arXiv:2601.03235v1 [quant-ph] 6 Jan 2026

量子处理器上的浅电路监督学习

Luca Candelori[2], Swarnadeep Majumder[1,*], Antonio Mezzacapo[1], Javier Robledo Moreno[1], Kharen Musaelian[2], Santhanam Nagarajan[2], Sunil Pinnamaneni[2,*], Kunal Sharma[1], 和 Dario Villani[2]

[1]*IBM Quantum，IBM T.J. Watson*研究中心，纽约约克镇高地，*NY 10598*，美国 [2]*Qognitive, Inc.，119 W 24th St.*，纽约，*NY 10011*，美国 *主要作者——这些作者对本研究贡献相同

2026年1月7日

摘要

量子计算长期以来被寄予厚望，能够推动数据分析取得变革性进展，但实用的量子机器学习仍难以实现，原因在于一些根本性障碍，例如加载经典数据的量子成本高昂，以及许多面向近期量子硬件设计的量子机器学习算法难以训练。在这项工作中，我们展示了如何通过一种基于线性哈密顿量的机器学习方法克服这些障碍；该方法利用 k-局域哈密顿量的基态问题，为经典数据提供紧凑的量子表示。我们采用近期提出的基于样本的克雷洛夫量子对角化方法，计算数据哈密顿量的低能态；这些哈密顿量的参数经过训练，可通过局部梯度表达经典数据集。我们在基准数据集上开展实验，使用多达 50 个 IBM Heron量子处理器的量子比特，展示了这些方法的有效性和可扩展性。

1 引言

过去十年间，人工智能（AI）的迅速发展与量子计算的同步进步，推动了人们对量子机器学习（QML）的兴趣。人们希望量子处理器能够提供新的计算原语，以解决机器学习问题。早期量子机器学习研究受到超多项式加速前景的推动，其灵感来自基于线性方程组求解器（如 HHL [8]）的量子算法。这些方法表明，原则上，量子计算机处理某些结构化数据的效率可能高于经典方法。然而，这些方法依赖于高效制备量子态以加载经典数据，并要求能够高效读出最终量子态；这两项要求后来都成为主要瓶颈 [1]。在若干情况下，当经典算法获得了可比的访问模型后，原先承诺的量子优势便不复存在，由此催生了一系列去量子化结果 [23]。

此外，早期的量子机器学习算法需要容错量子计算平台。当前的容错前量子计算机只能支持依赖于

浅层电路 [11, 14, 20, 24]。这推动了变分量子算法（VQAs）的发展；变分量子算法被提出作为容错量子算法的有前景的低深度替代方案。VQAs 采用具有可训练参数的浅层量子电路形式的拟设，因此适用于当前的量子处理器。然而，针对给定问题设计具有良好归纳偏置的拟设或量子神经网络仍然十分困难。优化景观可能遭受贫瘠高原 [15]和不利的局部极小值 [4], ，这使得量子模型的训练面临挑战。近期研究提出了融合测量和前馈操作的参数化电路族 [7],，尽管它们在量子处理器上的实现仍然受到限制。量子核方法通过利用量子特征映射来执行核技巧 [9]，为量子机器学习提供了另一条发展方向。原则上，这种方法可以实现经典学习器与量子学习器之间的区分 [16], ，但其广泛适用性取决于能否为真实数据集确定具有恰当归纳偏置的核。关于量子核方法近期的一项大规模演示，我们请读者参阅 [3]。

因此，在当前量子处理器上实现实用的机器学习，需要采用能够高效嵌入经典数据、避免优化崩溃并对硬件噪声保持鲁棒的方法。另一个关键要求是，所使用的量子电路不能被高效地进行经典模拟。本文采用 Qognitive Inc. 开发的一种基于线性哈密顿量的机器学习框架来应对这些问题。该框架受到量子认知机器学习（QCML）的启发 [18, 5], ，并已成功应用于金融 [22, 21],、医疗保健 [6], 和纯数据科学 [5, 2]领域。其关键创新在于学习数据编码：针对任意数据点，根据特征算符及其特征值构造哈密顿量。因此，即使底层特征算符保持固定，每个数据点也会对应一个不同的哈密顿量。对于分类任务，随后通过测量与各数据点对应的哈密顿量所关联基态上的可观测量来推断标签。这种表达能力强的嵌入仅编码相关信息，因此能够在当前量子处理器上运行。 [10],也曾探讨过将数据编码到哈密顿量中的思路，不过该研究采用的是固定的哈密顿量嵌入，而非学习任务相关算符。

该框架中的主要学习问题，是识别与底层学习任务相匹配的特征算符和标签算符集合。为此，我们需要近似与数据点对应的哈密顿量的基态。近期提出的基于采样的克雷洛夫量子对角化（SKQD）算法 [24],在量子硬件上解决了这一问题；在假设基态稀疏的条件下，该算法已被证明能够收敛于基态能量的近似值。SKQD 从克雷洛夫量子态中抽取量子样本，并在由采样得到的比特串所张成的子空间中进行经典对角化，以近似基态和低能谱。为了学习与经典特征相关联的量子算符，我们为每个特征算符选取一组固定的泡利项，并随机初始化其系数。随后在训练过程中更新这些系数。原则上，精确梯度取决于哈密顿量的所有本征态，因此大规模计算这些梯度的效率很低。

我们重点介绍该方法的几项关键特性。通过将经典数据嵌入k局域哈密顿量中，我们实际上是在学习一种紧凑编码。克雷洛夫态涉及$e^{-iHj\Delta t}$形式的项，因此，经典特征以加权组合的形式，作为泡利项进入生成这些态的单量子比特门和双量子比特门中。此外，我们的方法还

作用于从 SKQD 获得的稀疏基态，这意味着我们只探测整个希尔伯特空间中的一个小子空间。

我们的工作流程旨在现有容错前量子计算机上实现扩展。我们在一个包含十个特征的二元分类问题上对我们的方法进行了实验评估，并证明该模型可在IBM Heron量子处理器上训练至多50个量子比特，同时产生不消失的梯度。

本文分为四个部分。第2节首先在第2.1小节介绍机器学习模型、其在泡利字符串基中的表示，以及用于分类的交叉熵损失函数。第2.2小节介绍相关的梯度计算、SKQD子程序和泡利字符串跃迁概率。第2.3小节介绍量子-经典混合训练过程。第3节讨论所使用的数据集、实验设置，以及在当前量子处理器上的混合模拟；结论见第4节。

2 方法

2.1 用于经典数据的量子模型

基于线性哈密顿量的机器学习范式采用量子力学的数学框架来处理数据分析问题。遵循 [5]，中的符号和约定，我们引入集合 $\mathrm{X} = \mathrm{t} \times \mathrm{D}$，其中包含 t 个数据点 x_1,...、x_t。每个数据点 x_i 由一个 D 维实值向量数据特征 $\mathrm{x}_i = \left(\mathrm{a}_i^1, \ldots, \mathrm{a}_i^D\right)$组成。此外，相关的 $\mathrm{t} \times \mathrm{K}$ 集合 Y 包含 t 个目标值 y_1,...、y_t，其中每个目标值都是 K 维实值向量 $\mathrm{y}_i = \left(\mathrm{b}_i^1, \ldots, \mathrm{b}_i^K\right)$。我们考虑模型参数 $\mathcal{M}$，其由偏置算子 B、输入特征算子 $\mathcal{X} = \{\mathrm{X}_f\}_{f=1}^D$（称为矩阵配置）和输出算子 $\mathcal{O} = \{\mathrm{O}_j\}_{j=1}^K$组成。所有这些算子都是厄米的。对于希尔伯特空间中的任意状态 $|\psi\rangle$，位置向量和逻辑值随后变为

$$\begin{aligned} y(\psi) &= \left(\langle\psi|O_1|\psi\rangle, \ldots, \langle\psi|O_K|\psi\rangle\right) \\ &= (l_1, \ldots, l_K) \in \mathbb{R}^K. \end{aligned} \tag{1}$$

对于分类任务，模型输出的*li*'s（称为逻辑值）用于计算损失函数 [17]。对于任意数据点x，量子态 $|\psi_0(x)\rangle$ 的构造不仅编码了x 在特征空间中的位置，还通过哈密顿量编码了它与数据集中所有其他点的关系。每个数据点对应的量子态都计算为该哈密顿量的基态

$$H(x) = B - \sum_{f=1}^{D} a^f X_f. \tag{2}$$

在物理学和化学应用中，模型 Eq. (2) 是基于第一性原理构建的。然而，在数据分析和机器学习的背景下，算符B 和X^f 是在模型训练过程中学习得到的。通过哈密顿量加载数据集，有助于缓解许多量子机器学习方案中常见的数据输入问题；这些方案采用角度编码或振幅编码，因此需要使用深电路。

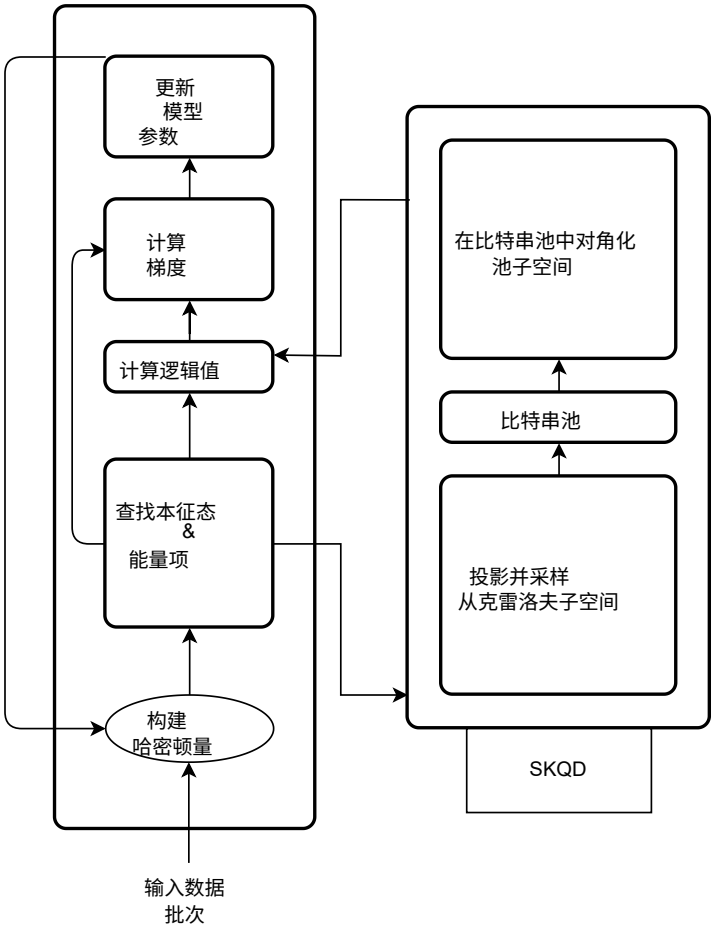
更新
模型
参数
计算
梯度
计算逻辑值
查找本征态
&
能量项
构建
哈密顿量
输入数据
批次
在比特串池中对角化
池子空间
比特串池
投影并采样
从克雷洛夫子空间
SKQD

图1：**模型架构**

矩阵配置 $\mathcal{X}$，以及偏置算子 B 和输出算子 $\mathcal{O}$，可以用泡利串基 $P = \{P_p\}_{p=1}^{P}$ [19] 表示如下

$$B = \sum_{p=1}^{P} \beta^p P_p,\ X_f = \sum_{p=1}^{P} \chi_f^p P_p, \text{ and } O_k = \sum_{p=1}^{P} o_k^p P_p, \tag{3}$$

在这项工作中，我们考虑作用于 n 个量子比特的 1 局部和 2 局部泡利字符串集合，其中非恒等项彼此相邻。我们将此集合称为相邻泡利串模式。这样做是为了降低量子电路的深度，以便在当前的量子处理器上执行。未来可以考虑不同的模式以及权重更高的泡利算子。

模型训练等同于通过最小化损失 $\mathcal{L}$ 来学习式 (3) 中算子的系数 $\{\beta^p, {\chi^p}_f、{o^p}_k\}$，如下所示

$$\{\beta^p, \chi_f^p, o_k^p\} = \text{argmin}_{\{\beta^p, \chi_f^p, o_k^p\}} \mathcal{L}, \tag{4}$$

对于分类任务，通过使用 softmax 函数对式 (1) 中的逻辑值进行归一化得到概率 p_k，并结合独热编码的真实标签 τ_k，为每个数据点计算该损失，如下所示

$$\begin{aligned} p_k &:= \frac{\exp(l_k)}{\sum_{k=1}^{K} \exp(l_k)}, \\ \mathcal{L} &:= -\sum_{k=1}^{K} \tau_k \log(p_k). \end{aligned} \tag{5}$$

2.2 梯度

式（4）所述的模型训练通过反向传播实现，这需要计算损失函数 $\mathcal{L}$ 相对于系数$\{\beta^p, {\chi^p}_f、{o^p}_k\}$的偏导数。利用微扰理论 [13],，这些导数可计算为

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \beta^p} &= -2 \sum_{k=1}^{K} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial l_k} \text{Re} \sum_{m=1}^{2^n} \sum_{q=1}^{P} o_k^q \frac{\langle \psi_0 | P_q | \psi_m \rangle \langle \psi_m | P_p | \psi_0 \rangle}{E_m - E_0}, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \chi_f^p} &= 2a^f \sum_{k=1}^{K} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial l_k} \text{Re} \sum_{m=1}^{2^n} \sum_{q=1}^{P} o_k^q \frac{\langle \psi_0 | P_q | \psi_m \rangle \langle \psi_m | P_p | \psi_0 \rangle}{E_m - E_0}, \text{ and} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial o_k^p} &= \langle \psi_0 | P_p | \psi_0 \rangle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial l_k} \end{aligned} \tag{6}$$

请注意，尽管相对于 β^p 和${\chi^p}_f$的偏导数解析公式对指数多的能量项求和，我们的优化方法会在少量项之后截断该级数，而截断项数是训练流程的一个超参数。

计算 6 中梯度的一个重要部分，是计算基态和激发态集合。这里我们使用最近发现的基于采样的克雷洛夫量子对角化方法 [24]。SKQD 算法是一种量子-经典混合方法，旨在

利用从克雷洛夫基中抽取的样本来近似多体哈密顿量的基态性质；该克雷洛夫基由一组作用于参考态$|\Psi_{\text{init}}\rangle$的量子电路生成。它建立在更为通用的基态方法框架之上，该框架对测量子空间执行经典对角化 [20, 12],：量子计算机用于生成一个由采样得到的计算基态张成的子空间，随后经典计算机对投影到该子空间中的哈密顿量执行对角化。SKQD 的关键洞见是采用 时间演化电路——其灵感源自经典数值线性代数中的克雷洛夫子空间方法——作为采样分布的生成器。这使算法能够系统地并以高概率收敛的方式探索希尔伯特空间中承载真实基态波函数大部分权重的子空间。

设H 为一个n量子比特哈密顿量，其基态为 $|\phi_0\rangle$ ，基态能量为E_0。假设存在一个参考态 $|\Psi_{\text{init}}\rangle$ ，它可在量子计算机上轻松制备，并且与 $|\phi_0\rangle$具有不可忽略的重叠，即，随着系统规模增大， $|\langle\Psi_{\text{init}}|\phi_0\rangle|^2$ 不会呈指数级消失。SKQD 方法通过反复将时间演化算符作用于参考态，构造一组克雷洛夫态：

$$|\Psi_k\rangle = e^{-iHkt}|\Psi_{\text{init}}\rangle, \qquad k = 0, 1, \ldots, K, \tag{7}$$

其中t 为较小的演化时间，K 决定克雷洛夫子空间的维数。每个$|\Psi_k\rangle$ 都可以看作由H支配的量子动力学的一个快照。从这些经过时间演化的量子电路中采样测量结果，会产生与基态中占主导地位的基态波函数对应的比特串。

随后，将哈密顿量投影到所采样比特串的线性张成空间中，并在经典计算机上进行对角化：

$$H_{\text{eff}} = P^\dagger H P, \tag{8}$$

其中 P 是一个矩阵，其各列对应于采样基向量。求解H_{eff} 的特征值问题，可在采样子空间中估算基态能量并重构近似基态波函数。该方法的准确率受子空间大小控制。子空间越大，基态近似就越准确，但量子和经典运行时间也会增加。我们的工作流程示意图见图 1。

2.3 量子-经典混合训练

对式 (3) 中以泡利串基表示的模型进行训练，需要通过求解式 (4) 来学习系数 $\{\beta^p,\ \chi^p{}_f,\ o^p{}_j\}$。与任何人工智能/机器学习训练流程一样，混合训练需要选择超参数 $\mathcal{H}$，包括优化器及其参数（批量大小、学习率及其调度方式）、SKQD 参数（幺正克雷洛夫子空间维数、采样次数、演化时间步长、子空间选择策略，以及式 (6) 中梯度展开的能量项数量）。算法1展示了一个训练流程示例，并明确列出了这些参数的取值。

量子处理器仅用于步骤 2，并且需要一种采样策略来确定如何创建比特串池，以及一种重采样策略来确定何时更新该池。采样策略的示例包括：a）“最后一个池”，使用与哈密顿量已处理的最后一个数据点相关联的比特串池；以及 b）“批量大小并集”，使用给定

算法 1： 监督训练流程示例

训练数据 X**：** 400 个数据点，包含 10 个特征和 2 个类别
保利字符串集合 P**：** 本例中使用相邻的 2-局部 X 和 Z 保利字符串
模型参数 $\mathcal{M}$**：** 系数 $\{\beta^p, \chi^p{}_f, o^p{}_k\}$，用于描述偏置算子、矩阵配置和输出算子
超参数 $\mathcal{H}$**：** 批量大小 = 25，优化器 = Adam，学习率 = 0.1
每 5 个训练轮次减少 0.8 倍，幺正 Krylov 维度 = 8，采样次数 = 200，演化时间步长 $\in [0.005, 0.1]$，
能量项数量 $\in [2, 60]$
结果（输出）： 训练后的模型参数 $\mathcal{M}$，最终比特串池

对于训练轮次=*1* 到最终_训练轮次 **执行**
  对于批次=*1*到最终_批次 **执行**
    对*item*=*1* 执行至最终_批次_中的每个元素，并行**执行**
      1. 使用模型参数创建稀疏泡利算子表示；
      2. 根据重采样策略，使用采样策略计算比特串池；
      3. 利用比特串池，计算：$\{E_k\}^{\#\text{能量项}k=0}$，$\{\langle\psi_0|P_i|\psi_k\rangle\}^{(\#\text{能量项的 P})(k,i)=(0,1)}$；
      4. 使用第 1 步和第 3 步计算逻辑值；
      5. 使用第 6 步计算梯度；并
      6. 使用优化器策略，更新模型参数
    end
  end
end

批次中观测到的所有不同比特串的并集。类似地，也存在多种重采样策略，例如：a）“训练轮次开始时”，在每个训练轮次开始时更新比特串池；以及 b）“贪心训练轮次策略”，只要训练损失持续下降，就不进行重采样。在本研究中，观察发现，“批量大小并集”策略与“训练轮次开始时”重采样相结合，足以将模型训练至 50 个量子比特。

在 *IBM* 处理器上执行量子电路

如前所述，量子计算机用于采样比特串，作为 SKQD 的子程序，以计算梯度计算中的能量项。我们使用 *ibm_fez*，这是一台如图 2 所示、采用重六边形连接的 156量子比特设备 IBM Heron 处理器。为了应对我们这些前容错设备中存在的噪声，我们采用了多种技术来提高采样所得比特串的质量：

- 正如芯片上不均匀的错误率所表明的，量子比特选择非常重要。我们在整个 156量子比特设备上进行了层保真度实验。层保真度是一项基准测试，它综合考虑量子比特质量、门错误率、门速度等多种指标，用于评估特定处理器能够运行的量子电路质量。我们根据这一层保真度，筛选出一条由 50个量子比特链组成的

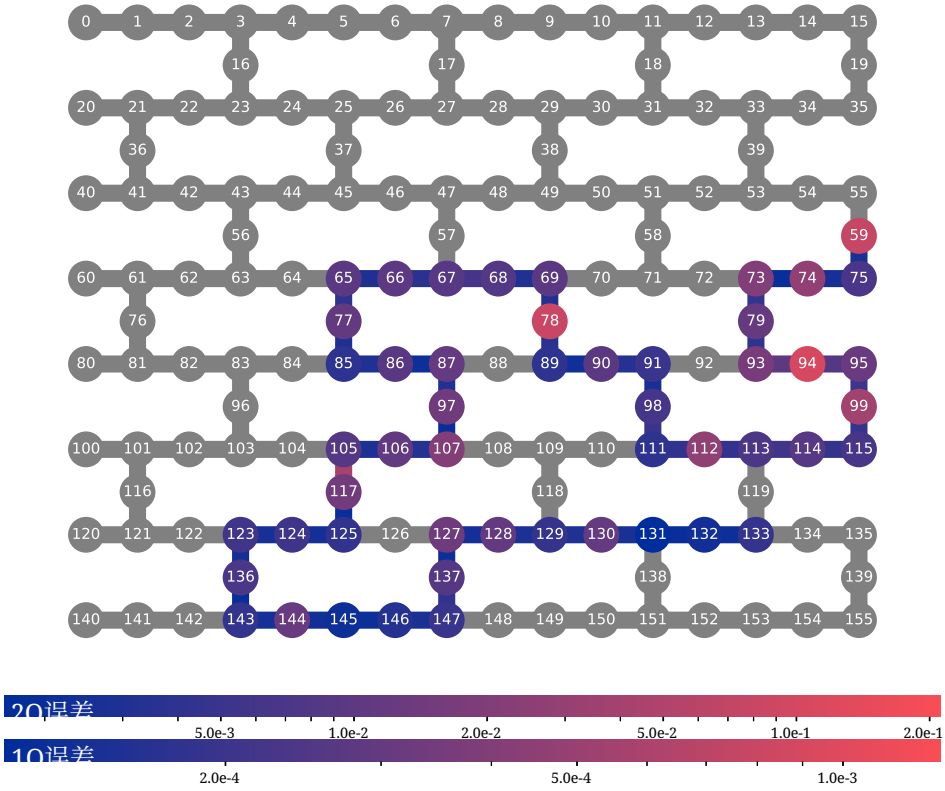

图2：**设备拓扑结构：***ibm_fez* 该处理器共有156个量子比特，我们从中选取了50个用于实验。我们根据随机基准测试实验测得的单量子比特和双量子比特误差率，对这些量子比特及其相连边进行高亮显示和颜色编码。

保真度估计。

- 我们采用动态去耦，在量子电路的空闲期间抑制退相干。

3 结果

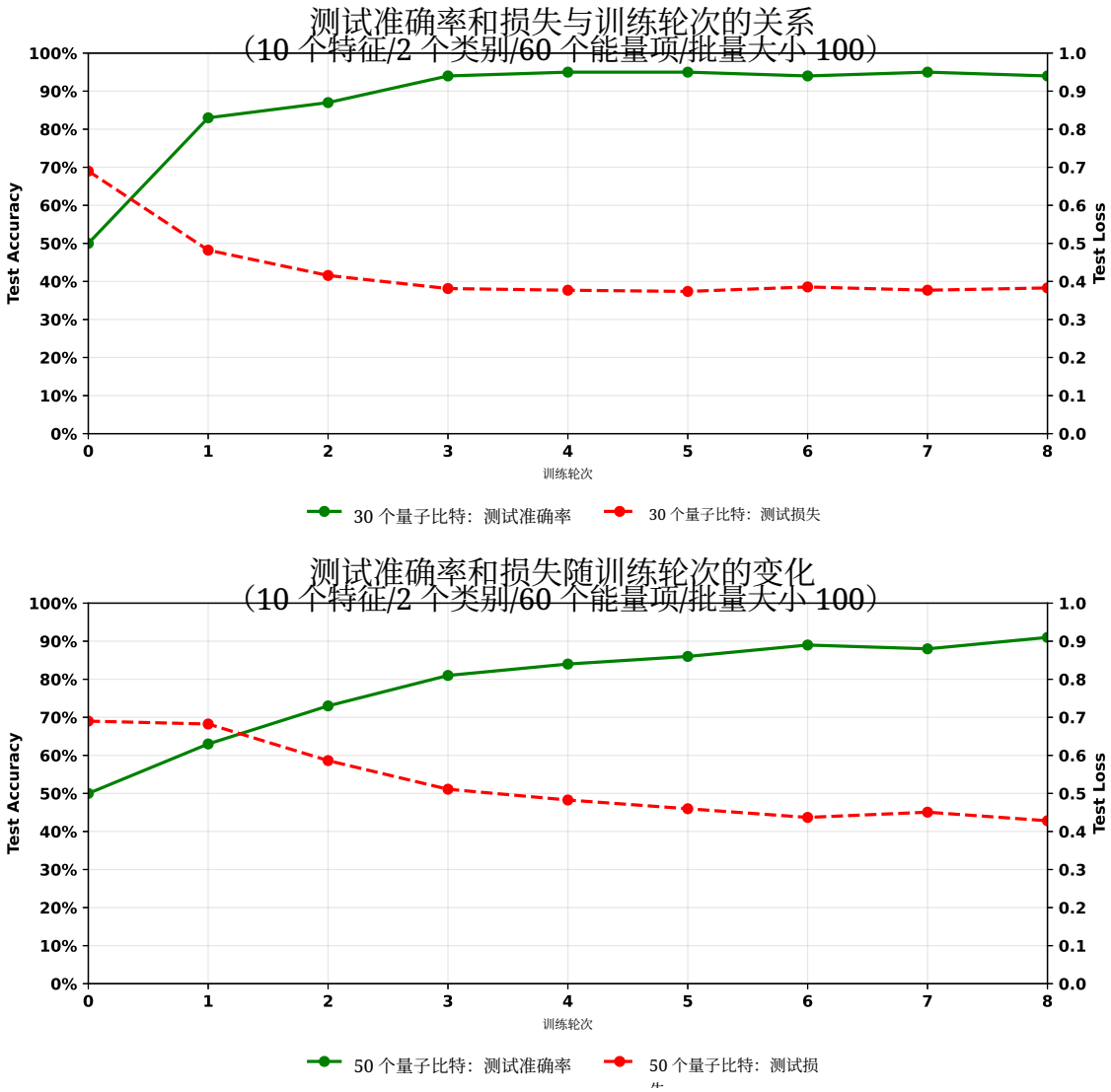

图 3：30 个和 50 个量子比特下验证损失和准确率随训练轮次的变化

秉承数据分析与机器学习研究的精神，本文报告的实验使用 scikit-learn/SciPy 生态系统生成的合成分类数据集。合成数据集可以全面控制类别结构、特征相关性和噪声水平，从而能够清晰评估算法行为，而不受

现实世界数据中固有的混杂因素影响。在这种受控环境下，可以评估混合训练过程以及基于 SKQD 的基态估计的有效性。我们的实验针对一个二元分类任务，其中包含 500 个数据点，每个数据点有 10 个特征，并采用 80/20 的训练测试划分来评估训练性能和泛化准确率。本文主要将其用作概念验证，以验证所提出的方法论，并将其置于传统机器学习基准的背景下。

模型在从 3 到 50 个量子比特的不同系统规模下，采用多种超参数配置进行训练。较小规模（$\leq$ 18）的实验在量子模拟器上进行，用于初步验证并筛选有效的超参数组合。较大规模（ $\geq$ 20 量子比特）则使用 IBM 的 Heron 量子处理器。图 3 展示了 30 和 50 量子比特模型的结果：测试损失从约 0.69 降至 0.42，准确率则从 50% 升至 91%。这清楚地表明模型能够成功训练，并达到较高的准确率。用于在 50 量子比特模型上运行 SKQD 特罗特化的量子电路，包含超过 1000 次双量子比特纠缠操作（受控-Z门）。

最后，我们总结图 4 所示的详细数值模拟，以了解这种新方法的行为。式（6）中计算的梯度准确度取决于所包含的能量项数量。由于该协议的经典计算时间会随能量项数量增加，我们在训练一个训练轮次后，针对一个包含 10 个特征、分为 2 类的分类问题，逐步增加能量项，对 10、12 和 16 量子比特模型的验证准确率进行了基准测试。令人意外的是，对于这个数据集，仅包含两个能量项就已足够。尽管这一观察未必适用于所有数据集或量子比特配置，但它表明，要达到较高准确率，并不需要在梯度计算中使用多到不切实际的能量项。

4 讨论

在本研究中，我们展示了如何在当前量子处理器上成功训练线性基于哈密顿量的机器学习模型，并在 30–50 个量子比特规模的设备上观察到了非零梯度。我们的方法利用 SKQD 算法获得的稀疏基态表示，使模型能够在低维子空间中学习，并可能有助于缓解贫瘠高原等优化挑战 [15]。

基于哈密顿量的编码为现有的数据嵌入策略提供了一种紧凑且富有表达力的替代方案，学习得到的算子会适应机器学习任务的结构。在我们的实验中，我们采用了二局域算子，从而构建出浅层时间演化电路。类似的思路也可应用于振幅编码或基于角度的编码；在这些方法中，通常会在将数据嵌入量子机器学习模型之前，通过经典预处理来降低特征维度。相比之下，我们的框架将此类编码作为算法的一部分直接进行学习。

未来研究有几个重要方向。进一步优化超参数或许能够改善这些模型的训练动力学，并有助于找到表达能力更强的算子拟设。一个重要的后续步骤是，在规模更大的特征集和更具挑战性的数据集上评估我们的方法。与经典方法进行系统比较，对于确定基于哈密顿量的编码在哪些情况下具有真正优势至关重要。

10、12、16 个量子比特 · 10 个特征 · 2 个类别 · 500 次测量 在所有训练轮次开始时进行采样 · 1 个训练轮次

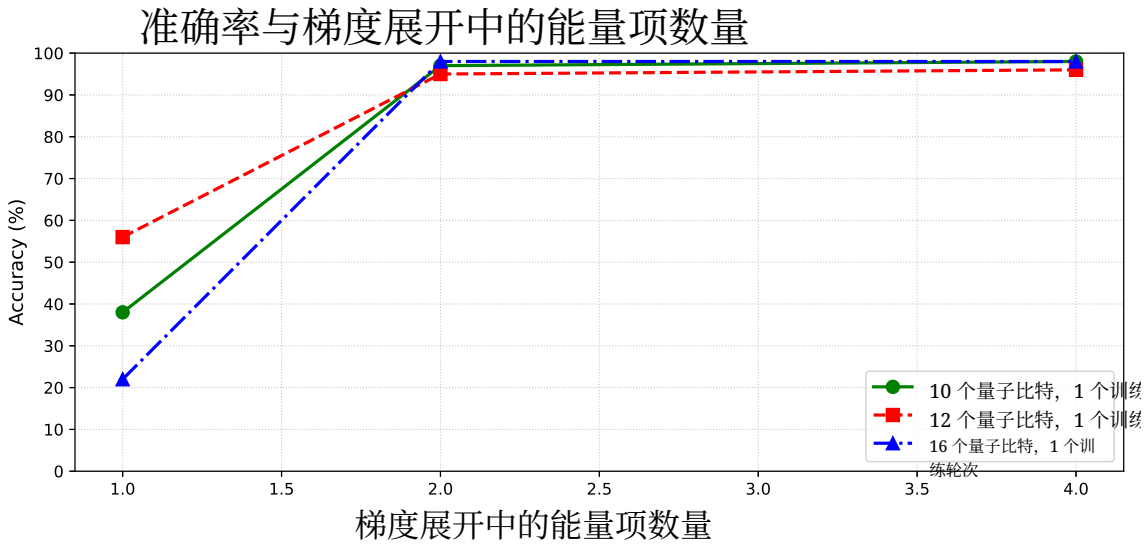

图 4：验证准确率与训练轮次或能量项数量的经典模拟

参考文献

[1] S. Aaronson. 请仔细阅读细则。《自然·物理》，11(4):291–293，2015。[2] A. G. Abanov、L. Candelori、H. C. Steinacker、M. T. Wells、J. R. Busemeyer、C. J. Hogan、V. Kirakosyan、N. Marzari、S. Pinnamaneni、D. Villani、M. Xu 和 K. Musaelian。《数据的量子几何》。*arXiv:2507.21135*，2025年7月。[3] G. Agliardi、G. Cortiana、A. Dekusar、K. Ghosh、N. Mohseni、C. O'Meara、V. Valls、K. Yogaraj 和 S. Zhuk。通过协变量子核缓解子空间数据和现实世界数据中的指数集中。*arXiv:2412.07915*，2024年。[4] E. R. Anschuetz 和 B. T. Kiani。量子变分算法深陷陷阱。《自然·通讯》，13(1):7760，2022年12月。[5] L. Candelori、A. G. Abanov、J. Berger、C. J. Hogan、V. Kirakosyan、K. Musaelian、R. Samson、J. E. T. Smith、D. Villani、M. T. Wells 和 M. Xu。利用量子认知机器学习稳健估计数据集的内在维数。《科学报告》，15(1):6933，2025年2月。[6] G. D. Caro、V. Kirakosyan、A. G. Abanov、J. R. Busemeyer、L. Candelori、N. Hartmann、E. T. Lam、K. Musaelian、R. Samson、H. Steinacker、D. Villani、M. T. Wells、R. J. Wenstrup 和 M. Xu。用于预测染色体不稳定性的量子认知机器学习。*arXiv:2506.03199*，2025年7月。

[7] A. Deshpande, M. Hinsche, K. Najafi, K. Sharma, R. Sweke 和 C. Zoufal。动态参数化量子电路：表达能力强且无贫瘠高原。*arXiv:2411.05760*，2024年。[8] A. W. Harrow、A. Hassidim 和 S. Lloyd。线性方程组量子算法。《物理评论快报》，103(15):150502，2009年。[9] V. Havlíˇcek、A. D. Córcoles、K. Temme、A. W. Harrow、A. Kandala、J. M. Chow 和 J. M. Gambetta。利用量子增强特征空间进行监督学习。《自然》，567(7747):209–212，2019年3月。[10] S. Jerbi、C. Gyurik、S. C. Marshall、R. Molteni 和 V. Dunjko。量子机器学习的影子。《自然·通讯》，15(1):5676，2024年。[11] A. Kandala、K. Temme、A. D. Córcoles、A. Mezzacapo、J. M. Chow 和 J. M. Gambetta。误差缓解拓展了含噪量子处理器的计算能力。《自然》，567(7749):491–495，2019年。[12] K. Kanno、M. Kohda、R. Imai、S. Koh、K. Mitarai、W. Mizukami 和 Y. O. Nakagawa。量子选择组态相互作用：在量子计算机选定的子空间中对哈密顿量进行经典对角化，2023年。[13] T. Kato。《线性算子扰动理论》。施普林格，柏林-海德堡，1995年。[14] O. Lanes、M. Beji、A. D. Corcoles、C. Dalyac、J. M. Gambetta、L. Henriet、A. Javadi-Abhari、A. Kandala、A. Mezzacapo、C. Porter 等。量子优势框架。*arXiv:2506.20658*，2025年。[15] M. Larocca、S. Thanasilp、S. Wang、K. Sharma、J. Biamonte、P. J. Coles、L. Cincio、J. R. Mc-Clean、Z. Holmes 和 M. Cerezo。变分量子计算中的贫瘠高原。《自然·物理评论》，第1–16页，2025年。[16] Y. Liu、S. Arunachalam 和 K. Temme。监督机器学习中严谨且稳健的量子加速。《自然·物理》，17(9):1013–1017，2021年。[17] G. Mayraz 和 G. Hinton。使用分层专家乘积识别手写数字。《*IEEE*模式分析与机器智能汇刊》，24(2):189–197，2002年2月。[18] K. Musaelian、A. Abanov、J. Berger、L. Candelori、V. Kirakosyan、R. Samson、J. Smith 和 D. Villani。量子认知机器学习：人工智能需要量子，2024年。[19] M. A. Nielsen 和 I. L. Chuang。《量子计算与量子信息》。剑桥大学出版社，2010年。[20] J. Robledo-Moreno、M. Motta、H. Haas、A. Javadi-Abhari、P. Jurcevic、W. Kirby、S. Martiel、K. Sharma、S. Sharma、T. Shirakawa、I. Sitdikov、R.-Y. Sun、K. J. Sung、M. Takita、M. C. Tran、S. Yunoki 和 A. Mezzacapo。在量子中心型超级计算机上实现超越精确对角化规模的化学计算。《科学进展》，11(25):eadu9991，2025年。

[21]J. Rosaler、L. Candelori、V. Kirakosyan、K. Musaelian、R. Samson、M. T. Wells、D. Mehta 和 S. Pasquali。高收益债券的监督相似性——Risk.net。
https://www.risk.net/cutting-edge/7961606/supervised-similarity-for-high-yield-bonds，2025年6月。
[22]R. Samson、J. Berger、L. Candelori、V. Kirakosyan、K. Musaelian 和 D. Villani。量子认知机器学习：金融预测——Risk.net。
h
t
t
p
s://www.risk.net/cutting-edge/7960053/quantum-cognition-machine-learning-financial-forecasting，2024年10月。[23] E. Tang。去量子化算法，以理解机器学习中的量子优势。《自然·物理评论》，4(11):692–693，2022年。[24] J. Yu、J. R. Moreno、J. T. Iosue、L. Bertels、D. Claudino、B. Fuller、P. Groszkowski、T. S. Humble、P. Jurcevic、W. Kirby、T. A. Maier、M. Motta、B. Pokharel、A. Seif、A. Shehata、K. J. Sung、M. C. Tran、V. Tripathi、A. Mezzacapo 和 K. Sharma。用于基于样本的克雷洛夫对角化的量子中心算法，2025年9月。