lambda < \mathbb{R}$ 已知 $\mathcal{B}$ 包含在某个仿射 $\mathbb{R}$-建筑中 [SS12]，而后者又包含在一个完备仿射 $\mathbb{R}$-建筑中 [Str11，引理 4.4]，（它是一个 CAT(0) 空间），则 $\mathcal{B}$ 的完备化 $\overline{\mathcal{B}}$ （视为某个完备 CAT(0) 空间的凸子集）也是一个 CAT(0) 空间，因此可以应用不动点定理。

从仿射 Λ建筑理论的角度来看， $\mathcal{B}$ 的构造也很有意思。起初，唯一已知的带有 $\Lambda \neq \mathbb{R}$ 的仿射 Λ建筑实例，是 Bennet 在论文 [Ben94],中提出的 A_n 类型实例；他在文中引入了这一概念。在关于函子性的论文 [SS12], 中，Schwer 和 Struyve 展示了如何从已有建筑构造新的 Λ建筑。最近，H´ebert、Izquierdo 和 Loisel [HIL23] 将 Bruhat-Tits 构造推广到了 $\Lambda \neq \mathbb{R}$。他们的构造适用于分裂群，或定义在 Hensel 域上的准分裂群。我们所考虑的实闭域并不总是 Hensel 域，而我们所考虑的群必须是半单群，但不一定是准分裂群，因此我们的构造 $\mathcal{B}$ 给出了新的仿射 Λ建筑实例。Bruhat-Tits 建筑 [BT72, BT84a] 以及[HIL23] 中的推广，其定义都需要对代数群有相当深入的了解；而 $\mathcal{B}$ 的定义则相对初等：它是一个非标准对称空间的商。然而，为了证明 $\mathcal{B}$ 是仿射 Λ建筑，我们大量依赖于 [App25]所发展起来的实闭域上代数群理论。据我们所知，所有非离散仿射建筑的实例都来自代数群。若能仿照离散情形，给出奇异非离散仿射建筑的实例，将会很有意思。离散仿射建筑已被完全分类 [Wei09], ；非离散情形下类似的分类仍是一个开放问题，不过关于 $\mathbb{R}$建筑的部分结果可见 [Tit86]。

1.4. 致谢。本文（除新增的第6节外）是作者博士论文 [App24], 的第二个主要部分，不过第 4.4 节经过了大幅改写。论文的第一部分见 [App25]，该部分在本文撰写时正处于出版审稿阶段。

作者谨向 Marc Burger 致以谢意，感谢他一直以来的支持；并感谢 Petra Schwer 和 Auguste H´ebert 的有益讨论，尤其感谢他们坚持仔细阅读 [BT72] 。作者也感谢 Linus Kramer、Gabriel Pallier、Luca de Rosa、Xenia Flamm、Victor Jaeck 和 Segev Gonen Cohen 提供的宝贵意见。作者非常感谢一位匿名审稿人提出的细致而周到的意见。

Contents

1. 引言 1 1.1. $\mathcal{B}$ 2的构造 1.2. $G_{\mathbb{F}}$ 在 $\mathcal{B}$ 3上的作用 1.3. 相关工作 5 1.4. 致谢 6 2. 仿射 Λ-建筑 8 2.1. Λ-度量空间 8 2.2. 根系 8 2.3. 公寓 10 2.4. 仿射 Λ-建筑 12 3. 赋值实闭域 14 3.1. 赋值 14 3.2. 剩余域 15 3.3. 示例 15 4. 建筑 $\mathcal{B}$ 16的定义 4.1. 非标准对称空间 16 4.2. 伪距离 17 4.3. 建筑 20 4.4. 模型公寓 20 4.5. $A_{\mathbb{F}}$ 26的赋值性质 4.6. 点的稳定子 28 5. 验证 $\mathcal{B}$ 29 的公理 5.1. 公理 (A1)、(A3) 和 (TI) 29 5.2. $U_{\mathbb{F}}$ 30 的赋值性质 5.3. $U_{\mathbb{F}}$ 33的W_a-凸性 5.4. 公寓、半公寓和魏尔室的稳定子 35 5.5. 根群的布鲁哈-蒂茨理论 40 5.6. 秩 1 中的布鲁哈-蒂茨理论 41 5.7. 高秩中的布鲁哈-蒂茨理论 49 5.8. 公理 (A2) 54 5.9. 公理（A4）57 5.10. 公理（EC）60 5.11. 超越约化根系 62 6. 剩余建筑与无穷远建筑 63 6.1. 剩余建筑 64 6.2. 无穷远建筑 66 7. 附录：SL($n, \mathbb{F}$)的建筑 67 参考文献 73

2. Affine Λ-buildings

2.1. Λ-度量空间。带有全序的阿贝尔群（$\Lambda, +$），若满足x、 $y \geq 0$ 蕴含 $x + y \geq 0$ 对所有 x、 $y \in \Lambda$ 成立，则称为有序阿贝尔群。如果有序阿贝尔群 Λ 同构（作为有序群）于（$\mathbb{R}, +$）的一个子群，则称其为阿基米德的。Hahn嵌入定理对所有有序阿贝尔群进行了分类。

定理 2.1（[Hah07]）。对于每个有序阿贝尔群（$\Lambda, +$），都存在一个有序集 Ω，使得 $\Lambda < \mathbb{R}^\Omega$ 是其有序子群，其中

$$\mathbb{R}^\Omega = \{f \colon \Omega \to \mathbb{R} \colon \operatorname{supp}(f) \textit{ is contained in a well-ordered set }\}$$

赋予字典序。

设（$\Lambda, +$）是一个非平凡的有序阿贝尔群。特别地， Λ 没有挠元。我们将使用度量空间的以下推广。若 X 是一个集合，且 $d\colon X \times X \to \Lambda$ 是一个函数，则称（X, d）为一个 Λ-伪度量空间，如果对所有 $x, y, z \in X$

(1) $d(x, x) = 0$, $d(x, y) \geq 0$
(2) $d(x, y) = d(y, x)$
(3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

此外，若 d（x, y） $= 0$ 蕴含 $x = y$，则称（X, d）为一个 Λ-度量空间。这些公理直接推广了 $\Lambda = \mathbb{R}$ 时（伪）度量空间的概念。任何 Λ-伪度量空间都可以通过对距离为 0 的等价关系取商，转化为一个 Λ-度量空间。

重要的 Λ-度量空间实例包括 Λ-树 [Chi01], ，它们是仿射 Λ-建筑的秩一实例。

2.2. 根系。关于根系的详细论述见[Bou08]。设 V 为一个有限维欧几里得向量空间，其标量积为 $\langle \cdot, \cdot \rangle$。对于 $\alpha \in V$，沿超平面的反射

$$M_\alpha = \{\beta \in V \colon \langle \alpha, \beta \rangle = 0\}$$

定义为

$$r_\alpha(\beta) = \beta - 2\frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}\alpha.$$

若一对 (Φ, V) 满足 $\Phi \subseteq V$，则称其为根系

(R1) Φ 是有限的、对称的（$\Phi = -\Phi$），张成 V 且不包含 0。

(R2) 对每个 $\alpha \in \Phi$，反射 $r_\alpha\colon V \to V$ 保持 Φ。

当可以根据上下文确定 V 时，根系也可以仅记作 Φ。如果根系满足整性条件，则称为晶体根系

(R3) If $\alpha, \beta \in \Phi$, then $2\langle \alpha, \beta \rangle / \langle \alpha, \alpha \rangle \in \mathbb{Z}$.

对于晶体根系，$\operatorname{Span}_{\mathbb{Z}}(\Phi)$ 是 V 中的一个格。若根系满足以下条件，则称其为约化根系

（R4）对于每个 $\alpha \in \Phi$、 $\mathbb{R} \cdot \alpha \cap \Phi = \{\pm\alpha\}$。

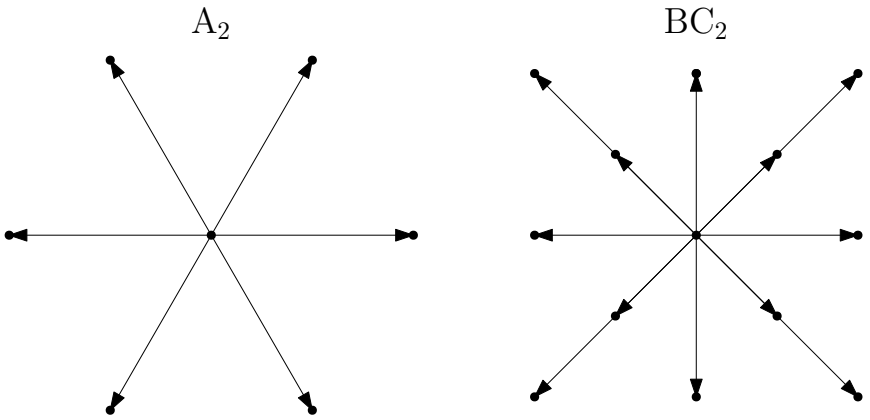

FIGURE 1. 晶体根系的两个例子。左侧为 A_2 型，右侧为 BC_2 型。A_2 型是约化的，而 BC_2型不是。

图 1 给出了两个晶体根系的例子，其中一个是约化的，另一个则不是。根系的球面魏尔群 W_s 是由沿着超平面 M_α 进行反射所生成的 V 的等距变换子群，其中 $\alpha \in \Phi$。如果子集 $\Delta \subseteq \Phi$ 是 Φ 的基，那么它是 V 的向量空间基，并且所有根 $\beta \in \Phi$ 都可以写成 $\beta = \sum_{\delta\in\Delta} \lambda_\delta \delta$，其中 $\lambda_\delta \in \mathbb{Z}$ 对于 $\delta \in \Delta$；同时，所有 λ_δ 具有相同的符号（全为非负或全为非正）。每个根系都有一个基，且球面魏尔群在 Φ 的所有基的集合上传递作用。基 Δ 的基数称为根系 Φ 的秩，并且等于 $\dim(V)$。

$V \setminus \bigcup_{\alpha\in\Phi} M_\alpha$ 的连通分支称为（开）室。球面魏尔群在室集合上简单传递地作用。给定一个基 Δ， Δ的基本魏尔室为

$$C_0(\Delta) = \{v \in V : \langle v, \alpha\rangle > 0 \ \text{ for all } \alpha \in \Delta\}.$$

反之，每个室 C 都确定一个基 $\Delta(C)$，该基由满足以下条件的那些 $\alpha \in \Phi$组成：对所有 $v \in C$，均有 $\langle \alpha、 v\rangle > 0$，且不能写成 Φ中其他此类元素之和，参见 [Bou08, VI§1.5]。基 Δ确定正根集合 $\Phi_{>0} \subseteq \Phi$，该集合由基中元素的正整数线性组合构成。因此，基通过 $\alpha < \beta$（当且仅当 $\beta - \alpha \in \Phi_{>0}$）在 Φ 上确定一个偏序。通过给基排序，并将其按字典序扩展到 $\Phi \subseteq \mathrm{Span}_{\mathbb{Z}}(\Phi)$，可以得到一个具有相同正元素的全序 Φ 。

标量积根据定义性质，定义了欧几里得向量空间 $V \cong V^\star, v \mapsto v^\star$ 之间的同构，即对于 $v, w \in \Phi$，有 $v^\star(w) = \langle v, w\rangle$，其中 $V^\star$配备了标量积 $\langle v^\star, w^\star\rangle := \langle v, w\rangle$。 $\alpha \in \Phi$的余根[1] 为

$$\alpha^\vee := 2\frac{\alpha^\star}{\langle \alpha, \alpha\rangle} \in V^\star.$$

余根系 $(\Phi^\vee, V^\star)$，其中 $\Phi^\vee := \{\alpha^\vee : \alpha \in \Phi\}$ 也是一个根系[Bou08, VI§1.1], 但一般而言， Φ 和 $\Phi^\vee$ 并不同构。当 Φ 是一个

[1]有时， $2\alpha/\langle\alpha, \alpha\rangle \in V$ 被称为余根，而非其对偶。

晶体根系时，存在一个非退化双线性形式

$$b\colon \operatorname{Span}_{\mathbb{Z}}(\Phi) \times \operatorname{Span}_{\mathbb{Z}}(\Phi^\vee) \to \mathbb{Z}$$
$$(\alpha, \beta^\vee) \mapsto 2\frac{\langle \alpha, \beta\rangle}{\langle \beta, \beta\rangle} = \beta^\vee(\alpha)$$

取值于 $\mathbb{Z}$。给定一个基 $\Delta = \{\delta_1, , \ldots, \delta_r\}$，矩阵 $(B_{ij})^{ij} := b(\delta_i, \delta_j^\vee)$ 称为 Cartan 矩阵。注意，我们有以下计算规则，但一般而言 $(\alpha+\beta)^\vee \neq \alpha^\vee + \beta^\vee$。

引理 2.2. 设 Φ 是一个晶体根系，且 $\alpha, \beta \in \Phi$。那么

(i) $r_\beta(\alpha) = \alpha - b(\alpha, \beta^\vee)\cdot\beta = \alpha - \beta^\vee(\alpha)\cdot\beta$,

(ii) $b(\alpha, \alpha^\vee) = 2$,

(iii) $(\alpha^\vee)^\star = (\alpha^\star)^\vee$,

(iv) $(\alpha^\vee)^\vee = \alpha$.

证明。由反射 r_β 的定义可立即得到 (i)，而 (ii) 即是说 Φ 是晶格的。对于所有 $H \in \operatorname{Span}_{\mathbb{Z}}(\Phi^\vee)$，我们有

$$(\alpha^\star)^\vee(H) = 2\frac{(\alpha^\star)^\star(H)}{\langle \alpha^\star, \alpha^\star\rangle} = 2\frac{\langle \alpha^\star, H\rangle}{\langle \alpha, \alpha\rangle} = \langle \alpha^\vee, H\rangle = (\alpha^\vee)^\star(H),$$

因此 (iii) 成立，进而由下式可得 (iv)

$$(\alpha^\vee)^\vee = 2\frac{(\alpha^\vee)^\star}{\langle \alpha^\vee, \alpha^\vee\rangle} = 2\frac{(\alpha^\star)^\vee}{\langle 2\frac{\alpha^\star}{\langle\alpha,\alpha\rangle}, 2\frac{\alpha^\star}{\langle\alpha,\alpha\rangle}\rangle} = 2\frac{2\frac{(\alpha^\star)^\star}{\langle\alpha^\star,\alpha^\star\rangle}}{4\frac{1}{\langle\alpha,\alpha\rangle^2}\langle\alpha,\alpha\rangle} = (\alpha^\star)^\star = \alpha. \qquad \square$$

2.3. 公寓。我们引入模型公寓 $\mathbb{A}$。更详细的介绍可见 [Ben94], ，而非晶格情形的介绍则见 [Sch09]。我们这里的根系源自代数群，因此是晶格的，但可能不是约化的。

设 Λ 是一个非平凡的有序阿贝尔群。设 (Φ, V) 是一个晶体根系，且 $\operatorname{Span}_{\mathbb{Z}}(\Phi) \subseteq V$ 是其相应格。由于 $\operatorname{Span}_{\mathbb{Z}}(\Phi)$ 和 Λ 都是 $\mathbb{Z}$-模，我们可以定义模型公寓

$$\mathbb{A} := \operatorname{Span}_{\mathbb{Z}}(\Phi) \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda.$$

对于一组基 $\Delta = \{\delta_1, \ldots, \delta_r\}$， $\mathbb{Z}$-双线性映射

$$\operatorname{Span}_{\mathbb{Z}}(\Phi) \times \Lambda \to \Lambda^r$$
$$\left(\sum_{i=1}^r z_i\delta_i, \lambda\right) \mapsto (z_1\lambda, \ldots, z_r\lambda)$$

延拓为一个 $\mathbb{Z}$-模同构 $\mathbb{A} \cong \Lambda^r$，从而得到记号

$$\mathbb{A} \cong \left\{\sum_{\delta\in\Delta} \lambda_\delta\delta\colon \lambda_\delta \in \Lambda\right\}.$$

注意，如果 Λ 是一个 $\mathbb{Q}$-向量空间，那么我们还有

$$\mathbb{A} = \operatorname{Span}_{\mathbb{Q}}(\Phi) \otimes_{\mathbb{Q}} \Lambda.$$

W_s 在 Φ 上的作用延拓为在 $\mathbb{A}$上的作用，并固定 $0 \in \mathbb{A}$。公寓$\mathbb{A}$ 本身通过平移作用于 $\mathbb{A}$。令 $T \subseteq \mathbb{A}$ 为平移

群的一个被 W_s正规化的子群，即对所有 $w \in W_s$都有 $wTw^{-1} = T$ 。那么，$W_a = T \rtimes W$ 称为仿射魏尔群，并作用于 $\mathbb{A}$。若 $T = \mathbb{A}$，则 W_a 称为完全仿射魏尔群。我们将模型公寓连同一个仿射魏尔群的数据记作 $\mathbb{A} = \mathbb{A}(\Phi, \Lambda, T)$，因为根系 Φ、有序阿贝尔群 Λ 以及平移子群 T 完全确定了$\mathbb{A}$和仿射魏尔群。

对于任意根 $\alpha \in \Phi$，反射 r_α： $\Phi \to \Phi$ 可扩展为一个反射

$$r_\alpha \colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}$$
$$\sum_{\delta \in \Delta} \lambda_\delta \delta \mapsto \sum_{\delta \in \Delta} \lambda_\delta r_\alpha(\delta)$$

并且对于任意 $w \in W_a$，共轭元 $w \circ r_\alpha \circ w^{-1} \in W_a$ 被称为仿射反射。双线性形式 b 自然扩展为双线性形式

$$b \colon \mathbb{A} \times \mathrm{Span}_{\mathbb{Z}}(\Phi^\vee) \to \Lambda$$
$$\left(\sum_{\delta \in \Delta} \lambda_\delta \delta, \sum_{\varepsilon \in \Delta} \mu_\varepsilon \varepsilon^\vee \right) \mapsto \sum_{\delta \in \Delta} \sum_{\varepsilon \in \Delta} \mu_\varepsilon b(\delta, \varepsilon^\vee) \lambda_\delta$$

但我们注意到， b 无法扩展到整个 $\mathbb{A} \times \mathrm{Span}_{\mathbb{Z}}(\Phi^\vee) \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda$，因为$\Lambda$ 可能没有乘法。对于 $\alpha \in \Phi$ 和 $\lambda \in \Lambda$ ，我们定义仿射墙

$$M_{\alpha,\lambda} \coloneqq \{x \in \mathbb{A} \colon b(x, \alpha^\vee) = \lambda\}$$

以及两个仿射半空间

$$H^+_{\alpha,\lambda} = \{x \in \mathbb{A} \colon b(x, \alpha^\vee) \geq \lambda\}$$
$$H^-_{\alpha,\lambda} = \{x \in \mathbb{A} \colon b(x, \alpha^\vee) \leq \lambda\}$$

由 $M_{\alpha,\lambda}$定义。所有 $\delta \in \Delta$对应的正半空间的交称为基本魏尔室

$$C_0 \coloneqq \{x \in \mathbb{A} \colon b\,(x, \delta^\vee) \geq 0 \text{ for all } \delta \in \Delta\} = \bigcap_{\delta \in \Delta} H^+_{\delta,0}.$$

基本魏尔室在仿射魏尔群作用下的像称为扇区或室。

可以赋予模型公寓 $\mathbb{A}$ 一个 Λ-度量。有多种方法可以做到这一点，我们将介绍其中一种。由于 $\mathbb{A}$ 未必存在取值于 Λ 的标量积，我们改用 W_s-不变的、取值于 Λ 的范数 N： $\mathbb{A} \to \Lambda$ 定义如下：

$$N(x) = \sum_{\alpha \in \Phi_{>0}} |b(x, \alpha^\vee)|\,,$$

其中 $|\lambda| = \max\{\lambda, -\lambda\}$ 是绝对值。于是

$$d(x, y) = N(x - y)$$

使 $\mathbb{A}$ 成为一个 Λ-度量空间。注意，当 $x - y \in C_0$ 时，

$$d(x, y) = b\left(x - y, \sum_{\alpha \in \Phi_{>0}} \alpha^\vee\right).$$

注意， Λ-度量空间 $\mathbb{A}$ 可能并非唯一测地：端点重合的 Λ区间可能存在两个或更多不同的等距嵌入。由于 Λ 只是一个群，使用线性组合定义的经典凸性概念并无意义。

相反，若子集 $B \subseteq \mathbb{A}$ 是 W_a-凸的，即它是有限个仿半空间的交，我们就称之为凸。图 2 展示了$\mathbb{A}$ 可能并非唯一测地，且两点之间所有测地线的并集是一个 W_a-凸集。

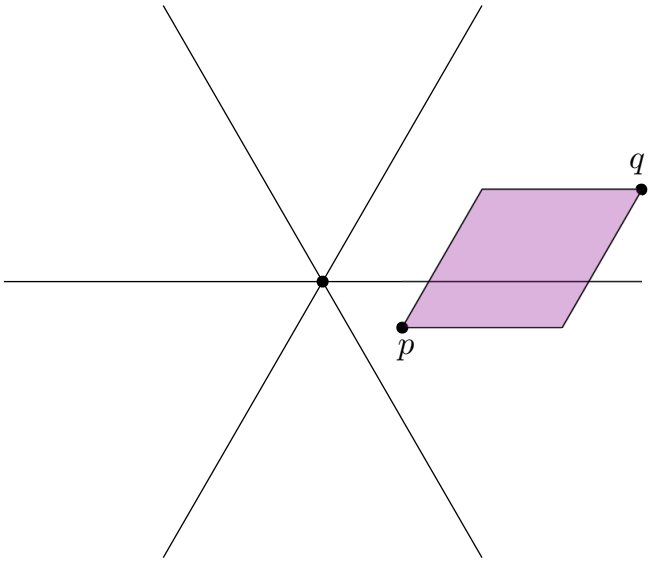

FIGURE 2. 给定两点 $p, q \in \mathbb{A}$，区间$\{r \in \mathbb{A}\colon\ d(p,r) + d(r,q) = d(p,q)\}$ 是一个 W_a-凸集，由本例中四个平行于墙的半平面的交集定义；本例属于 A_2 型。

2.4. 仿射 Λ-建筑。设 $\mathbb{A}$ 是上一节中所述、类型为 $\mathbb{A} = \mathbb{A}(\Phi, \Lambda, T)$ 且仿射魏尔群为 W_a 的一个公寓。设 X 是一个集合，$\mathscr{F}$ 是由单射 $\mathbb{A} \to X$组成的集合。集合 $\mathscr{F}$ 称为图册或公寓系统，其元素称为图表。对于 $f \in \mathscr{F}$，像集 $f(\mathbb{A})$ 称为公寓。墙、半空间和室的像分别称为墙、半公寓和扇区。

如果满足以下六条公理，则称有序对 $(X, \mathscr{F})$ 为广义仿射建筑，或称为类型为 $\mathbb{A} = \mathbb{A}(\Phi, \Lambda, T)$ 的仿射 Λ-建筑。公理 (A4) 和 (A6) 在图 3 和图 4 中有所说明。

(A1) 对所有 $f \in \mathscr{F}, w \in W_a, f \circ w \in \mathscr{F}$。(A2) 对所有 $f, f' \in \mathscr{F}$，集合 $B = f^{-1}(f(\mathbb{A}) \cap f'(\mathbb{A}))$ 是 W_a-凸的，并且存在一个 $w \in W_a$ 使得 $f|_B = f' \circ w|_B$.(A3) 对所有 $x, y \in X$，存在一个 $f \in \mathscr{F}$使得 $x, y \in f(\mathbb{A})$。(A4) 对任意扇区 $s_1, s_2 \subseteq X$，存在子扇区 $s_1' \subseteq s_1, s_2' \subseteq s_2$，使得存在一个 $f \in \mathscr{F}$满足 $s_1', s_2' \subseteq f(\mathbb{A})$。(A5) 对每个 $x \in X$ 以及满足 $x \in f(\mathbb{A})$ 的 $f \in \mathscr{F}$，存在一个缩短距离的收缩映射 $r_{x,f}\colon\ X \to f(\mathbb{A})$，使得 $f^{-1}(\{x\}) = \{x\}$。(A6) 对于 $f_1, f_2, f_3 \in \mathscr{F}$，若 $f_i(\mathbb{A}) \cap f_j(\mathbb{A})$ 是关于 $i \neq j$ 的半公寓，则$f_1(\mathbb{A}) \cap f_2(\mathbb{A}) \cap f_3(\mathbb{A}) \neq \emptyset$。

公理（A5）中的距离是函数 $d\colon\ X \times X \to \Lambda$，它由模型公寓 $\mathbb{A}$ 上的距离诱导而来；其存在性由公理（A1）、（A2）和（A3）保证：对于任意两个点 x、$y \in X$，我们使用公理（A3）找到 $f \in \mathscr{F}$

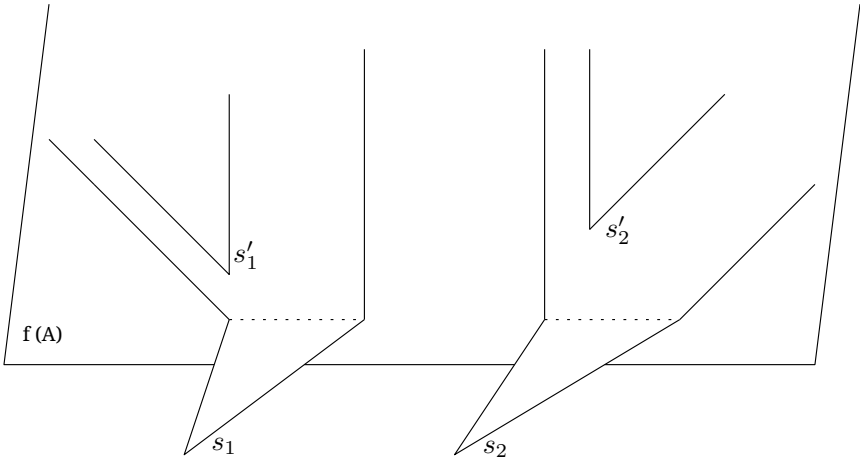

FIGURE 3. 公理（A4）指出，任意两个扇区 s_1, s_2虽然未必位于同一个公共平坦中，但它们包含子扇区 s_1', s_2'，这些子扇区包含于同一个公共平坦 $f(\mathbb{A})$ 中。

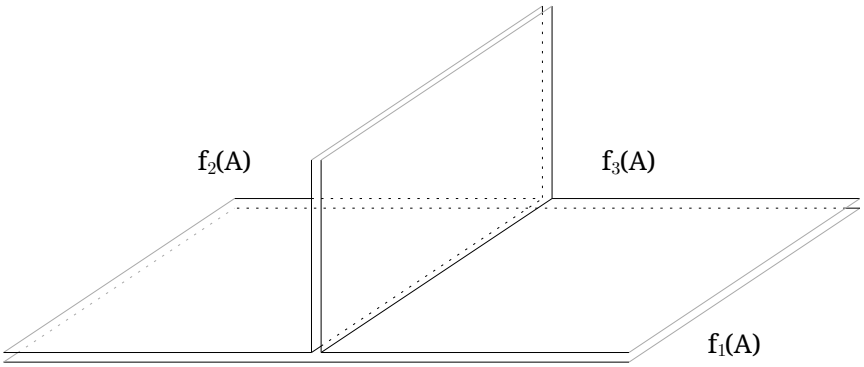

FIGURE 4. 公理（A6）指出，若三个公寓两两相交于一个半公寓，则它们的公共交集中至少有一个点。

使得 x、$y \in f$（$\mathbb{A}$），并定义 d（x、y）$= d$（f^{-1}（x）f^{-1}（y））$\in \Lambda$。根据公理（A1）和（A2），这一定义是良定的。随后，d-递减的收缩映射是一个函数r：$X \to f$（$\mathbb{A}$），满足 r（y）$= y$对所有 $y \in f$（$\mathbb{A}$）以及

$$d(r(x), r(y)) \leq d(x, y)$$

对所有 $x, y \in X$ 均成立。注意，虽然公理（A1）—（A3）可用于定义对称正定函数 d，但公理（A5）可用于证明 d 满足三角不等式。正如 [BSS14], 所示，在其他五条公理成立的情况下，公理（A5）等价于三角不等式。事实上，[BSS14] 中给出了若干组能够刻画仿射Λ-建筑的公理。我们将采用以下刻画。

定理 2.3（定理 3.1, [BSS14]）。设 $(X, \mathscr{F})$ 是一个带有图册的集合，使得公理（A1）、（A2）、（A3）和（A4）以及

（TI）由公寓中的距离诱导出的函数 d 满足三角不等式。

以及交换条件

(EC) 对于 f_1、$f_2 \in \mathscr{F}$，若 $f_1(\mathbb{A}) \cap f_2(\mathbb{A})$ 是一个半公寓，则存在$f_3 \in \mathscr{F}$，使得对于 $i \in \{1,2\}$，$f_i(\mathbb{A}) \cap f_3(\mathbb{A})$ 是半公寓。此外，$f_3(\mathbb{A})$ 是 $f_1(\mathbb{A})$ 与 $f_2(\mathbb{A})$ 的对称差，再加上 $f_1(\mathbb{A}) \cap f_2(\mathbb{A})$ 的边界墙。

均得到满足。因此，$(X, \mathscr{F})$ 是一个仿射 Λ-建筑。

3. Valued real closed fields

关于实闭域、赋值域和实代数几何的入门介绍，我们推荐参阅 [BCR98], ，另见 [App25] 第 2 节。实闭域是具有以下性质的有序域:

(a) 每个正元素都有平方根，并且

(b) 每个奇次数多项式都有一个零点。

如果有序域中的每个元素都被某个自然数所界定，就称该有序域为阿基米德有序域。研究实闭域时，一个重要工具是模型论中的以下迁移原理。

定理 3.1（迁移原理，[BCR98]）。设 $\mathbb{F}$ 和 $\mathbb{F}'$ 是实闭域。设 φ 是一个关于有序域的一阶逻辑语句，其参数取自 $\mathbb{F} \cap \mathbb{F}'$。那么，$\varphi$ 对 $\mathbb{F}$ 成立，当且仅当 φ 对 $\mathbb{F}'$ 成立，形式化地说，$\mathbb{F} \models \varphi \iff \mathbb{F}' \models \varphi$。

3.1. 赋值。若有序域 $\mathbb{F}$ 的子环 $O \subseteq \mathbb{F}$ 满足：对于所有 a、$b \in O$、$c \in \mathbb{F}$、$a \leq c \leq b$，$a \leq c \leq b$ 蕴含 $c \in O$，则称其为序凸子环。注意，每个序凸子环都是赋值环：对于所有 $a \in \mathbb{F}$，我们有 $a \in O$ 或 $a^{-1} \in O$。设 $(\Lambda, +)$ 是一个有序阿贝尔群。有序域 $\mathbb{F}$ 上的赋值是一个映射 $v\colon \mathbb{F} \to \Lambda \cup \{\infty\}$，它对所有 a、$b \in \mathbb{F}$ 都满足

(1) $v(a) = \infty$ 当且仅当 $a = 0$。
(2) $v(ab) = v(a) + v(b)$。(3) $v(a + b) \geq \min\{v(a)\ v(b)\}$。

如果只要在$a \geq b \geq 0$时 $\geq (-v)(b)$，我们就称赋值与序相容。我们通常用同一个字母表示 v 和 $v|_{\mathbb{F}_{>0}}$：$\mathbb{F}_{>0} \to \Lambda$。相比于 v，我们通常更关注$(-v)$，因为$(-v)$是保序的（限制在 $\mathbb{F}_{>0}$上时）。序凸赋值环与与序相容的赋值之间存在对应关系。

定理 3.2（[Kru39]）。每个序凸赋值环 $O \subseteq \mathbb{F}$ 都对应一个与序相容的赋值

$$v\colon \mathbb{F} \to \Lambda \cup \{\infty\},$$

其中$\Lambda \cong \mathbb{F}^\times / O^\times$ 的序由 $-v(a) \leq -v(b)$对所有 $0 \leq a \leq b \in \mathbb{F}$给出。另一方面，每个与序相容的赋值都对应一个序凸赋值环

$$O \coloneqq \{a \in \mathbb{F}\colon v(a) \geq 0\}.$$

实闭域总是存在与序相容的赋值环（有时有许多个），但阿基米德实闭域上唯一与序相容的赋值是平凡赋值。实闭域的赋值所对应的有序阿贝尔群 Λ 总是可除的，因而是一个 $\mathbb{Q}$-向量空间。

3.2. 剩余域。如果 O 是一个具有极大理想的赋值环

$$J := \{a \in O \colon v(a) > 0\} = O \setminus O^\times$$

那么 $k := O/J$ 称为剩余域。当 $\mathbb{F}$ 是实闭域时， k [也是实闭域（EP05，定理 4.3.7]）。对于代数群 G 和实闭域 $\mathbb{F}$ ，我们将关联一个仿射 Λ-建筑 $\mathcal{B}$。在第6节中，我们将证明，无穷远建筑是与 $G(\mathbb{F})$ 关联的球面建筑，而剩余建筑是与 $G(k)$ 关联的球面建筑。

3.3. 例子。实数 $\mathbb{R}$ 和实代数数 $\overline{\mathbb{Q}}^{\mathrm{rc}}$ 是阿基米德实闭域。以某个实闭域 $\mathbb{F}$为系数的普赛克级数域

$$\overline{\mathbb{F}(X)}^{\mathrm{rc}} := \left\{ \sum_{k=-\infty}^{k_0} c_k X^{\frac{k}{m}} : \ k_0, m \in \mathbb{Z},\ m > 0,\ c_k \in \mathbb{F},\ c_{k_0} \neq 0 \right\},$$

是一个非阿基米德实闭域，其中 $\mathbb{F}$ 上的通常序由 $X > r$ 扩展，对所有 $r \in \mathbb{F}$ [BCR98]均成立。一个与序相容的赋值 $v\colon \mathbb{F}(X)^{\mathrm{rc}} \to \Lambda \cup \{\infty\} = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ 由次数给出

$$v\left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} c_k X^{k/m} \right) = -\frac{k_0}{m}.$$

与域的代数闭包类似，每个有序域 $\mathbb{K}$ 都有一个实闭包 $\overline{\mathbb{K}}^{\mathrm{rc}}$，它是所有包含 $\mathbb{K}$ 的实闭域的交集。实代数数 $\overline{\mathbb{Q}}^{\mathrm{rc}}$ 是有理数的实闭包，而 Puiseux 级数是有理函数有序域 $\mathbb{F}(X)$ 的实闭包。

稍作推广，我们可以考虑含两个变量的有理函数域 $\mathbb{F}(X, Y)$，其序满足：对于任意 $n \in \mathbb{N}$ 和 $r \in \mathbb{F}$， $X > Y^n > r$ 。多重次数给出一个赋值 $v\colon \mathbb{F}(X, Y) \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$，其序为字典序；实闭包 $\mathbb{F}(X, Y)^{\mathrm{rc}}$ 是一个赋值群为 $\Lambda \cong \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$、序为字典序的实闭域。

$\mathbb{Z}$ 上的非主超滤子是一个函数 $\omega\colon \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \to \{0, 1\}$，它满足

(1) $\omega(\emptyset) = 0, \omega(\mathbb{Z}) = 1$, (2) 若 $A, B \subseteq \mathbb{Z}$ 满足 $A \cap B = \emptyset$，则 $\omega(A \cup B) = \omega(A) + \omega(B)$, (3) 所有有限子集 $A \subseteq \mathbb{Z}$ 都满足 $\omega(A) = 0$。

超滤子可以看作只取 0 和 1 这两个值的有限可加概率测度。非主超滤子的存在等价于选择公理 [Hal66]。给定超滤子 ω，我们将超实数 $\mathbb{R}_\omega$ 定义为无限序列$\mathbb{R}_\omega = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\sim$的等价类，其中 $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \sim y = (y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 当且仅当 $\omega(\{i \in \mathbb{N} \colon x_i \neq y_i\}) = 0$ 或$\omega(\{i \in \mathbb{N} \colon x_i = y_i\}) = 1$。我们逐项定义加法和乘法；通过对所有非零项取逆元来得到乘法逆元，从而使 $\mathbb{F}_\omega$ 成为一个域。考虑常数序列，实数是 $\mathbb{R}_\omega$的子域。关于由 $[(x_i)_{i\in\mathbb{N}}] \leq [(y_i)_{i\in\mathbb{N}}]$ 定义的序，超实数构成一个有序域，当且仅当 $\omega(\{i \in \mathbb{N} \colon x_i \leq y_i\}) = 1$。超实数是实闭的，因为 $\mathbb{R}$ 是实闭的。可以验证，超实数

不能赋予取值于 $\mathbb{R}$的子群的非平凡赋值：超实数的任何赋值群都具有无限秩。超实数是非阿基米德的，因为包含 (1, 2, 3, . . .) 的等价类是一个无限元素，也就是说，它大于任意自然数。

设 $b \in \mathbb{R}_\omega$ 是一个无限元素。那么

$$O_b \coloneqq \{x \in \mathbb{R}_\omega \colon |x| < b^m \text{ for some } m \in \mathbb{Z}\}$$

是 $\mathbb{R}_\omega$ 的一个序凸子环，其极大理想为

$$J_b \coloneqq \{x \in \mathbb{R}_\omega \colon |x| < b^m \text{ for all } m \in \mathbb{Z}\}.$$

与非主超滤子 ω 和无限元素 b 相关联的 Robinson 域是商 $\mathbb{R}_{\omega,\, b} \coloneqq O_b/J_b$ [Rob96]。Robinson 域是一个非阿基米德实闭域。注意，$[b] \in \mathbb{R}_{\omega,\, b}$ 是一个大元素，这意味着对于所有 $a \in \mathbb{R}_{\omega,\, b}$，都存在一个 $n \in \mathbb{N}$，使得 $a < b^n$。

具有大元素的非阿基米德有序域 $\mathbb{F}$ 允许一个与序相容的赋值 v: $\mathbb{F} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$，其定义方式是令 $v(a)$ 为由戴德金分割定义的实数

$$A_a \coloneqq \left\{\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \colon b^p \le a^q, q \in \mathbb{Z}_{>0}, p \in \mathbb{Z}\right\}$$
$$B_a \coloneqq \left\{\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \colon b^p \ge a^q, q \in \mathbb{Z}_{>0}, p \in \mathbb{Z}\right\}$$

对于 $a \in \mathbb{F}$，以及大元素 [Bru88b]。注意，当 $\mathbb{F}$ 是阿基米德的，每个元素 $b > 1$ 都是大元素，并且我们仍可如上定义 $v(a) = -\log_b |a|$，此时它就是以 b 为底的通常对数。然而， v 不是我们所说的赋值，因为它不满足强三角不等式，即定义中的条件 (3)。

4. Definition of the building $\mathcal{B}$

关于实闭域上的代数群的背景知识，参见 [App25]。设 $\mathbb{K}$ 和 $\mathbb{F}$ 是实闭域，且满足 $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{R} \cap \mathbb{F}$。我们通常假设 $\mathbb{F}$ 是非阿基米德的，带有与序相容的赋值 $v\colon\ \mathbb{F} \to \Lambda \cup \{\infty\}$。设 $G < \mathsf{SL}_n$ 是一个半单连通自伴代数 $\mathbb{K}$-群， S 是满足对所有 $s \in S$ 都有 $s = s^\mathsf{T}$ 的极大 $\mathbb{K}$-分裂环面。设 $A_\mathbb{F}$ 是包含单位元的 $S_\mathbb{K}$ 的半代数连通分支的半代数扩张，并令 $K \coloneqq G \cap \mathsf{SO}_n$。

对于 $\mathfrak{a} = \mathsf{Lie}(A_\mathbb{R})$，设 $\Sigma \subseteq \mathfrak{a}^\star$ 为根系，其元素 $\alpha \in \Sigma$ 对应于 $\mathbb{K}$-根 $\chi_\alpha \in {}_\mathbb{K}\Phi \subseteq S$，参见 [App25] 中的第5.2节。于是 $W_s = {}_\mathbb{K}W$ 是其球面魏尔群。选定基 $\Delta \subseteq \Sigma$ 后，令 U 为与正根空间相关联的幂零群，并且

$$A_\mathbb{F}^+ \coloneqq \{a \in A_\mathbb{F} \colon \chi_\alpha(a) \ge 1 \text{ for all } \alpha \in \Delta\}.$$

4.1. 非标准对称空间。在对称空间理论中，

$$P_\mathbb{R} = \left\{x \in \mathbb{R}^{n\times n} \colon x = x^\mathsf{T}, \det(x) = 1, x \text{ is positive definite}\right\}$$

是与 $\mathsf{SL}(n, \mathbb{R})$ 相关的非紧型对称空间的一个模型。群 $\mathsf{SL}(n, \mathbb{R})$ 在 $P_\mathbb{R}$ 上具有传递作用，具体为

$$g.x = gxg^T.$$

对于 $g \in \mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$， $x \in P_{\mathbb{R}}$。轨道 $\mathcal{X}_{\mathbb{R}} = G_{\mathbb{R}}.$恒等元 $\subseteq P_{\mathbb{R}}$是一个闭子集，也是与 $G_{\mathbb{R}}$相关的对称空间的一个模型。我们注意到， P 是定义在 $\mathbb{Q}$ 上的半代数集，并考虑其 $\mathbb{F}$-扩张 $P_{\mathbb{F}}$。该作用是代数的，因此可以将该轨道半代数地扩张为

$$\mathcal{X}_{\mathbb{F}} = G_{\mathbb{F}}.P_{\mathbb{F}}.$$

当 $\mathbb{F}$ 是非阿基米德时，我们称 $\mathcal{X}_{\mathbb{F}}$ 为与 $G_{\mathbb{F}}$ 相关联的非标准对称空间。

命题 4.1. (a) 群 $G_{\mathbb{F}}$ 在 $\mathcal{X}_{\mathbb{F}}$ 上传递作用。

(b) $\mathrm{Id} \in \mathcal{X}_{\mathbb{F}}$ 的稳定子是 $K_{\mathbb{F}}$。

(c) 对任意一对 x、 $y \in \mathcal{X}_{\mathbb{F}}$，存在一个 $g \in G_{\mathbb{F}}$，使得 $g.x = \mathrm{Id}$ 且 $g.y$ 位于非标准闭魏尔室中

$$A_{\mathbb{F}}^{+}.\,\mathrm{Id} = \{a.\,\mathrm{Id} \in \mathcal{X}_{\mathbb{F}} \colon \chi_\alpha(a) \geq 1 \ \textit{for all}\ \alpha \in \Sigma\}\,.$$

证明。传递性以及 Id 的稳定子可直接由定义得出。利用传递性，得到一个 $h \in G_{\mathbb{F}}$，使得 $h.x = \mathrm{Id}$。再次利用传递性，得到一个 $h' \in G_{\mathbb{F}}$，使得 $h'.h.y = \mathrm{Id}$。现在利用 Cartan 分解 [App25，定理 5.9]，对 $h' = kak' \in G_{\mathbb{F}} = K_{\mathbb{F}}A_{\mathbb{F}}K_{\mathbb{F}}$ 进行分解；经过球面魏尔群 W_s 中某个元素的作用后，我们可以假设 $a^{-1} \in A_{\mathbb{F}}^{+}$。令 $g = k'h$，即可得到所述结论

$$\begin{aligned} g.x &= k'h.x = k'.\,\mathrm{Id} = \mathrm{Id}, \\ g.y &= k'h.y = k'(h')^{-1}.\,\mathrm{Id} = a^{-1}k^{-1}.\,\mathrm{Id} = a^{-1}.\,\mathrm{Id} \in A_{\mathbb{F}}^{+}.\,\mathrm{Id}\,. \end{aligned}$$ □

4.2. 伪距离。对称空间 $\mathcal{X}_{\mathbb{R}}$ 具有一个显式的距离公式。在这里，我们仿照这一过程，在 $\mathcal{X}_{\mathbb{F}}$上定义伪距离。设 $x, y \in \mathcal{X}_{\mathbb{F}}$ 为两个点。我们首先将 x 和 y 映到一个公共平坦上，并在其上定义乘法范数 $N_{\mathbb{F}}$。在实数情形下，随后会取对数以得到加法距离。对于非标准对称空间，我们则改用赋值 v: $\mathbb{F}_{>0} \to \Lambda$。

根据命题 4.1(a)，对于 $x, y \in \mathcal{X}_{\mathbb{F}}$，存在 $g, h \in G_{\mathbb{F}}$，使得 $x = g.\,\mathrm{Id}$， $y = h.\mathrm{Id}$。我们利用 Cartan 分解 [App25, Theorem 5.9] 将 $g^{-1}h$ =写为 $kak' \in G_{\mathbb{F}} = K_{\mathbb{F}}A_{\mathbb{F}}K_{\mathbb{F}}$，其中 a 可选为属于 $A_{\mathbb{F}}^{+}$，且此时是唯一的。这给出了 $\mathcal{X}_{\mathbb{F}}$ 上的一个取值于 Weyl 室的距离，我们称之为 Cartan 投影。

引理 4.2。Cartan 投影

$$\begin{aligned} \delta_{\mathbb{F}} \colon \mathcal{X}_{\mathbb{F}} \times \mathcal{X}_{\mathbb{F}} &\to A_{\mathbb{F}}^{+} \\ (x, y) &\mapsto a \end{aligned}$$

在 $G_{\mathbb{F}}$ 的作用下定义良好且保持不变。对于所有 x， $y \in \mathcal{X}_{\mathbb{F}}(y, x)$ 都属于 $\delta(x, y)$ $^{-1}$ 的魏尔群轨道。

证明。设 $x = g.$恒等元 $= \overline{g}.$恒等元，且 $y = h.$恒等元 $= \overline{h}.$恒等元，其中 g、 $\overline{g}$、 h、 $\overline{h} \in G_{\mathbb{F}}$为某些元素。根据命题 4.1(b)， $g^{-1}\overline{g} \in K_{\mathbb{F}}$ 且 $h^{-1}\overline{h} \in K_{\mathbb{F}}$。令 a、 $\overline{a} \in A_{\mathbb{F}}^{+}$ 为满足 $g^{-1}h \in K_{\mathbb{F}}aK_{\mathbb{F}}$ 和 $\overline{g}^{-1}\overline{h} = \overline{k}\overline{a}\overline{k'} \in K_{\mathbb{F}}\overline{a}K_{\mathbb{F}}$ 的唯一元素，其中 [来自 Cartan 分解 [App25 定理 5.9]。于是

$$\overline{k}\overline{a}\overline{k} = \overline{g}^{-1}\overline{h} \in K_{\mathbb{F}}g^{-1}hK_{\mathbb{F}} = K_{\mathbb{F}}aK_{\mathbb{F}},$$

因此 $\overline{a} = a$ 且 $\delta_{\mathbb{F}}(x, y) = a$ 是良定义的。$G_{\mathbb{F}}$-不变性成立，因为对于$t \in G_{\mathbb{F}}$，$t.g.$ 恒等元与 $t.h.$恒等元之间的距离由 $(tg)^{-1}(th) = g^{-1}h$ 计算，因此与 x 和 y之间的距离一致。若 $\delta_{\mathbb{F}}(x, y) = a$，则$\delta_{\mathbb{F}}(y, x)$由 $h^{-1}g \in K_{\mathbb{F}}\delta_{\mathbb{F}}(y, x)K_{\mathbb{F}}$定义。因此

$$K_{\mathbb{F}}\delta_{\mathbb{F}}(y, x)K_{\mathbb{F}} \ni h^{-1}g = (g^{-1}h)^{-1} \in K_{\mathbb{F}}\delta_{\mathbb{F}}(x, y)^{-1}K_{\mathbb{F}} \subseteq K_{\mathbb{F}}A_{\mathbb{F}}K_{\mathbb{F}},$$

并且，由于 Cartan 分解在球面魏尔群的作用下唯一，$\delta_{\mathbb{F}}(y, x)$ 属于 $\delta(x, y)^{-1}$ 的轨道。□

我们使用根系 Σ 的一个基 Δ 来定义正根 $\Sigma_{>0}$ 的概念。对于 $\alpha \in \Sigma$，令 $\chi_\alpha\colon A_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}^\times$ 为相应的（$\mathbb{R}$- 点）代数特征。我们定义一个连续的、半代数的 W_s- 不变映射

$$\begin{aligned} N_{\mathbb{R}}\colon A_{\mathbb{R}} &\to \mathbb{R}^\times \\ a &\mapsto \prod_{\alpha\in\Sigma} \max\left\{\chi_\alpha(a), \chi_\alpha(a)^{-1}\right\} \end{aligned}$$

它是一个乘法范数，也就是说，对于所有 a、$b \in A_{\mathbb{R}}$

(1) $N_{\mathbb{R}}(a) \geq 1$ and $N_{\mathbb{R}}(a) = 1$ if and only if $a = \mathrm{Id}$,

(2) $N_{\mathbb{R}}(ab) \leq N_{\mathbb{R}}(a)N_{\mathbb{R}}(b)$.

我们称 $N_{\mathbb{R}}$ 为半代数范数 [2]。由于 $N_{\mathbb{R}}$ 是半代数的，我们可以将它扩展为映射 $N_{\mathbb{F}}\colon A_{\mathbb{F}} \to \mathbb{F}^\times$，该映射仍然是一个 W_s-不变的乘法范数，并且根据迁移原理满足 (1) 和 (2)；$N_{\mathbb{F}}$ 则由涉及这些特征的相同公式给出。对于 $\mathbb{F}$ 非阿基米德的情形，我们现在结合 Cartan 投影 $\delta_{\mathbb{F}}$、半代数范数 $N_{\mathbb{F}}$ 以及赋值 $v\colon \mathbb{F}_{>0} \to \Lambda$ 来定义

$$\begin{aligned} d\colon \mathcal{X}_{\mathbb{F}} \times \mathcal{X}_{\mathbb{F}} &\to \Lambda \\ (x, y) &\mapsto (-v)(N_{\mathbb{F}}(\delta_{\mathbb{F}}(x, y))). \end{aligned}$$

我们将在定理 4.5 中证明，d 是 $\mathcal{X}_{\mathbb{F}}$上的伪距离。由于 v 不是单射，伪距离 d 不满足正定性。三角不等式的证明使用了 Kostant 凸性定理和岩泽回缩

$$\begin{aligned} \rho\colon \mathcal{X}_{\mathbb{F}} &\to A_{\mathbb{F}}.\,\mathrm{Id} \\ g.\,\mathrm{Id} = uak.\,\mathrm{Id} &\mapsto a.\,\mathrm{Id}\,. \end{aligned}$$

使用岩泽分解 $G_{\mathbb{F}} = U_{\mathbb{F}}A_{\mathbb{F}}K_{\mathbb{F}}$ [App25，定理 5.7]。

引理 4.3。对于所有 $a \in A_{\mathbb{F}}$、$x \in \mathcal{X}_{\mathbb{F}}$、$\rho(a.x) = a.\rho(x)$。

证明。设 $g = ua'k \in G_{\mathbb{F}} = U_{\mathbb{F}}A_{\mathbb{F}}K_{\mathbb{F}}$ 使得 $g.$恒等元 $= x$。根据 [App25，命题 5.16]，$aua^{-1} \in U_{\mathbb{F}}$，因此

$$\rho(a.x) = \rho(aua'k.\,\mathrm{Id}) = \rho((aua^{-1}aa'.\,\mathrm{Id}) = aa'.\,\mathrm{Id} = a.\rho(ua'k.\,\mathrm{Id}) = a.\rho(x).$$

□

[2]存在许多满足 (1) 和 (2) 的连续半代数乘法范数，但作为有限维向量空间上的范数，它们是等价的；就我们的目的而言，只需固定 $N_{\mathbb{R}}$。

我们使用 Kostant 凸性定理证明 ρ 是一个 d-减缩回缩。

定理 4.4. 映射 $\rho\colon \mathcal{X}_{\mathbb{F}} \to A_{\mathbb{F}}.\mathrm{Id}$ 是一个 d-递减的

$$\forall x, y \in \mathcal{X}_{\mathbb{F}}\colon d(\rho(x), \rho(y)) \leq d(x, y),$$

到 $A_{\mathbb{F}}.\mathrm{Id}$ 的回缩。

证明. 显然， ρ 是一个回缩，即 $\forall a \in A_{\mathbb{F}}, \rho(a.\mathrm{Id}) = a.\mathrm{Id}$。令 $a_{\mathbb{F}}(g) = a_{\mathbb{F}}(uak) = a$ 表示 $A_{\mathbb{F}}$分量，如 App25] 的 Kostant 凸性部分第 5.10 节中所述。为了证明 ρ 是 d-递减的，我们首先断言，对所有 $b \in A_{\mathbb{F}}^{+}$ 以及所有 $k \in K_{\mathbb{F}}$

$$d(\mathrm{Id}, \rho(kb.\mathrm{Id})) \leq d(\mathrm{Id}, b.\mathrm{Id}).$$

对于 $b \in A_{\mathbb{F}}^{+}$，集合

$$S_{\mathbb{F}}^{b} = \{a \in A_{\mathbb{F}}\colon a = a_{\mathbb{F}}(kb) \text{ for some } k \in K_{\mathbb{F}}\}$$

是半代数的；并且由于在 $\mathbb{R}$ 上， $S_{\mathbb{R}}^{b}$ 在球面韦伊群的作用下封闭（这是实 Kostant 凸性定理的推论[Kos73，定理 4.1]）。陈述 $W_s(S_{\mathbb{R}}^{b}) \subseteq S_{\mathbb{R}}^{b}$ 可以表述为一阶公式，因此 $S_{\mathbb{F}}^{b}$ 在 W_s 的作用下也封闭。注意，$\rho(kb.\mathrm{Id}) = a_{\mathbb{F}}(kb).\mathrm{Id}$。虽然 $a_{\mathbb{F}}(kb)$ 可能不属于 $A_{\mathbb{F}}^{+}$，但存在一个 $w \in W$ 使得 $w(a_{\mathbb{F}}(kb)) \in A_{\mathbb{F}}^{+}$。我们将 App25，定理 5.29] 应用于 $w(a_{\mathbb{F}}(kb)) \in A_{\mathbb{F}}^{+} \cap S_{\mathbb{F}}^{b}$，得到

$$\chi_{\gamma_i}(w(a_{\mathbb{F}}(kb))) \leq \chi_{\gamma_i}(b)$$

对于所有 γ_i，如 [App25 第 5 节10] 所述。根据 [App25 引理 5.30]，对于每个 $\alpha \in \Sigma_{>0}$，都存在非负有理数 $n_{\alpha i} \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$，使得

$$\alpha = \sum_{i=1}^{r} n_{\alpha i}\gamma_i.$$

现在我们可以证明

$$\begin{aligned}
(N_{\mathbb{F}} \circ \delta_{\mathbb{F}})(\mathrm{Id}, \rho(kb.\mathrm{Id})) &= \prod_{\alpha\in\Sigma} \max\left\{\chi_\alpha(a_{\mathbb{F}}(kb)), \chi_\alpha(a_{\mathbb{F}}(kb))^{-1}\right\} \\
&= \prod_{\alpha\in\Sigma_{>0}} \max\left\{\chi_\alpha(a_{\mathbb{F}}(kb))^{\pm 2}\right\} = \prod_{\alpha\in\Sigma_{>0}} \chi_\alpha(w(a_{\mathbb{F}}(kb)))^2 \\
&= \prod_{\alpha\in\Sigma_{>0}} \prod_{i=1}^{r} \chi_{\gamma_i}(w(a_{\mathbb{F}}(kb)))^{2n_{\alpha i}} \leq \prod_{\alpha\in\Sigma_{>0}} \prod_{i=1}^{r} \chi_{\gamma_i}(b)^{2n_{\alpha i}} \\
&= \prod_{\alpha\in\Sigma} \chi_\alpha(b) = (N_{\mathbb{F}} \circ \delta_{\mathbb{F}})(\mathrm{Id}, b.\mathrm{Id}),
\end{aligned}$$

这里我们用到了 $n_{\alpha i} \geq 0$，因此应用（$-v$）后，我们就证明了该断言。

现在令 $x, y \in \mathcal{X}_{\mathbb{F}}$ 任意。由命题 4.1(c) 和 [App25，定理 5.7]，我们可以找到 $g = uak \in G_{\mathbb{F}} = U_{\mathbb{F}}A_{\mathbb{F}}K_{\mathbb{F}}$，使得对某个 $b \in A_{\mathbb{F}}$， $x = g.$ 是恒等元且 $y = g.b.$ 是恒等元。现在利用引理 4.3 及上述结果可得

$$\begin{aligned}
d(\rho(x), \rho(y)) &= d(\rho(uak.\mathrm{Id}), \rho(uakb.\mathrm{Id})) = d(a.\mathrm{Id}, \rho(akb.\mathrm{Id})) \\
&= d(\mathrm{Id}, a^{-1}.\rho(akb.\mathrm{Id})) = d(\mathrm{Id}, \rho(kb.\mathrm{Id})) \\
&\leq d(\mathrm{Id}, b.\mathrm{Id}) = d(g.\mathrm{Id}, g.b.\mathrm{Id}) = d(x, y).
\end{aligned}$$

□

定理 4.5. 函数 $d\colon \mathcal{X}_{\mathbb{F}} \times \mathcal{X}_{\mathbb{F}} \to \Lambda$ 是一个伪距离。

证明。根据定义，对于所有 $a \in A_{\mathbb{F}}$，$N_{\mathbb{F}}(a) = N_{\mathbb{F}}(a^{-1})$。由韦伊群不变性以及引理 4.2 的最后一部分，我们得到对于所有 $x, y \in \mathcal{X}_{\mathbb{F}}$，$N_{\mathbb{F}}(\delta_{\mathbb{F}}(x,y)) = N_{\mathbb{F}}(\delta_{\mathbb{F}}(y,x))$，从而 d 是对称的。由于 $N_{\mathbb{F}}(A_{\mathbb{F}}) \subseteq \mathbb{F}_{\geq 1}$，$(-v)(1) = 0$，且 $-v$ 保持序，因此 d 为正。显然，对于所有 $x \in \mathcal{X}_{\mathbb{F}}$，$d(x,x) = 0$。接下来只需证明三角不等式成立。我们先分析非标准极大平坦$A_{\mathbb{F}}.\mathrm{Id}$ 上的距离。令 $a, b, c \in A_{\mathbb{F}}$，则可利用半代数范数$N_{\mathbb{F}}$ 的性质 (2)：$\mathbb{A}_{\mathbb{F}} \to \mathbb{F}_{>0}$，从而推出

$$\begin{aligned} d(a.\mathrm{Id}, b.\mathrm{Id}) &= d(\mathrm{Id}, a^{-1}b.\mathrm{Id}) = (-v)(N_{\mathbb{F}}(a^{-1}b)) \\ &= (-v)(N_{\mathbb{F}}(a^{-1}cc^{-1}b)) \leq -(v)(N_{\mathbb{F}}(a^{-1}c)N_{\mathbb{F}}(c^{-1}b)) \\ &= -v(N_{\mathbb{F}}(a^{-1}c)) + (-v)(N_{\mathbb{F}}(c^{-1}b)) \\ &= d(a.\mathrm{Id}, c.\mathrm{Id}) + d(c.\mathrm{Id}, b.\mathrm{Id}), \end{aligned}$$

这就证明了 $A_{\mathbb{F}}.\mathrm{Id}$ 中各点的三角不等式。对于一般情形，我们按照 [KT02, 引理 1.2] 中的建议，使用定理 4.4 中的岩泽回缩。令 $x, y, z \in \mathcal{X}_{\mathbb{F}}$。根据命题 4.1(c)，存在一个 $g \in G_{\mathbb{F}}$，使得 $g.x, g.y \in A_{\mathbb{F}}.\mathrm{Id}$。于是

$$\begin{aligned} d(x,y) &= d(g.x, g.y) = d(\rho(g.x), \rho(g.y)) \\ &\leq d(\rho(g.x), \rho(g.z)) + d(\rho(g.z), \rho(g.y)) \\ &\leq d(g.x, g.z) + d(g.z, g.y) = d(x,z) + d(z,y) \end{aligned}$$

证明结束。 □

4.3. 建筑。根据定理 4.5，非标准对称空间 $\mathcal{X}_{\mathbb{F}}$ 具有一个 Λ-伪度量。我们考虑商空间

$$\mathcal{B} = \mathcal{X}_{\mathbb{F}} / \sim$$

其中，当 $d(x,y) = 0 \in \Lambda$ 时，$x \sim y \in \mathcal{B}$。我们将 $\mathcal{B}$ 上诱导的 Λ-度量记作同一个字母 d。注意到，$G_{\mathbb{F}}$ 通过等距变换作用于 $\mathcal{B}$。在第 5 节中，我们将证明，在某些情况下，Λ-度量空间 $\mathcal{B}$ 具有仿射 Λ-建筑的结构，参见定理 5.1。在开始检验仿射 Λ-建筑的公理之前，我们将在第 4.4 节研究公寓结构，并在第 4.6 节研究稳定子。

4.4. 模型公寓。在实数上，轨道 $A_{\mathbb{R}}.\mathrm{Id} \subseteq \mathcal{X}_{\mathbb{R}}$ 是对称空间 $\mathcal{X}$ 中的一个极大平坦子空间。我们进一步考察群 $A_{\mathbb{F}}$ 及其轨道 $A_{\mathbb{F}}.\mathrm{Id} \subseteq \mathcal{X}_{\mathbb{F}}$，以定义空间 A_Λ，该空间将充当模型公寓 $\mathbb{A}$。设 O 是非阿基米德实闭域 $\mathbb{F}$ 的一个序凸赋值环，且 $(-v)\colon \mathbb{F}_{>0} \to \Lambda$ 是相应的保序赋值。我们定义群

$$A_\Lambda \coloneqq A_{\mathbb{F}} / \{a \in A_{\mathbb{F}} \colon N_{\mathbb{F}}(a) \in O\}.$$

本节的目标是证明定理 4.12，该定理指出，A_Λ 可以赋予模型公寓 $\mathbb{A} = \mathbb{A}(\Sigma^\vee, \Lambda, A_\Lambda)$ 的结构，如第 2.3 节中所定义。我们还将用 $A_{\mathbb{F}}$来描述墙、半公寓、扇区和距离函数。

根据 [App25，第 5 节2]，我们回顾一下，实李群$G_{\mathbb{R}}$ 的根系 Σ 可以与特征的根系 ${}_{\mathbb{K}}\Phi$ 相对应，其中每个根对应一个

根 $\alpha \in \Sigma$ 对应一个特征 $\chi_\alpha\colon\ A_{\mathbb{F}} \to \mathbb{F}_{>0}$。类似地，余根系 $\Sigma^\vee$ 可以与余根 $X_\star(S)$相对应，其中每个根α 对应一个单参数子群 $t_\alpha\colon\ \mathbb{F}_{>0} \to A_{\mathbb{F}}$。事实上，对于每个 $\eta \in \mathrm{Span}_{\mathbb{Z}}(\Sigma)$，都存在代数特征 χ_η 和单参数子群 t_η；而对于 $\eta \in \mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}(\Sigma)$，则存在半代数特征和单参数子群。

形式上 $\Sigma \subseteq \mathfrak{a}^\star$，其中 $\mathfrak{a}$ 是 Cartan 分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$中 $\mathfrak{p}$ 的极大阿贝尔子代数。因此 $\Sigma^\vee \subseteq \mathfrak{a}$，利用典范同一化 $(\mathfrak{a}^\star)^\star \cong \mathfrak{a}$。回想一下，每个晶体根系 Φ 都配有一个非退化双线性形式

$$\begin{aligned} b\colon\ \mathrm{Span}_{\mathbb{Z}}(\Phi) \times \mathrm{Span}_{\mathbb{Z}}(\Phi^\vee) &\to \mathbb{Z} \\ (\alpha, \beta^\vee) &\mapsto 2\frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \beta, \beta \rangle} = \beta^\vee(\alpha). \end{aligned}$$

Σ 的双线性形式 b 和 $\Sigma^\vee$ 的双线性形式 $b^\vee$ 并非对称，但它们互为转置，具体如下。

引理 4.6. 对所有 α、$\beta \in \Sigma$,

$$\alpha(\beta^\vee) = \beta^\vee(\alpha) = b(\alpha, \beta^\vee) = b^\vee(\beta^\vee, \alpha),$$

其中我们将 $(\alpha^\vee)^\vee = \alpha \in \Sigma$视为同一对象。

证明。直接计算即可得出，所用到的是 $\langle \beta^\star, \alpha^\star \rangle = \langle \beta, \alpha \rangle$,

$$b^\vee\left(\beta^\vee, (\alpha^\vee)^\vee\right) = 2\frac{\langle \beta^\vee, \alpha^\vee \rangle}{\langle \alpha^\vee, \alpha^\vee \rangle} = 2\frac{\left\langle 2\frac{\beta^\star}{\langle \beta, \beta \rangle}, 2\frac{\alpha^\star}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \right\rangle}{\left\langle 2\frac{\alpha^\star}{\langle \alpha, \alpha \rangle}, 2\frac{\alpha^\star}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \right\rangle} = 2\frac{\langle \beta, \alpha \rangle}{\langle \beta, \beta \rangle} = b(\alpha, \beta^\vee). \qquad \square$$

命题 4.7. 对所有 $\alpha, \beta \in \mathrm{Span}_{\mathbb{Z}}(\Sigma)$ 和 $x \in \mathbb{F}_{>0}$，我们有

$$\chi_\alpha(t_\beta(x)) = x^{b(\alpha, \beta^\vee)}.$$

证明. 在实数上，由 [App25, 引理 5.3] 可知，对所有 $x = e^s$,

$$\chi_\alpha\left(t_\beta\left(e^s\right)\right) = \chi_\alpha\left(\exp\left(s x_\beta\right)\right) = e^{\alpha(s x_\beta)} = \left(e^s\right)^{\alpha(x_\beta)} = x^{b(\alpha, \beta^\vee)}$$

其中 $x_\beta := \beta^\vee := 2\beta^\star / \langle \beta, \beta \rangle \in \Sigma^\vee$。该陈述是一阶公式，因此根据迁移原理，该陈述对 $\mathbb{F}$ 也成立。$\square$

这些特征和单参数子群下降到 A_Λ。

命题 4.8. 对所有 $\alpha, \beta \in \mathrm{Span}_{\mathbb{Z}}(\Sigma)$，特征 χ_α 和单参数子群 t_β 下降为群同态 $\overline{\chi}_\alpha\colon\ A_\Lambda \to \Lambda$ 和 $\overline{t}_\beta\colon\ \Lambda \to A_\Lambda$，使得图表

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{F}_{>0} & \xrightarrow{t_\beta} & A_{\mathbb{F}} & \xrightarrow{\chi_\alpha} & \mathbb{F}_{>0} \\ \downarrow{\scriptstyle -v} & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle -v} \\ \Lambda & \xrightarrow{\overline{t}_\beta} & A_\Lambda & \xrightarrow{\overline{\chi}_\alpha} & \Lambda \end{array}$$

可交换，并且对每个 $\lambda \in \Lambda$，$\chi_\alpha \circ t_\beta(\lambda) = b(\alpha, \beta^\vee) \cdot \lambda$。

证明。我们用 $\pi\colon A_{\mathbb{F}} \to A_\Lambda = A_{\mathbb{F}}/\{a \in A_{\mathbb{F}}\colon N_{\mathbb{F}}(a) \in O\}$ 表示投影。首先证明 $\overline{t}_\beta\colon \Lambda \to A_\Lambda$, $(-v)(x) \mapsto \pi(t_\beta(x))$ 定义良好：我们必须证明，若 $(-v)(x) = 0$，则 $N(t_\beta(x)) \in O$。事实上，取满足 $(-v)(x) = 0$ 的 $x \in \mathbb{F}_{>0}$，于是 $x \in O^\times$。特别地，对所有$\gamma \in \Sigma$， $\chi_\gamma(t_\beta(x)) = x^{b(\gamma,\beta^\vee)} \in O^\times$，因此

$$N_{\mathbb{F}}(t_\beta(x)) = \prod_{\gamma\in\Sigma} \max\left\{\chi_\gamma(t_\beta(x)), \chi_\gamma(t_\beta(x))^{-1}\right\} \in O.$$

为证明 $\overline{\chi}_\alpha\colon A_\Lambda \to \Lambda$, $\pi(a) \mapsto -v(\chi_\alpha(a))$ 是良定义的，我们必须证明：若 $N_{\mathbb{F}}(a) \in O$，则 $(-v)(\chi_\alpha(a)) = 0$。事实上，若 $a \in A_{\mathbb{F}}$ 满足 $N_{\mathbb{F}}(a) \in O$，则对所有 $\gamma \in \Sigma$，都有 $\chi_\gamma(a) \in O$，因为

$$N_{\mathbb{F}}(a) = \prod_{\gamma\in\Sigma} \max\left\{\chi_\gamma(a), \chi_\gamma(a)^{-1}\right\} \in O$$

是由大于 1 的元素相乘得到的。由于 $\alpha \in \mathrm{Span}_{\mathbb{Z}}(\Sigma)$， $\chi_\alpha(a)$ 是 $\chi_\gamma(a) \in O$ 的乘积，因此属于 O。

映射 $\overline{t}_\beta$ 和 $\overline{\chi}_\alpha$ 的定义使得这些图表可交换。对于 $\lambda \in \Lambda$，我们可以找到 $x \in \mathbb{F}_{>0}$，使得 $(-v)(x) = \lambda$。于是

$$\begin{aligned}\overline{\chi}_\alpha \circ \overline{t}_\beta(\lambda) &= \overline{\chi}_\alpha(\pi(t_\beta(x))) = (-v)\left(\chi_\alpha \circ t_\beta(x)\right)\\ &= -v\left(x^{b(\alpha,\beta^\vee)}\right) = b(\alpha,\beta^\vee)\cdot(-v)(x).\end{aligned}$$ □

我们的目标是利用特征和一参数子群，将 $A_{\mathbb{F}}$ 与模型公寓 $\mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}(\Sigma^\vee)$ 识别起来。由于 $\mathbb{F}$ 是实闭的，我们可以将 $\mathbb{F}_{>0}$ 视为一个以 1 为幺元、标量乘法由乘方给出的 $\mathbb{Q}$-向量空间。

命题 4.9. 设 $L := \mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}(\Sigma)$。映射 $\psi\colon A_{\mathbb{F}} \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(L, \mathbb{F}_{>0})$ 将 $a \in A_{\mathbb{F}}$ 映射到 $\gamma \mapsto \chi_\gamma(a)$，是一个群同构。对于所有 $\delta, \delta' \in \Delta$，存在有理数 $q_{\delta,\delta'} \in \mathbb{Q}$，使得

$$a = \prod_{\delta,\delta'\in\Delta} t_\delta(\chi_{\delta'}(a))^{q_{\delta,\delta'}}$$

对于所有 $a \in A_{\mathbb{F}}$。

证明。显然， ψ 是一个定义良好的群同态。由实数域上的维数原因 $\mathbb{R}$可知，如果对所有 $\alpha \in \Sigma$都有 $\chi_\alpha(a) = 1$，那么a =恒等元。这是一阶性质，因此根据迁移原理，在 $\mathbb{F}$ 上也成立，所以 ψ 是单射。为证明满射性，我们使用基 $\Delta = \{\delta_1, \ldots, \delta_r\}$ of Σ的 Cartan 矩阵 $B_{ij} = b(\delta_i, \delta_j)$构造 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(L, \mathbb{F}_{>0})$ 的一个显式原像，参见第 2.2 节。由于 $B \in \mathbb{Z}^{r\times r}$ 非退化，存在一个逆 $B^{-1} \in \mathbb{Q}^{r\times r}$，其元素为 B^{-1}_{jk}。注意， $A_{\mathbb{F}}$ 中元素的有理次幂存在且定义唯一，因为在 $\mathbb{R}$ 中也是如此，并且这是一阶性质。现在考虑

$$a := \prod_{j,k=1}^{r} t_{\delta_j}(f(\delta_k))^{B^{-1}_{jk}} \in A_{\mathbb{F}}.$$

对于任意 $\gamma = \sum_{i=1}^{r} y_i \delta_i \in L$，我们有

$$\begin{aligned}\chi_\gamma(a) &= \prod_{i=1}^{r} \chi_{\delta_i} \left(\prod_{j,k=1}^{r} t_{\delta_j}(f(\delta_k))^{B_{jk}^{-1}} \right)^{y_i} \\ &= \prod_{i,j,k=1}^{r} \chi_{\delta_i} \left(t_{\delta_j}(f(\delta_k)) \right)^{B_{jk}^{-1} y_i} = \prod_{i,k=1}^{r} f(\delta_k)^{\sum_{j=1}^{r} B_{ij} B_{jk}^{-1} y_i} \\ &= \prod_{i=1}^{r} f(\delta_i)^{y_i} = f\left(\sum_{i=1}^{r} y_i \delta_i \right) = f(\gamma),\end{aligned}$$

因此 ψ 是一个同构。取 $f = \gamma \mapsto \chi_\gamma(a)$，便得到 $q_{\delta_j,\ \delta_k} := B_{jk}^{-1}$ 的所述公式。□

现在我们在 Λ 的情形下证明命题 4.9 的类似结论。

命题 4.10. 设 $L := \mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}(\Sigma)$。映射 $\overline{\psi}\colon A_\Lambda \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(L, \Lambda)$ 将 $\xi \in A_\Lambda$ 映到 $\gamma \mapsto \overline{\chi}_\gamma(\xi)$，它是一个群同构。

证明. 显然，$\overline{\psi}$ 是良定义的群同态。由同构定理应用于交换图中的 f，可知

$$\begin{array}{ccc} A_{\mathbb{F}} & \xrightarrow{\psi} & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(L, \mathbb{F}_{>0}) \\ \downarrow & \overset{f}{\searrow} & \downarrow \\ A_\Lambda & \xrightarrow{\overline{\psi}} & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(L, \Lambda) \end{array}$$

只需证明 $\ker(f) = \{a \in A_{\mathbb{F}}\colon N_{\mathbb{F}}(a) \in O\}$。事实上，$a \in A_{\mathbb{F}}$ 满足 $N_{\mathbb{F}}(a) \in O$ 当且仅当 $\chi_\gamma(a) = \psi(a)(\gamma) \in O$ 对所有 $\gamma \in L$ 都成立，当且仅当 $f(a) = 0 \in \Lambda$。□

命题 4.11. 设 $L := \mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}(\Sigma)$ 且 $L^\vee := \mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}(\Sigma^\vee)$。将基元素 $\alpha^\vee \otimes \lambda$ 映射为 $\gamma \mapsto \gamma(\alpha^\vee)\lambda$ 的 $\mathbb{Q}$-线性映射 $\overline{\varphi}\colon L^\vee \otimes_{\mathbb{Q}} \Lambda \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(L, \Lambda)$ 是一个 $\mathbb{Q}$-向量空间同构。

证明。和之前一样，设 $\Delta = \{\delta_1, \ldots, \delta_r\}$ 是 Σ 的一组基。显然，

$$\overline{\varphi}\colon \quad \sum_{i=1}^{r} \delta_i^\vee \otimes \lambda_i \mapsto \left(\gamma \mapsto \sum_{i=1}^{r} \gamma(\delta_i^\vee) \cdot \lambda_i \right)$$

定义良好且是 $\mathbb{Q}$-线性的。现在，我们将使用根系 $\Sigma^\vee$ 的 Cartan 矩阵 B，并采用与前述证明类似的方法来说明

$$\begin{aligned}\overline{\varphi}^{-1}\colon \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(L, \Lambda) &\to L^\vee \otimes_{\mathbb{Q}} \Lambda \\ f &\mapsto \sum_{j,k=1}^{r} B_{jk}^{-1} \delta_j^\vee \otimes f(\delta_k)\end{aligned}$$

是 $\overline{\varphi}$ 的逆。事实上，对于 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(L, \Lambda)$,

$$\begin{aligned}
[\overline{\varphi} \circ \overline{\varphi}^{-1}(f)] \left(\sum_{i=1}^{r} z_i \delta_i \right) &= \left[\overline{\varphi} \left(\sum_{j,k=1}^{r} B_{jk}^{-1} \delta_j^\vee \otimes f(\delta_k) \right) \right] \left(\sum_{i=1}^{r} z_i \delta_i \right) \\
&= \sum_{j,k=1}^{r} B_{j,k}^{-1} \sum_{i=1}^{r} z_i \delta_i(\delta_j^\vee) f(\delta_k) = \sum_{j,k,i=1}^{r} z_i B_{ij} B_{jk}^{-1} f(\delta_k) \\
&= \sum_{i,k=1}^{r} z_i \, \mathrm{Id}_{ik} \, f(\delta_k) = \sum_{i=1}^{r} z_i f(\delta_i) = f \left(\sum_{i=1}^{r} z_i \delta_i \right)
\end{aligned}$$

并且对于 $\lambda_i \in \Lambda$,

$$\begin{aligned}
\overline{\varphi}^{-1} \left(\overline{\varphi} \left(\sum_{i=1}^{r} \delta_i^\vee \otimes \lambda_i \right) \right) &= \sum_{j,k=1}^{r} B_{jk}^{-1} \left(\delta_i^\vee \otimes \overline{\varphi} \left(\sum_{i=1}^{r} \delta_i^\vee \otimes \lambda_i \right) (\delta_k) \right) \\
&= \sum_{j,k=1}^{r} B_{jk}^{-1} \delta_j \otimes \left(\sum_{i=1}^{r} \delta_k(\delta_i^\vee) \lambda_i \right) \\
&= \sum_{i,j,k=1}^{r} B_{jk}^{-1} B_{ki} \delta_j^\vee \otimes \lambda_i \\
&= \sum_{j,i=1}^{r} \mathrm{Id}_{ji} \, \delta_j^\vee \otimes \lambda_i = \sum_{i=1}^{r} \delta_i^\vee \otimes \lambda_i.
\end{aligned}$$

这表明 $\overline{\varphi}$ 是一个同构。 □

命题4.10和4.11共同给出了一个同构 $f = \overline{\psi}^{-1} \circ \overline{\varphi} \colon \mathbb{A} \xrightarrow{\sim} A_\Lambda$，其中 $\mathbb{A} = L^\vee \otimes_{\mathbb{Q}} \Lambda$ 是与余根系 $\Sigma^\vee$ 相关联的模型公寓。我们取完整的平移群 $T = \mathbb{A}$。

定理 4.12. 存在一个群同构 $f \colon \mathbb{A} \xrightarrow{\sim} A_\Lambda$，借此将 A_Λ 赋予类型为 $\mathbb{A} = \mathbb{A}(\Sigma^\vee, \Lambda, A_\Lambda)$ 的模型公寓结构。

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{A} & \xrightarrow{\overline{\varphi}} & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(L, \Lambda) & \xleftarrow{\overline{\psi}} & A_\Lambda \\
& \searrow & & \nearrow & \\
& & f & &
\end{array}$$

以下内容使我们能够用根来描述墙和半公寓。

命题 4.13. 对所有 $x \in \mathbb{A}$、$a \in A_{\mathbb{F}}$、f（x），$= [a]$ 当且仅当对所有 $\alpha \in \Sigma$，我们有

$$(-v)(\chi_\alpha(a)) = b^\vee(x, \alpha) = \alpha(x) \in \Lambda,$$

其中 b 是与 Σ 相关联的非退化双线性形式。

证明。与之前一样，令 B 为 Σ的 Cartan 矩阵。由引理 4.6 可知 $b^\vee(\delta_j^\vee, \delta_\ell) = b(\delta_\ell, \delta_j^\vee) = B_{\ell j}$。根据命题4.10和4.11,

$$x = \sum_{j,k=1}^{r} B_{jk}^{-1} \delta_j^\vee \otimes \overline{\chi}_{\delta_k}(f(x)) = \sum_{j=1}^{r} \delta_j^\vee \otimes \sum_{k=1}^{r} B_{kj}^{-1} \overline{\chi}_{\delta_k}(f(x)).$$

令 $\eta = \sum_{\ell=1}^{r} z_\ell \delta_\ell$，则

$$\begin{aligned} b^\vee(x,\eta) &= \sum_{j,k=1}^{r} B^{-1}_{jk} \overline{\chi}_{\delta_k}(f(x)) b^\vee(\delta_j^\vee, \eta) = \sum_{j,k,\ell=1}^{r} B^{-1}_{jk} z_\ell \overline{\chi}_{\delta_k}(f(x)) b^\vee(\delta_j^\vee, \delta_\ell) \\ &= \sum_{j,k,\ell=1}^{r} B_{\ell j} B^{-1}_{jk} z_\ell \overline{\chi}_{\delta_k}(f(x)) = \sum_{\ell,k=1}^{r} \mathrm{Id}_{\ell,k}\, z_\ell \overline{\chi}_{\delta_k}(f(x)) = \sum_{\ell=1}^{r} z_\ell \overline{\chi}_{\delta_\ell}(f(x)) \\ &= \overline{\chi}_{\sum_{\ell=1}^{r} z_\ell \delta_\ell}(f(x)) = \overline{\chi}_\eta(f(x)). \end{aligned}$$

若对于某个 $a \in \mathbb{A}_{\mathbb{F}}$，$f(x) = [a]$，则对所有$\alpha \in \Sigma$，$(-v)(\chi_\alpha(a)) = \overline{\chi}_\alpha(f(x)) = \alpha(x)$。另一方面，$f(x)$ 完全由以下取值确定：对于 $\gamma \in L$，$\overline{\psi}(f(x))(\gamma) = \overline{\chi}_\gamma(f(x))$；这些取值由给定方程的线性组合确定。□

推论 4.14. 对所有 $x, y \in \mathbb{A}$，若对于某些$a, b \in A_{\mathbb{F}}$，$f(x) = [a]$ 且 $f(y) = [b]$，则 $f(x+y) = [ab]$。

证明. 由命题 4.13，对于所有 $(-v)(\chi_\alpha(a)) = \alpha(x)$ 和 $(-v)(\chi_\alpha(b)) = \alpha(y)$，因此

$$(-v)(\chi_\alpha(ab)) = (-v)(\chi_\alpha(a)\chi_\alpha(b)) = (-v)(\chi_\alpha(a)) + (-v)(\chi_\alpha(b)) = \alpha(x+y),$$

因此由命题 4.13 $f(x+y) = [ab]$。 □

根据第 2.3 节中墙和半公寓的定义，我们看到，对于$\lambda \in \Lambda$ 和 $\alpha \in \Sigma$,

$$\begin{aligned} M_{\alpha^\vee,\lambda} &= \{x \in \mathbb{A} \colon b^\vee(x,\alpha) = \lambda\} = \{\xi \in A_\Lambda \colon \overline{\chi}_\alpha(\xi) = \lambda\}, \\ H^+_{\alpha^\vee,\lambda} &= \{x \in \mathbb{A} \colon b^\vee(x,\alpha) \geq \lambda\} = \{\xi \in A_\Lambda \colon \overline{\chi}_\alpha(\xi) \geq \lambda\} \end{aligned}$$

在恒等映射 $\mathbb{A} \cong L^\vee \otimes_{\mathbb{Q}} \Lambda \cong A_\Lambda$ 下。我们将简记 $M_{\alpha,\ \lambda} := M_{\alpha^\vee,\ \lambda}$和 $H^+_{\alpha\ ,\ \lambda} := H^+_{\alpha^\vee,\ \lambda}$。

我们注意到，$\Sigma^\vee$ 因而 $\mathbb{A}$ 都带有球面魏尔群W_s的作用、平移 $T := \mathbb{A}$ 的作用，因此也带有仿射魏尔群 $W_a := T \rtimes W_s$的作用。根据 App25，命题 5.5], ，球面魏尔群可以识别为 $N_{\mathbb{F}}/M_{\mathbb{F}}$, [，它通过共轭作用作用于 $A_{\mathbb{F}}$ 和 A_Λ。现在我们验证识别 $f \colon \mathbb{A} \to A_\Lambda$ 与这些作用相容。对于根 $\alpha, \beta \in \Sigma$，沿由 α 定义的超平面的反射 s_α 可由以下条件刻画:

$$\beta(s_\alpha(H)) = \beta\left(H - \alpha(H)\alpha^\vee\right) = \beta(H) - \beta(\alpha^\vee) \cdot \alpha(H)$$

对所有 $H \in \mathfrak{a}$均成立。根据 App25，引理 5.2] ，这可以转化到乘法情形，此时我们可以说 $n \in N_{\mathbb{F}} := \mathrm{Nor}_{K_{\mathbb{F}}}(A_{\mathbb{F}})$的作用如同反射$s_\alpha$ ，若对所有 $a \in A_{\mathbb{F}}$,

$$\chi_\beta(nan^{-1}) = \frac{\chi_\beta(a)}{\chi_\alpha(a)^{\beta(\alpha^\vee)}}.$$

引理 4.15. 对于每个反射 s_α where $\alpha \in \Sigma$，都存在某个 $n \in N_{\mathbb{F}}$，其作用如同反射 s_α。此外，对于所有 $x \in \mathbb{A}$，若存在某个$a \in A_{\mathbb{F}}$使得 $[a] = f(x)$，则 $f(s_\alpha(x)) = [nan^{-1}] \in A_\Lambda$。

证明. 根据 [App25, 命题 5.5]，存在某个 $n \in N_{\mathbb{F}}$，其作用如同反射 s_α。令 $x \in \mathbb{A}$ 和 $a \in A_{\mathbb{F}}$ 满足 $f(x) = [a] \in A_\Lambda$。根据引理4.13，对于所有 $\gamma \in L \colon = \mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}(\Sigma)$，$\gamma(x) = (-v)(\chi_\gamma(a))$。我们验证对于所有 $\gamma \in L$

$$\begin{aligned}\overline{\psi}([nan^{-1}])(\gamma) = \overline{\chi}_\gamma([nan^{-1}]) = (-v)(\chi_\gamma(nan^{-1})) = (-v)\left(\frac{\chi_\gamma(a)}{\chi_\alpha(a)^{\gamma(\alpha^\vee)}}\right)\\ = \overline{\chi}_\gamma(f(x)) - \gamma(\alpha^\vee)\overline{\chi}_\alpha(f(x)) = \gamma(x) - \gamma(\alpha^\vee)\alpha(x)\\ = \gamma(x - \alpha(x)\alpha^\vee) = \gamma(s_\alpha(x)) = \overline{\varphi}(s_\alpha(x))(\gamma),\end{aligned}$$

确认 $f(s_\alpha(x)) = [nan^{-1}]$。 □

4.5. $A_{\mathbb{F}}$ 的赋值性质。本小节中，我们研究 $a \in A_{\mathbb{F}}$ 中元素的矩阵元素与其特征 $\chi_\alpha(a)$ 之间的联系。对于任意矩阵 $a \in \mathbb{F}^{n\times n}$，其矩阵元素为 (a_{ij})，令

$$(-v)(a) \coloneqq \max_{i,j}\{(-v)(a_{ij})\}.$$

引理 4.16. 对所有 a、$a_i \in A_{\mathbb{F}}$，对于 $i = 1$、.....、k 以及 $k \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{F})$，我们有

(i) $(-v)\left(\prod_{i=1}^k a_i\right) \le \sum_{i=1}^k (-v)(a_i)$,

(ii) $(-v)\left(\sum_{i=1}^k a_i\right) \le \max_i\{(-v)(a_i)\}$,

(iii) $(-v)(k) = 0$,

(iv) $(-v)(kak^{-1}) = (-v)(a)$,

(v) $(-v)(a^q) = q \cdot (-v)(a)$ *for all* $q \in \mathbb{Q}$.

证明。对于任意矩阵 a、$b \in \mathbb{F}^{n\times n}$，我们注意到，矩阵元素 $(ab)_{ik}$ 的赋值由 $(-v)(a)$ 和 $(-v)(b)$ 界定。

$$\begin{aligned}(-v)((ab)_{ik}) = (-v)\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk}\right) \le \max_{j=1}^n\{(-v)(a_{ij}) + (-v)(b_{jk})\}\\ \le \max_{ij}\{(-v)(a_{ij})\} + \max_{ij}\{(-v)(b_{ij})\}.\end{aligned}$$

利用归纳法，此估计可推广到矩阵的有限乘积，从而证明 (i) .

对于（ii），我们注意到

$$\begin{aligned}(-v)\left(\sum_{i=1}^k a_i\right) = \max_{j,\ell}\left\{(-v)\left(\sum_{i=1}^k (a_i)_{j\ell}\right)\right\} \le \max_{j,\ell,i}\{(-v)\left((a_i)_{j\ell}\right)\}\\ = \max_i\{(-v)(a_i)\}.\end{aligned}$$

对于 $k \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{F})$，我们有 $(-v)(k) \le 0$，因为所有元素都满足 $|k_{ij}| \le 1$。由于 k 至少有一个矩阵元素的赋值为 0，因此命题（iii）成立；否则，k 的行列式的赋值将为负，而 $\mathbb{F}$ 中赋值为负的元素集合是一个理想。

由 (i) 和 (iii) 可得 $(-v)(kak^{-1}) \le (-v)(k) + (-v)(a) + (-v)(k^{-1}) = (-v)(a)$，但将 a替换为 $k^{-1}ak$ 后，我们也得到 (iv) 中的另一个不等式。

回想一下，对所有 $a \in A_{\mathbb{F}}$ 都有 $a^{\mathsf{T}} = a$ ，因此由谱定理可知，存在$k \in \mathsf{SO}_n$ 使得 kak^{-1} 是一个对角矩阵。注意，当 $q \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ 时，a^q 定义为 $k^{-1}(kak^{-1})^q k$。于是我们有

$$(-v)(a^q) = (-v)\left(ka^q k^{-1}\right) = (-v)\left(\left(kak^{-1}\right)^q\right) = q \cdot (-v)\left(kak^{-1}\right) = q \cdot (-v)(a)$$

对所有 $q \in \mathbb{Q}$均成立，从而完成 (v) 的证明。 □

下面关于 $A_{\mathbb{F}}$ 的矩阵元素描述源于对 $A_{\mathbb{F}}$的半代数定义。

引理 4.17. 存在常数 $C \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$，使得对于所有 $\varepsilon \in \mathbb{F}_{\geq 1}$ 和 $a \in A_{\mathbb{F}}$，若对所有 $\delta \in \Delta$都有 $\chi_\delta(a) \leq \varepsilon$，则 $(-v)(a) \leq C \cdot (-v)(\varepsilon)$。
还存在常数 $C' \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$，使得对于所有 $\lambda \in \Lambda_{\geq 0}$ 和 $a \in A_{\mathbb{F}}$，若对所有 $\delta \in \Delta$都有 $(-v)(\chi_\delta(a)) \leq \lambda$，则 $(-v)(a) \leq C' \cdot \lambda$。

证明。由于 $t_\alpha \colon \mathbb{F}_{>0} \to A_{\mathbb{F}}$和投影 $\pi_{ij} \colon A_{\mathbb{F}} \to \mathbb{F}$ 到 ij-矩阵元素均是在 $\mathbb{K}$上定义的半代数对象，因此它们的拼接 $\mathbb{F}_{>0} \to \mathbb{F}$是半代数的，并且其增长被多项式 $p \in \mathbb{K}[x]$ 所界定，即对于所有 $\alpha \in \Sigma$ 和所有 $x \in \mathbb{F}$ ，我们有

$$-p(x) \leq t_\alpha(x)_{ij} \leq p(x).$$

令 $\varepsilon \in \mathbb{F}_{\geq 1}$ 和 $a \in A_{\mathbb{F}}$ 满足：对所有 $\delta \in \Delta$， $\chi_\delta(a) \leq \varepsilon$ 。根据命题 4.9，存在 $q_{\delta,\delta'} \in \mathbb{Q}$ ，使得

$$a = \prod_{\delta,\delta' \in \Delta} t_\delta(\chi_{\delta'}(a))^{q_{\delta,\delta'}}.$$

应用上述估计和引理 4.16，可得

$$\begin{aligned}(-v)(a) &\leq \sum_{\delta,\delta' \in \Delta} (-v)\left(t_\delta(\chi_{\delta'}(a))^{q_{\delta,\delta'}}\right) = \sum_{\delta,\delta' \in \Delta} q_{\delta,\delta'}(-v)\left(t_\delta(\chi_{\delta'}(a))\right) \\ &\leq \sum_{\delta,\delta' \in \Delta} q_{\delta,\delta'}(-v)\left(p(\chi_{\delta'}(a))\right)\end{aligned}$$

并且若 $p(x) = \sum_{n=0}^{\deg(p)} b_n x^n \in \mathbb{K}[x]$，则

$$\begin{aligned}(-v)(p(\chi_{\delta'}(a))) &\leq \max_n \left\{(-v)\left(b_n \chi_{\delta'}(a)^n\right)\right\} \\ &\leq \max\left\{\deg(p) \cdot (-v)(\chi_{\delta'}(a)), 0\right\} \leq \deg(p) \cdot (-v)(\varepsilon),\end{aligned}$$

so

$$(-v)(a) \leq \left(\deg(p) \sum_{\delta,\delta' \in \Delta} q_{\delta,\delta'}\right)(-v)(\varepsilon) \leq \left|\deg(p) \sum_{\delta,\delta' \in \Delta} q_{\delta,\delta'}\right|(-v)(\varepsilon),$$

因此我们可以定义

$$C \coloneqq \left|\deg(p) \sum_{\delta,\delta' \in \Delta} q_{\delta,\delta'}\right|$$

以完成证明的第一部分。对于第二个陈述，假设我们有 $\lambda \in \Lambda_{>0}$, $a \in A_{\mathbb{F}}$ ，满足对所有 $\delta \in \Delta$都有 $(-v)(\chi_\delta(a)) \leq \lambda$ 。取 $\varepsilon \in \mathbb{F}_{>1}$使得 $(-v)(\varepsilon) = 2\lambda$。那么 $(-v)(\chi_\delta(a)) \leq \lambda < (-v)(\varepsilon)$，因此 $\chi_\delta(a) < \varepsilon$ ，并且可以应用第一部分得到 $(-v)(a) \leq C \cdot (-v)(\varepsilon) = C \cdot 2\lambda =: C' \cdot \lambda$，其中 $C' = 2C$。□

4.6. 点的稳定子。我们用 $o \in \mathcal{B}$ 表示恒等元的等价类。o 的稳定子已由 [Tho02] 在 $\mathbb{F}$ 为 Robinson 域时计算得出，更一般的情形则由 [KT02] 计算得出。我们首先描述 $A_{\mathbb{F}}$ 在 $\mathcal{B}$ 上的作用这一特殊情形。对于任意半代数子集 $H_{\mathbb{F}} \subseteq G_{\mathbb{F}}$，我们写作 $H_{\mathbb{F}}(O) := H_{\mathbb{F}} \cap O^{n\times n}$，其中 O 为赋值环。

命题 4.18。对于 $a \in A_{\mathbb{F}}$，以下条件等价。

(i) $a \in \mathrm{Stab}_{G_{\mathbb{F}}}(o)$。
(ii) $N_{\mathbb{F}}(a) \in O$。 (iii) $\chi_\alpha(a) \in O \ \forall \alpha \in \Sigma$。
(iv) $\chi_\alpha(a) \in O^\times \ \forall \alpha \in \Delta$。 (v) $a \in A_{\mathbb{F}}(O)$。

此外，公寓可与 $\mathbb{A} \cong A_\Lambda \cong A_{\mathbb{F}}/A_{\mathbb{F}}(O) \cong A_{\mathbb{F}}.o$ 等同。

证明。若 $a \in \mathrm{Stab}_{G_{\mathbb{F}}}(o)$，则 $d(\mathrm{Id}\ a.\mathrm{Id}) = (-v)(N_{\mathbb{F}}(a)) = 0$，因此 $N_{\mathbb{F}}(a) \in O$。根据 $N_{\mathbb{F}}$ 的定义，这意味着对于所有 $\alpha \in \Sigma$，特别是对于所有 $\alpha \in \Delta$，都有 $\chi_\alpha(a) \in O \cap O^{-1} = O^\times$。存在某个 $\varepsilon \in O \cap \mathbb{F}_{\geq 1}$，使得对所有 $\alpha \in \Delta$ 都有 $\chi_\alpha(a) \leq \varepsilon$，因此根据引理 4.17，$a$ 的矩阵元素的赋值都由 $(-v)(\varepsilon) = 0$ 有界，从而 $a \in A_{\mathbb{F}}(O)$。另一方面，若 $a \in A_{\mathbb{F}}(O)$，则线性映射 $\mathrm{Ad}(a) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}, X \mapsto aXa^{-1}$ 在 $\mathfrak{g}_\alpha$ 上限制为乘以 $\chi_\alpha(a)$，由此可得 $\chi_\alpha(a) \in O$。于是 $N_{\mathbb{F}}(a) \in O$ 且 $d(o, a.o) = 0$，因此 $a \in \mathrm{Stab}_{G_{\mathbb{F}}}(o)$。

根据第 2.3 节，$\mathbb{A} \cong A_\Lambda \cong A_{\mathbb{F}}/\{a \in A_{\mathbb{F}} : N(a) \in O\} \cong A_{\mathbb{F}}/\mathrm{Stab}_{A_{\mathbb{F}}}(o) = A_{\mathbb{F}}/A_{\mathbb{F}}(O)$；明确地说，$x \in \mathbb{A}$ 当且仅当 $a.o = aa^{\mathsf{T}} = a^2$ (f) x时，与定理 4.12 的语言相对应；再由 $= [a^2]$ 在 $A_{\mathbb{F}}$ 上的作用所满足的轨道稳定子定理，我们有 $\mathcal{B}\mathrm{Stab}_{A_{\mathbb{F}}}.o \cong A_{\mathbb{F}}/(A_{\mathbb{F}})\, o_\circ \cong \mathbb{A}$

定理 4.19。$o \in \mathcal{B}$ 在 $G_{\mathbb{F}}$ 中的稳定子是 $G_{\mathbb{F}}(O)$。

证明。设$g = kak' \in G_{\mathbb{F}} = K_{\mathbb{F}} A_{\mathbb{F}}^+ K_{\mathbb{F}}$。若 $g \in \mathrm{Stab}_{G_{\mathbb{F}}}(o)$，则 $d(\mathrm{Id}\ g.\mathrm{Id}) = (-v)(N_{\mathbb{F}}(a)) = 0$。根据命题 4.18，$a \in A_{\mathbb{F}}(O)$。现在由于 $K_{\mathbb{F}} = K_{\mathbb{F}}(O)$，$g = kak' \in G_{\mathbb{F}}(O)$。

另一方面，若我们从 $g \in G_{\mathbb{F}}(O)$ 出发，则有 $a \in \mathbb{A}_{\mathbb{F}}(O)$，并且根据命题 4.18，$N_{\mathbb{F}}(a) \in O$，因此也有 $d(\text{恒等元}\ g.\text{恒等元}) = d(\text{恒等元}\ a.\text{恒等元}) = 0$，故有$g \in \mathrm{Stab}_{G_{\mathbb{F}}}(o)$。□

作为岩泽回缩（定理 4.4）的一个应用，我们可以给出 $\mathcal{B}$ 中 o 稳定子的群分解。

推论 4.20。存在岩泽分解 $G_{\mathbb{F}}(O) = U_{\mathbb{F}}(O) A_{\mathbb{F}}(O) K_{\mathbb{F}}$，这意味着对于每个 $g \in G_{\mathbb{F}}(O)$，都存在唯一的 $u \in U_{\mathbb{F}}(O)$、$a \in A_{\mathbb{F}}(O)$、$k \in K_{\mathbb{F}} = K_{\mathbb{F}}(O)$，使得 $g = uak$。

证明。设 $g = uak \in G_{\mathbb{F}}(O) \subseteq U_{\mathbb{F}} A_{\mathbb{F}} K_{\mathbb{F}}$。我们有 $\rho(g.\text{恒等元}) = a.\text{恒等元}$。由于$g \in G_{\mathbb{F}}(O)$，由定理 4.4 可得

$$d(\mathrm{Id}, a.\mathrm{Id}) = d(\mathrm{Id}, \rho(g.\mathrm{Id})) \leq d(\mathrm{Id}, g.\mathrm{Id}) = 0.$$

这意味着 $a \in A_{\mathbb{F}} \cap G_{\mathbb{F}}(O) = A_{\mathbb{F}}(O)$。注意，由于 $K_{\mathbb{F}}$ 稳定恒等元 $\in \mathcal{X}_{\mathbb{F}}$， $K_{\mathbb{F}} = K_{\mathbb{F}}(O)$。由于 $G_{\mathbb{F}}(O)$ 是 $G_{\mathbb{F}}$ 的子群， $u = gk^{-1}a^{-1} \in G_{\mathbb{F}}(O)$，因此 $u \in U_{\mathbb{F}}(O)$。□

5. Verification of the axioms for $\mathcal{B}$

我们继续采用第4节的设定： $\mathbb{K}$ 和 $\mathbb{F}$ 是实闭域，使得 $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{R} \cap \mathbb{F}$，且 $\mathbb{F}$ 是带有与序相容的赋值v的非阿基米德域。设 $G < \mathrm{SL}_n$ 是一个半单连通自伴代数 $\mathbb{K}$-群。令$\mathcal{B} = \mathcal{X}_{\mathbb{F}}/\sim$ 如第4.3节所述，令$\mathbb{A} \cong A_{\mathbb{F}}.o \subseteq \mathcal{B}$ 如命题 4.18 所述。将包含关系记为 f_0： $\mathbb{A} \to \mathcal{B}$。具体而言，根据定理 4.12，对于所有 $x \in \mathbb{A}$， $f_0(x) = a.o$ 当且仅当 $f(x) = [a^2]$。我们定义一组图

$$\mathscr{F} = \{g.f_0 \colon \mathbb{A} \to \mathcal{B} \colon g \in G_{\mathbb{F}}\}.$$

本节的目标是证明$(\mathcal{B}, \mathscr{F})$是第2.4节意义下的一个仿射 Λ-建筑。回忆一下，若 $\alpha \in \Phi$ 蕴含$2\alpha \notin \Phi$，则称根系 Φ 为约化根系。回忆一下，李群 $G_{\mathbb{R}}$ 的根系 Σ 与代数群 G 相对于一个 $\mathbb{F}$-分裂环面而言的根系 ${}_{\mathbb{K}}\Phi$ 相同。

定理 5.1. 若根系 Σ of $G_{\mathbb{R}}$ 是约化的，则有序对 $(\mathcal{B}, \mathscr{F})$ 是一个类型为 $\mathbb{A} = \mathbb{A}(\Sigma^\vee, \Lambda, T)$ 的仿射 Λ-建筑，其中 $T = \mathbb{A}$ 是完整的平移群。

我们将按照定理 2.3 所述，逐一验证公理 (A1)、(A2)、(A3)、(A4)、(TI) 和 (EC)，以证明该定理。公理 (A1)、(A3) 和 (TI) 已在第 5.1 节中处理，根据目前已建立的结果，它们很容易得到证明。在证明其余公理之前，我们先发展一些理论。我们将引入显式的根群赋值，以研究根群 $(U_\alpha)_{\mathbb{F}}$ 的作用。这将得到关于 W_a-凸性的部分结果，并使我们能够描述基本魏尔室 C_0、整个公寓 $\mathbb{A}$ 和半公寓 H_α 的逐点稳定子。接着，我们将沿用 [BT72 和 Lan96]，的一些思路，从而描述 $\mathbb{A}$ 的任意有限子集的稳定子。在第 5.8 节中，我们首先证明公理 (A2) 的图册变换条件，并利用它描述 $\mathbb{A}$ 的任意子集（不一定是有限子集）的稳定子，进而完成公理 (A2) 的证明。最后，公理 (A4) 和 (EC) 将在第 5.9 节和第5.10节中得到证明。

我们也针对 Σ 可能不是约化的情形，发展了大部分理论，并明确指出何时需要约化的 Σ。假设 Σ 是约化的，这一假设在证明公理（A2）和（EC）时会直接用到。公理（A4）间接用到了这一假设，因为其证明依赖于（A2）的陈述。其余公理（A1）、（A3）和（TI）不需要这一假设。关于这一假设的进一步讨论，见第5.11节。附录7给出了在 $G_{\mathbb{F}} = \mathrm{SL}(n, \mathbb{F})$ 情形下公理 (A2) 的另一种简单得多的证明。

5.1. 公理（A1）、（A3）和（TI）。三个公理可直接由我们已完成的工作推出。

引理5.2. 有序对 $(\mathcal{B}, \mathscr{F})$ 满足公理

(A1) 对所有 $f \in \mathscr{F}$、 $w \in W_a$、 $f \circ w \in \mathscr{F}$。

证明。设 $w = (t^x, w_s) \in W_a = T \rtimes W_s$，其中 t 是由 $x \in \mathbb{A}$ 作平移，且 $w_s = s_1 \cdots s_k$ 是反射的乘积。取 $a \in A_{\mathbb{F}}$，使得 $f_0(x) = a.o$，如定理 4.12 所示。取 $n_i \in N_{\mathbb{F}}$，其作用方式如引理 4.15 中的 s_i，并令 $n = n_1 \cdots n_k$。取满足 $g.f_0 = f$ 的 $g \in G_{\mathbb{F}}$。

现在对所有 $y \in \mathbb{A}$，令 $b_i \in A_{\mathbb{F}}$ 使得 $f_0(s_i \cdots s_k(y)) = b_i.o$。于是根据推论 4.14 和引理 4.15

$$\begin{aligned} f \circ w(y) &= g.f_0(t^x(w_s(y))) = g.f_0(x + w_s(y)) = g.ab_1.o = ga.f_0(w_s(y)) \\ &= ga.f_0(s_1 \cdots s_k(y)) = ga.n_1.b_2.o = gan_1.f_0(s_2 \cdots s_k(y)) = \cdots \\ &= gan_1 \cdots n_k.f_0(y) = gan.f_0(y), \end{aligned}$$

因此对于 $\tilde{g} := gan \in G_{\mathbb{F}}$ 我们有 $f \circ w = \tilde{g}.f_0 \in \mathscr{F}$，从而证明了公理 (A1)。 □

引理 5.3。对 $(\mathcal{B}, \mathscr{F})$ 而言，公理成立

(A3) *For all $p, q \in \mathcal{B}$, there exists $f \in \mathscr{F}$ such that $p, q \in f(\mathbb{A})$.*

证明。这由命题 4.1(c) 得出：如果 $[x], [y] \in \mathcal{B}$，对于点 $x, y \in \mathcal{X}_{\mathbb{F}}$，则存在一个 $g \in G_{\mathbb{F}}$ 使得 $g.x =$ 恒等元 $\in A_{\mathbb{F}}$.恒等元以及 $g.y \in A_{\mathbb{F}}$.恒等元。于是对于图表 $g^{-1}.f_0 \in \mathscr{F}$，$[x], [y] \in g^{-1}.f_0(\mathbb{A})$。□

公理 (TI) 仅仅表明 $\mathcal{B}$ 满足三角不等式。三角不等式是利用 Kostant 凸性和 Iwasawa-回缩在定理 4.5 中证明的。

5.2. $U_{\mathbb{F}}$的赋值性质。回顾 [App25, 第 5 节。7], 中，$U_{\mathbb{F}}$对 $\alpha \in \Sigma_{>0}$ 定义了子群 $(U_\alpha)_{\mathbb{F}}$，即 $(U_\alpha)_{\mathbb{F}} = \exp\left((\mathfrak{g}_\alpha)_{\mathbb{F}} \oplus (\mathfrak{g}_{2\alpha})_{\mathbb{F}}\right)$。由于 $(U_\alpha)_{\mathbb{F}}$是幺幂的，矩阵指数 exp：$(\mathfrak{g}_\alpha)_{\mathbb{F}} \oplus (\mathfrak{g}_{2\alpha})_{\mathbb{F}} \to (U_\alpha)_{\mathbb{F}}$，以及矩阵对数

$$\begin{aligned} \log\colon (U_\alpha)_{\mathbb{F}} &\to (\mathfrak{g}_\alpha)_{\mathbb{F}} \oplus (\mathfrak{g}_{2\alpha})_{\mathbb{F}} \\ u &\mapsto \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{(u - \mathrm{Id})^k}{k} \end{aligned}$$

都是 $(U_\alpha)_{\mathbb{F}}$上的多项式。将 $\mathfrak{g}_{\mathbb{F}} \subseteq \mathfrak{sl}(n, \mathbb{F}) \subseteq \mathbb{F}^{n \times n}$视为矩阵，我们可以讨论 $Z \in \mathfrak{g}_{\mathbb{F}}$的矩阵元素 Z_{ij}。令其如第 4.5 节中所定义

$$(-v)(Z) := \max_{ij} \{(-v)(Z_{ij})\}.$$

受 [BT72, 6.2] 启发，并为了避免过多讨论矩阵元素，我们引入根群赋值 φ_α

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha\colon (U_\alpha)_{\mathbb{F}} &\to \Lambda \cup \{-\infty\} \\ \exp(X + X') &\mapsto \max\left\{ \max_{i,j} \{(-v)(X_{ij})\}, \frac{1}{2} \max_{i,j} \{(-v)(X'_{ij})\} \right\} \end{aligned}$$

其中 $X \in (\mathfrak{g}_\alpha)_{\mathbb{F}}$ 且 $X' \in (\mathfrak{g}_{2\alpha})_{\mathbb{F}}$。下面的引理说明了这些名称的合理性。熟悉布鲁哈-蒂茨理论的读者可能会注意到，为了简化记号，我们采用了相反的符号约定。

引理 5.4. 对所有 $\alpha \in \Sigma$ 和 $u, v \in (U_\alpha)_{\mathbb{F}}$

$$\varphi_\alpha(uv) \le \max\{\varphi_\alpha(u), \varphi_\alpha(v)\}$$

并且如果 $\varphi_\alpha(u) \neq \varphi_\alpha(v)$，则等号成立。

证明。我们首先断言，对于所有 $X, Y \in \mathfrak{g}_\alpha$，

$$\frac{1}{2}(-v)([X,Y]) \leq \max\{(-v)(X), (-v)(Y)\}.$$

事实上，在矩阵元素中，$[X,Y]_{ij} = \sum_k X_{ik}Y_{kj} - Y_{ik}X_{kj}$，从而

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(-v)([X,Y]) &= \frac{1}{2}\max_{ij}\left\{(-v)\left(\sum_k X_{ik}Y_{kj} - Y_{ik}X_{kj}\right)\right\} \\
&\leq \frac{1}{2}\max_{ijk}\{(-v)(X_{ik}Y_{kj}), (-v)(Y_{ik}X_{kj})\} \\
&\leq \frac{1}{2}\max_{ijk}\{(-v)(X_{ik}) + (-v)(Y_{kj}), (-v)(Y_{ik}) + (-v)(X_{kj})\} \\
&\leq \frac{1}{2}\max\{(-v)(X) + (-v)(Y), (-v)(Y) + (-v)(X)\} \\
&\leq \frac{1}{2}\max\{2(-v)(X), 2(-v)(Y)\} = \max\{(-v)(X), (-v)(Y)\}.
\end{aligned}$$

现在令 $u = \exp(X + X')$ 和 $v = \exp(Y + Y')$，其中 $X, Y \in (\mathfrak{g}_\alpha)_{\mathbb{F}}$ 以及 $X', Y' \in (\mathfrak{g}_{2\alpha})_{\mathbb{F}}$。则

$$u \cdot v = \exp\left(X + Y + X' + Y' + \frac{1}{2}[X,Y]\right)$$

根据 Baker-Campbell-Hausdorff公式 [App25，命题 5.12]。由该断言

$$\begin{aligned}
\varphi_\alpha(uv) &= \max\left\{(-v)(X+Y), \frac{1}{2}(-v)\left(X' + Y' + \frac{1}{2}[X,Y]\right)\right\} \\
&\leq \max\left\{(-v)(X), (-v)(Y), \frac{1}{2}(-v)(X'), \frac{1}{2}(-v)(Y')\right\} \\
&= \max\{\varphi_\alpha(u), \varphi_\alpha(v)\}.
\end{aligned}$$

不妨设 $\varphi_\alpha(u) < \varphi_\alpha(v)$，我们区分两种情况。若$\varphi_\alpha(v) = (-v)(Y) \geq \frac{1}{2}(-v)(Y')$，则 $(-v)(X) < (-v)(Y)$，且 $\frac{1}{2}(-v)(X') < (-v)(Y)$。因此利用该断言

$$\begin{aligned}
\varphi_\alpha(uv) &= \max\left\{(-v)(Y), \frac{1}{2}(-v)\left(X' + Y' + \frac{1}{2}[X,Y]\right)\right\} \\
&= \max\left\{(-v)(Y), \frac{1}{2}(-v)(X'), \frac{1}{2}(-v)(Y'), (-v)(X), (-v)(Y)\right\} \\
&= (-v)(Y) = \varphi_\alpha(v).
\end{aligned}$$

另一方面，如果 $\varphi_\alpha(v) = \frac{1}{2}(-v)(Y') > (-v)(Y)$，那么 $(-v)(X) < \frac{1}{2}(-v)(Y')$ 且 $(-v)(X') < (-v)(Y')$。因此，利用这一断言

$$(-v)\left(X' + \frac{1}{2}[X,Y]\right) \leq \max\{(-v)(X'), 2(-v)(X), 2(-v)(Y)\} < (-v)(Y')$$

and

$$\begin{aligned}
\varphi_\alpha(uv) &= \max\left\{(-v)(X+Y), \frac{1}{2}(-v)\left(Y' + X' + \frac{1}{2}[X,Y]\right)\right\} \\
&= \max\left\{(-v)(X+Y), \frac{1}{2}(-v)(Y')\right\} = \frac{1}{2}(-v)(Y') = \varphi_\alpha(v). \qquad \square
\end{aligned}$$

引理 5.5. 设 B_θ 为 $\mathfrak{g}_\mathbb{F}$ 上定义的标量积，其中 [App25，第4节。1],那么

$$(-v)(X) = (-v)\left(\sqrt{B_\theta(X,X)}\right)$$

对所有 $X \in \mathfrak{g}_\mathbb{F}$。若 $X, Y \in \mathfrak{g}_\mathbb{F}$ 关于 B_θ 正交，则

$$(-v)(X+Y) = \max\{(-v)(X), (-v)(Y)\}.$$

证明。注意到 $(-v)(X) = (-v)(\|X\|_\infty)$，其上确界范数为 $\|\cdot\|_\infty$。由于在 $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$ 上所有范数等价，我们可以使用迁移原理，得到一个常数 $k \in \mathbb{N}$，使得对所有 $X \in \mathfrak{g}_\mathbb{F}$

$$\frac{1}{k}\sqrt{B_\theta(X,X)} \leq \|X\|_\infty \leq k\sqrt{B_\theta(X,X)},$$

由此可得 $(-v)(X) = (-v)(\|X\|_\infty) = (-v)\left(\sqrt{B_\theta(X,X)}\right)$。

现在，若 $X, Y \in \mathfrak{g}_\mathbb{F}$ 正交，且 $B_\theta(X,Y) = 0$，则

$$\begin{aligned}(-v)(X+Y) &= (-v)\left(\sqrt{B_\theta(X+Y,X+Y)}\right) = \frac{1}{2}(-v)\left(B_\theta(X,X) + B_\theta(Y,Y)\right)\\ &= \frac{1}{2}\max\left\{(-v)(B_\theta(X,X)), (-v)(B_\theta(Y,Y))\right\}\\ &= \max\{(-v)(X), (-v)(Y)\}\end{aligned}$$

这里我们利用正定性得出，$B_\theta(X,X)$ 和 $B_\theta(Y,Y)$ 不会相互抵消。□

根群赋值使我们能够描述 $(U_\alpha)_\mathbb{F}$ 中的元素何时固定基点 $o \in \mathcal{B}$。

引理 5.6. 设 $\alpha \in \Sigma$ and $u \in (U_\alpha)_\mathbb{F}$。以下条件等价

(i) $u.o = o$,

(ii) $\varphi_\alpha(u) \leq 0$,

(iii) $u = \exp(X + X')$ *for some* $X \in (\mathfrak{g}_\alpha)_\mathbb{F}(O)$, $X' \in (\mathfrak{g}_{2\alpha})_\mathbb{F}(O)$,

(iv) $\log(u) \in \mathfrak{g}_\mathbb{F}(O)$.

此外，$\varphi_\alpha(u) < 0$ 当且仅当对所有 i, j，$(-v)((u - \text{恒等元})_{ij}) < 0$。

证明. 设 $u = \exp(X + X')$，其中 $X \in (\mathfrak{g}_\alpha)_\mathbb{F}, X' \in (\mathfrak{g}_{2\alpha})_\mathbb{F}$。根据定理 4.19，(i) $u.o = o$ 等价于 $u \in G_\mathbb{F}(O)$；对其应用对数（这是一个多项式），便得到等价条件 $X + X' \in \mathfrak{g}_\mathbb{F}(O)$，即 (iv)。根据 [App25，命题 4.4]，根空间分解关于 Killing 型是正交的。由于 X 和 X' 彼此正交，根据引理 5.5，$X, X' \in \mathfrak{g}_\mathbb{F}(O)$ 分别成立，即 (iii)。于是显然，X 和 X' 的所有矩阵元素都属于 O，因此 (ii) $\varphi_\alpha(u) \leq 0$。以上所有蕴含关系都是等价关系。

若 $\varphi_\alpha(u) < 0$，则 $(-v)(X_{ij}) < 0$ 且 $(-v)(X'_{ij}) < 0$。于是

$$(-v)\left((u - \mathrm{Id})_{ij}\right) = (-v)\left(\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(X+X')^k}{k!}\right)_{ij}\right) < 0.$$

若 $(-v)((u - \text{恒等元})_{ij}) < 0$，则

$$(-v)((X + X')_{ij}) = (-v)(\log(u)_{ij}) = (-v)\left(\left(\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{(u-\mathrm{Id})^k}{k}\right)_{ij}\right) < 0,$$

因此由引理 5.5，$\varphi_\alpha(u) < 0$。 □

5.3. W_a-凸性对 $U_{\mathbb{F}}$。我们首先利用岩泽回缩证明：若 $p \in \mathbb{A}$ 被某个元素 $u \in U_{\mathbb{F}}$ 映到 $q \in \mathbb{A}$，则 $p = q$。

命题 5.7. 对所有 $u \in U_{\mathbb{F}}$ 和 $a \in A_{\mathbb{F}}$

$$ua.o \in \mathbb{A} \iff ua.o = a.o.$$

证明. 对所有 $u \in U_{\mathbb{F}}$ 和 $a \in A_{\mathbb{F}}$。若 $ua.o = a.o$，则显然 $ua.o \in \mathbb{A}$。现在我们需要证明反向结论。因此设 $ua.o \in \mathbb{A}$，这意味着存在$b \in A_{\mathbb{F}}$ 使得 $d(ua.o, b.o) = 0$。由定理 4.4，岩泽回缩 ρ 不会增大距离，因此我们有

$$\begin{aligned} d(b.o, a.o) &= d(b.\,\mathrm{Id}, a.\,\mathrm{Id}) = d(\rho(b.\,\mathrm{Id}), \rho(u.a.\,\mathrm{Id})) \\ &\le d(b.\,\mathrm{Id}, ua.\,\mathrm{Id}) = d(b.o, ua.o) = 0, \end{aligned}$$

因此 $a.o = b.o = ua.o \in \mathbb{A}$，如所述。 □

现在我们证明，$\mathbb{A}$ 中被元素 $u \in (U_\alpha)_{\mathbb{F}}$固定的点集是一个半公寓，因而特别是 W_a-凸的。

命题 5.8. 设 $\alpha \in \Sigma$。对于 $u \in (U_\alpha)_{\mathbb{F}}$，我们有

$$\{p \in \mathbb{A} \colon u.p \in \mathbb{A}\} = \{a.o \in \mathbb{A} \colon \varphi_\alpha(u) \le (-v)(\chi_\alpha(a))\}$$

因此，当 $u \neq$ 恒等元时，该集合是一个半公寓（其墙平行于由 $(-v)(\chi_\alpha) = 0$ 定义的墙）。

证明。设 $p = a.o \in \mathbb{A}$，并令 $u = \exp(X + X')$，其中 $X \in (\mathfrak{g}_\alpha)_{\mathbb{F}}$、$X' \in (\mathfrak{g}_{2\alpha})_{\mathbb{F}}$。我们有

$$\begin{aligned} ua.o \in \mathbb{A} &\overset{\text{Prop. } 5.7}{\iff} ua.o = a.o \overset{\text{Thm. } 4.19}{\iff} a^{-1}ua \in G_{\mathbb{F}}(O) \\ &\iff a^{-1}\exp(X + X')\,a \in G_{\mathbb{F}}(O) \\ &\overset{[\text{App25, Lemma } 5.13]}{\iff} \exp\left(\chi_\alpha(a)^{-1}X + \chi_\alpha(a)^{-2}X'\right) \in G_{\mathbb{F}}(O). \end{aligned}$$

记 $u' := \exp\left(\chi_\alpha(a)^{-1}X + \chi_\alpha(a)^{-2}X'\right)$，根据引理 5.6，上述条件等价于 $\varphi_\alpha(u') \le 0$。使用缩写 $(-v)(Z) := \max_{ij}\{(-v)(Z_{ij})\}$（其中 $Z \in \mathfrak{g}_{\mathbb{F}}$），我们有

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha(u') &= \max\left\{(-v)\left(\chi_\alpha(a)^{-1}X\right), \frac{1}{2}(-v)\left(\chi_\alpha(a)^{-2}X'\right)\right\} \\ &= \max\left\{(-v)(X), \frac{1}{2}(-v)(X')\right\} - (-v)(\chi_\alpha(a)) \\ &= \varphi_\alpha(u) - (-v)(\chi_\alpha(a)) \le 0 \end{aligned}$$

由此可见，$ua.o \in \mathbb{A}$ 等价于 $\varphi_\alpha(u) \le (-v)(\chi_\alpha(a))$。 □

在将前面的结果推广到所有 $U_{\mathbb{F}}$之前，我们先考察 $U_{\mathbb{F}}$中的乘积会发生什么。

引理 5.9。设 $\eta \in \Sigma_{>0}$exp$((\mathfrak{g}_\eta)_{\mathbb{F}})$ 和 $u' \in$ exp$(\bigoplus_{\alpha>\eta}(\mathfrak{g}_\alpha)_{\mathbb{F}})$。若 $uu' \in G_{\mathbb{F}}(O)$, 则 $u \in G_{\mathbb{F}}(O)$ 且 $u' \in G_{\mathbb{F}}(O)$。

证明。对于 $X =$ log(u) 和 $Y =$ log(u')，我们考虑 [App25,命题 5.12] 中的 Baker–Campbell–Hausdorff 公式。

$$\exp(X)\exp(Y) = \exp\left(X + Y + \frac{1}{2}[X,Y] + \frac{1}{12}\left([X,[X,Y]] + [Y,[Y,X]]\right) + \dots\right)$$

现在，若 $uu' =$ exp(X) exp$(Y) \in G_{\mathbb{F}}(O)$，则

$$\log(uu') = X + Y + \frac{1}{2}[X,Y] + \frac{1}{12}([X,[X,Y]] + [Y,[Y,X]]) + \ldots \in \mathfrak{n}_{\mathbb{F}}(O),$$

其中 $\mathfrak{n}_{\mathbb{F}} = \bigoplus_{\lambda\in\Sigma_{>0}}(\mathfrak{g}_\lambda)_{\mathbb{F}}$ 是一个正交直和。注意， $X \in (\mathfrak{g}_\eta)_{\mathbb{F}}$ 与 log(uu') 的其余项正交，因此 $X \in (\mathfrak{g}_\eta)_{\mathbb{F}}(O)$，见引理 5.5。因此 $u =$ exp$(X) \in G_{\mathbb{F}}(O)$，从而也有 $u' = u^{-1}uu' \in G_{\mathbb{F}}(O)$，因为 $G_{\mathbb{F}}(O)$ 是一个群。□

命题 5.10. 对于 $u \in U_{\mathbb{F}}$，存在 $k_\alpha \in \Lambda \cup \{-\infty\}$，使得对于 $\alpha \in \Sigma_{>0}$

$$\{p \in \mathbb{A} \colon u.p \in \mathbb{A}\} = \{a.o \in \mathbb{A} \colon k_\alpha \le (-v)\left(\chi_\alpha(a)\right) \text{ for all } \alpha \in \Sigma_{>0}\}$$

因此，不动点集合是有限个半公寓的交集。若 $u = u_1 \cdot \ldots \cdot u_k$ 对于 $u_i \in (U_{\alpha_i})_{\mathbb{F}}$，且存在 $\Sigma_{>0} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ 使得 $\alpha_1 > \ldots > \alpha_k$，则 $k_{\alpha_i} = \varphi_{\alpha_i}(u_i)$。若 u 固定了 $\mathbb{A}$ 的所有点，则 $u =$ 恒等元。

证明. 我们使用 [App25，引理 5.14]，将其写为

$$u = u_1 \cdot \ldots \cdot u_k$$

对于某个 $u_i \in (U_{\alpha_i})_{\mathbb{F}}$，其中 $\Sigma_{>0} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ 且满足 $\alpha_1 > \ldots > \alpha_k$。根据命题 5.7， $u.p \in \mathbb{A}$ 对于 $p = a.o \in \mathbb{A}$ 成立当且仅当 $u.p = p$；根据定理 4.19 和 [App25，命题 5.16]， $a^{-1}ua \in U_{\mathbb{F}}(O)$。于是

$$a^{-1}ua = a^{-1}u_1a \cdot \ldots \cdot a^{-1}u_ka \in U_{\mathbb{F}}(O)$$

并且我们可以反复应用引理 5.9，得到 $a^{-1}u_1a \in U_{\mathbb{F}}(O), \ldots, a^{-1}u_ka \in U_{\mathbb{F}}(O)$. 根据命题 5.8，这意味着

$$k_{\alpha_i} := \varphi_{\alpha_i}(u_i) \le (-v)(\chi_{\alpha_i}(a))$$

对所有 $\alpha_i \in \Sigma_{>0}$ 均成立。此前所有蕴含关系都是等价关系，由此得出 u 的不动点集的描述。如果 u 固定了 $\mathbb{A}$ 中的所有元素，那么对所有 $a \in A_{\mathbb{F}}$， $a^{-1}ua \in U_{\mathbb{F}}(O)$ 且 $a^{-1}u_ia \in (U_{\alpha_i})_{\mathbb{F}}(O)$。这只有在 $\varphi_{\alpha_i}(u_i) \le (-v(\chi_{\alpha_i}(a)))$ 时才有可能，因此对所有 i， $u_i =$ Id，进而 $u =$ Id。□

作为上述结论的一个应用，我们可以得出， $U_{\mathbb{F}}(O)$ 的元素固定基本魏尔室，其定义为

$$C_0 := \{a.o \in \mathbb{A} \colon 0 \le (-v)(\chi_\alpha(a)) \text{ for all } \alpha \in \Sigma_{>0}\}.$$

推论 5.11. 设 $u \in U_{\mathbb{F}}(O)$。则对所有 $p \in C_0$， $u.p = p$。

证明。元素 $u \in U_{\mathbb{F}}(O)$ 固定 $o \in \mathcal{B}$，因此根据命题 5.10，

$$o \in \{p \in \mathbb{A} \colon u.p \in \mathbb{A}\} = \{a.o \in \mathbb{A} \colon k_\alpha \leq (-v)(\chi_\alpha(a)) \text{ for all } \alpha \in \Sigma_{>0}\}$$

由此我们得到，对于所有 $\alpha \in \Sigma_{>0}$，$k_\alpha \leq 0$。现在若 $p = a.o \in C_0$，则 $(-v)(\chi_\alpha(a)) \geq 0 \geq k_\alpha$，因此再次应用命题 5.10 可得$u.p = p$。□

我们还得到，任意 $u \in U_{\mathbb{F}}$ 都可以通过 $A_{\mathbb{F}}$ 共轭到 $G_{\mathbb{F}}(O)$ 中。该陈述将在 (A4) 的证明中发挥作用。

命题 5.12。对于每个 $u \in U_{\mathbb{F}}$，存在一个 $a \in A_{\mathbb{F}}$，使得 $a^{-1}ua \in U_{\mathbb{F}}(O)$。

证明。应用命题 5.10，可得到对于 $\alpha \in \Sigma_{>0}$ 的 $k_\alpha \in \Lambda \cup \{-\infty\}$，使得 u固定中的所有点

$$C := \bigcap_{\alpha \in \Sigma_{>0}} H^+_{\alpha, k_\alpha}.$$

我们断言 C 非空。事实上，设 $c \in \mathbb{F}_{>0}$ 满足 λ：对于所有 $\alpha > 0$，$= (-v)(c) > k_\alpha$。将基本魏尔室 D 视为 $\mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}(\Sigma^\vee)$ 的子集，并令 H 为 D 内部的一个元素；事实上，我们可以假设对于所有 $\alpha \in \Sigma_{>0}$，$\alpha(H) \geq 1$。如果我们将 $H = \sum_{\delta \in \Delta} q_\delta \delta^\vee \in$ 写成 $\mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}(\Sigma^\vee)$ 并令$x : = \sum_{\delta \in \Delta} q_\delta \delta^\vee \otimes \lambda \in \mathbb{A}$，则

$$\alpha(x) = \sum_{\delta \in \Delta} q_\delta \alpha(\delta^\vee)\lambda = \lambda\alpha\left(\sum_{\delta \in \Delta} q_\delta \delta^\vee\right) = \lambda\alpha(H) \geq \lambda,$$

定义见第 2.2 节和第 2.3 节。利用定理 4.12 中的识别，$\mathbb{A} \cong A_\Lambda$ 对应于 $[a] \in A_\Lambda$，且对于所有 $\alpha > 0$，$\overline{\chi_\alpha}([a]) \geq \lambda$，见定理 4.13。$[a] \in A_\Lambda$ 的任意代表元 $a \in A_{\mathbb{F}}$ 都满足（$-v$）$(\chi_\alpha(a)) \geq \lambda > k_\alpha$，因此 $a.o \in C_0$。根据 App25 的命题 5.16], $a^{-1}ua \in U_{\mathbb{F}}$；又由定理 4.19，$a^{-1}ua.o = a^{-1}a.o = o$ 推出 $a^{-1}ua \in U_{\mathbb{F}}(O)$。□

5.4. 公寓、半公寓和魏尔室的稳定子。在推论 5.11 中，我们证明了 $U_{\mathbb{F}}(O)$固定基本魏尔室 $C_0 =\{a.o \in \mathbb{A}$：对于所有 $\alpha \in \Delta\}$，$\chi_\alpha(a) \geq 1$，其中 Δ 是 Σ的一个基。本小节的目标是利用来自 App25 第 5.5] 节的群 $B_{\mathbb{F}} =U_{\mathbb{F}}A_{\mathbb{F}}M_{\mathbb{F}}$，描述 C_0 的整个稳定子。到目前为止，我们考察了 $U_{\mathbb{F}}$ 和$A_{\mathbb{F}}$的作用；现在继续研究 $K_{\mathbb{F}}$的作用。

为了确定 $K_{\mathbb{F}}$ 中哪些元素固定标准公寓 $\mathbb{A} \subseteq \mathcal{B}$，我们将在配备适当度量的对称空间 $\mathcal{X}_{\mathbb{R}}$ 上运用一些 CAT(0)几何。

定理 5.13（命题 II.2.2 [BH99]）。若 γ、γ' 是 CAT(0)空间中的两条单位速度测地线，则函数

$$t \mapsto d(\gamma(t), \gamma'(t))$$

是凸的。

在非标准对称空间 $\mathcal{X}_{\mathbb{F}}$ 中， $K_{\mathbb{F}}$ 中固定标准极大平坦 $A_{\mathbb{F}}.$恒等元的所有点的元素恰好是 $\mathsf{Cen}_{K_{\mathbb{F}}}(A_{\mathbb{F}}) =: M_{\mathbb{F}}$。在下一条命题中，我们将证明这些元素也恰好是 $K_{\mathbb{F}}$ 中逐点固定$\mathbb{A} \subseteq \mathcal{B}$ 的元素。

命题 5.14. 元素 $k \in K_{\mathbb{F}}$ 逐点固定 $\mathbb{A} \subseteq \mathcal{B}$ 当且仅当 $k \in M_{\mathbb{F}}$。

证明。回顾一下，非标准对称空间 $\mathcal{X}_{\mathbb{F}}$ 上的距离由 $d = (-v) \circ N \circ \delta$ 给出：$\mathcal{X}_{\mathbb{F}} \times \mathcal{X}_{\mathbb{F}} \to \Lambda$。我们断言一阶公式

$$\varphi\colon \quad \forall k \in K\colon (\forall a \in A\colon a.\,\mathrm{Id} = k.a.\,\mathrm{Id}) \\ \vee\, (\forall c > 0\ \exists a \in A\colon N(\delta(a'.\,\mathrm{Id}, k.a.\,\mathrm{Id})) > c)$$

在 $\mathbb{F}$ 上成立。图 5 展示了这一情形。非正式地说， φ 表明，$k \in K_{\mathbb{F}}$ 要么固定极大平坦 $A_{\mathbb{F}}.$恒等元中的所有点，要么存在点 $a.$恒等元，它们在 k 的作用下被送到任意远处。要证明 φ 在 $\mathbb{F}$ 上成立，只需根据迁移原理证明 φ 在 $\mathbb{R}$ 上成立。

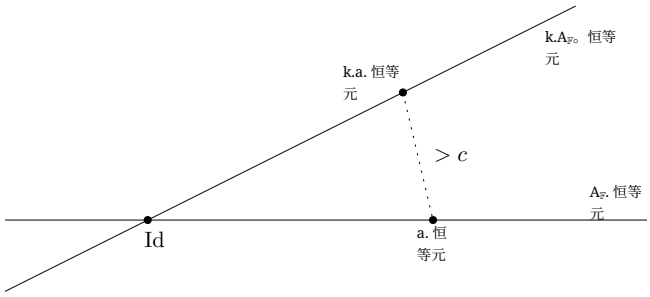

FIGURE 5. 一阶公式 φ表明，要么 k 固定 $A_{\mathbb{F}}$中的所有点，要么存在点 $a.$恒等元 $k.a.$恒等元，其距离可以任意大。

我们注意到，改变 W_s-不变的乘法范数 N 只会将$\mathcal{X}_{\mathbb{R}}$ 改变为拟等距，因此我们可以选择 $N_{\mathbb{R}}$ 来自一个标量积，即使此时 $N_{\mathbb{R}}$ 不再是半代数的，因为 φ 的真值只取决于 $N_{\mathbb{R}}$ 在等价意义下的性质。因此考虑

$$N_{\mathbb{R}}\colon A_{\mathbb{R}}.\,\mathrm{Id} \to \mathbb{R}_{\geq 1} \\ a.\,\mathrm{Id} \mapsto \exp\left(\sqrt{B_\theta(\log(a), \log(a))}\right)$$

标量积 B_θ 在 $\mathfrak{a}$上的情形。于是根据非紧型对称空间的一般理论，带有距离 $d = \log \circ N_{\mathbb{R}} \circ \delta_{\mathbb{R}}$ 的 $\mathcal{X}_{\mathbb{R}}$ 是一个完备的 CAT(0)空间。考虑一条单位速度测地线 $\gamma\colon \mathbb{R} \to A_{\mathbb{R}}.$恒等元 $\subseteq \mathcal{X}_{\mathbb{R}}$ 经过 $\gamma(0) =$ 恒等元。于是 $k.\gamma$ 也是一条经过恒等元的单位速度测地线。根据定理 5.13，函数 $f\colon t \mapsto d(\gamma(t)\ k.\gamma(t))$ 是凸的。由于 f 非负且 $f(0) = 0$， f必然是常数（因此对所有 $a \in A_{\mathbb{F}}$都有 $a.$恒等元 $= k.a.$恒等元），或者最终大于对于每个 $c \in \mathbb{R}_{>0}$ 均成立的 $\log(c)$（因此存在某个 $a \in A_{\mathbb{F}}$，使得 $N_{\mathbb{R}}(\delta_{\mathbb{R}}($ $a.$恒等元 $k.a.$恒等元$)) > c$）。

既然已在 $\mathbb{F}$ 上建立了 φ，我们现在考虑一个固定 $\mathbb{A} \subseteq \mathcal{B}$ 所有点的 $k \in K_{\mathbb{F}}$。选取满足 $c \notin O$ 的 $c \in \mathbb{F}_{>0}$，可知 φ 中的第二种可能不成立，因此对所有 $a \in A_{\mathbb{F}}$， $k.a.\mathrm{Id} = a.\mathrm{Id}$；等价地，对所有 $\tilde{a} = a^2 \in A_{\mathbb{F}}$， $k\tilde{a}k^{\mathsf{T}} = \tilde{a}$。这意味着根据 $k^{\mathsf{T}} = k^{-1}$， $k \in \mathsf{Cen}_{K_{\mathbb{F}}}(A_{\mathbb{F}})$。□

在命题 5.16 中，我们通过只要求 k 固定 $\mathbb{A}$的一个室，强化了前面的结果。我们首先需要一个预备结果。

引理 5.15. 设 $k \in K_{\mathbb{F}}$ 和 $a, b \in A_{\mathbb{F}}$。若 $k.a.o = a.o$，则 $k.a^{-1}.o = a^{-1}.o$。此外，若 $k.b.o = b.o$，则 $k.\sqrt{ab}.o = \sqrt{ab}.o$。

证明。我们首先假设 $A_{\mathbb{F}}$ 由对角矩阵组成，因此可以写成 $a = \mathrm{Diag}(a_1, \ldots, a_n)$ 和 $b = \mathrm{Diag}(b_1, \ldots, b_n)$。于是

$$\begin{aligned} k.a.o = a.o &\iff a^{-1}ka \in G_{\mathbb{F}}(O) \iff \forall i, j \colon k_{ij}\frac{a_j}{a_i} \in O \\ &\iff \forall j, i \colon {k^{\mathsf{T}}}_{ij}\frac{a_i}{a_j} \in O \iff ak^{\mathsf{T}}a^{-1} \in G_{\mathbb{F}}(O) \\ &\iff k^{\mathsf{T}}.a^{-1}.o = a^{-1}.o \iff a^{-1}.o = k.a^{-1}.o. \end{aligned}$$

此外，如果 $k.a.o = a.o$和 $k.b.o = b.o$，那么对所有 i、j都有 $k_{ij}a_j/a_i \cdot k_{ij}b_j/b_i \in O$。于是也有

$$k_{ij}\frac{\sqrt{a_jb_j}}{\sqrt{a_ib_i}} \in O$$

对所有 i、j均成立，这等价于 $k.\sqrt{ab}.o = \sqrt{ab}.o$。

一般而言，$A_{\mathbb{F}}$ 中的矩阵可能不是对角矩阵，但它们是对称矩阵。根据对称矩阵的谱定理，并由迁移原理知该定理在 $\mathbb{F}$ 上成立，$A_{\mathbb{F}}$ 可正交对角化，即存在某个 $Q \in \mathrm{SO}(n)$，使得 $QA_{\mathbb{F}}Q^{\mathsf{T}}$为对角矩阵。于是我们可以将上述论证应用于群 $QG_{\mathbb{F}}Q^{\mathsf{T}} < \mathrm{SL}_n(\mathbb{F})$。对于 $k.a.o = a.o$，我们得到

$$\begin{aligned} a^{-1}ka \in G_{\mathbb{F}}(O) &\iff (QaQ^{\mathsf{T}})^{-1}QkQ^{\mathsf{T}}QaQ^{\mathsf{T}} \in (QG_{\mathbb{F}}Q^{\mathsf{T}})(O) \\ &\iff QaQ^{\mathsf{T}}Qk^{\mathsf{T}}Q^{\mathsf{T}}(QaQ^{\mathsf{T}})^{-1} \in (QG_{\mathbb{F}}Q^{\mathsf{T}})(O) \\ &\iff ak^{\mathsf{T}}a^{-1} \in G_{\mathbb{F}}(O) \end{aligned}$$

并如上完成论证。此外，当 $b^{-1}kb \in G_{\mathbb{F}}(O)$ 时，我们有

$$(QbQ^{\mathsf{T}})^{-1}QkQ^{\mathsf{T}}QbQ^{\mathsf{T}} \in (QG_{\mathbb{F}}Q^{\mathsf{T}})(O)$$

由上可知

$$(Q\sqrt{ab}Q^{\mathsf{T}})^{-1}QkQ^{\mathsf{T}}Q\sqrt{ab}Q^{\mathsf{T}} \in (QG_{\mathbb{F}}Q^{\mathsf{T}})(O)$$

因此$\sqrt{ab}^{-1}k\sqrt{ab} \in G_{\mathbb{F}}(O)$。 □

令 $C_0 = \{a.o \in \mathbb{A} \colon \chi_\alpha(a) \geq 1$ 对所有 $\alpha \in \Delta\}$ 成立，它是与 Σ的基 Δ 相关联的基本魏尔室。

命题 5.16。设 $k \in K_{\mathbb{F}}$ 满足对所有 $p \in C_0$ 都有 $k.p = p$。那么 $k \in M_{\mathbb{F}}$，因此 k 固定了 $\mathbb{A}$ 中的所有点。事实上，若对于任意 $a \in A_{\mathbb{F}}$，k 固定了 $a.C_0$ 中的所有点，则 $k \in M_{\mathbb{F}}$。

证明。我们首先断言，每个元素 $a \in A_{\mathbb{F}}$ 都可写成 $a = a_1a_2^{-1}$，其中$a_1.o$、$a_2.o \in C_0$。为此，我们证明一阶公式

$$\varphi \colon \quad \forall a \in A \colon \exists a_1, a_2 \in A \colon a = a_1 \cdot a_2^{-1} \wedge \bigwedge_{\alpha \in \Sigma_{>0}} \chi_\alpha(a_1) \geq 1 \wedge \chi_\alpha(a_2) \geq 1$$

在 $\mathbb{R}$ 上成立，然后应用迁移原理。在 $\mathbb{R}$ 上，我们可以利用对数将问题转移到李代数 $\mathfrak{a}_{\mathbb{R}}$。我们赋予 $\mathfrak{a}$ 由标量积 B_θ 定义的距离。令 $H := \log(a)$ 且 $R := \sqrt{B_\theta}(H, H)$。由于

$\mathfrak{c}_0 := \{H \in \mathfrak{a}_{\mathbb{R}}$: 对于所有 $\alpha \in \Sigma_{>0}\}$， $\alpha(H) > 0$ 包含一个开锥，因此对于某些 $r > 0$ 和 $H' \in \mathfrak{c}_0$，它包含一个球 $B_r(H')$。将该球按因子 R/r 缩放，我们得到 $B_R(R/r \cdot H') \subseteq \mathfrak{c}_0$。如图6所示，我们定义 $H_1 = R/r \cdot H'$ 和 $H_2 = H_1 - H$，后者位于 $B_R(R/r \cdot H')$ 的边界上，因而也位于 $\mathfrak{c}_0$ 中。于是 $a = \exp(H_1)\exp(H_2)^{-1}$，从而完成了在 $\mathbb{R}$ 上关于 φ 的证明，进而也完成了在 $\mathbb{F}$ 上的证明。

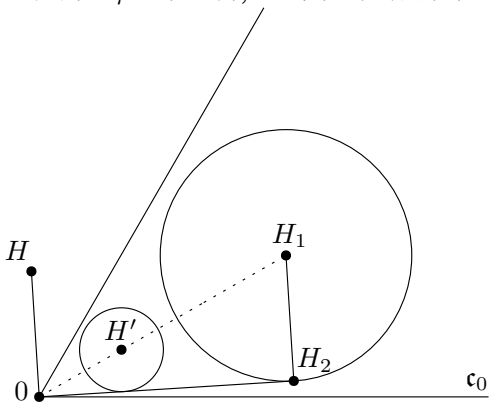

FIGURE 6. 我们利用锥 $\mathfrak{c}_0 \subseteq \mathfrak{a}_{\mathbb{R}}$ 包含一个开球，并可对其缩放，从而得到 $H_1, H_2 \in \mathfrak{c}_0$，且满足 $H = H_1 - H_2$。

若此时 $k \in K_{\mathbb{F}}$ 逐点固定 C_0，且 $p = a.o \in \mathbb{A}$。则如上所述，$a = a_1 a_2^{-1}$满足 $a_1.o$, $a_2.o \in C_0$。由于 C_0是一个锥，因此也有 $a_1^2.o, a_2^2.o \in C_0$，所以 $k.a_1^2.o = a_1^2.o$且 $k.a_2^2.o = a_2^2.o$。由引理 5.15，进而有 $k.a_2^{-2}.o = a_2^{-2}.o$，并且

$$k.a.o = k.\sqrt{a_1^2 a_2^{-2}}.o = \sqrt{a_1^2 a_2^{-2}}.o = a.o,$$

从而完成证明的第一项陈述。若对于某个 $a \in A_{\mathbb{F}}$， k 固定 $a.C_0$，则对上述论证稍作修改，同样可推出 k 逐点固定整个 $\mathbb{A}$。□

定理 5.17。 C_0 在 $G_{\mathbb{F}}$ 中的逐点稳定子为

$$B_{\mathbb{F}}(O) = U_{\mathbb{F}}(O) A_{\mathbb{F}}(O) M_{\mathbb{F}}.$$

证明。若 $g = uak \in B_{\mathbb{F}}(O) = U_{\mathbb{F}}(O)A_{\mathbb{F}}(O)M_{\mathbb{F}}$ 且 $p \in C_0$，则 $g.p = uak.p = ua.p = u.p = p$，其中最后一个等式由推论 5.11 得出。

若 g 逐点固定 C_0，则它特别固定 $o \in C_0$，因此 $g \in G_{\mathbb{F}}(O)$，根据推论 4.20 可分解为 $G_{\mathbb{F}}(O) = U_{\mathbb{F}}(O)A_{\mathbb{F}}(O)K_{\mathbb{F}}$。因此，$g = uak$，其中 $u \in U_{\mathbb{F}}(O)$且 $a \in A_{\mathbb{F}}(O)$。因此我们得到， k 逐点固定 C_0。命题 5.16 通过证明 $k \in M_{\mathbb{F}}$，即可完成证明。□

回忆一下， $S < G$ 是一个极大 $\mathbb{K}$-分裂环面，而 $A_{\mathbb{F}} < S_{\mathbb{F}}$ 是单位元的半代数连通分支。下文中我们考虑群 $T_{\mathbb{F}} := \mathsf{Cen}_{G_{\mathbb{F}}}(A_{\mathbb{F}})$和 $T_{\mathbb{F}}(O) := T_{\mathbb{F}} \cap G_{\mathbb{F}}(O)$。有时（即当$G$ 准分裂时）， $T = \mathsf{Cen}_G(S)$是一个极大代数环面，但下文中我们不会用到这一点。

引理 5.18。我们有 $T_{\mathbb{F}} = \mathsf{Cen}_{G_{\mathbb{F}}}(A_{\mathbb{F}}) = M_{\mathbb{F}} \cdot A_{\mathbb{F}}$。

证明。包含关系 $\supseteq$ 显然。反过来，令 $g \in T_{\mathbb{F}}$，并取岩泽分解 $g = nak$，其中 $n \in U_{\mathbb{F}}$、$a \in A_{\mathbb{F}}$、$k \in K_{\mathbb{F}}$，参见 [App25，定理 5.7]。对所有 $b \in A_{\mathbb{F}}$，我们有 $nak.b.o = b.nak.o = bna.o$，因此

$k.b.o = a^{-1}n^{-1}bna.o$。记 $\tilde{n} := (a^{-1}n^{-1}a)(a^{-1}bnb^{-1}a) \in U_{\mathbb{F}}$，这里用到了 [App25，命题 5.16]。于是对所有 $b \in A_{\mathbb{F}}$，都有 $k.b.o = \tilde{n}.b.o$。由命题 5.12，存在一个 $c \in A_{\mathbb{F}}$，使得 $\tilde{\tilde{n}} := c\tilde{n}c^{-1} \in U_{\mathbb{F}}(O)$，因此根据定理 5.17，$\tilde{\tilde{n}}$ 固定 C_0 中的元素。特别地，$\tilde{n}$ 固定 $c.C_0$，因此 k 固定 $c.C_0$，因为对所有 $p \in \mathbb{A}$，都有 $k.p = \tilde{n}.p$。由引理 5.16，我们便有 $k \in M_{\mathbb{F}}$。这也推出对所有 $p \in \mathbb{A}$，都有 $\tilde{n}.p = p$，从而 $\tilde{n} =$ 恒等元。于是对所有 $b \in A_{\mathbb{F}}$，都有 $bnb^{-1} = n$，而不仅仅是满足 $(-v)(\chi_\alpha(b)) = 0$ 的那些元素。因此由 [App25，引理 5.13]，$n =$ 恒等元。故 $g = ak$，其中 $k \in M_{\mathbb{F}}$ 且 $a \in A_{\mathbb{F}}$。□

定理 5.19。$\mathbb{A}$ 在 $G_{\mathbb{F}}$ 中的逐点稳定子为 $T_{\mathbb{F}}(O) = A_{\mathbb{F}}(O)M_{\mathbb{F}}$。

证明。$A_{\mathbb{F}}(O)M_{\mathbb{F}}$ 中的元素固定 $\mathbb{A}$中的所有点。若 $g \in G_{\mathbb{F}}$ 固定$\mathbb{A}$中的所有点，则它尤其固定 C_0中的点，因此由定理 5.17，$g = uak$，其中 $u \in U_{\mathbb{F}}(O)$ $a \in A_{\mathbb{F}}(O)$ $k \in M_{\mathbb{F}}$。根据命题 5.10 中对 u 的稳定子的描述，只有当 $u =$ 为恒等元时，u 才能固定 $\mathbb{A}$ 中的所有点，因此 $g \in A_{\mathbb{F}}(O)M_{\mathbb{F}}$。由引理 5.18，$T_{\mathbb{F}}(O) = A_{\mathbb{F}}(O)M_{\mathbb{F}}$。□

定理 5.20。设 $\alpha \in \Sigma$。半公寓的逐点稳定子

$$H_\alpha^+ = \{a.o \in \mathbb{A} \colon (-v)(\chi_\alpha(a)) \geq 0\}$$

在 $G_{\mathbb{F}}$ 中为$(U_\alpha)_{\mathbb{F}}(O)A_{\mathbb{F}}(O)M_{\mathbb{F}}$。

证明。不失一般性，我们可以假设 Σ 配备了一个序，使得 $\alpha > 0$。于是，由命题 5.8，$(U_\alpha)_{\mathbb{F}}(O)A_{\mathbb{F}}(O)M_{\mathbb{F}} \subseteq \mathrm{Stab}_{G_{\mathbb{F}}}(H_\alpha^+)$。若 $g \in \mathrm{Stab}_{G_{\mathbb{F}}}(H_\alpha^+)$，则由定理 5.17 可知 $g = uak \in U_\alpha(O)A_{\mathbb{F}}(O)M_{\mathbb{F}}$，因为 $C_0 \subseteq H_\alpha$，因此实际上 u 逐点固定 H_α^+。根据 App25，引理 5.14],$u = u_1 \cdots u_k$，其中 $u_i \in U_{\alpha_i}$ 满足 $\alpha_1 > \ldots > \alpha_k > 0$。于是我们可以应用命题 5.10 的精化版本，得到

$$\mathrm{Fix}_{\mathbb{A}}(u) = \{a.o \in \mathbb{A} \colon k_{\alpha_i} \leq (-v)(\chi_{\alpha_i}(a)) \text{ for all } \alpha_i \in \Sigma_{>0}\}$$

其中 $k_{\alpha_i} = \varphi_{\alpha_i}(u_i)$。在我们的情形下，$H_\alpha^+ \subseteq \mathrm{Fix}_{\mathbb{A}}(u)$，并且由于当 $k_{\alpha_i} \neq -\infty$

$$H_\alpha^+ \subseteq \{a.o \in \mathbb{A} \colon k_{\alpha_i} \leq (-v)(\chi_{\alpha_i}(a))\}$$

意味着对于所有 $\alpha_i \neq \alpha$ 和 $k_\alpha = 0$，$\alpha = \alpha_i, k_{\alpha_i} = -\infty$，因此只要 $\alpha_i \neq \alpha$，$\varphi_{\alpha_i}(u_i) = -\infty$ 就蕴含 $u_i =$ 恒等元，从而得到 $u \in (U_\alpha)_{\mathbb{F}}(O)$，证明完毕。□

推论 5.21. 设 $\alpha \in \Sigma$、$\ell \in \Lambda$。仿射半公寓的逐点稳定子

$$H_{\alpha,\ell}^+ = \{a.o \in \mathbb{A} \colon (-v)(\chi_\alpha(a)) \geq \ell\}$$

在 $G_{\mathbb{F}}$ 中为 $U_{\alpha,\ell} A_{\mathbb{F}}(O)M_{\mathbb{F}}$，其中 $U_{\alpha,\ell} = \{u \in (U_\alpha)_{\mathbb{F}} \colon u \text{ 稳定 } H_{\alpha,\ell} \text{ 逐点}\}$。

证明。若 $g \in G_{\mathbb{F}}$ 逐点稳定 $H_{\alpha,\ell}^+$，且 $a \in A_{\mathbb{F}}$ 满足 $(-v)(\chi_\alpha(a)) = \ell$，那么 $a^{-1}ga \in G_{\mathbb{F}}$ 逐点稳定 $H_{\alpha,\ell}^+$。由定理 5.20，且由于$A_{\mathbb{F}}(O)M_{\mathbb{F}} \subseteq \mathrm{Cen}_{G_{\mathbb{F}}}(A_{\mathbb{F}})$，我们有 $g \in a(U_\alpha)_{\mathbb{F}}(O)a^{-1}A_{\mathbb{F}}(O)M_{\mathbb{F}}$。而元素$u \in (U_\alpha)_{\mathbb{F}}(O)$逐点稳定满足 $(-v)(\chi_\alpha(b)) = 0$ 的元素 $b.o$，aua^{-1}逐点稳定满足 $(-v)(\chi_\alpha(ab)) = \ell + 0$ 的元素 $ab.o$，证明至此完成。□

5.5. 根群的布鲁哈-蒂茨理论。本节的目标是描述定理 5.45 中有限子集 Ω $\subseteq \mathbb{A}$ 的逐点稳定子。为此，我们首先在第 5 节中考察由 $(U_\alpha)_\mathbb{F}$ 固定的点，随后在第5.6节中考察由 $(U_\alpha)_\mathbb{F}$ 和 $(U_{-\alpha})_\mathbb{F}$ 生成的秩一子群固定的点，最后在 5.7 中研究整个群 $G_\mathbb{F}$ 。这些小节的灵感来自 BT72 第 6 节中关于稳定子的研究； 7], ，如需一份优秀的英文参考资料，请参阅 [Lan96]。

令 Ω $\subseteq \mathbb{A}$ 为公寓 $\mathbb{A}$ 的任意子集。令

$$U_{\alpha,\Omega} := \{u \in (U_\alpha)_\mathbb{F} \colon u.p = p \text{ for all } p \in \Omega\}$$

表示群 $(U_\alpha)_\mathbb{F}$ 中 Ω 的逐点稳定子。由于不存在相应的 $\mathbb{R}$-点群，下标 $\mathbb{F}$ 不再需要。根据命题 5.7，命题 5.8 可以重新表述为。

引理 5.22。对于根 $\alpha \in \Sigma$ 和任意子集 $\Omega \subseteq \mathbb{A}$，有

$$U_{\alpha,\Omega} = \{u \in (U_\alpha)_\mathbb{F} \colon \varphi_\alpha(u) \leq (-v)\left(\chi_\alpha\left(a\right)\right) \ \textit{for all } a.o \in \Omega\}\,.$$

对于任意 $\ell \in \Lambda$，记

$$U_{\alpha,\ell} := \{u \in (U_\alpha)_\mathbb{F} \colon \varphi_\alpha(u) \leq \ell\}\,.$$

注意，若 $\ell = \min_{a.o\in\Omega}\{(-v)(\chi_\alpha(a))\}$ 且 $\alpha \in \Sigma$，则引理 5.22 可以重新表述为

$$U_{\alpha,\Omega} = U_{\alpha,\ell}.$$

在 [BT72], $\ell = \inf_{a.o\in\Omega}\{(-v)(\chi_\alpha(a))\}$ 的设定下，对于 $U_{\alpha,\Omega} = U_{\alpha,\ell}$ ，总是存在这样的对象，因为它们适用于 $\Lambda = \mathbb{R}$。在我们的情形中，我们必须更加谨慎。如果 Ω 是有限集，则此 ℓ 存在。特别地，当 $|\Omega| = 1$ 时，对任意$a \in A_\mathbb{F}$

$$U_{\alpha,\{a.o\}} = U_{\alpha,(-v)(\chi_\alpha(a))}.$$

引理 5.23. 设 $\alpha \in \Sigma, \ell \in \Lambda$ 和 $a \in A_\mathbb{F}$。则

$$aU_{\alpha,\ell}a^{-1} = U_{\alpha,\ell+(-v)(\chi_\alpha(a))}.$$

证明。设 $b \in A_\mathbb{F}$ 满足 $(-v)(\chi_\alpha(b)) = \ell$，其存在性可由 [App25, 引理 5.20] 得出。我们考虑单元素集 $\Omega = \{b.o\}$。于是$U_{\alpha,\ell} = U_{\alpha,\Omega}$。设 $u \in U_{\alpha,\ell}$。则 $aua^{-1} \in U_{\alpha,a.\Omega}$ ，因为

$$aua^{-1}.(a.b.o) = au.b.o = a.b.o$$

并且由于 $aua^{-1} \in (U_\alpha)_\mathbb{F}$，参见 [App25, 命题 5.16]。现在，由于

$$(-v)(\chi_\alpha(ab)) = (-v)(\chi_\alpha(a)) + (-v)(\chi_\alpha(b)) = \ell + (-v)(\chi_\alpha(a))$$

我们有 $aU_{\alpha,\ell}a^{-1} = aU_{\alpha,\Omega}a^{-1} = U_{\alpha,a.\Omega} = U_{\alpha,\ell+(-v)(\chi_\alpha(a))}$。 □

引理5.24. 设 $\alpha \in \Sigma$、$\ell \in \Lambda$ 和 $k \in M_\mathbb{F} = \mathrm{Cen}_{K_\mathbb{F}}(A_\mathbb{F})$。那么

$$kU_{\alpha,\ell}k^{-1} = U_{\alpha,\ell}.$$

证明。由于 $k \in M_\mathbb{F}$，它表示作用于根系上的球面魏尔群中的平凡元素。特别地，$kU_\alpha k^{-1} = U_\alpha$。

令 $b \in A_{\mathbb{F}}$ 满足 $(-v)(\chi_\alpha(b)) = \ell$，且 $\Omega = \{b.o\}$。那么 $U_{\alpha,\ell} = U_{\alpha,\Omega}$。对于任意 $u \in U_{\alpha,\ell}$，我们有

$$kuk^{-1}.b.o = ku.b.o = k.b.o = b.o,$$

因此 $kU_{\alpha,\Omega}k^{-1} = U_{\alpha,\Omega}$ 证明得证。 □

结合前两个结果可知，$U_{\alpha,\ell}$ 在逐点稳定子 $T_{\mathbb{F}}(O)$ 中元素的共轭作用下保持不变。

引理 5.25. 设 $\alpha \in \Sigma, \ell \in \Lambda$ 和 $t \in T_{\mathbb{F}}(O) = M_{\mathbb{F}}A_{\mathbb{F}}(O)$。那么

$$tU_{\alpha,\ell}t^{-1} = U_{\alpha,\ell}.$$

5.6. 秩 1 情形下的布鲁哈-蒂茨理论。本节的目标是研究由 $U_{\alpha,\Omega}$ 和 $U_{-\alpha,\Omega}$生成的群。为此，我们将使用雅各布森-莫罗佐夫理论，其形式见 App25，命题 5.19]。因此，从现在起我们必须将讨论限制在约化根系上。本小节中，我们固定 $\alpha \in \Sigma$，使得 $(\mathfrak{g}_{2\alpha})_{\mathbb{F}} = 0$ 且 $u \in (U_\alpha)_{\mathbb{F}}$。

当 $u \neq$为恒等元时，存在一个 $t \in \mathbb{F}$ 和一个 $\mathfrak{sl}_2$-三元组 (X, Y, H)，如 App25，命题 5.19] $u = \exp(tX)$ 中所述。通过选择不同的 $t \in \mathbb{F}$，我们可以假设 $(-v)(X) = 0$; 在这种情况下，由于 $\exp(tY) = \exp(tX)^{\mathsf{T}}$，也有 $(-v)(Y) = 0$，并且 $(-v)(H) = 0$, 如 $H = [X, Y]$。此外，存在一个代数群同态 $\varphi_{\mathbb{F}}\colon \mathrm{SL}(2,\mathbb{F}) \to G_{\mathbb{F}}$，其核有限，使得

$$u = \exp(tX) = \varphi_{\mathbb{F}}\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \exp(tY) = \varphi_{\mathbb{F}}\begin{pmatrix}1 & 0\\ t & 1\end{pmatrix}.$$

注意到，当且仅当 $t \in O$ $u \in G_{\mathbb{F}}(O)$，利用引理 5.6。

引理 5.26。对于每个 $t \in \mathbb{F}$，我们有

$$\varphi_\alpha\left(\varphi_{\mathbb{F}}\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right) = (-v)(t) = \varphi_{-\alpha}\left(\varphi_{\mathbb{F}}\begin{pmatrix}1 & 0\\ t & 1\end{pmatrix}\right).$$

证明。由于 $(-v)(X) := \max_{ij}\{(-v)(X_{ij})\} = 0$, $\varphi_\alpha(u) = (-v)(tX) = (-v)(t)$。类似地，$\varphi_{-\alpha}(\exp(tY)) = (-v)(tY) = (-v)(t)$。□

引理 5.27。设 $\ell := (-v)(t)$。则

$$m(u) := \varphi_{\mathbb{F}}\begin{pmatrix}0 & t\\ -1/t & 0\end{pmatrix} = \varphi_{\mathbb{F}}\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1/t & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1/t & 1\end{pmatrix},\right)$$

特别地 $m(u) \in U_{-\alpha,-\ell}U_{\alpha,\ell}U_{-\alpha,-\ell}$。

证明。设

$$u' := \varphi_{\mathbb{F}}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1/t & 1\end{pmatrix} \in (U_{-\alpha})_{\mathbb{F}}.$$

矩阵表达式 $m(u) = u'uu'$ 是直接计算的结果，表明 $m(u) \in (U_{-\alpha})_{\mathbb{F}}(U_\alpha)_{\mathbb{F}}(U_{-\alpha})_{\mathbb{F}}$。由引理 5.26, $\varphi_\alpha(u) = \ell$ 且 $\varphi_{-\alpha}(u') = (-v)(-1/t) = -\ell$，从而完成证明。□

元素

$$m(u) := \varphi_{\mathbb{F}} \begin{pmatrix} 0 & t \\ -1/t & 0 \end{pmatrix} \in G_{\mathbb{F}}$$

根据 [App25，引理 5.21]，它包含在 $\mathrm{Nor}_{G_{\mathbb{F}}}(A_{\mathbb{F}})$ 中，因此是仿射魏尔群 $W_a = \mathrm{Nor}_{G_{\mathbb{F}}}(A_{\mathbb{F}})/\mathrm{Cen}_{G_{\mathbb{F}}}(A_{\mathbb{F}})$ 中某个元素的代表元。回想一下，仿射魏尔群 W_a 可识别为 $W_a = \mathbb{A} \rtimes W_s$，其中$W_s = N_{\mathbb{F}}/M_{\mathbb{F}} = \mathrm{Nor}_{K_{\mathbb{F}}}(A_{\mathbb{F}})/\mathrm{Cen}_{K_{\mathbb{F}}}(A_{\mathbb{F}})$ 是球面魏尔群。

命题 5.28. $m(u)$ 的作用分解为

$$m(u) = \varphi_{\mathbb{F}} \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix} \cdot \varphi_{\mathbb{F}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} =: a_t \cdot m \in A_{\mathbb{F}} \cdot N_{\mathbb{F}}$$

仿射部分由 a_t 表示，球面部分由 m 表示。元素 m 表示反射 $r_\alpha \in W_s$，并且对于 a_t，我们有 $(-v)(\chi_\alpha(a_t)) = 2(-v)(t) = 2\varphi_\alpha(u)$。因此，$m(u)$ 表示沿超平面的仿射反射

$$\{a.o \in \mathbb{A} \colon (-v)(\chi_\alpha(a)) = \varphi_\alpha(u)\}.$$

证明. $m(u)$ 的分解可由直接计算得出。我们考察 m 的作用。我们可以将 $A_{\mathbb{F}} = (A_{\pm\alpha})_{\mathbb{F}} \cdot A_\perp$ 分解为直积，其中

$$(A_{\pm\alpha})_{\mathbb{F}} = \varphi_{\mathbb{F}} \left(\left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} : \lambda > 0 \right\} \right)$$

and

$$A_\perp = \{a \in A_{\mathbb{F}} \colon \chi_\alpha(a) = 1\}.$$

反射 $r_\alpha \colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ 由 $r_\alpha(a_\alpha.o) = a_\alpha^{-1}.o$ 对所有 $a_\alpha \in (A_{\pm\alpha})_{\mathbb{F}}$以及 $r_\alpha(a_\perp.o) = a_\perp.o$ 对所有 $a_\perp \in A_\perp$定义。对于 $a_\alpha \in (A_{\pm\alpha})_{\mathbb{F}}$，存在某个 $\lambda > 0$ 使得

$$\begin{aligned} m.a_\alpha.o = m.a_\alpha.m^{-1}.o &= \varphi_{\mathbb{F}} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right).o \\ &= \varphi_{\mathbb{F}} \begin{pmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.o = a_\alpha^{-1}.o. \end{aligned}$$

对于 $a_\perp \in A_\perp$，我们使用

$$\begin{aligned} m = \varphi_{\mathbb{F}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} &= \varphi_{\mathbb{F}} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right) \\ &\in \exp((\mathfrak{g}_{-\alpha})_{\mathbb{F}}) \cdot \exp((\mathfrak{g}_\alpha)_{\mathbb{F}}) \cdot \exp((\mathfrak{g}_{-\alpha})_{\mathbb{F}}) \end{aligned}$$

并由 [App25，引理 5.13] 得到 $m.a_\perp.o = a_\perp.m.o = a_\perp.o$。根据 [App25，引理 5.20] 和引理 5.26，$(-v)(\chi_\alpha(a_t)) = 2(-v)(t) = 2\varphi_\alpha(u)$。点$a.o = a_\perp a_\alpha.o \in \mathbb{A}$ 被 $m(u)$ 固定，当且仅当

$$a.o = m(u).a.o = a_t m a_\perp a_\alpha m^{-1}.o = a_t a_\perp a_\alpha^{-1}.o$$

这恰好在 $(-v)(\chi_\alpha(a_t a_\alpha^{-2})) = 0$ 时成立，即当 $(-v)(\chi_\alpha(a)) = (-v)(t) = \varphi_\alpha(u)$ 时成立。□

我们从上述几何描述中得到三个推论。回顾定理 5.19，$\mathrm{Stab}_{G_{\mathbb{F}}}(\mathbb{A}) = M_{\mathbb{F}} A_{\mathbb{F}}(O) = T_{\mathbb{F}}(O)$。

引理 5.29. 对任意 $u_1, u_2 \in (U_\alpha)_{\mathbb{F}}$,

$$\varphi_\alpha(u_1) = \varphi_\alpha(u_2) \quad \Longleftrightarrow \quad m(u_2)^{-1}m(u_1) \in T_{\mathbb{F}}(O).$$

对于任意 $u \in (U_\alpha)_{\mathbb{F}}$、$u' \in (U_{-\alpha})_{\mathbb{F}}$,

$$\varphi_\alpha(u) = -\varphi_{-\alpha}(u') \quad \Longleftrightarrow \quad m(u)^{-1}m(u') \in T_{\mathbb{F}}(O).$$

证明。我们使用命题 5.28 中对作用的描述。$m(u_1)$ 和 $m(u_2)$ 都通过沿某个超平面的仿射反射作用于 $\mathbb{A}$。当且仅当 $\varphi_\alpha(u_1) = \varphi_\alpha(u_2)$ 时，它们沿同一个超平面反射；而这恰好等价于 $m(u_2)^{-1}m(u_1) \in \mathrm{Stab}_{G_{\mathbb{F}}}(\mathbb{A})$。

$m(u)$ 和 $m(u')$ 的不动超平面分别由条件 $(-v)(\chi_\alpha(a)) = \varphi_\alpha(u)$ 和 $(-v)(\chi_{-\alpha}(a)) = \varphi_{-\alpha}(u')$ 给出。第二个条件也可以写成 $(-v)(\chi_\alpha(a)) = -\varphi_{-\alpha}(u') = \varphi_\alpha(u)$，因此与第一个条件一致。□

引理 5.30. 我们有 $m(u) \cdot M_{\mathbb{F}} \cdot m(u)^{-1} = M_{\mathbb{F}}$。

证明. 设 $m(u) = a_t \cdot m \in A_{\mathbb{F}} \cdot N_{\mathbb{F}}$ 如命题 5.28 中所述。在球面魏尔群 $W_s = N_{\mathbb{F}}/M_{\mathbb{F}}$ 中，我们有 $mM_{\mathbb{F}} \cdot m^{-1}M_{\mathbb{F}} = M_{\mathbb{F}}$。于是

$$m(u) \cdot M_{\mathbb{F}} \cdot m(u)^{-1} = a_t m M_{\mathbb{F}} m^{-1} a_t^{-1} = a_t M_{\mathbb{F}} a_t^{-1} = M_{\mathbb{F}}. \qquad \square$$

引理 5.31. 设 $a, b \in A_{\mathbb{F}}$。若 $a.o = m(u).b.o$，则

$$(-v)(\chi_\alpha(a)) = (-v)(t^2\chi_\alpha(b)^{-1}).$$

此外,

$$m(u)U_{\alpha,\ell}m(u)^{-1} = U_{-\alpha,\ell-2(-v)(t)} = U_{-\alpha,\ell-2\varphi_\alpha(u)}$$

对任意 $\ell \in \Lambda$。

证明. 将 $m(u) = a_t \cdot m \in A_{\mathbb{F}} \cdot N_{\mathbb{F}}$ 按命题 5.28 中所述进行分解，我们看到 $m(u)$由一个平移元素 a_t 和球面魏尔群 W_s中某个元素$w = [m]$ 的一个代表元组成。

若 $a, b \in A_{\mathbb{F}}$ 满足 $a.o = m(u).b.o = a_t m b m^{-1}.o$，则

$$\begin{aligned}(-v)(\chi_\alpha(a)) &= (-v)(\chi_\alpha(a_t m b m^{-1})) = (-v)(\chi_\alpha(a_t)\chi_\alpha(m b m^{-1})) \\ &= (-v)(t^2\chi_\alpha(b)^{-1}).\end{aligned}$$

其中最后一个等式由 [App25、引理5.20 和 5.21] 得出。

与引理5.23的证明类似，我们现在考虑满足 $(-v)(\chi_\alpha(b)) = \ell$ 的 $\Omega = \{b.o\}$。于是 $U_{\alpha,\ \ell} = U_{\alpha,\ \Omega}$。根据 [App25 、引理 5.21 和 5.13], ，我们有

$$m(u) \cdot (U_\alpha)_{\mathbb{F}} \cdot m(u)^{-1} = a_t m (U_\alpha)_{\mathbb{F}} m^{-1} a_t^{-1} = a_t (U_{-\alpha})_{\mathbb{F}} a_t^{-1} = (U_{-\alpha})_{\mathbb{F}}.$$

由于

$$(m(u) \cdot u \cdot m(u)^{-1}).m(u).b.o = m(u).b.o,$$

因此我们有 $m(u) \cdot U_{\alpha,\ \Omega} \cdot m(u)^{-1} = U_{-\alpha,\ m(u).\Omega}$。现在根据引理 5.22 后的注释，$U_{-\alpha,\ m(u).\Omega} = U_{-\alpha,\ \ell'}$ 对于 $\ell' = (-v)(\chi_{-\alpha}(a))$，其中 $a.o = m(u).b.o$。我们有

$$\ell' = (-v)(\chi_{-\alpha}(a)) = -(-v)(\chi_\alpha(a)) = (-v)(\chi_\alpha(b)) - 2(-v)(t) = \ell - 2(-v)(t)$$

由此可得 $m(u)U_{\alpha,\ \ell}m(u)^{-1} = U_{-\alpha,\ \ell-2(-v)(t)}$。 $\square$

由引理 5.27 可知， $m(u) \in (U_{-\alpha})_{\mathbb{F}} u (U_{-\alpha})_{\mathbb{F}}$。接下来，我们将证明 $m(u)$ 是 $\mathrm{Nor}_{G_{\mathbb{F}}}(A_{\mathbb{F}}) \cap (U_{-\alpha})_{\mathbb{F}} u (U_{-\alpha})_{\mathbb{F}}$ 中唯一的元素。

引理 5.32. 设 $u', u'' \in (U_{-\alpha})_{\mathbb{F}}$，使得 $u'uu'' \in$ 正规化子$_{G_{\mathbb{F}}}(A_{\mathbb{F}})$。那么 $u'uu'' = m(u)$，并且

$$\varphi_{-\alpha}(u') = -\varphi_{\alpha}(u) = \varphi_{-\alpha}(u'').$$

证明. 回顾一下，如果

$$u = \varphi_{\mathbb{F}} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{and} \quad \overline{u} := \varphi_{\mathbb{F}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/t & 1 \end{pmatrix},$$

then

$$\begin{aligned} m(u) &= \varphi_{\mathbb{F}} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/t & 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \overline{u}^{-1} u \overline{u}^{-1} \in (U_{-\alpha})_{\mathbb{F}} (U_{\alpha})_{\mathbb{F}} (U_{-\alpha})_{\mathbb{F}}. \end{aligned}$$

那么 $u'uu'' = u'\overline{u} \cdot m(u) \cdot \overline{u}u'' \in$ 正规化子$_{G_{\mathbb{F}}}(A_{\mathbb{F}})$，且 $\overline{u}u'' \in (U_{-\alpha})_{\mathbb{F}}$。现在，对于任意 $\ell \leq -\varphi_{-\alpha}(\overline{u}u'')$，利用 [App25，引理 5.20]，得到 $a \in A_{\mathbb{F}}$，使得 $(-v)(\chi_{\alpha}(a)) = \ell$，或者等价地，$(-v)(\chi_{-\alpha}(a)) = -\ell$。由引理 5.22，这意味着 $\overline{u}u'' \in U_{-\alpha,\ -\ell} = U_{-\alpha,\ \{a.o\}}$。设 $b \in A_{\mathbb{F}}$ 满足

$$b.o = u'uu''.a.o = u'\overline{u} \cdot m(u) \cdot \overline{u}u''.a.o = u'\overline{u} \cdot m(u) \cdot a.o$$

并应用命题 5.7，$b.o = m(u).a.o$。由于

$$(-v)(\chi_{-\alpha}(b)) = (-v)(\chi_{\alpha}(a)) - 2(-v)(t) = \ell - 2(-v)(t)$$

由引理 5.31，我们可以使用引理 5.22 得到 $u'\overline{u} \in U_{-\alpha,\ \{b.o\}} = U_{-\alpha,\ \ell - 2(-v)(t)}$对所有 $\ell \leq -\varphi_{-\alpha}(\overline{u}u'')$均成立。因此，对所有 $\lambda \in \Lambda$，$\varphi_{-\alpha}(u'\overline{u}) \leq \lambda$ 均成立。具有此性质的 $(U_{-\alpha})_{\mathbb{F}}$ 中唯一的元素是 $u'\overline{u} =$ 恒等元。

现在，对所有 $a \in A_{\mathbb{F}}$,

$$u'uu''.a.o = u'\overline{u}m(u)\overline{u}u''.a.o = m(u).\overline{u}u''.a.o \in \mathbb{A}$$

从而 $\overline{u}u''.a.o \in \mathbb{A}$，因此由命题 5.7 可得 $\overline{u}u''.a.o = a.o$。$(U_{-\alpha})_{\mathbb{F}}$ 中对所有 $\mathbb{A}$ 都平凡作用的唯一元素是单位元，所以 $\overline{u}u' =$恒等元。因此$u'uu'' = \overline{u}^{-1}u\overline{u}^{-1} = m(u)$。此外

$$\varphi_{-\alpha}(u') = \varphi_{-\alpha}(u'') = \varphi_{-\alpha}(\overline{u}^{-1}) = (-v)(-1/t) = -(-v)(t) = -\varphi_{\alpha}(u). \quad \square$$

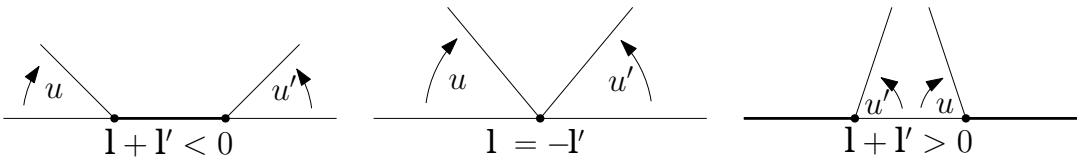

FIGURE 7. 在$\ell + \ell' < 0$ (左)、 $\ell = -\ell'$ (中)且 $\ell + \ell' > 0$的情况下，元素 $u \in (U_{\alpha})_{\mathbb{F}}$、 $u' \in (U_{-\alpha})_{\mathbb{F}}$ 的作用示意图，其中 $\ell := \varphi_{\alpha}(u)$且 $\ell' := \varphi_{-\alpha}(u')$。仿射魏尔群中的元素$m(u)$只有在 $\ell = -\ell'$的情况下才能由 u、 u' 生成。

$u \in (U_{\alpha})_{\mathbb{F}}$、 $u' \in (U_{-\alpha})_{\mathbb{F}}$ 的作用取决于其根群赋值，如图7所示。仅当 $\ell + \ell' \leq 0$时， u、 u'才固定一个公共点。为研究稳定子，我们分别考虑 $\ell + \ell' < 0$ 和 $\ell = -\ell'$两种情况。

引理 5.33。设 $u' \in (U_{-\alpha})_{\mathbb{F}}$ 满足 $\varphi_\alpha(u) + \varphi_{-\alpha}(u') < 0$。则存在一个元素$(u_1, t, u_1') \in (U_\alpha)_{\mathbb{F}} \times T_{\mathbb{F}} \times (U_{-\alpha})_{\mathbb{F}}$，使得 $u'u = u_1 t u_1'$。
Moreover $\varphi_\alpha(u) = \varphi_\alpha(u_1)$, $\varphi_{-\alpha}(u') = \varphi_{-\alpha}(u_1')$ *and* $t \in T_{\mathbb{F}}(O)$.

证明。若 $u =$ 恒等元，我们可以取 $u_1 =$ 恒等元 $t =$ 恒等元以及 $u_1' = u'$。因此，我们不妨假设 $u \neq$ 恒等元。元素 $u'u$ 属于在 [App25 第5节9]中定义的群 $(L_{\pm\alpha})_{\mathbb{F}}$。由于 $(L_{\pm\alpha})_{\mathbb{F}}$ 仍是一个半单李代数群，子群 $(K_{\pm\alpha})_{\mathbb{F}}$、$(A_{\pm\alpha})_{\mathbb{F}}$ 和 $(M_{\pm\alpha})_{\mathbb{F}}$ 可以像我们在第4节中对 $G_{\mathbb{F}}$ 所做的那样加以识别。根据[App25，推论 5.26],

$$(L_{\pm\alpha})_{\mathbb{F}} = (B_\alpha)_{\mathbb{F}} \cdot (B_{-\alpha})_{\mathbb{F}} \amalg m \cdot (B_{-\alpha})_{\mathbb{F}},$$

其中 $(B_\alpha)_{\mathbb{F}} := (M_{\pm\alpha})_{\mathbb{F}}(A_{\pm\alpha})_{\mathbb{F}}(U_\alpha)_{\mathbb{F}}$，且 $(B_{-\alpha})_{\mathbb{F}} :=(M_{\pm\alpha})_{\mathbb{F}}(A_{\pm\alpha})_{\mathbb{F}}(U_{-\alpha})_{\mathbb{F}}$。我们注意到，根据 [App25，引理 5.23] 以及引理 5.18，$(M_{\pm\alpha})_{\mathbb{F}}(A_{\pm\alpha})_{\mathbb{F}} \subseteq M_{\mathbb{F}} \cdot A_{\mathbb{F}} = T_{\mathbb{F}}$。

我们有 $u'u \notin m \cdot (B_{-\alpha})_{\mathbb{F}}$，否则便存在 $u'' \in (U_{-\alpha})_{\mathbb{F}}$，使得

$$u'uu'' \in m \cdot (M_{\pm\alpha})_{\mathbb{F}}(A_{\pm\alpha})_{\mathbb{F}} \subseteq \mathrm{Nor}_{G_{\mathbb{F}}}(A_{\mathbb{F}})$$

因此由引理 5.32，$-\varphi_\alpha(u) = \varphi_{-\alpha}(u')$，这与我们的假设矛盾。因此

$$\begin{aligned} u'u &\in (B_\alpha)_{\mathbb{F}} \cdot (B_{-\alpha})_{\mathbb{F}} = (U_\alpha)_{\mathbb{F}}(A_{\pm\alpha})_{\mathbb{F}}(M_{\pm\alpha})_{\mathbb{F}}(A_{\pm\alpha})_{\mathbb{F}}(U_{-\alpha})_{\mathbb{F}} \\ &\subseteq (U_\alpha)_{\mathbb{F}} \cdot T_{\mathbb{F}} \cdot (U_{-\alpha})_{\mathbb{F}}. \end{aligned}$$

现在设 $u_1 \in (U_\alpha)_{\mathbb{F}}$、$u_1' \in (U_{-\alpha})_{\mathbb{F}}$，且 $t \in (A_{\pm\alpha})_{\mathbb{F}}(M_{\pm\alpha})_{\mathbb{F}}(A_{\pm\alpha})_{\mathbb{F}}$，其中 $u'u = u_1 t u_1'$。若 $u_1 =$恒等元，则 $u = (u')^{-1}u_1 t u_1' \in (U_{-\alpha})_{\mathbb{F}} M_{\mathbb{F}} A_{\mathbb{F}} \cap U_\alpha$；但由于 u不能将某个半公寓 $H^+_{-\alpha,\ell}$ 映到半公寓 $H^+_{-\alpha,\ell'}$，同时又固定半公寓 $H^+_{\alpha,k}$（见命题 5.8 和推论 5.21），故 $u =$恒等元，我们可以像证明开头那样进行论证。因此我们可以假设 $u_1 \neq$恒等元。现在证明 $\varphi_\alpha(u) = \varphi_\alpha(u_1)$。考虑元素 $m(u_1) \in$ 正规化子$_{G_{\mathbb{F}}}(A_{\mathbb{F}})$。那么

$$m(u_1) \in (U_{-\alpha})_{\mathbb{F}} u_1 (U_{-\alpha})_{\mathbb{F}},$$

因此，令 $u_2', u_3' \in (U_{-\alpha})_{\mathbb{F}}$，使得 $u_1 = u_2' m(u_1) u_3'$，并由引理 5.32 $\varphi_{-\alpha}(u_2')$ 得 $= -\varphi_\alpha(u_1) = \varphi_{-\alpha}(u_3')$。于是

$$\begin{aligned} u &= (u')^{-1}u_1 t u_1' = (u')^{-1}u_2' m(u_1) u_3' t u_1' \\ &= ((u')^{-1}u_2') m(u_1) t (t^{-1}u_3' t u_1') \in (U_{-\alpha})_{\mathbb{F}} m(u_1) t (U_{-\alpha})_{\mathbb{F}} \end{aligned}$$

其中我们用到了 $t^{-1}u_3' t \in (U_{-\alpha})_{\mathbb{F}}$，这由 [App25, 命题 5.16] 得出，以及 $(M_{\pm\alpha})_{\mathbb{F}}$ 在秩一根系 $\{\alpha, -\alpha\}$ 上平凡作用这一事实。再次应用引理 5.32 得到 $\varphi_{-\alpha}((u')^{-1}u_2') = -\varphi_\alpha(u)$。现在，由于 $\varphi_\alpha(u) + \varphi_{-\alpha}(u') < 0$，我们有

$$\varphi_{-\alpha}((u')^{-1}) = \varphi_{-\alpha}(u') < -\varphi_\alpha(u) = \varphi_{-\alpha}((u')^{-1}u_2') \leq \max\{\varphi_{-\alpha}((u')^{-1}), \varphi_{-\alpha}(u_2')\}$$

由此可推知 $\varphi_{-\alpha}((u')^{-1}) \neq \varphi_{-\alpha}(u_2')$，因此根据引理 5.4 的第二部分，$\varphi_{-\alpha}((u')^{-1}u_2') = \varphi_{-\alpha}(u_2')$，从而

$$\varphi_\alpha(u) = -\varphi_{-\alpha}((u')^{-1}u_2') = -\varphi_{-\alpha}(u_2') = \varphi_\alpha(u_1).$$

证明 $\varphi_{-\alpha}(u') = \varphi_{-\alpha}(u_1')$ 的过程完全相同，只需将 u 替换为 u'、将 u_1 替换为 u_1'，并将 α 替换为 $-\alpha$。

由上述讨论可得

$$m(u_1)t = ((u_2')^{-1}u')u((u_1')^{-1}t^{-1}(u_3')^{-1}t) \in (U_{-\alpha})_{\mathbb{F}}u(U_{-\alpha})_{\mathbb{F}}$$

根据引理 5.32 的唯一性结论，这意味着 $m(u_1)t = m(u)$。由于 $\varphi_\alpha(u) = \varphi_\alpha(u_1)$，由命题 5.28 可知，$m(u_1)$ 和 $m(u)$ 都表示仿射魏尔群中的同一个元素：反射 r_α 后接长度为 $\varphi_\alpha(u) = \varphi_\alpha(u_1)$ 的平移。这意味着 $[t] = [m(u_1)^{-1}][m(u)] = [\text{恒等元}] \in W_a$，特别是 t 固定 o，因此 $t \in T_{\mathbb{F}}(O)$。□

命题 5.34. 设 $\ell, \ell' \in \Lambda$ 满足 $\ell + \ell' < 0$。令

$$L_{\ell,\ell'} := \langle u \in U_{\alpha,\ell} \cup U_{-\alpha,\ell'} \rangle$$

并且 $H_{\ell,\ \ell'} := L_{\ell,\ \ell'} \cap T_{\mathbb{F}}(O)$。于是

$$L_{\ell,\ell'} = U_{\alpha,\ell} \cdot U_{-\alpha,\ell'} \cdot H_{\ell,\ell'}.$$

证明。包含关系 $\supseteq$ 显然。我们通过对字长进行归纳来证明另一个方向。若 $L_{\ell,\ell'}$ 中的一个字长为 1，则它属于 $U_{\alpha,\ell} \cdot U_{-\alpha,\ell'} \cdot H_{\ell,\ell'}$。因此，只需证明对任意 $u_{\pm\alpha} \in U_{\alpha,\ell} \cup U_{-\alpha,\ell'}$ 以及 $v = u \cdot u' \cdot h \in U_{\alpha,\ell} \cdot U_{-\alpha,\ell'} \cdot H_{\ell,\ell'}$，都有 $u_{\pm\alpha}v \in U_{\alpha,\ell} \cdot U_{-\alpha,\ell'} \cdot H_{\ell,\ell'}$。若 $u_\alpha \in U_{\alpha,\ell}$，则结论显然成立，因此设 $u_{-\alpha} \in U_{-\alpha,\ell'}$。由引理 5.33，可找到 $(u_1, t_1, u_1') \in U_{\alpha,\ell} \times T_{\mathbb{F}}(O) \times U_{-\alpha,\ell'}$，使得 $u_{-\alpha}u = u_1t_1u_1'$。于是 $u_{-\alpha}v = u_1t_1u_1'u'h$。由引理 5.25，$t_1U_{-\alpha,\ell'}t_1^{-1} = U_{-\alpha,\ell'}$，因此 $u_{-\alpha}v \in U_{\alpha,\ell} \cdot U_{-\alpha,\ell'} \cdot H_{\ell,\ell'}$，如所需。□

接下来，我们考虑情形 $\ell + \ell' = 0$。为此，我们引入

$$U_{-\alpha,-\ell+} := \bigcup_{t<-\ell} U_{-\alpha,t} \subseteq U_{-\alpha,-\ell}$$

根据引理 5.4，它是一个群。

命题 5.35. 设 $\ell := \varphi_\alpha(u)$，并设 $m(u)$ 如 [App25, 引理 5.21] 中所述。设

$$L_{\ell,-\ell} := \langle \tilde{u} \in U_{\alpha,\ell} \cup U_{-\alpha,-\ell} \rangle$$

并且 $H_{\ell,-\ell} := L_{\ell,-\ell} \cap T_{\mathbb{F}}(O)$。那么

$$L_{\ell,-\ell} = (U_{\alpha,\ell} \cdot H_{\ell,-\ell} \cdot U_{-\alpha,-\ell+}) \cup (U_{\alpha,\ell} \cdot m(u) \cdot H_{\ell,-\ell} \cdot U_{\alpha,\ell}).$$

证明。由引理 5.27，$m(u) \in U_{-\alpha,-\ell}U_{\alpha,\ell}U_{-\alpha,-\ell}$，因此

$$B := (U_{\alpha,\ell} \cdot H_{\ell,-\ell} \cdot U_{-\alpha,-\ell+}) \cup (U_{\alpha,\ell} \cdot m(u) \cdot H_{\ell,-\ell} \cdot U_{\alpha,\ell}) \subseteq L_{\ell,-\ell}.$$

由引理 5.31，$m(u) \cdot U_{\alpha,\ell} \cdot m(u)^{-1} = U_{-\alpha,-\ell}$，这表明 $L_{\ell,-\ell}$ 由 $U_{\alpha,\ell}$ 和 $m(u)$ 生成。因此，要证明 $L_{\ell,-\ell} \subseteq B$，只需证明 B 是一个群。由命题 5.34，$B \cdot U_{\alpha,\ell} = B$ 且 $B \cdot U_{-\alpha,-\ell+} = B$。由引理 5.25，$B \cdot H_{\ell,-\ell} = B$。还需证明 $B \cdot m(u) = B$。

由于 $m(u) \cdot U_{\alpha,\ \ell} \cdot m(u)^{-1} = U_{-\alpha,\ -\ell}$ 并且根据引理 5.30，$m(u) \cdot T_{\mathbb{F}}(O) \cdot m(u)^{-1} = T_{\mathbb{F}}(O)$，我们有

$$(U_{\alpha,\ell} \cdot H_{\ell,-\ell} \cdot U_{-\alpha,-\ell})m(u) = U_{\alpha,\ell} \cdot m(u) \cdot H_{\ell,-\ell} \cdot U_{\alpha,\ell} \subseteq B$$

and

$$(U_{\alpha,\ell} \cdot m(u) \cdot H_{\ell,-\ell} \cdot U_{\alpha,\ell})\, m(u) = U_{\alpha,\ell} \cdot H_{\ell,-\ell} \cdot U_{-\alpha,-\ell} \cdot m(u)^2.$$

根据命题 5.28， $m(u)^2$ 在 $\mathbb{A}$ 上平凡作用，因此它属于 $\mathrm{Cen}_{G_{\mathbb{F}}}(A_{\mathbb{F}}) \cap G_{\mathbb{F}}(O) = T_{\mathbb{F}}(O)$，故

$$(U_{\alpha,\ell} \cdot m(u) \cdot H_{\ell,-\ell} \cdot U_{\alpha,\ell})\, m(u) = U_{\alpha,\ell} \cdot H_{\ell,-\ell} \cdot U_{-\alpha,-\ell}.$$

若 $u' \in (U_{-\alpha,-\ell})_{\mathbb{F}}$ 满足 $\varphi_{-\alpha}(u') = -\ell$，则由引理 5.29， $m(u)^{-1}m(u') \in T_{\mathbb{F}}(O)$，因此 $m(u') \in m(u) \cdot H_{\ell,\ -\ell}$，因为 $m(u)\ m(u') \in L_{\ell,\ -\ell}$。因此

$$u' \in U_{\alpha,\ell} \cdot m(u') \cdot U_{\alpha,\ell} \subseteq U_{\alpha,\ell} \cdot m(u) \cdot H_{\ell,-\ell} \cdot U_{\alpha,\ell}.$$

and

$$U_{-\alpha,-\ell} \subseteq U_{-\alpha,-\ell+} \cup U_{\alpha,\ell} \cdot m(u) \cdot H_{\ell,-\ell} \cdot U_{\alpha,\ell}.$$

这表明

$$\begin{aligned}
&(U_{\alpha,\ell} \cdot m(u) \cdot H_{\ell,-\ell} \cdot U_{\alpha,\ell})\, m(u) \\
&\subseteq (U_{\alpha,\ell} \cdot H_{\ell,-\ell} \cdot U_{-\alpha,-\ell+}) \cup (U_{\alpha,\ell} \cdot H_{\ell,-\ell} \cdot U_{\alpha,\ell} \cdot m(u) \cdot H_{\ell,-\ell} \cdot U_{\alpha,\ell}) \\
&= B.
\end{aligned}$$

同理，可以证明 $B \cdot m(u)^{-1} \subseteq B$，由此完成 $B = L_{\ell,\ -\ell}$ 的证明。□

命题 5.36. 设 $\Omega \subseteq \mathbb{A}$ 为非空有限子集，并且

$$\ell = \min_{a.o \in \Omega} \{(-v)(\chi_\alpha(a))\}, \quad \ell' = \min_{a.o \in \Omega} \{(-v)(\chi_{-\alpha}(a))\}.$$

设 $L_{\ell,\ \ell'} := \langle u \in U_{\alpha,\ \ell} \cup U_{-\alpha,\ \ell'} \rangle$，且 $N_{\ell,\ \ell'} := L_{\ell,\ \ell'} \cap$ 是 $G_{\mathbb{F}}(A_{\mathbb{F}})$ 的正规化子。则

$$L_{\ell,\ell'} = U_{\alpha,\ell} \cdot U_{-\alpha,\ell'} \cdot N_{\ell,\ell'}.$$

证明。由于 $\Omega \neq \emptyset$，我们有 $\ell + \ell' \leq 0$。如果 $\ell + \ell' < 0$，则可应用命题 5.34，证明即告完成。否则，我们有

$$L_{\ell,-\ell} = (U_{\alpha,\ell} \cdot H_{\ell,-\ell} \cdot U_{-\alpha,-\ell+}) \cup (U_{\alpha,\ell} \cdot m(u) \cdot H_{\ell,-\ell} \cdot U_{\alpha,\ell})$$

根据命题 5.35。由于 $H_{\ell,\ \ell'} \subseteq T_{\mathbb{F}}(O)$，我们可以应用引理 5.25，得到 $H_{\ell,\ \ell'}U_{\alpha,\ \ell} = U_{\alpha,\ \ell}H_{\ell,\ \ell'}$ 和 $H_{\ell,\ \ell'}U_{-\alpha,\ \ell'} = U_{-\alpha,\ \ell'}H_{\ell,\ \ell'}$。最后，由引理 5.31 可得 $m(u)U_{\alpha,\ \ell}m(u)^{-1} = U_{-\alpha,\ \ell-2\varphi_\alpha(u)} = U_{-\alpha,\ -\ell} = U_{-\alpha,\ \ell'}$。□

我们将为 App25 第 5 节[9]中定义的秩一子群 $(L_{\pm\alpha})_{\mathbb{F}}$ 证明一个“混合岩泽分解”。岩泽分解中的紧群 $K_{\mathbb{F}}$ 将由 $\mathrm{Stab}_{(L_{\pm\alpha})_{\mathbb{F}}}(o)$ 的一个子群，以及一个代表球面魏尔群 $W_{\pm\alpha} = \{[\mathrm{Id}], [m]\}$ 中非平凡元素的元素 m 所替代，该球面魏尔群属于 $(L_{\pm\alpha})_{\mathbb{F}}$。

命题 5.37。设 $L_o = \langle U_{\alpha,\ o}、U_{-\alpha,\ o} \rangle$。则

$$\begin{aligned}
L_{\pm\alpha} &= (U_\alpha)_{\mathbb{F}} \cdot (\mathrm{Nor}_{G_{\mathbb{F}}}(A_{\mathbb{F}}) \cap (L_{\pm\alpha})_{\mathbb{F}}) \cdot L_o \\
&= (U_\alpha)_{\mathbb{F}} \cdot (\mathrm{Cen}_{G_{\mathbb{F}}}(A_{\mathbb{F}}) \cap (L_{\pm\alpha})_{\mathbb{F}}) \cdot L_o \ \amalg\ (U_\alpha)_{\mathbb{F}} \cdot (\mathrm{Cen}_{G_{\mathbb{F}}}(A_{\mathbb{F}}) \cap (L_{\pm\alpha})_{\mathbb{F}}) \cdot m \cdot L_o.
\end{aligned}$$

证明。显然包含关系 $\supseteq$ 成立。对于反向包含，我们使用 [App25，推论 5.25] 来写出

$$(L_{\pm\alpha})_{\mathbb{F}} = (B_\alpha)_{\mathbb{F}} \ \amalg\ (B_\alpha)_{\mathbb{F}} m (B_\alpha)_{\mathbb{F}}$$

其中 m 是与 $(L_{\pm\alpha})_{\mathbb{F}}$ 和 $(B_\alpha)_{\mathbb{F}} = (M_{\pm\alpha})_{\mathbb{F}}(A_{\pm\alpha})_{\mathbb{F}}(U_\alpha)_{\mathbb{F}}$ 相关的球面魏尔群 $W_{\pm\alpha}$ 中非平凡元素的一个代表元，如

[App25，第 5 节.9]。若 $g \in (B_\alpha)_{\mathbb{F}}$，则 $g \in U_\alpha (M_{\pm\alpha})_{\mathbb{F}} (A_{\pm\alpha})_{\mathbb{F}} \subseteq (U_\alpha)_{\mathbb{F}} \cdot$（正规化子$_{G_{\mathbb{F}}}(A_{\mathbb{F}}) \cap (L_{\pm\alpha})_{\mathbb{F}}$）。我们声称

$$m(B_\alpha)_{\mathbb{F}} = m(M_{\pm\alpha})_{\mathbb{F}}(A_{\pm\alpha})_{\mathbb{F}}(U_\alpha)_{\mathbb{F}} \subseteq (U_\alpha)_{\mathbb{F}} \cdot (\mathrm{Nor}_{G_{\mathbb{F}}}(A_{\mathbb{F}}) \cap (L_{\pm\alpha})_{\mathbb{F}}) \cdot L_o.$$

假设该断言成立，我们得到

$$\begin{aligned}(B_\alpha)_{\mathbb{F}} m(B_\alpha)_{\mathbb{F}} &\subseteq (B_\alpha)_{\mathbb{F}}(U_\alpha)_{\mathbb{F}} \cdot (\mathrm{Nor}_{G_{\mathbb{F}}}(A_{\mathbb{F}}) \cap (L_{\pm\alpha})_{\mathbb{F}}) \cdot L_o \\ &\subseteq (U_\alpha)_{\mathbb{F}} \cdot (\mathrm{Nor}_{G_{\mathbb{F}}}(A_{\mathbb{F}}) \cap (L_{\pm\alpha})_{\mathbb{F}}) \cdot L_o\end{aligned}$$

因为 $(M_{\pm\alpha})_{\mathbb{F}}$ 和 $(A_{\pm\alpha})$ 将 $(U_\alpha)_{\mathbb{F}}$正规化。为证明该断言，我们考虑 $m(M_{\pm\alpha})_{\mathbb{F}}(A_{\pm\alpha})_{\mathbb{F}}u$中关于 $u \in (U_\alpha)_{\mathbb{F}}$的一个元素。若 $\varphi_\alpha(u) \leq 0$，则 $m(M_{\pm\alpha})_{\mathbb{F}}(A_{\pm\alpha})_{\mathbb{F}}u \subseteq (U_\alpha)_{\mathbb{F}}$(正规化子$_{G_{\mathbb{F}}}(A_{\mathbb{F}}) \cap (L_{\pm\alpha})_{\mathbb{F}})$ L_o，于是结论成立。另一方面，若 $\varphi_\alpha(u) > 0$，则由引理 5.27，存在 $u', u'' \in (U_{-\alpha})_{\mathbb{F}}$，使得 $u = u' \cdot m(u) \cdot u''$ 且 $\varphi_{-\alpha}(u') = \varphi_{-\alpha}(u'') = -\varphi_\alpha(u) < 0$。特别地，$u'' \in L_o$，并且

$$\begin{aligned}m(M_{\pm\alpha})_{\mathbb{F}}(A_{\pm\alpha})_{\mathbb{F}}u &= m(M_{\pm\alpha})_{\mathbb{F}}(A_{\pm\alpha})_{\mathbb{F}}u' \cdot m(u) \cdot u'' \\ &= m\tilde{u}'m^{-1} \cdot m(M_{\pm\alpha})_{\mathbb{F}}(A_{\pm\alpha})_{\mathbb{F}}m(u) \cdot u'' \\ &\subseteq (U_\alpha)_{\mathbb{F}} \cdot (\mathrm{Nor}_{G_{\mathbb{F}}}(A_{\mathbb{F}}) \cap (L_{\pm\alpha})_{\mathbb{F}}) \cdot L_o,\end{aligned}$$

其中 $\tilde{u}' \in (U_{-\alpha})_{\mathbb{F}}$ 是 u' 的一个 $(M_{\pm\alpha})_{\mathbb{F}}(A_{\pm\alpha})_{\mathbb{F}}$-共轭。 □

命题 5.36 的结论在 $\Omega = \emptyset$ 时仍然成立。

引理 5.38. 设 $\alpha \in \Sigma$, $L = \langle (U_\alpha)_{\mathbb{F}}, (U_{-\alpha})_{\mathbb{F}} \rangle$ 和 $N =$正规化子$_{G_{\mathbb{F}}}(A_{\mathbb{F}}) \cap L$. Then

$$L = (U_\alpha)_{\mathbb{F}}(U_{-\alpha})_{\mathbb{F}}N.$$

证明. 显然 $\supseteq$。我们考虑元素 $g \in L$ 的字长。如果 g至多由两个字母组成，那么显然它属于 $(U_\alpha)_{\mathbb{F}}(U_{-\alpha})_{\mathbb{F}}N$，除非 $g = u'u$for $u' \in (U_{-\alpha})_{\mathbb{F}}$ 和 $u \in (U_\alpha)_{\mathbb{F}}$。在这种情况下，我们将 $u' = u''m(u)u'''$ for$u'', u''' \in (U_\alpha)_{\mathbb{F}}$ 写成这样。于是，根据引理 5.31，$\bar{u} := m(u)u'''um(u)^{-1} \in (U_{-\alpha})_{\mathbb{F}}$，并且我们有 $g = u''\bar{u}m(u) \in (U_\alpha)_{\mathbb{F}}(U_{-\alpha})_{\mathbb{F}}N$。

若 g 至少包含三个字母，写作 $g = u_n u_{n-1} \dots u_2 u_1$，其中 u_i 是 $(U_\alpha)_{\mathbb{F}}$、$(U_{-\alpha})_{\mathbb{F}}$ 中的元素，且交替出现。将 $u_2 = u_2' m(u_2) u_2''$ 写成 $u_2', u_2'' \in (U_{-\beta})_{\mathbb{F}}$，其中 $u_2 \in (U_\beta)_{\mathbb{F}}$ 对于 $\beta \in \{\pm\alpha\}$ 成立。再次使用引理 5.31，我们得到 $\bar{u} := m(u_2)u_2''u_1m(u_2)^{-1} \in (U_\beta)_{\mathbb{F}}$，且 $g = u_n \dots u_4(u_3u_2')\bar{u}m(u)$，因此存在某个 $h \in L$，使得 $g \in hN$ 且字长更短。应用归纳法即可得到结论。□

下面给出子集 $\Omega \subseteq \mathbb{A}$ 在秩一子群 L 的作用下的稳定子的描述。虽然后文不会用到这一描述，但为求完整，仍将其列出。

命题 5.39. 设 $\alpha \in \Sigma$、$\Omega \subseteq \mathbb{A}$ 非空且有限，$L = \langle (U_\alpha)_{\mathbb{F}}, (U_{-\alpha})_{\mathbb{F}} \rangle$，$N =$正规化子$_{G_{\mathbb{F}}}(A_{\mathbb{F}}) \cap L$ 且 $N_\Omega = \{g \in N :$ 对所有 $p \in \Omega\}$，$n.p = p$。那么

$$\mathrm{Stab}_L(\Omega) = \langle U_{\alpha,\Omega}, U_{-\alpha,\Omega}, N_\Omega \rangle = U_{\alpha,\Omega}U_{-\alpha,\Omega}N_\Omega.$$

证明. 包含关系 $\supseteq$ 显然。设

$$\ell = \min_{a.o \in \Omega}\{(-v)(\chi_\alpha(a))\} \quad \text{and} \quad \ell' = \min_{a.o \in \Omega}\{(-v)(\chi_{-\alpha}(a))\}.$$

那么 $\ell \leq -\ell'$ 由于 $\Omega \neq \emptyset$, $U_{\alpha,\ell} = U_{\alpha,\Omega}$ 且$U_{-\alpha,\ell'} = U_{-\alpha,\Omega}$。现在，若 $g \in$Stab$_L(\Omega)$，则根据引理 5.38，存在 $u \in (U_\alpha)_{\mathbb{F}}, u' \in (U_{-\alpha})_{\mathbb{F}}, n \in N$，使得对于所有 $p \in \Omega$，均有 $g.p = uu'n.p = p$。我们区分以下三种情形：

$\varphi_\alpha(u)$。若 $\varphi_\alpha(u) \le \ell$，则$u \in U_{\alpha,\ell}$ 且对于所有 $p \in \Omega$，均有 $u'n.p = u^{-1}.p = p$，因此$u' \in U_{-\alpha,\ell'}$，根据命题 5.7，有 $n \in N_\Omega$，从而 $g \in U_{\alpha,\ell}U_{-\alpha,\ell'}N_{\Omega}$。

若 $\varphi_\alpha(u) \ge -\ell'$，则我们将 $u = u''m(u)u'''$ 记作某个 $u'', u''' \in (U_{-\alpha})_{\mathbb{F}}$，满足$\varphi_{-\alpha}(u'') = \varphi_{-\alpha}(u''') = -\varphi_\alpha(u) \le \ell'$。简记 $\bar{u} := m(u)u'''u'm(u)^{-1} \in (U_\alpha)_{\mathbb{F}}$，由引理 5.31 得到 $g = uu'n = u''\bar{u}m(u)n \in U_{-\alpha,\ell'} \cdot (U_\alpha)_{\mathbb{F}} \cdot N$。于是对所有 $p \in \Omega$，均有 $\bar{u}m(u)n.p = p$，因此由命题 5.7 得 $\varphi_\alpha(\bar{u}) \le \ell$，进而对所有 $p \in \Omega$，均有 $m(u)n.p = p$，所以 $m(u)n \in N_\Omega$。于是 $g \in U_{\alpha,\ell}U_{-\alpha,\ell'}N_{\Omega}$。

我们声称，最后一种情形 $\ell < \varphi_\alpha(u) < -\ell'$ 不可能发生。为此，首先注意，对于 $p \in \Omega$，我们有 $u.p = p$ 当且仅当 $u'n.p = p$，当且仅当 $u'.p = p$。现在取 $a_1, a_2 \in A_{\mathbb{F}}$，满足 $(-v)(\chi_\alpha(a_1)) = \ell$ 且 $(-v)(\chi_\alpha(a_2)) = -\ell'$。此时 $u.a_1.o \ne a_1.o$，所以 $u'.a_1.o \ne a_1.o$，进而 $\varphi_{-\alpha}(u') > -\ell$，但 $u.a_2.o = a_2.o$，因此 $u'.a_2.o = a_2.o$，进而 $\varphi_{-\alpha}(u') \le \ell'$。然而这是不可能的，因为那样一来 $-\ell \le \varphi_{-\alpha}(u') \le \ell'$，这与 $\ell < \ell'$ 矛盾。我们已经证明，$\mathrm{Stab}_L(\Omega) \subseteq U_{\alpha,\ell}U_{-\alpha,\ell'}N_{\Omega}$。□

5.7. 高秩中的布吕阿-蒂茨理论。本节中，我们继续假设 Σ 是一个约化根系。设 $>$ 是 Σ 上的一个序，且 $\Omega \subseteq \mathbb{A}$。现在，对于任意一个对加法封闭的子集 $\Theta \subseteq \Sigma_{>0}$，令

$$U_{\Theta,\Omega} := \left\{ u \in \exp\left(\bigoplus_{\alpha\in\Theta} (\mathfrak{g}_\alpha)_{\mathbb{F}} \right) : u.p = p \text{ for all } p \in \Omega \right\}$$

特别地

$$U_\Omega^+ := U_{\Sigma_{>0},\Omega} = \{u \in U_{\mathbb{F}} : u.p = p \text{ for all } p \in \Omega\}$$

对于 $\Theta = \Sigma_{>0}$。注意到$U_\emptyset^+ = U_{\mathbb{F}}$。类似地，我们定义

$$U_\Omega^- := \left\{ u \in \exp\left(\bigoplus_{\alpha<0} (\mathfrak{g}_\alpha)_{\mathbb{F}} \right) : u.p = p \text{ for all } p \in \Omega \right\}.$$

Let

$$N_\Omega := \{n \in \mathrm{Nor}_{G_{\mathbb{F}}}(A_{\mathbb{F}}) : n.p = p \text{ for all } p \in \Omega\}.$$

当 $\Omega = \{p\}$ 由单个点组成时，我们将记号简写为省略括号，例如 $U_p^+ := U_{\{p\}}^+$、$U_p^- := U_{\{p\}}^-$ 和 $N_p := N_{\{p\}}$。本小节的目标是在定理 5.45 中证明：如果 Ω 是有限的，那么 Ω 的逐点稳定子满足

$$\mathrm{Stab}_{G_{\mathbb{F}}}(\Omega) = U_\Omega^+ U_\Omega^- N_\Omega.$$

命题 5.40。对于任意子集 $\Omega \subseteq \mathbb{A}$ 和任意对加法封闭的子集 $\Theta \subseteq \Sigma_{>0}$，$U_{\Theta,\,\Omega} = \langle u \in U_{\alpha,\,\Omega} : \alpha \in \Theta \rangle$，特别地，$U^+{}_\Omega = \langle u \in U_{\alpha,\,\Omega} : \alpha > 0 \rangle$。更确切地说，如果 $\Sigma_{>0} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ 且 $\alpha_1 < \ldots < \alpha_r$，那么乘积映射

$$\prod_{\alpha\in\Sigma_{>0}} U_{\alpha,\Omega} \to U_\Omega^+$$
$$(u_{\alpha_1}, \ldots, u_{\alpha_r}) \mapsto u_{\alpha_1} \cdots u_{\alpha_r}$$

是一个双射。

证明。对于任意满足 $\alpha_1 > \ldots > \alpha_k$ 且对加法封闭的 $\Theta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\} \subseteq \Sigma_{>0}$，$\prod_{\alpha\in\Theta} U_{\alpha,\Omega}$ 在乘积映射下的像包含于 $U_{\Theta,\Omega}$。另一方面，若从 $u \in U_{\Theta,\Omega}$ 出发，我们可以应用 [App25，引理 5.14]

从而得到唯一的 $(u_1, \cdots, u_k) \in (U_{\alpha_1}) \times \ldots (U_{\alpha_k})_{\mathbb{F}}$，满足 $u = u_1 \cdot \ldots \cdot u_k$。点 $a.o \in \Omega$ 被 u 固定，当且仅当 $a^{-1}ua \in U_{\mathbb{F}}(O)$，因此

$$a^{-1}u_1a \cdot \ldots \cdot a^{-1}u_ka \in U_{\mathbb{F}}(O).$$

我们可以反复应用引理 5.9，得到对所有 $a.o \in \Omega$ 都成立的 $a^{-1}u_1a \in U_{\mathbb{F}}(O)$、...、$a^{-1}u_ka \in U_{\mathbb{F}}(O)$。这恰好意味着 $u_i \in U_{\alpha,\,\Omega}$。这表明乘积映射是满射。请注意，命题陈述中的序与证明中使用的序互为逆序，但两者可通过取逆由一个推出另一个。□

我们注意到，前面的命题对 Σ 上任意选定的序都成立。特别地，我们可以将该序取逆，得到

$$U_\Omega^- = \langle u \in U_{\alpha,\Omega} \colon \alpha < 0 \rangle$$

由命题 5.40 得出。现在我们定义这些群

$$P_\Omega := \langle U_{\alpha,\Omega} \colon \alpha \in \Sigma \rangle \quad \text{and} \quad \hat{P}_\Omega := \langle N_\Omega, U_{\alpha,\Omega} \colon \alpha \in \Sigma \rangle$$

由 $U_{\alpha,\,\Omega}$ 中的所有元素生成，而不仅仅是那些具有正 α 的元素。下面的结果是引理 5.36 向高秩情形的推广。

ˆ 命题 5.41。设 $\Omega \subseteq \mathbb{A}$ 有限。那么 P_Ω 和 P_Ω 可分解为

$$P_\Omega = U_\Omega^- \cdot U_\Omega^+ \cdot (\mathrm{Nor}_{G_{\mathbb{F}}}(A_{\mathbb{F}}) \cap P_\Omega)$$
$$\hat{P}_\Omega = U_\Omega^- \cdot U_\Omega^+ \cdot N_\Omega.$$

证明。包含关系 $\supseteq$ 显然。回忆一下，集合 $\Sigma_{>0}$ 由一个基 $\Delta \subseteq \Sigma$确定，或者等价地说，由一个室确定。选定一个室后，可以通过在 $\Delta = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r\}$上选择一个序 $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_r$，得到 Σ 的一个序 $>$；于是 Σ 上的序就是字典序[Bou08, VI.1.6, p. 174-175]。

对于描述 P_Ω的 $\subseteq$ 方向，我们将首先证明

$$U_\Omega^- \cdot U_\Omega^+ \cdot (\mathrm{Nor}_{G_{\mathbb{F}}}(A_{\mathbb{F}}) \cap P_\Omega)$$

与确定 $\Sigma_{>0}$的室无关。设 $<_1, <_2$ 是Σ 上的两个序，其对应的室 C_1, C_2 由一个由单根 $\alpha \in \Delta_1 \subseteq \Sigma$确定的反射联系起来，因此 $\Delta_2 = r_\alpha(\Delta_1)$。于是我们可以假设 $<_1$ 和 $<_2$由字典序确定，并且对于所有$\beta \in \Delta_1 \setminus \{\alpha\}$ 都有 $0 <_1 \alpha <_1 \beta$，对于所有 $\beta \in \Delta_2 \setminus \{\alpha\}$都有 $0 <_2 -\alpha <_2 \beta$。我们注意到，此时 $\Sigma_{>1 0} \setminus \{\alpha\} = \Sigma_{>2 0} \setminus \{-\alpha\}$，因为对于 $\beta \in \Sigma_{>1 0} \setminus \{\alpha\}$，有 $\lambda_\delta \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，其中至少有一个对某个 $\delta \in \Delta_1 \setminus \{\alpha\}$严格为正，使得

$$\begin{aligned}
\beta = \sum_{\delta \in \Delta_1} \lambda_\delta \delta &= \sum_{\delta \in \Delta_1} \lambda_\delta \left(r_\alpha(\delta) - 2\frac{\langle \delta, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} r_\alpha(\alpha) \right) \\
&= \sum_{\delta \in \Delta_1 \setminus \{\alpha\}} \lambda_\delta r_\alpha(\delta) + \left(\sum_{\delta \in \Delta_1 \setminus \{\alpha\}} -2\frac{\langle \delta, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \lambda_\delta - \lambda_\alpha \right) r_\alpha(\alpha) \\
&\in \sum_{\delta \in \Delta_1 \setminus \{\alpha\}} \mathbb{Z}_{\geq 0} r_\alpha(\delta) + \mathbb{Z} r_\alpha(\alpha) = \sum_{\delta \in \Delta_2 \setminus \{-\alpha\}} \mathbb{Z}_{\geq 0} \delta + \mathbb{Z}(-\alpha),
\end{aligned}$$

这里我们首先利用了对于所有 $\delta \in \Delta_1 \setminus \{\alpha\}$，$\langle \delta、\ \alpha \rangle$ 均为非正。根系的基具有这样的性质：根系中的任意元素用该基表示时，

其系数要么全部非负，要么全部非正。由于按上述基 Δ_2 表示的元素 β 存在严格为正的系数，因此所有系数都必须非负，所以 $\beta \in \Sigma_{>_2 0} \setminus \{-\alpha\}$。现在只需证明

$$U_\Omega^- \cdot U_\Omega^+ \cdot (\mathrm{Nor}_{G_\mathbb{F}}(A_\mathbb{F}) \cap P_\Omega)$$

对于 $<_1$ 和 $<_2$，结论相同，因此可推出它与用于定义 $\Sigma_{>0}$的室无关，因为由单根 Δ 确定的反射生成球面魏尔群，而该群在各室上传递作用。

我们简记 $Y := (\text{正规化子}_{G_\mathbb{F}}(A_\mathbb{F}) \cap P_\Omega)$。我们反复使用命题 5.40，得到

$$\begin{aligned}
U_{\Sigma_{<_1 0},\Omega} \cdot U_{\Sigma_{>_1 0},\Omega} \cdot Y &= \prod_{\beta <_1 0} U_{\beta,\Omega} \cdot \prod_{\beta >_1 0} U_{\beta,\Omega} \cdot Y \\
&= \prod_{\substack{\beta <_1 0 \\ -\alpha \neq \beta}} U_{\beta,\Omega} \cdot U_{-\alpha,\Omega} \cdot \prod_{\substack{\beta >_1 0 \\ \alpha \neq \beta}} U_{\beta,\Omega} \cdot U_{\alpha,\Omega} \cdot Y \\
&= \prod_{\substack{\beta <_1 0 \\ -\alpha \neq \beta}} U_{\beta,\Omega} \cdot U_{\Sigma_{>_2 0},\Omega} \cdot U_{\alpha,\Omega} \cdot Y \\
&= \prod_{\substack{\beta <_1 0 \\ -\alpha \neq \beta}} U_{\beta,\Omega} \cdot \prod_{\substack{\beta >_1 0 \\ \alpha \neq \beta}} U_{\beta,\Omega} \cdot U_{-\alpha,\Omega} \cdot U_{\alpha,\Omega} \cdot Y
\end{aligned}$$

此时，我们调用引理 5.36 继续

$$\begin{aligned}
&= \prod_{\substack{\beta <_1 0 \\ -\alpha \neq \beta}} U_{\beta,\Omega} \cdot \prod_{\substack{\beta >_1 0 \\ \alpha \neq \beta}} U_{\beta,\Omega} \cdot U_{\alpha,\Omega} \cdot U_{-\alpha,\Omega} \cdot Y \\
&= \prod_{\substack{\beta <_1 0 \\ -\alpha \neq \beta}} U_{\beta,\Omega} \cdot \prod_{\beta >_1 0} U_{\beta,\Omega} \cdot U_{-\alpha,\Omega} \cdot Y \\
&= \prod_{\substack{\beta <_1 0 \\ -\alpha \neq \beta}} U_{\beta,\Omega} \cdot U_{\alpha,\Omega} \cdot \prod_{\substack{\beta >_1 0 \\ \alpha \neq \beta}} U_{\beta,\Omega} \cdot U_{-\alpha,\Omega} \cdot Y \\
&= \prod_{\beta <_2 0} U_{\beta,\Omega} \cdot \prod_{\beta >_2 0} U_{\beta,\Omega} \cdot Y \\
&= U_{\Sigma_{<_2 0},\Omega} \cdot U_{\Sigma_{>_2 0},\Omega} \cdot Y.
\end{aligned}$$

既然我们已证明它与定义 Σ上序的室无关，接下来就通过按词长归纳证明方向 $\subseteq$。基例显然成立。现在设 $u_1 \in U_{\alpha,\,\Omega}$，其中 $\alpha \in \Sigma$，并设 $u \in P_\Omega$。我们可以选择 Σ 上的序，使得 $u_1 \in U^-{}_\Omega$。于是根据归纳假设，我们有$u \in U^-{}_\Omega \cdot U^+{}_\Omega \cdot Y$，从而也有 $u_1 u \in U^-{}_\Omega \cdot U^+{}_\Omega \cdot Y$。

接下来还需证明 $\hat{} P \subseteq U^-{}_\Omega\, U^+{}_\Omega\, N_\Omega$。我们利用这样一个事实：对于每个 $n \in N_\Omega$，都有 $nU_{\alpha,\,\Omega}n^{-1} = U_{[n](\alpha),\,n.\Omega}$，其中 $[n]$ 是与 n对应的球面魏尔群代表元。由此可以证明

$$\hat{P}_\Omega = \langle N_\Omega, U_{\alpha,\Omega} \colon \alpha \in \Sigma \rangle = \langle U_{\alpha,\Omega} \colon \alpha \in \Sigma \rangle \cdot N_\Omega = P_\Omega N_\Omega = U_\Omega^- U_\Omega^+ N_\Omega,$$

利用对 P_Ω的描述。 □

接下来，我们将为群 $G_{\mathbb{F}}$ 得到一个“混合 Iwasawa”分解，将命题 5.37 在秩 1 的结果提升到更高阶。

定理 5.42。对于根系 Σ 上的每个序，$G_{\mathbb{F}} = U^+ \cdot$正规化子$_{G_{\mathbb{F}}}(A_{\mathbb{F}}) \cdot \hat{} P_o$。

证明。我们将 $\tilde{G} := U^+ \cdot$正规化子$_{G_{\mathbb{F}}}(A_{\mathbb{F}}) \cdot \hat{} P_o$ 简写为。只需证明对于每个 $g \in G_{\mathbb{F}}$，都有 $g\tilde{G} \subseteq \tilde{G}\tilde{}$，因为这样便有 $G_{\mathbb{F}} \subseteq G_{\mathbb{F}}G \subseteq G \subseteq G_{\mathbb{F}}$。根据 [App25，定理 5.11]，以及球面魏尔群 W_s 中非平凡元素可由 U^+ 和 U^- 中的元素得到这一事实，形如 $m(u)$ 的元素可由 $G_{\mathbb{F}} = \langle U^+、U^-、T_{\mathbb{F}} \rangle$ 得到，其中

$$\begin{aligned} U^+ &= \langle (U_\alpha)_{\mathbb{F}} \colon \alpha > 0 \rangle \\ U^- &= \langle (U_\alpha)_{\mathbb{F}} \colon \alpha < 0 \rangle \\ T_{\mathbb{F}} &= \mathrm{Cen}_{G_{\mathbb{F}}}(A_{\mathbb{F}}) \end{aligned}$$

~ ~ ~ ~ ~如前所述。由于 $U^+G \subseteq G$ 和 $T_{\mathbb{F}}G \subseteq G$，只需证明 $U^-G \subseteq G$。由于在 $[(\mathfrak{g}_\alpha)_{\mathbb{F}}$ 中等号成立，因此 $(\mathfrak{g}_\beta)_{\mathbb{F}}] = (\mathfrak{g}_{\alpha+\beta})_{\mathbb{F}}$，

$$U^- = \langle (U_{-\alpha})_{\mathbb{F}} \colon \alpha \in \Delta \rangle$$

对于与所选序对应的基 $\Delta \subseteq \Sigma$，比较 [Bor91，注记~ ~14.5(2)]。因此，只需证明对所有 $\alpha \in \Delta$，$(U_{-\alpha})_{\mathbb{F}}G \subseteq G$，即可证明该定理。

现在令 $\alpha \in \Delta$，并考虑 Σ上的完全字典序，使得对所有 $\delta \in \Delta$，$\alpha < \delta$。令 $U'_\alpha := \langle (U_\beta)_{\mathbb{F}} \colon \beta > 0, \beta \neq \alpha \rangle \subseteq U^+$。于是由 [App25，引理 5.15]，$U^+ = (U_\alpha)_{\mathbb{F}} \cdot U'_\alpha = U'_\alpha \cdot (U_\alpha)_{\mathbb{F}}$。注意，若改为考虑以基 $r_\alpha(\Delta)$对应的序，则 $-\alpha$ 是最小正元素，正如命题 5.40 的证明中那样；于是 [App25，引理 5.15] 给出 $(U_{-\alpha})_{\mathbb{F}} \cdot U'_\alpha = U'_\alpha \cdot (U_{-\alpha})_{\mathbb{F}}$。我们使用命题 5.37 来证明

$$\begin{aligned} (U_{-\alpha})_{\mathbb{F}}\tilde{G} &= (U_{-\alpha})_{\mathbb{F}}U'_\alpha(U_\alpha)_{\mathbb{F}} \,\mathrm{Nor}_{G_{\mathbb{F}}}(A_{\mathbb{F}})\hat{P}_o \\ &= U'_\alpha(U_{-\alpha})_{\mathbb{F}}(U_\alpha)_{\mathbb{F}} \,\mathrm{Nor}_{G_{\mathbb{F}}}(A_{\mathbb{F}})\hat{P}_o \\ &\subseteq U'_\alpha(U_\alpha)_{\mathbb{F}}(\mathrm{Nor}_{G_{\mathbb{F}}}(A_{\mathbb{F}}) \cap (L_{\pm\alpha})_{\mathbb{F}})L_o \cdot \mathrm{Nor}_{G_{\mathbb{F}}}(A_{\mathbb{F}})\hat{P}_o \\ &\subseteq U^+T_{\mathbb{F}}L_o \cdot \mathrm{Nor}_{G_{\mathbb{F}}}(A_{\mathbb{F}})\hat{P}_o \;\amalg\; U^+T_{\mathbb{F}}mL_o \cdot \mathrm{Nor}_{G_{\mathbb{F}}}(A_{\mathbb{F}})\hat{P}_o, \end{aligned}$$

其中 $L_o = \langle U_{\alpha,o}, U_{-\alpha,o} \rangle$，且 $m \in$正规化子$_{G_{\mathbb{F}}}(A_{\mathbb{F}})$ 表示球面魏尔群 W_s 中的反射 r_α。根据引理 5.36，$L_o \subseteq U_{\alpha,o}U_{-\alpha,o}$正规化子$_{G_{\mathbb{F}}}(A_{\mathbb{F}})$ 和$L_o \subseteq U_{-\alpha,o}U_{\alpha,o}$正规化子$_{G_{\mathbb{F}}}(A_{\mathbb{F}})$。于是

$$\begin{aligned} (U_{-\alpha})_{\mathbb{F}}\tilde{G} &\subseteq U^+T_{\mathbb{F}}(U_\alpha)_{\mathbb{F}}(U_{-\alpha})_{\mathbb{F}} \,\mathrm{Nor}_{G_{\mathbb{F}}}(A_{\mathbb{F}})\hat{P}_o \;\amalg\; U^+T_{\mathbb{F}}m(U_{-\alpha})_{\mathbb{F}}(U_\alpha)_{\mathbb{F}} \,\mathrm{Nor}_{G_{\mathbb{F}}}(A_{\mathbb{F}})\hat{P}_o \\ &= U^+T_{\mathbb{F}}(U_\alpha)_{\mathbb{F}}(U_{-\alpha})_{\mathbb{F}} \,\mathrm{Nor}_{G_{\mathbb{F}}}(A_{\mathbb{F}})\hat{P}_o \\ &= U^+(U_\alpha)_{\mathbb{F}}(U_{-\alpha})_{\mathbb{F}}T_{\mathbb{F}} \,\mathrm{Nor}_{G_{\mathbb{F}}}(A_{\mathbb{F}})\hat{P}_o \\ &= U^+(U_{-\alpha})_{\mathbb{F}} \,\mathrm{Nor}_{G_{\mathbb{F}}}(A_{\mathbb{F}})\hat{P}_o \end{aligned}$$

其中我们使用了 $m(U_\alpha)_{\mathbb{F}}m^{-1} = (U_{-\alpha})_{\mathbb{F}}$ 和 $m(U_{-\alpha})_{\mathbb{F}}m^{-1} = (U_\alpha)_{\mathbb{F}}$。我们声称~对于每个 $u' \in (U_{-\alpha})_{\mathbb{F}}$ 和 $n \in$正规化子$_{G_{\mathbb{F}}}(A_{\mathbb{F}})$，$u'n \in G$。为此，考虑$\beta = [n^{-1}](\alpha)$ 和 $v := n^{-1}u'n \in (U_{[n^{-1}](-\alpha)})_{\mathbb{F}} = (U_{-\beta})_{\mathbb{F}}$。然后我们可以应用

秩一混合岩泽分解、命题 5.37，对 β 得到

$$\begin{aligned} u'n = nv \in n(L_{\pm\beta})_{\mathbb{F}} &\subseteq n(U_\beta)_{\mathbb{F}} \operatorname{Nor}_{G_{\mathbb{F}}}(A_{\mathbb{F}})\hat{P}_o \\ &= n(U_\beta)_{\mathbb{F}} n^{-1} n \operatorname{Nor}_{G_{\mathbb{F}}}(A_{\mathbb{F}})\hat{P}_o \\ &= (U_\alpha)_{\mathbb{F}} \operatorname{Nor}_{G_{\mathbb{F}}}(A_{\mathbb{F}})\hat{P}_o \subseteq \tilde{G}. \end{aligned}$$

假设该断言成立，$(U_{-\alpha})_{\mathbb{F}}\tilde{G} \subseteq U^+(U_{-\alpha})_{\mathbb{F}}\mathrm{Nor}_{G_{\mathbb{F}}}(A_{\mathbb{F}})\hat{P}_o \subseteq U^+\tilde{G}\hat{P}_o = \tilde{G}$ 便完成了证明。□

ˆ 可以利用混合岩泽分解证明 $P_o = \mathrm{Stab}_{G_{\mathbb{F}}}(o)$。ˆ事实上，我们最终将在定理 5.49 中证明，$P_\Omega$ 是 Ω 的整个逐点稳定子。

命题 5.43. 单点 $p \in \mathbb{A}$ 的稳定子满足

$$\mathrm{Stab}_{G_{\mathbb{F}}}(p) = \hat{P}_p = \langle N_p, U_{\alpha,p} \colon \alpha \in \Sigma \rangle = U_p^- U_p^+ N_p.$$

ˆ 证明. 右侧的两个表达式均与 P_p 相同，见命题 5.41。ˆ包含关系 $\mathrm{Stab}_{G_{\mathbb{F}}}(p) \supseteq P_p$ 显然。对于反向包含，我们先考虑 $p = o$，并使用混合岩泽分解定理 5.42，$G_{\mathbb{F}} = U^+\mathrm{Nor}_{G_{\mathbb{F}}}(A_{\mathbb{F}})\hat{P}_o$。对于 $g \in \mathrm{Stab}_{G_{\mathbb{F}}}(o)$，取 $u \in U^+, n \in \mathrm{Nor}_{G_{\mathbb{F}}}(A_{\mathbb{F}})$ 和 $p \in \hat{P}_o$，使得 $g = unp$。由命题 5.7，$o = g.o = unp.o = un.o = n.o$。因此 $n \in N_o$，从而也有 $u \in U_o^+ = \langle U_{\alpha,\,o} \colon \alpha > 0 \rangle$。

对于一般的 $p = a.o \in \mathbb{A}$ 和元素 $g \in G_{\mathbb{F}}$、$g.p = p$，当且仅当 $a^{-1}ga.o = o$。利用命题 5.41，将 $a^{-1}ga = uu'n$ 写成元素 $u \in U_o^+$、$u' \in U_o^-$ 和 $n \in N_o$ 的乘积。注意到 $aua^{-1} \in U_p^+$、$au'a^{-1} \in U_p^-$ 和 $ana^{-1} \in \hat{N}_p$，因此 $g \in P_p$。□

ˆ 我们陈述一个引理，从而可以证明 P_Ω 是任意有限子集 $\Omega \subseteq \mathbb{A}$ 的逐点稳定子。

引理 5.44。对于 p、$q \in \mathbb{A}$，在 Σ 上存在一个序，使得 $U_q^+ \subseteq U_p^+$。

证明。如果 $q = o$ 和 p 位于基本魏尔室 $C_0 \subseteq \mathbb{A}$ 中，那么我们可以取与 C_0 相关联的标准序 $>$。元素 $g \in U_q^+ = U_{\mathbb{F}}(O)$ 逐点稳定 C_0 中的所有点，见定理 5.17，因此 $U_q^+ \subseteq U_p^+$。

一般而言，存在元素 $n \in$ 正规化子$_{G_{\mathbb{F}}}(A_{\mathbb{F}})$，满足 $n.q = 0$，且 $n.p \in C_0$(n 是先进行 $-q$ 平移，再接上球面魏尔群中唯一元素的代表元)。于是根据上述内容，$U_{n.q}^+ \subseteq U_{n.p}^+$，其中所涉及的是与 C_0 相关的标准序。若 $>_2$ 和 $+_2$ 表示具有正根 $\Sigma_{>_2 0} = \{\alpha \in \Sigma \text{ 的序：} [n^{-1}](\alpha) > 0\}$，则 $U_{n.p}^+ = n^{-1}U_p^{+_2}n$，因此

$$U_q^{+_2} = nU_{n.q}^+ n^{-1} \subseteq nU_{n.p}^+ n^{-1} = U_p^{+_2}. \qquad \square$$

定理 5.45. 设 $\Omega \subseteq \mathbb{A}$ 为有限子集。那么 Ω 的逐点稳定子满足

$$\mathrm{Stab}_{G_{\mathbb{F}}}(\Omega) = \hat{P}_\Omega = \langle N_\Omega, U_{\alpha,\Omega} \colon \alpha \in \Sigma \rangle = U_\Omega^+ U_\Omega^- N_\Omega.$$

证明. 我们断言

$$\hat{P}_{\Omega\cup\{p\}} = \hat{P}_\Omega \cap \hat{P}_p$$

对于所有非空有限的 $\Omega \subseteq \mathbb{A}$ 和 $p \in \mathbb{A}$。包含关系 $\subseteq$ 显然。现在令 $\hat{} \hat{} g \in P_\Omega \cap P_p$。对于某个 $q \in \Omega$，选择 Σ的一个序，使得根据引理 5.44 有 $U_q^+ \subseteq U_p^+$。现在利用命题 5.41 将 $g = nu'u$写成 $n \in N_\Omega, u' \in U^-{}_\Omega$，$u \in U^+{}_\Omega$。我们有 $u \in U^+{}_\Omega \subseteq U_q^+ \subseteq U_p^+$，因此 $gu^{-1} = nu' \in \hat{} P_p$。由于现在 $u'.p = n^{-1}.p$，根据命题 5.7，有 $u'.p = p$。这意味着三个元素 u, u'和 n都固定 $\Omega \cup \{p\}$，因此 $g \in N_{\Omega\cup\{p\}} U^-{}_{\Omega\cup\{p\}} U^+{}_{\Omega\cup\{p\}} = \hat{} P_{\Omega\cup\{p\}}$。

$\hat{}$ 现在我们按 Ω 的大小归纳证明 $\mathrm{Stab}(\Omega) = P_\Omega$。若 $|\Omega| = 1$，则此结论由命题 5.43 得出。现在假设该结论对 Ω 成立。给定任意 $p \in \mathbb{A}$，我们有

$$\mathrm{Stab}_{G_\mathbb{F}}(\Omega \cup \{p\}) = \mathrm{Stab}_{G_\mathbb{F}}(\Omega) \cap \mathrm{Stab}_{G_\mathbb{F}}(p) = \hat{P}_\Omega \cap \hat{P}_p = \hat{P}_{\Omega\cup\{p\}},$$

这里用到了归纳假设和该断言。 □

5.8. 公理 (A2)。本节中我们假设 Σ 是约化的。现在我们具备了证明公理 (A2) 的条件。先证明一个特殊情形。

命题 5.46。设 $g \in G_\mathbb{F}$ 且 $\Omega = g^{-1}\mathbb{A} \cap \mathbb{A}$。那么存在一个元素$w \in W_a$，使得对所有 $p \in \Omega$，$g.p = w(p)$。

证明。我们不妨假设 $\Omega \neq \emptyset$。对于子集 $Y \subseteq \Omega$，我们考虑

$$N_{g,Y} := \{n \in \mathrm{Nor}_{G_\mathbb{F}}(A_\mathbb{F}) \colon g.p = n.p \text{ for all } p \in Y\},$$

因此我们的目标是证明 $N_{g,\Omega} \neq \emptyset$。若 $Y = \{p\}$ 是单元素集，则 $N_{g,\{p\}}$ 非空，因为若 $p = a.o$ 且 $g.p = b.o$ 对于 $a, b \in A_\mathbb{F}$ 成立，则 $ba^{-1} \in N_{\{p\}}$。现在我们将按 Y 的大小归纳证明，对于所有有限集 $Y \subseteq \Omega$，都有 $N_{g,Y} \neq \emptyset$。

设 $Y \subseteq \Omega$ 有限且 $p \in \Omega$。假设存在 $n_Y \in N_{g,\ Y}$ 和 $n_p \in N_{g,\ \{p\}}$，那么 $g^{-1}n_Y$和 $g^{-1}n_p$ 属于逐点稳定子 $\mathrm{Stab}_{G_\mathbb{F}}(Y)$ 和 $\mathrm{Stab}_{G_\mathbb{F}}(\{p\})$。我们可以在 Σ 上选取一个序，使得 $U_Y^+ \subseteq U_{\{p\}}^+$；具体做法是确保以 Y 中某点为基点的该序所对应的定义室包含 p，见引理 5.44。于是，由定理 5.45，

$$\begin{aligned} n_Y^{-1}n_p &\in N_Y U_Y^- U_Y^+ U_{\{p\}}^+ U_{\{p\}}^- N_{\{p\}} = N_Y U_Y^- U_{\{p\}}^+ U_{\{p\}}^- N_{\{p\}} \\ &= N_Y U_Y^- U_{\{p\}}^- U_{\{p\}}^+ N_{\{p\}} \subseteq N_Y U^- U^+ N_{\{p\}} \end{aligned}$$

设 $n'_Y \in N_Y, n'_p \in N_{\{p\}}$ 使得 $(n'_Y)^{-1}n_Y^{-1}n_p n'_p \in U^-U^+ \cap$ 属于 $\mathrm{Nor}_{G_\mathbb{F}}(A_\mathbb{F})$。由于 U^+ 的每个元素都逐点稳定某个仿射室，根据命题 5.7，$U^-U^+ \cap \mathrm{Nor}_{G_\mathbb{F}}(A_\mathbb{F})$ 的每个元素也如此。因此，由 $(n'_Y)^{-1}n_Y^{-1}n_p n'_p$ 表示的仿射魏尔群元素在某个仿射室上作用平凡，故在整个 $\mathbb{A}$ 上作用平凡。因此 $[n_Y n'_Y] = [n_p n'_p] \in W_a$ 和$n_Y n'_Y \in N_{g,\ Y} \cap N_{g,\ \{p\}} = N_{g,\ Y\cup\{p\}}$，归纳步骤得证。

回顾一下，仿射魏尔群 $W_a = W_s \ltimes \mathbb{A}$ is 同构于商 $\mathrm{Nor}_{G_\mathbb{F}}(A_\mathbb{F})/\mathrm{Cen}_{G_\mathbb{F}}(A_\mathbb{F})$。令 $\pi\colon \mathrm{Nor}_{G_\mathbb{F}}(A_\mathbb{F}) \to W_s$为到有限群 W_s 的诱导映射。令 $Y_0 \subseteq \Omega$ 为一个有限子集，使得 $|\pi(N_{g,Y_0})|$ is 最小。对于任意 $p \in \Omega$，

$$N_{g,Y_0\cup\{p\}} = N_{g,Y_0} \cap N_{g,\{p\}} \subseteq N_{g,Y_0}$$

因此由最小性可得 $\pi(N_{g,Y_0\cup\{p\}}) = \pi(N_{g,Y_0})$。我们事实上断言，对于每个 $p \in \Omega$，都有$N_{g,Y_0\cup\{p\}} = N_{g,Y_0}$。取 $n_0 \in N_{g,Y_0}$。我们分解 $w := [n_0] = (t_a, \pi(n_0)) \in W_a = \mathbb{A} \ltimes W_s$，使得 t_a is 通过与某个 $a \in A_{\mathbb{F}}$ 相乘给出的平移。对于任意 $p \in \Omega$，存在 $n' \in N_{g,Y_0\cup\{p\}}$ 使得 $\pi(n_0) = \pi(n')$，类似地我们分解 $w' := [n'] = (t_{a'}, \pi(n'))$ $\in W_a$。作用于某个 $q \in Y_0$，我们有

$$a.(\pi(n_0)(q)) = n_0.q = g.q = n'.q = a'.(\pi(n')(q)) = a'.(\pi(n_0)(q)),$$

这意味着 $t_a = t_{a'}$，因此 $w = (t_a, \pi(n_0)) = (t'_a, \pi(n')) = w'$。对于任意$p \in \Omega$，我们于是有

$$n_0.p = w(p) = w'(p) = n'.p = g.p,$$

因此 $n_0 \in N_{g,\ Y_0\cup\{p\}}$，如所需。最后

$$N_{g,\Omega} = \bigcap_{p\in\Omega} N_{g,Y_0\cup\{p\}} = N_{g,Y_0} \neq \emptyset,$$

因此，取任意$n \in N_{g,\ Y_0}$，即可得到所需的元素 $w = [n] \in W_a$，使得对于所有 $p \in \Omega$，$w(p) = g.p$。□

从上述证明中，我们还可以得到以下引理：取$g = \mathrm{Id}$，并注意此时 $N_\Omega = N_{g,\ \Omega} = N_{g,\ Y_0} = N_{Y_0}$。

引理 5.47. 设 $\Omega \subseteq \mathbb{A}$。存在一个有限子集 $Y_0 \subseteq \Omega$，使得$N_{Y_0} = N_\Omega$。

为了证明公理 (A2) 中的 W_a-凸性部分，我们希望描述定理 5.45 中所述子集 Ω（可能是无限集）的稳定子。为此，我们首先需要一个引理。

引理 5.48. 设 $u^+ \in U^+$、$u^- \in U^-$ 和 $p \in \mathbb{A}$。若 $u^+.p = u^-.p$，则 $u^+.p = p = u^-.p$。

证明. 我们先指出，若 $a \in \mathbb{F}^{n\times n}$ 是对角线上元素均为 1 的上三角矩阵，且 $b \in \mathbb{F}^{n\times n}$ 是对角线上元素均为 1 的下三角矩阵，并且 $ab \in O^{n\times n}$，那么 a、$b \in O^{n\times n}$；这一点可通过矩阵计算验证。

现在我们将在 $p = o \in \mathcal{B}$ 的情形下证明该引理。我们知道 $u^+.p = u^-.p$，这等价于 $(u^+)^{-1}u^- \in G_{\mathbb{F}}(O)$。伴随映射 $\mathrm{Ad} : G_{\mathbb{F}} \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g}_{\mathbb{F}})$ 是一个 $\mathbb{K}$-态射，它将 U^+ 中的元素映为上三角矩阵，将 U^- 中的元素映为下三角矩阵，参见 [App25, 引理 4.6]。此外，由于对 $X \in \mathfrak{g}_{\mathbb{F}}$ 有 $\mathrm{Ad}(g)X = gXg^{-1}$，我们可以在一个基上应用引理 5.5，从而得知 $\mathrm{Ad}(g)$ 由多项式定义；若 $g \in G_{\mathbb{F}}(O)$，则这些多项式的系数属于 O。因此 $\mathrm{Ad}(G_{\mathbb{F}}(O)) \subseteq \mathrm{Ad}(G_{\mathbb{F}})(O)$，且 $\mathrm{Ad}((u^+)^{-1})$ $\mathrm{Ad}(u^-) \in O^{n\times n}$；根据前述观察，$\mathrm{Ad}(u^+) \in O^{n\times n}$ 且 $\mathrm{Ad}(u^-) \in O^{n\times n}$。

虽然 $\mathrm{Ad}: G_{\mathbb{F}} \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g}_{\mathbb{F}})$ 可能具有非平凡的有限核，但其限制 $\mathrm{Ad}\,|_{U^+}: U^+ \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g}_{\mathbb{F}})$ 到其像上是一个同构，因为指数映射给出了一个同构 $U^+ \cong \bigoplus_{\alpha>0} \mathfrak{g}_\alpha$，并且限制在 U^+ 的李代数上的 ad 是到其像的同构，该像定义在 $\mathbb{K}$上。于是，逆映射 $\mathrm{Ad}(U^+) \to U^+$ 也由系数属于 $\mathbb{K}$的多项式定义，因此

$u^+ \in O^{n\times n}$。类似地， $u^- \in O^{n\times n}$。这意味着 $u^+.o = o$ 和 $u^-.o = o$，如所要求的。

若现在对于某个 $a \in A_{\mathbb{F}}$ 有 $p = a.o$，则 $(u^+)^{-1}u^-.p = p$ 当且仅当

$$a^{-1}(u^+)^{-1}aa^{-1}u^-a \in G_{\mathbb{F}}(O).$$

根据上述论证， $a^{-1}u^+a$， $a^{-1}u^-a \in G_{\mathbb{F}}(O)$，因此 $u^+.p = p$ 和 $u^-.p = p$。□

ˆ 我们将定理 5.45 中关于 P_Ω 是某个有限子集的逐点稳定子的描述推广到任意子集 $\Omega \subseteq \mathbb{A}$。

定理 5.49。任意子集 $\Omega \subseteq \mathbb{A}$ 的逐点稳定子满足

$$\mathrm{Stab}_{G_{\mathbb{F}}}(\Omega) = \hat{P}_\Omega = U^+_\Omega U^-_\Omega N_\Omega.$$

证明。包含关系 $\supseteq$ 显然。应用引理 5.47，可得到一个有限子集 $Y_0 \subseteq \Omega$，使得 $N_{Y_0} = N_\Omega$。根据定理 5.45，$\mathrm{Stab}(\Omega) \subseteq \mathrm{Stab}(Y_0) = U^+_{Y_0}U^-_{Y_0}N_{Y_0}$。设 $g \in \mathrm{Stab}(\Omega)$，且 $u^+ \in U^+_{Y_0}$、$u^- \in U^-_{Y_0}$、$n \in N_{Y_0} = N_\Omega$ 满足 $g = u^+u^-n$。则 $u^+u^- = gn^{-1} \in \mathrm{Stab}(\Omega)$。因此，对于所有 $p \in \Omega$，都有 $(u^+).p = u^-.p$；由引理 5.48， $u^+.p = p = u^-.p$，特别是 $u^+ \in U^+{}_\Omega$ 以及 $u^- \in U^-{}_\Omega$。现在我们知道

$$\mathrm{Stab}_{G_{\mathbb{F}}}(\Omega) \subseteq U^+_\Omega U^-_\Omega N_\Omega \subseteq \hat{P}_\Omega \subseteq \mathrm{Stab}_{G_{\mathbb{F}}}(\Omega)$$

至此证明完成。 □

现在我们证明凸性的一个特例。

命题 5.50。设 $g \in G_{\mathbb{F}}$。那么 $\Omega = g^{-1}\mathbb{A} \cap \mathbb{A}$ 是有限个仿射半公寓的交。

证明。由命题 5.46 可知，存在一个 $n \in$ 正规化子$_{G_{\mathbb{F}}}(A_{\mathbb{F}})$，使得 $g^{-1}n \in$ 逐点稳定 Ω；并且由定理 5.49 $g^{-1}n \in U^+{}_\Omega\, U^-{}_\Omega N_\Omega$。因此，设 $u^+ \in U^+{}_\Omega$ $u^- \in U^-{}_\Omega$，并且 $n' \in N_\Omega$ 满足 $g^{-1}n = u^+u^-n'$。注意，对于$\tilde{n} := n(n')^{-1}$，有 $g^{-1}\tilde{n} = u^+u^-$。

回顾一下，由 $\alpha \in \Sigma$ 和 $k \in \Lambda$ 给出的仿半空间是

$$H^+_{\alpha,k} = \{a.o \in \mathbb{A} \colon (-v)(\chi_\alpha(a)) \geq k\}.$$

在命题 5.10 中，我们证明了，对于 u^+，对每个$\alpha > 0$，都存在 $k_\alpha \in \Lambda \cup \{-\infty\}$，使得

$$\left\{p \in \mathbb{A} \colon u^+.p \in \mathbb{A}\right\} = \bigcap_{\alpha>0} H^+_{\alpha,k_\alpha}.$$

其中我们采用约定 $H^+_{\alpha,-\infty} = \mathbb{A}$。通过改变 Σ 上的序，我们类似地得到对于 u^-，存在某个 $k_\alpha \in \Lambda \cup \{-\infty\}$，使得对于 $\alpha < 0$

$$\left\{p \in \mathbb{A} \colon u^-.p \in \mathbb{A}\right\} = \bigcap_{\alpha<0} H^+_{\alpha,k_\alpha}.$$

现在我们证明

$$\Omega = \bigcap_{\alpha\in\Sigma} H^+_{\alpha,k_\alpha}.$$

根据引理 5.48，对于任意 $p \in \Omega$，我们有 $u^+.p = p$ 和 $u^-.p = p$，因此 $p \in \bigcap H^+_{\alpha,\,k_\alpha}$。另一方面，如果 $p \in \bigcap H^+_{\alpha,\,k_\alpha}$，那么 $u^+u^-.p = u^+.p = p$，特别是

对于 $p \in u^+u^-\mathbb{A} \cap \mathbb{A} = g^{-1}\tilde{n}\mathbb{A} \cap \mathbb{A} = g^{-1}\mathbb{A} \cap \mathbb{A} = \Omega$。由此证明了 Ω 是有限个半空间的交集。□

现在我们结合命题 5.46 和命题 5.50 来证明公理 (A2)。

定理 5.51。公理 (A2) 成立：

(A2) 对于任意 f、$f' \in \mathscr{F}$，集合 $B := f^{-1}(f(\mathbb{A}) \cap f'(\mathbb{A})) \subseteq \mathbb{A}$是仿射半公寓的有限交，并且存在 $w \in W_a$ 使得$f|_B = f' \circ w|_B$。

证明。根据 $\mathscr{F}$ 的定义，存在 h、$h' \in G_{\mathbb{F}}$ 使得 $f = h.f_0$ 且 $f' = h'.f_0$，其中 f_0: $\mathbb{A} \to \mathcal{B}$ 是包含关系。于是对于 $g := (h')^{-1}h$，我们有 $B = g^{-1}\mathbb{A} \cap \mathbb{A}$，因为

$$f(g^{-1}\mathbb{A} \cap \mathbb{A}) = h.(g^{-1}\mathbb{A} \cap \mathbb{A}) = h'.\mathbb{A} \cap h.\mathbb{A} = f'(\mathbb{A}) \cap f(\mathbb{A}) = f(B).$$

根据命题 5.50，B 是仿射半公寓的有限交。根据命题 5.46，存在 $w \in W_a$ 使得对于所有 $p \in B$ 都有 $g.p = w(p)$，因此对于所有 $p \in B$

$$f(p) = h.p = h'g.p = h'.w(p) = h'.f_0(w(p)) = (f' \circ w)(p),$$

完成证明。□

现在我们能够描述 $\mathbb{A}$ 的（不一定是逐点的）稳定子。

命题 5.52。$\mathbb{A}$ 的（不一定是逐点的）稳定子是 $\mathrm{Stab}'_{G_{\mathbb{F}}}(\mathbb{A}) = \mathrm{Nor}_{G_{\mathbb{F}}}(A_F) = A_{\mathbb{F}}N_{\mathbb{F}}$。

证明。包含关系 $\supseteq$ 直接由定义得出。现在令 $g \in \mathrm{Stab}_{G_{\mathbb{F}}}(A_{\mathbb{F}})$。根据公理 (A2)，存在 $w \in W_a$ 使得 $g.f_0 = f_0 \circ w$。令 $a \in A_{\mathbb{F}}$ 和 $k \in N_{\mathbb{F}}$ 满足 $ak.f_0 = f_0 \circ w = g.f_0$。那么根据定理 5.19，$k^{-1}a^{-1}g \in A_{\mathbb{F}}(O)M_{\mathbb{F}}$。于是 $g \in A_{\mathbb{F}}N_{\mathbb{F}}A_{\mathbb{F}}(O)M_{\mathbb{F}} = A_{\mathbb{F}}N_{\mathbb{F}}$。□

5.9. 公理（A4）。本节中，根系 Σ 无需是约化的；但为了在引理 5.53 中应用公理 (A2)，则需要约化。公理（A4）是关于扇区的陈述。令 $s_0 = f_0(C_0) \subseteq \mathcal{B}$ 为与基本魏尔室 $C_0 \subseteq \mathbb{A}$ 对应的基本扇区。所有扇区都具有 $g.s_0$ 的形式，其中 $g \in G_{\mathbb{F}}$。如果扇区 s 是另一个扇区 s' 的子集，那么 s 就称为 s' 的子扇区。

由 (A2) 可知，s_0 的子扇区具有 $a.s_0$ 的形式，其中 $a \in A_{\mathbb{F}}$。

引理 5.53. 对于每个子扇区 $s \subseteq s_0$，都存在 $a \in A_{\mathbb{F}}$，使得 $s = a.s_0$。

证明。s_0 的一个一般子扇区具有如下形式：$g.s_0$，其中某个 $g \in G_{\mathbb{F}}$。根据公理 (A2)，我们知道 $s_0 \to g.s_0$ 由仿射魏尔群中的一个元素 $w \in W_a$ 实现，即 $g.b.o = w(b.o)$，对所有 $b.o \in s_0$均成立。我们将 $w = (t_a, w_s) \in \mathbb{A} \rtimes W_s$分解为某个 $a \in A_{\mathbb{F}}$。由于 $o \in s_0$ 且 $a.o = w(o) \in g.s_0 \subseteq s_0$，我们知道$\chi_\alpha(a) \geq 1$ 对所有 $\alpha > 0$均成立。我们还知道，$w_s(s_0)$是以 o为基点的有限个扇区之一。若 $w_s(s_0) \neq s_0$，则存在某个 $\alpha > 0$，使得$\chi_\alpha(b) \leq 1$ 对所有 $b.o \in w_s(s_0)$均成立。由于 $w_s(s_0)$是一个具有开内部的锥，存在 $b.o \in w_s(s_0)$，其 $\chi_\alpha(b)$可以任意负；特别地，存在某个

$b.o \in w_s(s_0)$满足$(-v)(\chi_\alpha(b)) < (-v)(\chi_\alpha(a)^{-1})$，因此$(-v)(\chi_\alpha(ab)) < 0$。但这与 $a.w_s(s_0) \subseteq s_0$矛盾，因为 $a.b.o \notin s_0$。由此可知，$w_s(s_0) = s_0$，因此 $g.s_0 = a.s_0$。□

在研究模型公寓 $\mathbb{A}$时，Bennett [Ben94, Prop 2.9] 证明了以下引理。

引理 5.54. 对所有 $p \in \mathbb{A}$，存在一个 $q \in \mathbb{A}$，使得 $q + C_0 \subseteq (p + C_0) \cap C_0$.

在我们的情形中，这条引理可用 $A_{\mathbb{F}}.o = \mathbb{A} \subseteq \mathcal{B}$ 来表述。

引理 5.55. 对所有 $a \in A_{\mathbb{F}}$，存在一个 $b \in A_{\mathbb{F}}$，使得 $b.s_0 \subseteq a.s_0 \cap s_0$。

我们还得到一个稍具一般性的表述，如图 8 所示。

引理 5.56. 对于所有子扇区 $s' \subseteq s_0$ 以及所有 $a \in A_{\mathbb{F}}$，存在一个子扇区 $s \subseteq a.s' \cap s_0$。

证明. 令 $s' = \tilde{a}.s_0$，其中 $\tilde{a} \in A_{\mathbb{F}}$，参见引理 5.53。我们将引理 5.55 应用于 $a\tilde{a}$，得到满足 $s := b.s_0 \subseteq a\tilde{a}.s_0 \cap s_0 = a.s' \cap s_0$的 $b \in A_{\mathbb{F}}$。□

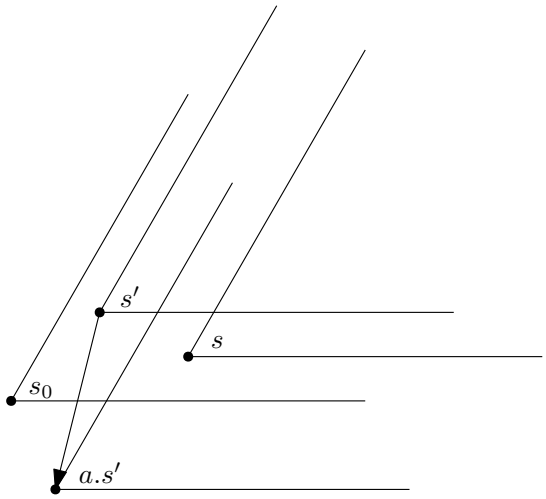

FIGURE 8. 引理 5.56 表明，对于每个子扇区 $s' \subseteq s_0$和 $a \in A_{\mathbb{F}}$，存在一个同时包含于 s' 和 $a.s'$中的扇区 s。

现在我们使用命题 5.12 来证明，尽管 $U_{\mathbb{F}}$ 中的元素可能不会固定 s_0本身，但它们至少会固定一个子扇区。

引理 5.57. 对于每个 $u \in U_{\mathbb{F}}$，存在一个子扇区 $s \subseteq s_0$，使得对于所有 $p \in s$均有 $u.p = p$。

证明。设 $a \in A_{\mathbb{F}}$ with $a^{-1}ua \in U_{\mathbb{F}}(O)$ 如命题 5.12 中所述。对于所有 $b.o \in s_0$，由推论 5.11 可知 $a^{-1}ua.b.o = b.o$。因此，u 逐点固定 $a.s_0$。我们不知道 $a.s_0$ 是否是 s_0 的子扇区，但可以应用引理 5.55 找到 s_0 的一个子扇区 s，它同时也是 $a.s_0$ 的子扇区，因此被 u 逐点固定。□

现在我们对 $U_{\mathbb{F}}$ 的作用有了更好的理解，接下来转向在 App25 第 5 节中引入的群 $B_{\mathbb{F}} = M_{\mathbb{F}} A_{\mathbb{F}} U_{\mathbb{F}}$。5]，，其中 $M_{\mathbb{F}} = \mathrm{Cen}^{K_{\mathbb{F}}}(A_{\mathbb{F}})$ $A_{\mathbb{F}}$ 和 $U_{\mathbb{F}}$ 与之前相同。

引理 5.58. 对所有 $b \in B_{\mathbb{F}} = M_{\mathbb{F}} A_{\mathbb{F}} U_{\mathbb{F}}$，存在一个子扇区 $s \subseteq s_0$，使得$b.s \subseteq s_0$。

证明. 我们首先回顾，$M_{\mathbb{F}}$ 中的元素逐点固定 $\mathbb{A}$ 的全部点。令 $m \in M_{\mathbb{F}}$、$u \in U_{\mathbb{F}}$ 和 $a \in A_{\mathbb{F}}$ 满足 $b = mua$。利用引理 5.57，我们找到一个被 u 逐点固定的子扇区$s' \subseteq s_0$。将引理 5.56 应用于 s' 和 a^{-1}，我们得到一个子扇区 $s \subseteq s_0 \cap a^{-1}.s'$。现在我们有

$$b.s \subseteq b.a^{-1}.s' = mu.s' = m.s' = s' \subseteq s_0,$$

如所声称的。 □

现在我们准备利用 Bruhat 分解 $G_{\mathbb{F}} = B_{\mathbb{F}} W_s B_{\mathbb{F}}$ [App25，定理 5.11]来证明公理（A4）。

定理 5.59. 公理

(A4) 对于任意扇区 s_1、$s_2 \subseteq \mathcal{B}$，存在子扇区 $s_1' \subseteq s_1$、$s_2' \subseteq s_2$，使得存在一个 $f \in \mathscr{F}$，满足 s_1'、$s_2' \subseteq f(\mathbb{A})$。

对 $(\mathcal{B}$、$\mathscr{F})$ 成立。

证明。根据定义，$G_{\mathbb{F}}$ 在扇区上的作用是传递的，因此不妨设 (A4) 中的一个扇区为 s_0，另一个扇区为某个 $g \in G_{\mathbb{F}}$ 所给出的 $g.s_0$。我们需要证明

(A4)' 对于所有 $g \in G_{\mathbb{F}}$，存在子扇区 $s \subseteq s_0$、$s' \subseteq g.s_0$，使得存在一个 $f \in \mathscr{F}$，满足 s、$s' \subseteq f(\mathbb{A})$。

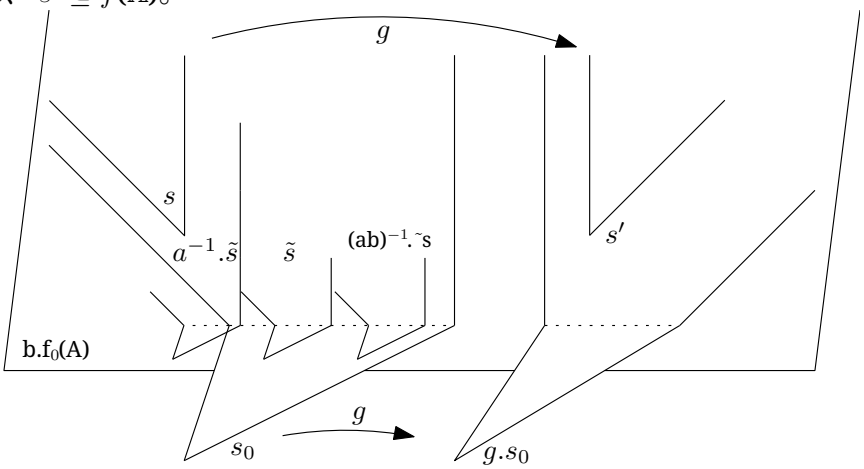

FIGURE 9. 公理（A4）指出，尽管扇区 $s_0, g.s_0$ 可能不位于同一个平坦中，但它们包含子扇区 s, s'，且这些子扇区包含在公共平坦 $f(\mathbb{A})$ 中。

图9对此情形作了说明。布鲁哈分解 [App25，定理 5.11], 指出，$G_{\mathbb{F}}$ 是双陪集的不交并

$$G_{\mathbb{F}} = \bigcup_{w=[k] \in W_s} B_{\mathbb{F}} k B_{\mathbb{F}}$$

。设 $g \in G_{\mathbb{F}}$ 以及 b、$b' \in B_{\mathbb{F}}$、$k \in N_{\mathbb{F}}$：$=$正规化子$_{K_{\mathbb{F}}}(A_{\mathbb{F}})$，其中 $g = bkb'$。我们进一步利用$B_{\mathbb{F}} = M_{\mathbb{F}}U_{\mathbb{F}}A_{\mathbb{F}}$ 和命题 5.12，将 $b' = ma'ua$ 分解为 $m \in M_{\mathbb{F}}$、$u \in U_{\mathbb{F}}(O)$ 以及 a、$a' \in A_{\mathbb{F}}$。由于 $(ab)^{-1} \in B_{\mathbb{F}}$，应用引理 5.58 可得到一个子扇区 $\tilde{s} \subseteq s_0$，满足 $(ab)^{-1}.\tilde{s} \subset s_{0}$。我们对 $\tilde{s}$ 和$a^{-1} \in A_{\mathbb{F}}$ 应用引理 5.56，得到一个子扇区 $s \subset a^{-1}.\tilde{s} \cap s_{0}$。我们断言，$s$ 和 s'：$= g.s$是 (A4)' 中所需的子扇区，而 $f = b.f_0$ 定义了公共公寓。

根据构造，我们有 $s \subseteq s_0$，显然 $s' = g.s \subseteq g.s_{0}$。还需证明 s 和 s' 属于公寓 $b.f_0(\mathbb{A})$。我们看到

$$b^{-1}.s \subseteq b^{-1}.a^{-1}.\tilde{s} \subseteq s_0 \subseteq f_0(\mathbb{A})$$

因此 $s \subseteq b.f_0(\mathbb{A})$，并且

$$\begin{aligned} s' = g.s = bkma'ua.s \subseteq bkma'u.\tilde{s} = bkma'.\tilde{s} \\ \subseteq bkma.f_0(\mathbb{A}) = bkm.f_0(\mathbb{A}) = bk.f_0(\mathbb{A}) = b.f_0(\mathbb{A}), \end{aligned}$$

这里我们对 $u.\tilde{s} = \tilde{s}$ 使用了推论 5.11，因为 $\tilde{s} \subseteq s_0$ 且 $u \in U_{\mathbb{F}}(O)$。 □

5.10. 公理（EC）。本节中将用到雅各布森–莫罗佐夫构造以及公理 (A2)，因此要求 Σ 是约化的。我们回顾一下，模型公寓中的一个半公寓是如下形式的集合

$$H^+_{\alpha,\ell} = \{a.o \in \mathbb{A} \colon (-v)(\chi_\alpha(a)) \geq \ell\}$$

其中 $\alpha \in \Sigma$ 和某个 $\ell \in \Lambda$。建筑中的一个半公寓是对任意 $g \in G_{\mathbb{F}}$都有的 $g.H^+_\alpha$。我们首先使用公理 (A2)，确保如果建筑中的一个半公寓包含于 $\mathbb{A}$，那么它就是模型公寓中的一个仿射半公寓。

引理 5.60. 设 $g \in G_{\mathbb{F}}, \alpha \in \Sigma, \ell \in \Lambda$，使得 $g.H^+_{\alpha,\ell} \subseteq \mathbb{A}$。那么存在$\alpha' \in \Sigma, \ell' \in \Lambda$，使得

$$g.H^+_{\alpha,\ell} = H^+_{\alpha',\ell'}.$$

证明. 根据公理 (A2) 和定理 5.51，存在 $w \in W_a$，使得 $g.H^+_\alpha = w(H^+_\alpha)$。我们将 $w = (t_a, w_s) \in \mathbb{A} \rtimes W_s = W_a$ 分解，并定义 $\alpha' := w_s(\alpha)$。于是 $g.H^+_{\alpha,\ell} = w(H^+_{\alpha,\ell}) = a.H^+_{\alpha',\ell} = H^+_{\alpha',\ell'}$ 对于 $\ell' := (-v)(\chi_{\alpha'}(a)) + \ell'$。□

我们首先证明公理

(EC) 对于 $f_1, f_2 \in \mathscr{F}$，若 $f_1(\mathbb{A}) \cap f_2(\mathbb{A})$ 是一个半公寓，则存在$f_3 \in \mathscr{F}$，使得对于 $i \in \{1, 2\}$，$f_i(\mathbb{A}) \cap f_3(\mathbb{A})$ 是半公寓。此外，$f_3(\mathbb{A})$ 是 $f_1(\mathbb{A})$ 与 $f_2(\mathbb{A})$ 的对称差，再加上 $f_1(\mathbb{A}) \cap f_2(\mathbb{A})$ 的边界墙。

在特殊情形下

$$f_1(\mathbb{A}) \cap f_2(\mathbb{A}) = H^+_{\alpha,\ell} := \{a.o \in \mathbb{A} \colon (-v)(\chi_\alpha(a)) \geq \ell\}$$

对于某些 $\alpha \in \Sigma$ 和 $\ell \in \Lambda$，然后再推导出定理 5.62 的完整表述。图 10 展示了这一情形。

命题 5.61. 设 $g \in G_{\mathbb{F}}$ 满足 $g^{-1}.\mathbb{A} \cap \mathbb{A} = H^+_{\alpha,\ell}$ 对某个 $\alpha \in \Sigma, \ell \in \Lambda$ 成立。那么存在一个 $h \in G_{\mathbb{F}}$，使得 $h^{-1}.\mathbb{A} \cap \mathbb{A} = H^-_{\alpha,\ell}$ 且 $h.H^+_{\alpha,\ell} = g.H^-_{\alpha,\ell}$。

此外，存在某个 $n \in$正规化子$_{G_{\mathbb{F}}}(A_{\mathbb{F}})$，使得逐点 $g.H_{\alpha}^{+}{}_{,\ell} = n.H_{\alpha}^{+}{}_{,\ell}$ 且$h.H_{\alpha}^{-}{}_{,\ell} = n.H_{\alpha}^{-}{}_{,\ell}$。

证明。由于 $g.H_{\alpha}^{+}{}_{,\ell} = \mathbb{A} \cap g.\mathbb{A} \subseteq \mathbb{A}$，我们可以应用定理 5.51 的公理 (A2)，得到 $n \in$ 正规化子$_{G_{\mathbb{F}}}(A_{\mathbb{F}})$，使得 $g.H_{\alpha}^{+}{}_{,\ell} = n.H_{\alpha}^{+}{}_{,\ell}$ 逐点成立。因此，$n^{-1}g$ 固定$H_{\alpha}^{+}{}_{,\ell}$ 逐点成立，并且根据推论 5.21，$n^{-1}g \in U_{\alpha,\ell}A_{\mathbb{F}}(O)M_{\mathbb{F}}$。于是取 $u \in U_{\alpha,\ell}$，使得对所有 $p \in \mathbb{A}$ 都有 $n^{-1}g.p = u.p$。根据引理 5.27，可以利用雅各布森-莫罗佐夫同态来定义

$$u' = \varphi_{\mathbb{F}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/t & 0 \end{pmatrix} \in (U_{-\alpha})_{\mathbb{F}}$$

其中 $\varphi_{-\alpha}(u') = -\varphi_{\alpha}(u) = -\ell$ 以及 $m(u) = u'uu' \in$ 正规化子$_{G_{\mathbb{F}}}(A_{\mathbb{F}})$，它沿着 $M_{\alpha,\ell} = \{a.o \in \mathbb{A}$ 作用为反射：$(-v)(\chi_{\alpha}(a)) = \ell\}$，根据命题 5.28。对于$h := n(u')^{-1} \in G_{\mathbb{F}}$，于是我们有

$$h.H_{\alpha,\ell}^{+} = n(u')^{-1}m(u).H_{\alpha,\ell}^{-} = nuu'.H_{\alpha,\ell}^{-} = nu.H_{\alpha,\ell}^{-} = g.H_{\alpha,\ell}^{-}$$

与 $(\mathbb{A} \cap h.H_{\alpha}^{+}{}_{,\ell}) = g.M_{\alpha,\ell} = n.M_{\alpha,\ell} = h.M_{\alpha,\ell} \subseteq h.H_{\alpha}^{-}{}_{,\ell}$，因此

$$h.(h^{-1}.\mathbb{A} \cap \mathbb{A}) = \mathbb{A} \cap h.\mathbb{A} = (\mathbb{A} \cap h.H_{\alpha}^{+}{}_{,\ell}) \cup (\mathbb{A} \cap h.H_{\alpha}^{-}{}_{,\ell}) = \mathbb{A} \cap h.H_{\alpha}^{-}{}_{,\ell} = n.H_{\alpha}^{-}{}_{,\ell}$$

这意味着 $h^{-1}.\mathbb{A} \cap \mathbb{A} = h^{-1}n.H_{\alpha}^{-}{}_{,\ell} = u'.H_{\alpha}^{-}{}_{,\ell} = H_{\alpha}^{-}{}_{,\ell}$ 如所需。 □

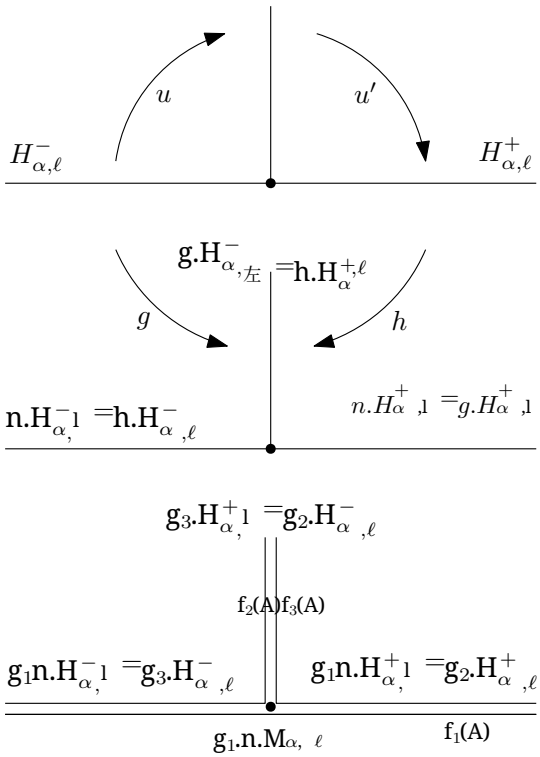

FIGURE 10. 公理（EC）指出，如果 $f_1(\mathbb{A}) \cap f_2(\mathbb{A})$ 是一个半公寓，那么存在 $f_3 \in \mathbb{F}$，其位置如图所示。命题 5.61 处理半公寓包含于 $\mathbb{A}$ 中的情形，如前两部分所示。随后，定理 5.62 处理公理（EC）的一般情形。

定理 5.62. 公理

（EC）对于 f_1、$f_2 \in \mathscr{F}$，如果 $f_1(\mathbb{A}) \cap f_2(\mathbb{A})$ 是一个半公寓，那么存在 $f_3 \in \mathscr{F}$，使得 $f_i(\mathbb{A}) \cap f_3(\mathbb{A})$ 对于 $i \in \{1,2\}$ 是半公寓。此外，$f_3(\mathbb{A}) = f_1(\mathbb{A}) \cap f_3(\mathbb{A}) \cup f_2(\mathbb{A}) \cap f_3(\mathbb{A})$，且 $\partial(f_1(\mathbb{A}) \cap f_2(\mathbb{A})) = f_1(\mathbb{A}) \cap f_3(\mathbb{A}) \cap f_2(\mathbb{A}) \cap f_3(\mathbb{A})$。

成立。

证明。设 $g_1, g_2 \in G_{\mathbb{F}}$ 满足 $f_1 = g_1.f_0$ 和 $f_2 = g_2.f_0$。对于 $g := g_1^{-1}g_2$，我们有 $f_2 = g_1 g.f_0$。由于 $f_1(\mathbb{A}) \cap f_2(\mathbb{A})$ 是一个半公寓，因此

$$(g_2)^{-1}(f_1(\mathbb{A}) \cap f_2(\mathbb{A})) = g_2^{-1}(g_1.\mathbb{A} \cap g_2.\mathbb{A}) = g^{-1}.\mathbb{A} \cap \mathbb{A} \subseteq \mathbb{A}$$

根据引理 5.60，存在某个 $\alpha \in \Sigma$ 和 $\ell \in \Lambda$，使得 $g^{-1}.\mathbb{A} \cap \mathbb{A} = H^+_{\alpha\,\ell,}$。现在我们使用命题 5.61 得到 $h \in G_{\mathbb{F}}$ 和 $n \in$ 正规化子$_{G_{\mathbb{F}}}(A_{\mathbb{F}})$，满足$g.H^+_{\alpha\ ,\ \ell} = n.H^+_{\alpha\,\ell,}$，$h.H^-_{\alpha\ ,\ \ell} = n.H^-_{\alpha\ ,\ \ell}$ 以及$h.H^+_{\alpha\ ,\ \ell} = g.H^-_{\alpha\,\ell,}$。我们定义 $g_3 := g_1 h$ 和$f_3 = g_3.f_0$。如图 10 所示。

$$\begin{aligned} g_3.H^-_{\alpha,\ell} &= g_1 h.H^-_{\alpha,\ell} = g_1.n.H^-_{\alpha,\ell} \\ g_2.H^+_{\alpha,\ell} &= g_1 g.H^+_{\alpha,\ell} = g_1.n.H^+_{\alpha,\ell} \\ g_3.H^+_{\alpha,\ell} &= g_1 h.H^+_{\alpha,\ell} = g_1 g.H^-_{\alpha,\ell} = g_2.H^-_{\alpha,\ell} \end{aligned}$$

因此 $f_1(\mathbb{A}) \cap f_3(\mathbb{A}) = f_3(H^-_{\alpha\ ,\ \ell})$ 和 $f_2(\mathbb{A}) \cap f_3(\mathbb{A}) = f_3(H^+_{\alpha\ ,\ \ell})$ 都是半公寓，并且

$$f_3(\mathbb{A}) = f_3(H^+_{\alpha,\ell}) \cup f_3(H^-_{\alpha,\ell}) = f_1(\mathbb{A}) \cap f_3(\mathbb{A}) \cup f_2(\mathbb{A}) \cap f_3(\mathbb{A}).$$

半公寓 $f_1(\mathbb{A}) \cap f_2(\mathbb{A}) = g_2.H^+_{\alpha\ ,\ \ell}$ 的墙由下式给出

$$\begin{aligned} \partial(f_1(\mathbb{A}) \cap f_2(\mathbb{A})) &= g_2.M_{\alpha,\ell} = g_1 g.M_{\alpha,\ell} = g_1.n.M_{\alpha,\ell} = g_1 n.H^+_{\alpha,\ell} \cap g_1 n.H^-_{\alpha,\ell} \\ &= f_1(\mathbb{A}) \cap f_2(\mathbb{A}) \cap f_1(\mathbb{A}) \cap f_3(\mathbb{A}). \end{aligned}$$

□

至此，最后一个尚未验证的公理的证明以及定理 5.1 的证明均已完成。

5.11. 超越约化根系。本文的主要定理依赖于根系 Σ 是约化的这一假设。

定理 5.1. 若根系 Σ 是约化的，则对 $(\mathcal{B}, \mathscr{F})$ 是一个仿射Λ-建筑。

我们指出，对于任意自伴半单线性代数$\mathbb{K}$-群，无论其根系如何，都定义了 $\mathcal{B}$。我们预期，即使不对 Σ作出这一假设，定理 5.1 仍然成立。

问题 5.63. 即使 Σ 不是约化的，对 $(\mathcal{B}, \mathscr{F})$ 是否仍是一个仿射 Λ-建筑?

这里概述我们的证明如何依赖这一假设、为何无法采用我们的方法去除该假设，以及一种可能有助于消除该假设的替代证明策略。

在我们的证明中，这一假设首先出现在雅各布森-莫罗佐夫引理中，无论是在李代数的情形下（见 [App25, 引理 4.9]），还是在半代数情形下（见 [App25, 命题 5.19]）。$\mathfrak{su}_{1,2}$ 中的显式计算表明，[App25, 引理 4.9] 并不成立；类似地，[App25, 命题 5.19]

对于 SU(1, 2)，该结论并不成立。给定 $\alpha \in \Sigma$ 和 $X \in \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha}$，雅各布森-莫罗佐夫引理的任务是找到 $Y \in \mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus \mathfrak{g}_{-2\alpha}$ 和 $H \in \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{g}_0$，使得 (X, Y, H) 构成一个 $\mathfrak{sl}_2$-三元组。虽然可以将 Y取为 $\theta(X)$ 的倍数，但当 $\mathfrak{g}_{2\alpha} \neq 0$时，并不能保证 $H := [X, Y] \in \mathfrak{a}$。

在定理 5.1 的证明中，利用雅各布森-莫罗佐夫引理，为每个 $u \in (U_\alpha)_{\mathbb{F}}$ 关联一个元素 $m(u) \in$ 正规化子$_{G_{\mathbb{F}}}(A_{\mathbb{F}})$，该元素表示命题 5.28 中的一个反射。我们预期，秩一子群 $L_{\pm\alpha}$ 中的以下构造也能在 Σ 未约化时定义 $m(u)$。我们使用 $L_{\pm\alpha}$的布鲁哈分解。

推论5.64。设 $(B_\alpha)_{\mathbb{F}} :=(M_{\pm\alpha})_{\mathbb{F}}(A_{\pm\alpha})_{\mathbb{F}}(U_\alpha)_{\mathbb{F}}$。那么，$W_{\pm\alpha}$中唯一非恒等元存在一个代表元 $m \in (N_{\pm\alpha})_{\mathbb{F}}$，使得

$$(L_{\pm\alpha})_{\mathbb{F}} = (B_\alpha)_{\mathbb{F}} \amalg (B_\alpha)_{\mathbb{F}} \cdot m \cdot (B_\alpha)_{\mathbb{F}}.$$

若 $u \in (U_\alpha)_{\mathbb{F}}$，令 $u \in (B_{-\alpha})_{\mathbb{F}} \amalg (B_{-\alpha})_{\mathbb{F}} \cdot m \cdot (B_{-\alpha})_{\mathbb{F}}$，并且由于 $(U_\alpha)_{\mathbb{F}} \cap (B_{-\alpha})_{\mathbb{F}} =${恒等元}，我们可以找到 $b, b' \in (B_{-\alpha})_{\mathbb{F}}$，使得 $u = bmb'$。写作 $b = \bar{u}\bar{a}\bar{m}$ 和 $b' = \bar{m}'\bar{a}'\bar{u}'$，其中 $\bar{m}$, $\bar{m}' \in (M_{\pm\alpha})_{\mathbb{F}}$、$\bar{a}, \bar{a}' \in (A_{\pm\alpha})_{\mathbb{F}}$ 以及 $\bar{u}, \bar{u}' \in (U_{-\alpha})_{\mathbb{F}}$，我们定义

$$m(u) := \bar{a}\bar{m}m\bar{m}'\bar{a}' = \bar{u}^{-1}u(\bar{u}')^{-1} \in \mathrm{Nor}_{(L_{\pm\alpha})_{\mathbb{F}}}((A_{\pm\alpha})_{\mathbb{F}}) \cap (U_{-\alpha})_{\mathbb{F}}(U_\alpha)_{\mathbb{F}}(U_{-\alpha})_{\mathbb{F}}.$$

我们注意到，作为 [App25, 引理 5.23], 恒等元$_{(L_{\pm\alpha})_{\mathbb{F}}}((A_{\pm\alpha})_{\mathbb{F}}) \subseteq$恒等元$_{G_{\mathbb{F}}}(A_{\mathbb{F}})$ 的推论。在 Σ 是约化的情况下，引理 5.32 的唯一性陈述表明，此处定义的 $m(u)$ 与通过雅各布森-莫罗佐夫引理定义的 $m(u)$ 一致。这表明，当 Σ 不是约化的时，应采用此处概述的 $m(u)$ 定义。然而，我们的证明还依赖于对 $m(u)$ 的显式描述，即 $m(u) = u'uu''$，其中 $\varphi_{-\alpha}(u') = \varphi_{-\alpha}(u'') = -\varphi_\alpha(u)$；参见引理 5.32 的第二部分。该结果源自引理 5.26 中对根群赋值的显式描述，而这一描述在很大程度上依赖于雅各布森-莫罗佐夫描述。要在非约化根系的情形下，对根群赋值获得类似程度的理解，一种方法是逐一分析所有秩一群。

在布鲁哈–蒂茨的工作中，这样的 $m(u)$ 的存在性与根数据 ´ [BT72, (6.1.1)], 的公理（DR4）有关；该公理对更一般的群也成立 [BT72, (6.1.3)c)]，以及 [BT65]。不过，目前尚不清楚这对这里有多直接的用处，因为我们是根据矩阵元素定义 φ_α 的，并且不使用切瓦莱基。

6. Residue building and building at infinity

本节讨论 $\mathcal{B}$ 的剩余建筑和无穷远处的球面建筑。设 $(\mathcal{B}, \mathscr{F})$ 是一个仿射 Λ建筑。回顾一下，与基 $\Delta \subseteq \Phi$ 相关联的韦伊室是集合

$$C_\Delta = \{x \in \mathbb{A} \colon \alpha(x) \geq 0 \text{ for all } \alpha \in \Delta\}.$$

对于 $J \subseteq \Delta$，子集

$$C_J = \left\{ x \in \mathbb{A} \colon \begin{array}{ll} \alpha(x) \geq 0 & \text{for } \alpha \in J \\ \alpha(x) = 0 & \text{for } \alpha \in \Delta \setminus J \end{array} \right\}$$

称为韦伊单形。对于图表 $f \in \mathscr{F}$, $f(C_\Delta)$ 和 $f(C_J)$，也分别称为以 $f(0)$ 为基点的扇区和扇区面。若存在.....，我们称两个扇区面 $f(C_J)$,$f'(C'_J)$（它们都以某点 $p \in \mathcal{B}$ 为基点）具有相同的芽

$\varepsilon \in \Lambda_{>0}$使得 $f(C_J \cap B_\varepsilon(0)) = f'(C'_J \cap B_\varepsilon(0))$。所有与某个扇区面 s 具有相同芽的扇区面构成的等价类称为s的芽，记为 $\Delta_p s$。以 p 为基点的所有芽的集合是一个球面建筑[Sch09, 定理 5.17], ，称为剩余建筑 $\Delta_p\mathcal{B}$。每个包含 p 的公寓 $A \subseteq \mathcal{B}$都确定了 $\Delta_p\mathcal{B}$中的一个公寓 $\Delta_p A$。

在大尺度上，如果存在一些扇区面 $s = s_1$、s_2、……、$s_n = s'$，使得对于某些图表 $f_i \in \mathscr{F}$ 和平移 $t_i \in W_a$，有 $s_i = f_i(C_J)$ 且 $s_{i+1} = f_i \circ t_i(C_J)$，则称两个扇区面 s、s' 平行。扇区面 s 的平行类称为无穷远单形，记作 $\partial_\infty s$。无穷远单形的集合构成一个球面建筑 [（Ben94，第 3.4], 节），称为无穷远建筑 $\partial_\infty\mathcal{B}$。$A \subseteq \mathcal{B}$ 中的公寓与 $\partial_\infty A$ 中的公寓一一对应。

6.1. 剩余建筑。设 $\mathcal{B}$ 是第4节中定义的仿射 Λ-建筑，$C_0 \subseteq \mathbb{A}$ 是基本魏尔室，$k := O/J$ 是第 3.2 节中定义的剩余域。回顾一下，若一个群在球面建筑 $\Delta_0\mathcal{B}$ 上强传递地作用，也就是说，它在点对 $(\Delta_o s, \Delta_o A)$ 上传递，其中 s 是一个以 o 为基点、包含于 $\mathcal{B}$ 中某个公寓 A 的扇区。本节将证明剩余建筑的如下刻画。

定理 6.1。群 G_k 在剩余建筑 $\Delta_o\mathcal{B}$ 上强传递地作用，因此可将其识别为与 BN 对 $B = B_k = U_k A_k M_k = \mathrm{Stab}_{G_k}(\Delta_o C_0)$ 和 $N = \mathrm{Nor}_{G_k}(A_k) = A_k N_k = \mathrm{Stab}_{G_k}(\Delta_o \mathbb{A})$ 相关联的球面建筑。

根据 [EP05，定理 4.3，7], 实闭域 $\mathbb{F}$ 的剩余域 k 是实闭的。对于任意半代数集 $V_\mathbb{F} \subseteq \mathbb{F}^{n\times n}$，逐项约化 $\pi\colon V_\mathbb{F}(O) := V_\mathbb{F} \cap O^{n\times n} \to V_k$ 定义良好且满射 [BIPP25，命题 2。18], 特别地，我们得到一个满群同态

$$\pi\colon G_\mathbb{F}(O) \twoheadrightarrow G_k.$$

根据定理 4.19，$G_\mathbb{F}(O) = \mathrm{Stab}_{G_\mathbb{F}}(o)$ 作用于以 o 为基点的扇区面集合。由于它通过等距变换作用，因此保持具有相同芽的等价关系，故 $G_\mathbb{F}(O)$ 作用于剩余建筑 $\Delta_o\mathcal{B}$。下面的引理表明，该作用可下降为 G_k 在 $\Delta_o\mathcal{B}$ 上的作用。

引理 6.2。子群 $\ker(G_\mathbb{F}(O) \twoheadrightarrow G_k)$ 在 $\Delta_o\mathcal{B}$ 上的作用是平凡的。

证明。设 $g \in \ker(G_\mathbb{F}(O) \twoheadrightarrow G_k)$，这意味着矩阵 $g - \mathrm{Id}$ 的元素都属于极大理想 J。用第 4.5 节的术语来说，我们在那里定义了 $(-v)(M) := \max_{ij}\{(-v)(M_{ij})\}$ for $M \in \mathbb{F}^{n\times n}$，这意味着 $(-v)(g - \mathrm{Id}) < 0$。现在设 $C' \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ 为引理 4.17 中的常数，使得只要 $a \in A_\mathbb{F}$ 满足对所有 $\delta \in \Delta$ 以及某个 $\lambda \in \Lambda_{\geq 0}$，都有 $(-v)(\chi_\delta(a)) \leq \lambda$，那么 $(-v)(a) \leq C'\lambda$。设 $\lambda \in \Lambda_{>0}$ 满足

$$(-v)(g - \mathrm{Id}) \leq -2C'\lambda.$$

我们将证明 g 固定了所有满足 $d(p, o) \leq \lambda$ 的点 $p \in \mathcal{B}$，由此即可得出结论。

设 $a \in A_{\mathbb{F}}$, $k \in K_{\mathbb{F}}$，使得根据 Cartan 分解 [App25，定理 5.9] 有 $p = ka.o$。我们有

$$\lambda \geq d(p.o, o) = d(a.o, o) = \sum_{\alpha \in \Sigma} |(-v)(\chi_\alpha(a))|,$$

因此，特别是对所有 $\delta \in \Delta$，$(-v)(\chi_\delta(a)) \leq \lambda$。于是 $(-v)(a) \leq C'\lambda$。根据引理 4.16，

$$(-v)(ka) \leq (-v)(k) + (-v)(a) = (-v)(a) \leq C'\lambda$$

并且由于 ka 的行列式为 1，其逆矩阵由伴随矩阵给出，而伴随矩阵的各项具有相同的赋值，因此

$$(-v)\left((ka)^{-1}\right) = (-v)(ka) \leq C'\lambda.$$

现在，g 固定 p 当且仅当 $gka.o = ka.o$，或者等价地，根据定理 4.19，有 $(ka)^{-1}gka \in G_{\mathbb{F}}(O)$，并且

$$\begin{aligned}(-v)\left((ka)^{-1}gka\right) &= (-v)\left((ka)^{-1}(g - \mathrm{Id})ka + (ka)^{-1}\,\mathrm{Id}\,ka\right)\\ &\leq \max\left\{(-v)\left((ka)^{-1}(g - \mathrm{Id})ka\right), (-v)(\mathrm{Id})\right\}\\ &\leq \max\left\{(-v)\left((ka)^{-1}\right) + (-v)(g - \mathrm{Id}) + (-v)(ka), 0\right\}\\ &\leq \max\left\{C'\lambda - 2C'\lambda + C'\lambda, 0\right\} = 0\end{aligned}$$

这里用到了引理 4.16。 □

下面的引理将有助于我们计算稳定子。

引理 6.3. 设 $\Sigma_{>0}$ 是相对于某个序的正根。若 $u \in U_{\mathbb{F}}^{+}$ 稳定 o 及一个点 $a.o \in \mathbb{A}$，且 $\chi_\alpha(a) \in J$ 对所有 $\alpha \in \Sigma_{>0}$ 都成立，则 $u \in \ker(\pi\colon G_{\mathbb{F}}(O) \twoheadrightarrow G_k)$。

证明. 令 $\Omega = \{o, a.o\}$，则 $U^{+}{}_{\Omega} = \langle u' \in U_{\alpha,\Omega}\colon \alpha > 0\rangle$，由命题 5.40 得出。对于所有 $\alpha \in \Sigma_{>0}$, $u' \in U_{\alpha,\Omega}$，有 $\varphi_\alpha(u') \leq (-v)(\chi_\alpha(a)) < 0$，特别地，由引理 5.6 可知，对于所有 i, j，$(u' - \mathrm{Id})_{ij} \in J$。由于 $u'u'' - \mathrm{Id} = (u' - \mathrm{Id})(u'' - \mathrm{Id}) + (u' - \mathrm{Id}) + (u'' - \mathrm{Id})$，对于所有 $u \in U^{+}$，有 $(u - \mathrm{Id})_{ij} \in J$。特别地，$\pi(u) = \mathrm{Id} \in G_k$，这正是我们要证明的结论。 □

定理 6.1 的证明。设 s, s' 是以 o 为基点、包含于公寓 $A, A' \subseteq \mathcal{B}$ 中的扇区。为了验证 G_k 在 $\Delta_o\mathcal{B}$ 上强传递地作用，只需找到一个元素 $h \in G_k$，使得 $h.\Delta_o s = \Delta_o s'$ 且 $h.\Delta_o A = \Delta_o A'$。根据 [BSS14]，仿射 Λ-建筑满足以下公理。

(GG) 任何两个以同一顶点为基点的扇区芽都包含在某个共同的公寓中。

我们应用 (GG) 找到一个包含芽 $\Delta_o s$ 和$\Delta_o s'$的公寓 $A'' \subseteq \mathcal{B}$。由于 G_F 在 $\mathcal{B}$的公寓上具有传递性，$G_{\mathbb{F}}(O)$ 在包含 o的公寓上具有传递性。因此，$G_{\mathbb{F}}(O)$ 和 G_k 也在 $\Delta_o\mathcal{B}$的公寓芽上具有传递性。令 $g \in G_k$ 使得 $g.\Delta_o A = \Delta_o A''$，并且通过预先与 N_k中的一个元素复合，我们不妨假设 g 稳定$\Delta_o s$。类似地，令 $g' \in G_k$ 使得 $g'.\Delta_o A'' = \Delta_o A'$，其中 $g'.\Delta_o s' = \Delta_o s'$。令 $g'' \in G_k$ 为一个稳定公寓 $\Delta_o A''$的元素，但满足$g''.\Delta_o s = \Delta_o s'$。注意，$h := g'g''g \in G_k$ 满足 $h.\Delta_o s = \Delta_o s'$ 和 $h.\Delta_o A = \Delta_o A''$，从而证明 G_k 在 $\Delta_o\mathcal{B}$上强传递地作用。

根据 [Ron89、(5.2)、(5.3) 以及注 2] ， G_k的强传递作用确定了 BN 对 B =Stab$_{G_k}(\Delta_o C_0)$ 和 N =Stab$_{G_k}(\Delta_o\mathbb{A})$，而后者又确定了一个建筑，该建筑同构于 $\Delta_o\mathcal{B}$。

现在我们计算 Stab$_{G_k}(\Delta_0 s_0)$ 和 Stab$_{G_k}(\Delta_o\mathbb{A})$。令 $\overline{g}\in$Stab$_{G_k}(\Delta_o s_0)$。根据 [BIPP25，命题 2.18], , 存在一个 $g\in$ Stab$_{G_\mathbb{F}}(o)(\Delta_0 s_0)$，使得 $\pi(g)=\overline{g}$。存在一个 $\varepsilon\in\Lambda_{>0}$ ，使得 $g.f_0(C_0\cap B_\varepsilon(0)) = f_0(C_0\cap B_\varepsilon(0))$。事实上，由公理 (A2) 以及 W_s 在魏尔室上简单传递作用这一事实可知， g 逐点稳定 Ω: $= f_0(C_0\cap B_\varepsilon(0))$。由定理 5.49， $g\in$ Stab$_{G_\mathbb{F}}(o)(\Omega)$ $=^{U^-\Omega\ U^+\Omega\ N_\Omega}$。注意，由命题 4.12，存在一点 $p=a.o\in\Omega$，使得 $(-v)(\chi_\alpha(a))>0$，因此我们可以相对于 Σ 上的负序应用引理 6.3，从而得到 $U^-\Omega\subseteq$ker$(\pi\colon G_\mathbb{F}(O)\twoheadrightarrow G_k)$。记 $g=u^-u^+n$为$u^-\in U^-\Omega$， $u^+\in U^+\Omega$ 和 $n\in N_\Omega$，由定理 5.19 可知 $n\in A_\mathbb{F}(O)M_\mathbb{F}$。我们有 $\overline{g}=\pi(u^-)\pi(u^+)\pi(n) = \pi(u^+)\pi(n)\in U_k^+A_kM_k$。反向包含 $B_k=U_k^+A_kM_k\subseteq$Stab$_{G_k}(\Delta_o s_0)$ 则由定理 5.17 得出，该定理指出 $B_\mathbb{F}(O) = U_\mathbb{F}(O)A_\mathbb{F}(O)M_\mathbb{F}=$ Stab$_{G_\mathbb{F}}(s_0)$。

若此时 $\overline{g}\in$ Stab$_{G_k}(\Delta_o\mathbb{A})$，则存在 $g\in$ Stab$_{G_\mathbb{F}}(o)(\Delta_o\mathbb{A})$，使得 $\pi(g)=\overline{g}$。令$\varepsilon\in\Lambda_{>0}$ 满足 $g.f_0(B_\varepsilon(0)) = f_0(B_\varepsilon(0))$。由公理 (A2) 和命题 5.52，存在某个 $n\in A_\mathbb{F}(O)N_\mathbb{F}$ ，使得 $n^{-1}g$ 逐点稳定 Ω := $f_0(B_\varepsilon(0))$。于是由定理 5.49， $n^{-1}g\in U^-\Omega\ U^+\Omega\ N_\Omega$，此时我们可以将引理 6.3 分别应用于 Σ上的正序和负序，从而得到 $\pi(U^+\Omega) = \pi(U^-\Omega) =$$\{$恒等元$\}\subseteq G_k$。因此，$\overline{g}\in\pi(N_\Omega)\pi(n)\subseteq A_kN_k=$ 正规化子$_{G_k}(A_k)$，见命题 5.52。反向包含关系 Nor$_{G_k}(A_k) = A_kN_k\subseteq$Stab$_{G_k}(\Delta_o\mathbb{A})$ 则直接成立，因为$A_\mathbb{F}(O)N_\mathbb{F}$ 作用于 $\mathbb{A}$并保持 o。□

6.2. 无穷远建筑。令 $\mathcal{B}$ 为第4节中定义的仿射 Λ-建筑。本节将证明无穷远建筑的如下刻画。

定理 6.4. 群 $G_\mathbb{F}$ 在无穷远建筑 $\partial_\infty\mathcal{B}$ 上强传递地作用，因此该建筑可与 BN 对 $B = B_\mathbb{F} = U_\mathbb{F}A_\mathbb{F}M_\mathbb{F} =$ Stab$_{G_\mathbb{F}}(\partial_\infty s_0)$ 和 $N =$ Nor$_{G_\mathbb{F}}(A_\mathbb{F})$ $=A_\mathbb{F}N_\mathbb{F}=$ Stab$_{G_\mathbb{F}}(\partial_\infty\mathbb{A})$ 所关联的球面建筑等同。

证明。由于 $G_\mathbb{F}$ 不仅作用于 $\mathcal{B}$，也作用于 $\mathscr{F}$，该作用保持平行性。因此， $G_\mathbb{F}$ 作用于无穷远建筑 $\partial_\infty\mathcal{B}$。设 s、s' 是分别包含于公寓 A、A' 中的扇区，且 $(\partial_\infty s,\ \partial_\infty A)$、$(\partial_\infty s',\ \partial_\infty A')$ 是无穷远处的点对，并满足 $\partial_\infty s\subseteq\partial_\infty A$ 和 $\partial_\infty s'\subseteq\partial_\infty A'$。根据公寓的定义， $G_\mathbb{F}$ 在 $\mathcal{B}$ 的公寓上具有传递作用，因此在 $\partial_\infty\mathcal{B}$ 的公寓上也具有传递作用。于是取 $g\in G_\mathbb{F}$，使得 $g.A=A'$。现在， $g^{-1}.s'$ 是 A 中的某个韦伊室。根据韦伊室的定义， W_a 在韦伊室上具有传递作用，因此存在一个元素 $w\in W_a$ ，使得 $w.s=g^{-1}.s'$。由公理 (A1)，存在 $g'\in G_\mathbb{F}$，使得 $g'.f=g.f\circ w$，故 $g'.A=A'$ 且 $g'.s=s'$。这表明 $G_\mathbb{F}$ 在 $\partial_\infty\mathcal{B}$ 上强传递地作用。

根据 [Ron89、(5.2)、(5.3) 以及注记 2] ， $G_\mathbb{F}$的强传递作用确定了 BN 对 $B =$ Stab$_{G_\mathbb{F}}(\partial_\infty s_0)$ 和 $N =$Stab$_{G_\mathbb{F}}(\partial_\infty\mathbb{A})$，而后者又确定了一个建筑，该建筑同构于 $\partial_\infty\mathcal{B}$。

现在我们计算 Stab$_{G_\mathbb{F}}(\partial_\infty s_0)$ 和 Stab$_{G_\mathbb{F}}(\partial_\infty\mathbb{A})$。令 $g\in$ Stab$_{G_\mathbb{F}}(\partial_\infty s_0)$。这意味着存在扇区 s_0、s_1、……、$s_k =: g.s_0$ 以及图 $f_i\in\mathscr{F}$

以及对于 $i \in \{0,1,2,\ldots,k-1\}$ 的平移 $t_i \in T = \mathbb{A}$，其中有 $s_i = f_i(C_0)$ 和$s_{i+1} = f_i(t_i(C_0))$。令 $a_i \in A_{\mathbb{F}}$，其中 $a_i.f_0 = f_0 \circ t_i$，并令 $g \in G_{\mathbb{F}}$，其中 $f_i = g_i.f_0$。注意 $g_0 =$ 恒等元 $\in B_{\mathbb{F}}$ 和 $g_k = g$。我们通过归纳法证明，如果 $g_i \in B_{\mathbb{F}}$，那么 $g_{i+1} \in B_{\mathbb{F}}$也成立：我们有

$$g_{i+1}.f_0(C_0) = s_{i+1} = g_i.f_0(t_i(C_0)) = g_i a_i.f_0(C_0),$$

因此 $g_{i+1}^{-1} g_i a_i \in \mathrm{Stab}_{G_{\mathbb{F}}}(f_0(C_0)) \subseteq B_{\mathbb{F}}$，由定理 5.17 得出（注意，$f_0(C_0)$ 的逐点稳定子与集合稳定子相同）。由于根据归纳假设有 $a_i \in A_{\mathbb{F}} \subseteq B_{\mathbb{F}}$ and $g_i \in B_{\mathbb{F}}$，我们也有 $g_{i+1} \in B_{\mathbb{F}}$。反向的$B_{\mathbb{F}} = U_{\mathbb{F}} A_{\mathbb{F}} M_{\mathbb{F}} \subseteq \mathrm{Stab}_{G_{\mathbb{F}}}(\partial_\infty s_0)$ 则由定理 5.17 和命题 5.12 得出。

现在设 $g \in \mathrm{Stab}_{G_{\mathbb{F}}}(\partial_\infty \mathbb{A})$。那么 $\partial_\infty(g.\mathbb{A}) = g.\partial_\infty(\mathbb{A}) = \partial_\infty(\mathbb{A})$，这等价于 $g.\mathbb{A} = \mathbb{A}$，因为 $\mathcal{B}$ 和 $\partial_\infty \mathcal{B}$ 中的公寓之间存在一一对应。由命题 5.52 得，$\mathrm{Stab}_{G_{\mathbb{F}}}(\partial_\infty \mathbb{A}) = \mathrm{Stab}_{G_{\mathbb{F}}}(\mathbb{A}) = \mathrm{Nor}_{G_{\mathbb{F}}}(A_{\mathbb{F}}) = A_{\mathbb{F}} N_{\mathbb{F}}$。□

7. 附录： Appendix: The building for $\mathrm{SL}(n,\mathbb{F})$的建筑

为得到定理 5.1（即 $\mathcal{B}$ 是一个仿射 Λ建筑），需要投入相当多的精力来证明公理 (A2)。当群 G得到充分理解时，遵循[BT72] 、在第5.5、5.6和5.7小节中展开的理论并非必需。本附录中，我们针对 $G_{\mathbb{F}} = \mathrm{SL}_n(\mathbb{F})$的情形，给出公理 (A2)的另一种证明。该证明仍然依赖于 [App25第4.4节及 5], 中针对半代数群所发展的通用理论，但篇幅显著更短。

设 $\mathbb{F}$是一个带有与序相容的赋值的非阿基米德实闭域（$-v$）：$\mathbb{F} \to \Lambda \cup \{-\infty\}$，其赋值环为 $O = \{a \in \mathbb{F}\colon\ (-v)\ (a)\ \leq 0\}$。我们考虑半单线性代数群 $G = \mathrm{SL}_n$ 及其极大 $\mathbb{K}$-分裂环面

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} \star & & \\ & \ddots & \\ & & \star \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_n \right\}.$$

那么， [App25 第5] 节中各种分解所出现的群为

$$\begin{aligned}
K_{\mathbb{F}} &= \mathrm{SO}_n(\mathbb{F}) \\
A_{\mathbb{F}} &= \{a = (a_{ij}) \in S_{\mathbb{F}}\colon a_{ii} > 0\} \\
U_{\mathbb{F}} &= \{g = (g_{ij}) \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{F})\colon g_{ii} = 1,\ g_{ij} = 0 \text{ for } i > j\} \\
N_{\mathbb{F}} &= \{ \text{ permutation matrices with entries in } \pm 1\} \\
M_{\mathbb{F}} &= \{a = (a_{ij}) \in S_{\mathbb{F}}\colon a_{ii} \in \{\pm 1\}\} \\
B_{\mathbb{F}} &= \{g = (g_{ij}) \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{F})\colon g_{ij} = 0 \text{ for } i > j\}\,.
\end{aligned}$$

于是 $\mathfrak{a} = \mathrm{Lie}(A_{\mathbb{R}}) = \{H \in \mathbb{R}^{n\times n}\colon\ \mathrm{tr}(H) = 0$，且 H 为对角矩阵 $\}$，与 $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ 相关联的根系 Σ 为 $\Sigma = \{\alpha_{ij} \in \mathfrak{a}^\star\colon\ i \neq j \in \{1,\ldots,n\}\}$，其根为

$$\begin{aligned}
\alpha_{ij}\colon \mathfrak{a} &\to \mathbb{R} \\
H &\mapsto H_{ii} - H_{jj}.
\end{aligned}$$

球面魏尔群 W_s 同构于由 S_n 个字母组成的对称群 S_n。若选取有序基 $\Delta = \{\alpha_{12}, \dots, \alpha_{(n-1)n}\}$，则得到正韦伊尔室

$$A_{\mathbb{F}}^{+} = \{\mathrm{Diag}(a_1, \dots, a_n) \in A_{\mathbb{F}} \colon a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n\}.$$

如第4节所述，我们定义非标准对称空间

$$P_1(n, \mathbb{F}) := \left\{ A \in \mathbb{F}^{n \times n} \colon A^{\mathsf{T}} = A,\ \det(A) = 1,\ A \text{ is positive definite} \right\}$$

并注意到 $\mathsf{SL}(n, \mathbb{F})$ 在 $P_1(n, \mathbb{F})$ 上传递地作用。乘法范数

$$N_{\mathbb{F}} \colon A_{\mathbb{F}} \to \mathbb{F}_{\geq 1}$$

$$\mathrm{Diag}(a_1, \dots, a_n) \mapsto \prod_{i \neq j} \max\left\{ \frac{a_i}{a_j}, \frac{a_j}{a_i} \right\}$$

随后给出了一个 $G_{\mathbb{F}}$-不变的 Λ-伪距离 $d = (-v) \circ N_{\mathbb{F}} \circ \delta_{\mathbb{F}}$，从而我们可以定义 Λ-度量空间 $\mathcal{B} := P_1(n, \mathbb{F})/\sim$。我们赋予 $\mathcal{B}$ 公寓结构 $\mathscr{F} = \{g.f_0 \colon g \in \mathsf{SL}(n, \mathbb{F})\}$，其中 $f_0 \colon \mathbb{A} \to \mathcal{B}$ 是公寓 $\mathbb{A} := A_{\mathbb{F}}.o$ 到基点 $o = [\mathrm{Id}] \in \mathcal{B}$ 的包含关系。以下是定理 5.1 的一个特例。

定理 7.1。 Λ-度量空间 $\mathcal{B}$ 是一个类型为 $\mathbb{A} = \mathbb{A}(\Sigma^\vee, \Lambda, \Lambda^n)$ 的仿射 Λ-建筑，其中 $\Sigma^\vee$ 是 A_{n-1} 型根系。

公理 (A1)、(A3) 和 (TI) 按照第5.1节所述成立。我们将给出公理 (A2) 的一种直接证明，该证明仅依赖于关于 $o \in \mathcal{B}$ 的稳定子的定理 4.19。随后可以按照第 5.9 节证明公理（A4），其依赖于 (A2) 以及每个 $u \in U_{\mathbb{F}}$ 都稳定一个扇区这一事实；这一事实可以按照第 5.3 节证明，或者直接考察矩阵元素。最后，公理（EC）依赖于 (A2) 以及能够找到雅各布森–莫罗佐夫态射这一事实；对于 $\mathsf{SL}(2, \mathbb{F})$，这一点可以明确看出。

我们首先考察公理

(A2) 对任意 f_1、$f_2 \in \mathscr{F}$，若 $f_1(\mathbb{A}) \cap f_2(\mathbb{A}) \neq \emptyset$，则集合 $\Omega := f_2^{-1} \circ f_1(\mathbb{A})$ 是一个 W_a-凸集，并且存在 $w \in W_a$ 使得 $f_2|_\Omega = f_1 \circ w|_\Omega$。

在 $f_2 = f_0$ 和 $f_1 = g.f_0$ 对某个满足 $g.o = o$ 的 $g \in G_{\mathbb{F}}$ 成立这一特殊情形下。集合 Ω 定义为 $f_0(\Omega) = f_0(\mathbb{A}) \cap g.f_0(\mathbb{A})$。令 $B \subset A_{\mathbb{F}}$ 为所有满足 $g.a.o \in f_0(\Omega)$ 的元素 $a \in A_{\mathbb{F}}$ 组成的集合。注意，B 中的元素是对角矩阵，其对角元素是实闭域$\mathbb{F}$中的正元素，因此我们可以取它们的 n次根。我们希望证明 Ω 是有限个闭仿射半公寓的交。我们之所以这样定义 W_a-凸性，是因为公寓 $\mathbb{A}$ 中的点一般无法作凸组合，因为我们在 $\mathbb{A}$上没有向量空间结构。不过，某些凸组合仍然可行，而且 Ω 包含这些凸组合。

引理 7.2. 对所有 a、$a' \in B$ 以及所有 n、$m \in \mathbb{N}$、$\sqrt[n+m]{a^n a'^m} \in B$。

证明。设 b、$b' \in A_{\mathbb{F}}$，使得 $g.a.o = b.o$ 和 $g.a'.o = b'.o$。根据定理 4.19 $b^{-1}ga$，$(b')^{-1}ga' \in G_{\mathbb{F}}(O)$。现在我们可以利用 $A_{\mathbb{F}}$ 的显式结构，以坐标形式写出

$$g_{ij}\frac{a_j}{b_i} \in O \quad \text{and} \quad g_{ij}\frac{a'_j}{b'_i} \in O.$$

因此也有

$$g_{ij}^{n+m}\frac{a_j^n a_j'^m}{b_i^n b_i'^m}\in O \quad \text{and so} \quad g_{ij}\frac{\sqrt[n+m]{a_j^n a_j'^m}}{\sqrt[n+m]{b_i^n b_i'^m}}\in O.$$

注意，若 $a=$对角矩阵 $(a_1,\dots,a_n)\in A_{\mathbb{F}}$，则也有

$$\sqrt[n+m]{a}:=\mathrm{Diag}(\sqrt[n+m]{a_1},\dots,\sqrt[n+m]{a_n})\in A_{\mathbb{F}},$$

因为这是一个在实数域上成立的一阶命题。于是

$$g.\sqrt[n+m]{a^n a'^m}.o=\sqrt[n+m]{b^n b'^m}.o\in\mathbb{A}$$

证明完毕。 □

现在我们引入正则性的概念。满足 $a\in A_{\mathbb{F}}$ 的 $a.o\in f_0(\mathbb{A})$ 元素可用对角矩阵表示，其对角项为 $a_1,\dots,a_n\in\mathbb{F}$。考虑 $-v(a_1)\dots,(-v)(a_n)$ 作为 $\Lambda=(-v)(\mathbb{F}_{>0})$ 中元素时不同项的数量。令 $\boldsymbol{a}\in B$ 为不同项数量意义下的极大元。直观而言，对于 $i\neq j$，满足 $a_i=a_j$ 的元素位于一面墙上。它们所在的墙越多，正则性就越低。B 中的其他元素可能与 $\boldsymbol{a}$ 有同样多的不同项，但下一个引理说明，这些项与 $\boldsymbol{a}$ 的项相同。

引理 7.3. 设 $b\in B$。如果对于某些 i、j，有 $(-v)(b_i)\neq(-v)(b_j)$，那么 $(-v)(\boldsymbol{a}_i)\neq(-v)(\boldsymbol{a}_j)$。等价地，如果 $(-v)(\boldsymbol{a}_i)=(-v)(\boldsymbol{a}_j)$，那么 $(-v)(b_i)=(-v)(b_j)$。

证明。对于任意元素 $b\in B$，我们定义 $I_b=\{(i,j):(-v)(b_i)\neq(-v)(b_j)\}$。$\boldsymbol{a}$ 的极大性意味着，对于所有 $b\in B$，都有 $|I_b|\leq|I_{\boldsymbol{a}}|$。我们希望证明，对于所有 $b\in B$，都有 $I_b\subseteq I_{\boldsymbol{a}}$。注意到$I_{\boldsymbol{a}}$中元素的数量必然少于 n^2，并为 $k\in\{0,1,\dots,n^2\}$ 定义元素

$$c(k)=\sqrt[n^2]{\boldsymbol{a}^k b^{n^2-k}}\in B$$

根据引理 7.2，该元素属于 B。令 $(i,j)\in I_{\boldsymbol{a}}\cup I_b$。因此 $(-v)(\boldsymbol{a_i}/\boldsymbol{a_j})\neq 0$ 或 $(-v)(b_i/b_j)\neq 0$。我们定义映射

$$k\mapsto(-v)(c(k)_i/c(k)_j)\in\Lambda$$

它要么是常数，但不是 $=0$，要么严格单调递增或递减。无论哪种情况，使映射取值为 0 的 k 至多有一个。若该值存在，令 k_{ij} 为此值。

现在取一个 k，使它不会作为任何 $(i,j)\in I_{\boldsymbol{a}}\cup I_b$中的 k_{ij} 出现。这意味着，对于所有 $(i,j)\in I_{\boldsymbol{a}}\cup I_b$，都有 $c(k)_i\neq c(k)_j$。由此可得 $I_{\boldsymbol{a}}\cup I_b\subseteq I_{c(k)}$。但由于 $\boldsymbol{a}$ 是极大的，我们有 $I_{\boldsymbol{a}}=I_{c(k)}$ 和 $I_b\subseteq I_{\boldsymbol{a}}$。 □

回顾一下，$O\subsetneq\mathbb{F}$ 是非阿基米德实闭域 $\mathbb{F}$的真子环。用 $O^\times$表示 O 的单位。以下是关于赋值环的一个标准事实。

引理 7.4. 在任意赋值环 O中，非单位的集合 $O\setminus O^\times$ 是一个理想。

证明。令 x、$y\in O\setminus O^\times$、$r\in O$。由于 x 不是单位，$x^{-1}=r\cdot(rx)^{-1}\notin O$。因此 $(rx)^{-1}\notin O$，所以 $rx\in O\setminus O^\times$。如果 x 和 y 非零，那么 $x/y\in O$ 或 $y/x\in O$，因为 O 是赋值环。写作 $x+y=y\cdot(1+x/y)=x\cdot(1+y/x)$，我们还可看到 $x+y\in O\setminus O^\times$。□

矩阵的行列式是其各个元素的多项式。根据前面的引理，如果矩阵的所有元素都属于 $O \setminus O^\times$，那么它的行列式也属于 $O \setminus O^\times$。由此可知，如果一个元素属于 O 的矩阵的行列式为 1，那么至少有一个元素必须是单位。实际上，还可以得到更强的结论。

引理 7.5。设 g 是一个元素属于 O 且 $\det(g) = 1$ 的矩阵。那么每一行和每一列中都至少有一个元素是单位。事实上，存在一个置换 σ，使得 $g_{i\sigma(i)} \in O^\times$。

证明。考虑 g 的第 i 行（$g_{i1}, g_{i2}, \dots, g_{in}$）。利用行列式的拉普拉斯展开

$$\det(g) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} g_{ij} \cdot \det M_{ij},$$

其中 M_{ij} 是删去第 i 行和第 j 列后得到的余子式矩阵。由于 $\det(g) = 1 \in O^\times$，可知对于 $j = 1, \dots, n$，至少有一个 g_{ij} 必须是单位。等价地说，每一列中都必须有一个单位。交替运用行和列的论证，我们可以得到一个置换。□

我们将利用引理 7.3 和引理 7.5，证明 $G_{\mathbb{F}}$ 在 $f_0(\mathbb{A})$ 上的作用具有某种刚性：也就是说，当等距变换 $g \in G_{\mathbb{F}}$ 固定单位元时，它在 $f_0(\mathbb{A})$ 上的作用可以用球面魏尔群 W_s 中的一个元素来描述。公寓 $\mathbb{A}$ 本身可能具有许多其他对称性，但只有当该等距变换是 W_s 中有限多个元素之一时，它才能扩展到整个 $\mathcal{B}$。考虑基本扇区

$$s_0 = \{a.o \in \mathbb{A} \colon a_1 \geq \dots \geq a_n\}$$

以 o 为基点。$f_0(\mathbb{A})$ 中以 o 为基点的扇区是 W_s 作用的基本区域，参见例如 [Hum72, 第 10 章3]。因此，若两个点位于以 o 为基点的同一个扇区内，则只有在它们相同的情况下，才能通过 W_s 中的某个元素建立联系。这推出了公理 (A2) 的一个初步受限版本。

命题 7.6. 设如前，$\boldsymbol{a} \in B$ 关于不同条目数量取最大值，且 $g \in G_{\mathbb{F}}$ 满足 $g.o = o$。若 $\boldsymbol{a}.o$ 和 $g.\boldsymbol{a}.o$ 都位于以 o 为基点的同一个扇区内，则 $\boldsymbol{a}.o = g.\boldsymbol{a}.o$，并且 g 的作用在集合 $\Omega := f_0^{-1}(f_0(\mathbb{A}) \cap g.f_0(\mathbb{A}))$ 上是恒等元，即 $f_0|_\Omega = g.f_0|_\Omega$。

证明。设 $\boldsymbol{a} = \mathrm{Diag}(\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n)$ 和 $\boldsymbol{b} = \mathrm{Diag}(\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n) \in A_{\mathbb{F}}$，使得 $g.\boldsymbol{a}.o = \boldsymbol{b}.o$。由于 $\boldsymbol{a}.o$ 和 $\boldsymbol{b}.o$ 位于以 o 为基点的同一个扇区内，它们的条目满足相同的序。形式地，我们可以找到一个置换 ρ，使得

$$\begin{aligned} &(-v)(\boldsymbol{a}_{\rho(1)}) \leq (-v)(\boldsymbol{a}_{\rho(2)}) \leq \dots \leq (-v)(\boldsymbol{a}_{\rho(n)}) \quad \text{and} \\ &(-v)(\boldsymbol{b}_{\rho(1)}) \leq (-v)(\boldsymbol{b}_{\rho(2)}) \leq \dots \leq (-v)(\boldsymbol{b}_{\rho(n)}). \end{aligned} \tag{7.1}$$

由 $g.o = o$ 可得 $g \in G_{\mathbb{F}}(O)$，根据命题 4.19。由前面的引理 7.5 可知，存在一个置换 σ，使得 $g_{i\sigma(i)} \in O^\times$。对于系数，$\boldsymbol{b}^{-1} g \boldsymbol{a} \in G_{\mathbb{F}}(O)$ 意味着 $\boldsymbol{b}_i^{-1} g_{i\sigma(i)} \boldsymbol{a}_{\sigma(i)} \in O$，因此也有 $\boldsymbol{b}_i^{-1} \boldsymbol{a}_{\sigma(i)} \in O$。这意味着 $\mathrm{Diag}(\boldsymbol{a}_{\sigma(1)}, \dots, \boldsymbol{a}_{\sigma(n)}).o = \mathrm{Diag}(\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n).o$。因此，尽管元素 $\boldsymbol{a}_{\sigma(i)}$ 和 $\boldsymbol{b}_i$ 可能并不完全相同，但它们满足 $(-v)(\boldsymbol{a}_{\sigma(i)}) =$

$(-v)(\boldsymbol{b}_i)$。因此，我们可以将这些项排列为

$$\begin{array}{ccccc} (-v)(\boldsymbol{b}_{\rho(1)}) & \leq & (-v)(\boldsymbol{b}_{\rho(2)}) & \leq \ldots \leq & (-v)(\boldsymbol{b}_{\rho(n)}) \quad \text{and thus} \\ \| & & \| & & \| \\ (-v)(\boldsymbol{a}_{\sigma(\rho(1))}) & \leq & (-v)(\boldsymbol{a}_{\sigma(\rho(2))}) & \leq \ldots \leq & (-v)(\boldsymbol{a}_{\sigma(\rho(n))}). \end{array} \tag{7.2}$$

不过，方程（7.1）中 $\boldsymbol{a}$ 的对角元已经按递减序排列，因此它们必然相同。也就是说，对所有 i，$(-v)(\boldsymbol{a}_{\rho(i)}) = (-v)(\boldsymbol{a}_{\sigma(\rho(i))})$，从而 $(-v)(\boldsymbol{a}_i) = (-v)(\boldsymbol{a}_{\sigma(i)}) = (-v)(\boldsymbol{b}_i) \in \Lambda$。现在我们知道 $\boldsymbol{a}.o = \boldsymbol{b}.o$，但仍需证明 g 在 Ω 上处处为恒等元。

如果（7.2）中的所有不等式都严格成立，那么 σ 必然是恒等元。对于存在等号的指标 i、j， σ 可能会改变这些对角元。不过，根据引理 7.3，我们知道，只要 $(-v)(\boldsymbol{a}_i) = (-v)(\boldsymbol{a}_j)$，那么对任意 $a = \mathrm{Diag}(a_1, \ldots, a_n) \in B$，也有 $(-v)(a_i) = (-v)(a_j)$。因此，对所有 i，$(-v)(a_{\sigma(i)}) = (-v)(a_i)$。事实上，我们看到

$$g_{i\sigma(i)} \frac{a_{\sigma(i)}}{a_i} \in g_{i\sigma(i)} O^\times \subseteq O$$

因此，对所有 $a \in B$， $g.a.o = a.o$，所以 $f_0|_\Omega = g.f_0|_\Omega$。 □

现在我们允许点 $\boldsymbol{a}.o$ 和 $\boldsymbol{b}.o$稍微更一般一些。

命题 7.7. 设 $g \in G_{\mathbb{F}}$ 满足 $g.o = o \in \mathcal{B}$，则存在一个元素$w \in W_s$，使得 $f_0|_\Omega = g.f_0 \circ w|_\Omega$，其中 $\Omega := f_0^{-1}(f_0(\mathbb{A}) \cap g.f_0(\mathbb{A}))$。

证明. 利用引理 7.3，得到关于不同项数目极大的 $\boldsymbol{a} \in B$。设 $\boldsymbol{b} \in A_{\mathbb{F}}$ 满足 $\boldsymbol{b}.o = g.\boldsymbol{a}.o \in f_0(\Omega)$。由于 $f_0(\mathbb{A})$ 中的扇区是 W_s 的基本区域，因此存在一个 $w \in W_s$，使得 $w.\boldsymbol{b}.o$和 $\boldsymbol{a}.o$ 位于同一个扇区。等价地， $\boldsymbol{b}.o$ 和 $w^{-1}.\boldsymbol{a}.o$ 位于同一个扇区。注意到 $gw.o = o$, $\boldsymbol{b}.o = (gw)$。$(w^{-1}\boldsymbol{a}).o$, $f_0(\Omega) = f_0(\mathbb{A}) \cap g.f_0(\mathbb{A}) = f_0(\mathbb{A}) \cap (gw).f_0(\mathbb{A})$（因为 $w.\mathbb{A} = \mathbb{A}$），且 $w^{-1}\boldsymbol{a}$ 关于不同项数目极大，因此我们可以应用命题 7.6 得到 $f_0|_\Omega = (gw).f_0|_\Omega = g.f_0 \circ w|_\Omega$。 □

为了证明公理 (A2) 成立，还存在一个障碍，即 g 一般而言可能不保持 o。事实上，Ω 甚至可能不包含 o，因此我们必须先平移 Ω，才能使用前面的命题。

命题 7.8. 设 $g \in G_{\mathbb{F}}$，并定义 $\Omega := f_0^{-1}(f_0(\mathbb{A}) \cap g.f_0(\mathbb{A}))$。那么存在一个元素 $\overline{w} \in W_a$，使得 $f_0|_\Omega = g.f_0 \circ \overline{w}|_\Omega$。

证明. 若 $\Omega = \emptyset$，则 W_a 中的任意元素都可以。否则，选取并固定$\boldsymbol{a} \in B$（不一定是极大的）以及 $\boldsymbol{b} \in A_{\mathbb{F}}$，使得 $\boldsymbol{b}.o = g.\boldsymbol{a}.o \in f_0(\Omega)$。现在考虑任意的 $a, b \in A_{\mathbb{F}}$，满足 $b.o = g.a.o \in f_0(\Omega)$。我们将问题平移$\boldsymbol{b}^{-1}$，得到

$$\boldsymbol{b}^{-1}.b.o = (\boldsymbol{b}^{-1}.g.\boldsymbol{a}).\boldsymbol{a}^{-1}.a.o$$

其中 $(\boldsymbol{b}^{-1}.g.\boldsymbol{a}).o = o$。我们几乎处于命题 7.7 的情形，但 Ω 不同。事实上，由于 $\boldsymbol{b}^{-1}.f_0(\mathbb{A}) = f_0(\mathbb{A}) = \boldsymbol{a}.f_0(\mathbb{A})$,

$$\begin{aligned} f_0(\mathbb{A}) \cap (\boldsymbol{b}^{-1}.g.\boldsymbol{a}).f_0(\mathbb{A}) &= \boldsymbol{b}^{-1}.f_0(\mathbb{A}) \cap \boldsymbol{b}^{-1}.g.f_0(\mathbb{A}) \\ &= \boldsymbol{b}^{-1}.f_0(\Omega) = f_0(\boldsymbol{b}^{-1}.\Omega), \end{aligned}$$

我们可以应用命题 7.7，得到一个 $w \in W_s$，使得

$$f_0|_{\boldsymbol{b}^{-1}.\Omega} = (\boldsymbol{b}^{-1}.g.\boldsymbol{a}).f_0 \circ w|_{\boldsymbol{b}^{-1}.\Omega} \ ,$$

可改写为

$$\boldsymbol{b}^{-1}.f_0|_\Omega = \boldsymbol{b}^{-1}.g.f_0 \circ (\boldsymbol{a}w\boldsymbol{b}^{-1})|_\Omega.$$

将 $\overline{w} = \boldsymbol{a}w\boldsymbol{b}^{-1} \in W_a$ 重新命名并转换回去，即得到所需的公式 a

$$f_0|_\Omega = g.f_0 \circ \overline{w}|_\Omega. \qquad \square$$

现在我们可以完成公理 (A2) 的证明。

命题 7.9. 公理

(A2) *For all $f_1, f_2 \in \mathscr{F}$, if $f_1(\mathbb{A}) \cap f_2(\mathbb{A}) \neq \emptyset$, then the set $\Omega := f_2^{-1} \circ f_1(\mathbb{A})$ is a W_a-convex set and there exists $w \in W_a$ such that $f_2|_\Omega = f_1 \circ w|_\Omega$.*

对 $(\mathcal{B}, \mathscr{F})$ 成立。

证明。设 $g, h \in G_\mathbb{F}$ 满足 $f_1 = g.f_0$ 和 $f_2 = h.f_0$，使得 $g.f_0(\mathbb{A}) \cap h.f_0(\mathbb{A}) \neq \emptyset$。我们定义 $\Omega := (h.f_0)^{-1}(h.f_0(\mathbb{A}) \cap g.f_0(\mathbb{A}))$。我们将首先证明 (A2) 的第二部分。为了应用命题 7.8，我们用 h^{-1} 作用于

$$h.f_0(\Omega) = h.f_0(\mathbb{A}) \cap g.f_0(\mathbb{A}),$$

从而得到

$$f_0(\Omega) = f_0(\mathbb{A}) \cap (h^{-1}g).f_0(\mathbb{A}).$$

我们可以对 $h^{-1}g$ 应用命题 7.8，从而得到一个元素 $w \in W_a$，使得 $f_0|_\Omega = (h^{-1}g).f_0 \circ w|_\Omega$，因此 $f_2|_\Omega = h.f_0|_\Omega = g.f_0 \circ w|_\Omega = f_1 \circ w|_\Omega$。

还需证明 Ω 是 W_a-凸的。元素 $a.o \in f_0(\Omega)$ 正是那些具有特殊性质 $h.a.o = g.w.a.o$ 的元素；根据定理 4.19，这等价于 $a^{-1}h^{-1}gwa \in G_\mathbb{F}(O)$。若 $a =$ 对角矩阵 $(a_1, \ldots, a_n) \in A_\mathbb{F}$，则

$$(h^{-1}gw)_{ij}\frac{a_j}{a_i} \in O$$

在矩阵元素中。取赋值后，我们得到

$$(-v)(\chi_{\alpha_{ij}}(a)) = (-v)(a_i/a_j) \geq (-v)((h^{-1}gw)_{ij}) \in \Lambda$$

而这些正是不等式所定义的仿射半公寓

$$H^+_{\alpha_{ij},k} := \left\{a.o \in \mathbb{A} \colon (-v)(\chi_{\alpha_{ij}}(a)) \geq k\right\}$$

对于 $k = (-v)((h^{-1}gw)_{ij})$。由于只有有限多个二元组 (i, j)，Ω 是半公寓的有限交，即 W_a-凸的。$\square$

References

[App24] R. Appenzeller。半代数群与广义仿射建筑。博士论文，苏黎世联邦理工学院，2024年。博士论文，开放获取。[App25] R. Appenzeller。实闭域上的半单代数群。2025年。准备中，2026年。[BCR98] J. Bochnak、M. Coste、M.-F. Roy。实代数几何。Springer，1998年。[Ben94] C. Bennett。仿射 Λ-建筑 I。《伦敦数学学会学报》（第3辑）68，244–267页，1994年。[BGL+24] J. Beyrer、O. Guichard、F. Labourie、B. Pozzetti、A. Wienhard。正性、交比与领圈引理。arXiv，2024年。[BH99] M. R. Bridson、A. Haefliger。非正曲率度量空间，《数学科学基础丛书》第319卷，*[*数学科学基础原理*]*。施普林格出版社，柏林，1999年。[BIPP21] M. Burger、A. Iozzi、A. Parreau、M. B. Pozzetti。特征簇的实谱紧化：刻画与应用。《巴黎科学院数学学报》，359：439–463，2021年。[BIPP25] M. Burger、A. Iozzi、A. Parreau、M. B. Pozzetti。特征簇的实谱紧化，2025年。[Bon88] F. Bonahon。通过测地流研究 Teichmüller 空间的几何。《数学创刊》，92(1)：139–162，1988年。¨Bor[A. Borel。《线性代数群》，第二次扩充版，第68卷。《数学研究生教材》，1991年。91] Bou[N. Bourbaki。《李群与李代数》第4–6章。施普林格出版社，柏林，第2版，2008年。印刷版。08] Bru88a[G. W. Brumfiel。Teichmüller 空间的实谱紧化。《当代数学》，74：63–65，1988年。] Bru88b[G. W. Brumfiel。非阿基米德双曲平面的树。《当代数学》，74：83–106，1988年。] BSS[C. Bennett、P. Schwer、K. Struyve。非离散仿射建筑的公理化定义。《几何学进展》，2014年。14] BT[A. Borel、J. Tits。约化群。《数学出版物》，高等科学研究院，27：659–755，1965年。65] BT ´R. Bruhat、J. Tits。局部域上的约化群 I。赋值根数据。《数学出版物》，高等科学研究院，41：5–252，1972年。[BT84a72] F. Bruhat、J. Tits。局部域上的约化群 II。群概形。´赋值根数据的存在性。《高等科学研究院数学出版物》，（60）：197–376，1984年。´BT84b´ F. Bruhat、J. Tits。局部域上经典群的群概形与建筑。《法国数学学会通报》，112：259–301，1984年。[BT] F. Bruhat、J. Tits。局部域上经典群的群概形与建筑 II：酉群。（局部域上经典群的群概形与建筑 II：酉群）。《法国数学学会通报》，115：141–195，1987年。´Chi´I. Chiswell。´-树导论。世界科学出版社，River Edge，新泽西州，2001年。´Ebe´P. Eberlein。非正曲率流形的几何。芝加哥大学出版社，芝加哥，伊利诺伊州，1996年。[EP] A. J. Engler、A. Prestel。赋值域。《Springer 数学专著》。施普林格出版社，柏林，2005年。´Fla[X. Flamm。Hitchin 分支的实谱紧化、Weyl室值长度与对偶空间。预印本，arXiv:2208。87] math.GT´（2022），2022年。[FP01] X. Flamm、A. Parreau。非阿基米德 Hilbert 几何与实 Hilbert 几何的退化，2025年。 ΛGW[O. Guichard、A. Wienhard。推广 Lusztig的全正性。《数学创刊》，239(3)：707–799，2025年。

.[Hah07] H. Hahn. 关于非阿基米德大小系统。维也纳帝国科学院数学与自然科学部会议报告，116:601–655，1907年。[Hal66] J. D. Halpern. 向量空间中的基与选择公理。《美国数学会会刊》，17(3):670–673，1966年。[HIL23] A. H´ebert, D. Izquierdo, B. Loisel. 与赋值域上的准分裂群相关的 Λ-建筑。M ¨unster 数学杂志，16(2):323–487，2023年。[Hum72] J. E. Humphreys. 李代数与表示论导论。Springer，1972年。[Jae25] V. Jaeck. 特征簇上的普适几何空间的实谱紧化。预印本，arXiv:2507.22654 [math.GR] (2025)，2025年。[KL97] B. Kleiner, B. Leeb. 对称空间与欧几里得建筑的拟等距刚性。《高等科学研究所数学出版物》，1997年。[Kos73] B. Kostant. 关于凸性、韦伊群与岩泽分解。《高等师范学校科学年刊》，4(6):413–455，1973年。[Kru39] W. Krull. 对交换整环算术的贡献。VI. 一般判别式定理。非分歧环扩张。《数学杂志》，45(1):1–19，1939年。[KT02] L. Kramer, K. Tent. 仿射 Λ-建筑、李群的超幂与黎曼对称空间：马古利斯猜想的代数证明。arXiv 数学电子预印本，math/0209122，2002年。[Lan96] E. Landvogt. 布吕阿-蒂茨建筑的紧化，《数学讲义》第1619卷。施普林格出版社，柏林，1996年。[Mos73] G. D. Mostow. 局部对称空间的强刚性，《数学年刊研究丛书》第78卷。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州；东京大学出版社，东京，1973年。[Par00] A. Parreau. 仿射建筑：通过范数构造及等距变换研究。《当代数学》，262:263–302，2000年。[Par12] A. Parreau. 有限生成群表示空间的紧化。《数学杂志》，272(1-2):51–86，2012年。[Rob96] A. Robinson. 非标准分析。普林斯顿数学经典。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1996年。1974年第二版的重印本，附 Wilhelmus A. J. Luxemburg 的序言。[Ron89] M. Ronan. 建筑讲义。学术出版社有限公司（伦敦），1989年。[Sch09] P. Schwer. 广义仿射建筑。博士论文，明斯特大学，2009年。以 Petra Hitzelberger 之名出版。[SS12] P. Schwer, K. Struyve. Λ-建筑与基变换函子。《几何专论》，157:291–317，2012年。[Str11] K. Struyve. ℝ-建筑的（非）完备性与不动点定理。《群、几何与动力学》，5(1):177–188，2011年。[Tho02] B. Thornton. 对称空间的渐近锥。博士论文，犹他大学，2002年。[Thu88] W. P. Thurston. 关于曲面微分同胚的几何与动力学。《美国数学会通报》（新系列），19(2):417–431，1988年。[Tit86] J. Tits. 仿射型建筑。（Buildings of affine type）。《建筑与图形几何》，意大利数学高等教育中心1984年科莫第三届课程，数学讲义1181，159–190（1986年），1986年。[Wei09] R. M. Weiss. 仿射建筑的结构，《数学年刊研究丛书》第168卷。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，2009年。[Wie18] A. Wienhard. 高阶 Teichmüller 理论导论。载于《2018年国际数学家大会论文集》，2018年国际数学家大会，巴西里约热内卢，2018年8月1–9日。第二卷：特邀报告，第1013–1039页。新泽西州哈肯萨克：世界科学出版社；里约热内卢：巴西数学会，2018年。

Department of Mathematics, Heidelberg University, Germany
电子邮件地址：rappenzeller@mathi.uni-heidelberg.de