arXiv:2601.03239v1 [math.LO] 6 Jan 2026

调和分析中的算法随机性

JOHANNA N.Y. FRANKLIN、LUCAS E. RODRIGUEZ 和 DIEGO A. ROJAS

摘要。在过去十五年里，研究算法随机性与分析和遍历理论中的几乎处处定理之间关系的计划逐渐发展起来。在调和分析中，Franklin、McNicholl 和 Rute 利用 Carleson定理的一个有效版本刻画了施诺尔随机性。我们在此证明，对于可计算的 $1 < p < \infty$，弱可计算向量在 $L^p[-\pi, \pi]$ 中的傅里叶级数收敛的实数，恰好是 Martin-Löf随机实数。此外，我们证明， $L^1(\mathbb{R})$-可计算函数的泊松积分的径向极限恰好在施诺尔随机实数处与函数值一致；而弱 $L^1(\mathbb{R})$-可计算函数的泊松积分的径向极限恰好在 Martin-Löf随机实数处与函数值一致。

1. 引言

算法随机性概念与分析中的经典结果之间的关系已经得到了广泛研究。分析中的定理通常在一个余零集上成立，而任何合理的随机性概念也同样在一个余零集上成立。因此，我们通常可以得到如下形式的定理：

> 一个元素是 $[0, 1]$ if $\mathcal{R}$-随机的，当且仅当它满足定理 T。

此类结果已经针对Birkhoff遍历定理和Poincaré复现定理 [1, 7, 10, 13, 22, 26], 可微性[22, 11, 17], 布朗运动 [5, 4, 6], 以及傅里叶级数 [8]得到了证明。在此，我们将注意力转向调和分析中的两个结果：傅里叶分析中的Carleson定理 [2, 14] 以及上半平面上的狄利克雷问题解 [18]。

Carleson定理表述如下：

> 假设 $1 < p < \infty$。如果 f 是 $L^p[-\pi, \pi]$中的一个函数，那么 f 的傅里叶级数几乎处处收敛到 f 。

Franklin、McNicholl 和 Rute 证明了，函数在某点处的傅里叶级数收敛性与该点是否为 Schnorr 随机之间存在联系 [8]。[1] 在本文中，我们证明了函数在某点处的傅里叶级数收敛性与该点是否为 Martin-Löf 随机之间的等价性。

[1]由于其中一个方向对函数的条件略强，因此该结果并非严格等价。

上半平面的狄利克雷问题可以表述如下:

> 令上半平面 $\subseteq \mathbb{R}^2$ 表示上半平面。给定一个在∂上半平面处处有定义的函数f （称为边界数据），是否存在唯一的连续函数 u，它在上半平面 ∂ 上二阶连续可微且在上半平面 u 上连续，并且在上半平面上 $u = f$ 调和，在 ∂上半平面上 $u = f$？

给定边界数据 $f \in L^1(\mathbb{R})$，其泊松积分 $P[f]$ 定义为 f，即

$$P[f](x,y) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\pi} \frac{y}{(x-t)^2+y^2} f(t)\, dt$$

对所有属于上半平面 UHP 的 (x,y)，它都是上半平面的狄利克雷问题的解。如果 f 连续且紧支撑，那么 $P[f]$ 是经典解，因为对每个 $x \in \mathbb{R}$，都有 $\lim_{y\to 0^+} P[f](x,y) = f(x)$。否则， $P[f]$ 是弱解，其意义是对几乎所有 $x \in \mathbb{R}$，都有 $\lim_{y\to 0^+} P[f](x,y) = f(x)$。本文通过可积边界数据的泊松积分的径向极限来刻画 Schnorr随机性。

2. 背景

我们的记号遵循惯例，参见 [25]；注意， λ 是勒贝格测度， χ_A 是集合 A的特征函数，而 $C_c(\mathbb{R})$是紧支连续函数空间。关于可计算性理论的入门介绍，请参阅 [19, 20], ；关于随机性的综合参考资料，请参阅 [3] 和 [9]。

2.1. 可计算分析与随机性。

本文将讨论Martin-Löf 随机性和Schnorr随机性。

定义 2.1。 [15, 23] A*Martin-Löf* 测试 是一个序列 $\{V_k\}_k$，由康托空间中的一致Σ^0_1 类组成，并且对每个 k，都有 $\lambda(V_k) \leq 2^{-k}$。若实数 x 不存在满足$x \in \cap V_k$的 Martin-Löf 测试 $\{V_k\}_k$，则称其为*Martin-Löf* 随机 。

若一个施诺尔检验 是 Martin-Löf 测试，且 $\lambda(V_k)$关于 k一致可计算，则称其为施诺尔检验；若实数 x 不存在满足 $x \in \cap V_k$的施诺尔检验 $\{V_k\}_k$，则称其为*Schnorr* 随机 。

我们注意到，虽然这些随机性概念最初是在康托空间的背景下定义的，但这些定义很容易推广到任意可计算概率空间。

显然，每个 Martin-Löf 随机实数都是 Schnorr 随机的，但反之则不成立。不失一般性，我们假设所有 Martin-Löf 测试都是嵌套的；也就是说，对于每个 i，都有 $V_i \supseteq V_{i+1}$。

我们还将使用 Miyabe [16] 给出的马丁-洛夫随机性的积分检验刻画：

定义 2.2。 A*Martin-Löf* 积分检验 是一个下半可计算函数 T: $[-\pi,\pi] \to [0,\infty]$，满足 $\int_{-\pi}^{\pi} T\, d\lambda < \infty$。点 $x \in [-\pi,\pi]$ 是

当且仅当对于每个 Martin-Löf 积分检验 T，$T(x) < \infty$ 时，Martin-Löf 随机。

现在我们将注意力转向可计算分析。可计算波兰空间是一个三元组（X，d，α），具有以下性质：
(1)（X，d）是一个完备可分度量空间；(2) α：$\mathbb{N} \to X$ 是 X 的一个可数子集的枚举，其值域在 X中稠密；(3) d（α_i，α_j）关于 i，j是一致可计算的。对于每个 $i \in \mathbb{N}$，我们将 α（i）称为 X的有理点或理想点。

定义在 $\mathbb{C}$ 上的可计算巴拿赫空间是一个三元组（X，$||\cdot||$，e），具有以下性质：

(1)（X，$||\cdot||$）是定义在 $\mathbb{C}$上的巴拿赫空间；(2) e：$\mathbb{N} \to X$ 是 X 的一个可数子集的枚举，其线性张成在 X 中稠密，并记为 $\{e_k\}_k$；(3) $\left|\left|\sum_{i=0}^{k} c_k e_{n_k}\right|\right|$关于 $\langle k, \langle n_0, \ldots, n_k\rangle\rangle$是一致可计算的，其中 $c_k \in \mathbb{Q}[i]$对每个 k成立。

我们将 e_k称为 X的特征向量 。此外，对于每个$k \in \mathbb{N}$ 以及每个 $n_0, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$，当 $c_0, \ldots, c_k \in \mathbb{Q}$时，$\sum_{i=0}^{k} c_k e_{n_k}$称为 X中的有理向量 。

在以下傅里叶系数和傅里叶部分和的定义中，我们假设 $p \geq 1$ 是一个可计算实数。对于所有 $n \in \mathbb{Z}$ 和 $f \in L^p[-\pi, \pi]$，我们称

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{int}\, dt,$$

对于所有 $f \in L^p[-\pi, \pi]$ 和 $N \in \mathbb{N}$，我们称

$$S_N(f) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f) e^{int}.$$

定义 2.3. A三角多项式 是一个属于$\{e^{int} \mid n \in \mathbb{Z}\}$线性张成的函数，这种多项式 p 的次数是满足条件 $S_d(p) = p$的最小$d \in \mathbb{N}$ 。如果系数来自 $\mathbb{Q}[i]$，则称该三角多项式为有理的 。

注意，$(L^p[-\pi, \pi], ||\cdot||_1, e)$，其中对于所有 $t \in [-\pi, \pi]$，$e(n)(t) = e^{int}$，是一个定义在 $\mathbb{C}$上的可计算巴拿赫空间。如果存在一个由有理三角多项式组成的可计算序列 $\{\tau_n\}_n$，以具有可计算收敛模的方式在 L^p中收敛到 f，则称 $f \in L^p[-\pi, \pi]$ 为 $L^p[-\pi, \pi]$ 中的可计算向量 。

定义 2.4. 设 $\{f_n\}_n$ 是定义在 $[-\pi, \pi]$上的函数序列。若函数 $\eta : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 满足：对于所有 k，m，我们有.....则称其为$\{f_n\}_n$ 的几乎处处收敛模

$$\lambda(\{t \in [-\pi, \pi] \mid \exists M, N \geq \eta(k, m) | f_N(t) - f_M(t)| \geq 2^{-k}\}) < 2^{-m}.$$

现在我们可以定义将在第3节中考察的函数类型。

定义 2.5。 函数 $f \in L^p[-\pi,\pi]$ 是L^p 中的弱可计算向量，如果存在一个有理三角多项式$\{\tau_n\}_n$ 的可计算序列，使得 $f = \lim_n \tau_n$ 且 $\sum_n \|\tau_n - \tau_{n+1}\| < \infty$。

在第 4 节中，我们改为赋予 $L^1(\mathbb{R})$ 一个可计算波兰空间结构。令 $d_{||\cdot||_1}$ 表示由 1-范数诱导的度量。于是，$(L^1(\mathbb{R}), d_{||\cdot||_1}, \alpha)$构成一个可计算波兰空间，其中 α 是 $C_c(\mathbb{R})$中所有具有有理顶点的分段线性函数的枚举（即紧支撑连续实值函数空间）。一个 $L^1(\mathbb{R})$-可计算函数是$(L^1(\mathbb{R}) \ d_{||\cdot||_1}, \ \alpha)$中的一个可计算点。等价地，$f$ 是 $L^1(\mathbb{R})$-可计算的，当且仅当存在一个可计算序列 $\{p_n\}_n$ ，由 $C_c(\mathbb{R})$中具有有理顶点的分段线性函数组成，并且该序列在 L^1中以可计算的收敛模收敛到 f 。

下面的引理是将 [21] 中的引理3.6推广到空间$(L^1(\mathbb{R}) \ d_{||\cdot||_1}, \ \alpha)$所得。证明依样画葫芦。

引理 2.6。 设 $f \in L^1(\mathbb{R})$ 是 $L^1(\mathbb{R})$-可计算的。设 $\{f_n\}_n$ 是来自 $C_c(\mathbb{R})$ 的一列顶点为有理数的分段线性函数，用以逼近 f。那么我们可以找到一列一致 Σ^0_1 的集合 $\{V_k\}_k$ ，使得以下结论成立：

(1) $\lambda(V_k) \leq \frac{2+\sqrt{2}}{2^{k-1}}$ ； *(2)* 序列 $\lambda(V_k)$ 是一致可计算的；*(3)* 当 $x \notin V_k$ 且 $n \geq k$ 时，我们有

$$|f_i(x) - f_{2n}(x)| \leq \frac{2+\sqrt{2}}{2^n}$$

对所有 $i \geq 2n$均成立。

2.2. 经典分析。 以下定义和结果将在第3节中派上用场。狄利克雷核是由 $\{D_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ 个三角多项式组成的集合，定义如下：

$$D_N(x) = \sum_{|m|\leq N} e^{2\pi i m x}.$$

注意，对于每个 $N \in \mathbb{N}$，任意 $f \in L^p[-\pi,\pi]$、$D_N * f = S_N$（f）均成立。*Fejér* 核 是由以下三角多项式构成的集合：

$$F_N(x) = \frac{1}{N+1}\sum_{j=0}^{N} D_j(x).$$

以下是 [12]中的命题3.1.7。

命题 2.7。对于每个 $N \in \mathbb{N}$,

$$F_N(x) = \frac{1}{N+1}\left(\frac{\sin\left(\frac{(N+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2$$

对所有 $x \in [-\pi, \pi]$。此外，$c_n(F_N) = 1 - \frac{|n|}{N+1}$ 若 $|n| \leq N$ 且 $c_n(F_N) = 0$ 否则。

我们将在第 4 节中用到以下定义和结果。泊松核是实值函数 P_y，定义为 $P_y(x) = \frac{1}{\pi}\frac{y}{x^2+y^2}$，对所有 $y > 0$ 均成立。与我们研究目的最相关的泊松核性质如下:

(1) $P_y(x) \geq 0$，对所有 $y > 0$ 均成立。
(2) $P_y(x) \leq \frac{1}{\pi y}$，对每个 $y > 0$ 均成立。
3) $\int_{\mathbb{R}} P_y(x)\, dx = 1$，对每个 $y > 0$ 均成立。

f 的泊松积分记作 $P[f](x, y)$，定义为 $P[f](x, y) = \int_{\mathbb{R}} P_y(x-t) f(t)\, dt$。

现在我们讨论哈代-利特尔伍德极大定理的一个应用，称为泊松极大定理。原始结果证明见[18]。这里，我们给出 [24]中的表述。下文中，算子 P^* 定义为

$$P^* f(x) = \sup_{y>0} P[|f|](x, y)$$

并称为泊松极大算子。

定理 2.8（泊松极大定理）。存在一个正常数 C，使得对每个 $f \in L^1(\mathbb{R})$ 和 $\alpha > 0$,

$$\lambda\{P^* f > \alpha\} \leq \frac{C}{\alpha} ||f||_1 .$$

推论 2.9。对所有 $f \in L^1(\mathbb{R})$，

$$\lim_{y \to 0^+} P[f](x, y) = f(x)$$

对几乎处处的 $x \in \mathbb{R}$。

注意，如果 $f \in C_c(\mathbb{R})$，那么 $\lim_{y\to 0^+} P[f](x, y) = f(x)$ 对所有 $x \in \mathbb{R}$ 成立。

3. Convergence of Fourier Series

在本节中，我们证明，$[-\pi, \pi]$中的 Martin-Löf 随机点恰好是 L^p 中某个弱可计算向量的傅里叶级数收敛的点。

定理 3.1。设 p 是一个满足 $p > 1$ 的可计算实数。如果 $t \in [-\pi, \pi]$ 是 *Martin-Löf* 随机的，且 f 是 $L^p[-\pi, \pi]$ 中的弱可计算向量，那么 f 的傅里叶级数在 t 处收敛。

证明。设 f 是 $L^p[-\pi,\pi]$ 中的弱可计算向量，且 t_0 是 Martin-Löf 随机的。我们首先构造一个 Martin-Löf 积分检验 T，使得 $T(t_0) < \infty$。

设 $T(t) = \sum_N |\tau_N(t) - \tau_{N+1}(t)|$。注意，由于 τ_N 关于 N 一致可计算，因此 T 是下半可计算的。我们证明 T 可积。设 $A = \{t \in [-\pi,\pi] \mid \{\tau_N(t)\}_N$ 收敛$\}$。由于 $\lambda([-\pi,\pi] \setminus A) = 0$，只需证明 $\int_A T \, d\lambda < \infty$。由单调收敛定理和赫尔德不等式，

$$\begin{aligned}\int_A T \, d\lambda &= \sum_{N=0}^{\infty} \int_A |\tau_N(t) - \tau_{N+1}(t)| \, dt \\ &\leq (2\pi)^{(p-1)/p} \sum_{N=0}^{\infty} \|\tau_N - \tau_{N+1}\|_p < \infty.\end{aligned}$$

因此，T 是一个 Martin-Löf 积分检验。

现在假设 $\{S_N(f)\}_N$ 在 t_0 处发散。那么存在一个 k_0，使得

$$\limsup_{M,N} |S_M(f)(t_0) - S_N(f)(t_0)| \geq 2^{-k_0+1}.$$

设 $d_N = \deg(\tau_N)$。那么，当 N 足够大时，

$$|S_{d_N}(f)(t_0) - \tau_N(t_0)| = |S_{d_N}(f)(t_0) - S_{d_N}(\tau_N)(t_0)| < 2^{-k_0-1}.$$

设 M, N 是满足以下条件的指标

$$\begin{aligned}|S_{d_M}(f)(t_0) - \tau_M(t_0)| &< 2^{-k_0-1}; \\ |S_{d_N}(f)(t_0) - \tau_N(t_0)| &< 2^{-k_0-1}; \\ |S_{d_M}(f)(t_0) - S_{d_N}(f)(t_0)| &\geq 2^{-k_0+1}.\end{aligned}$$

根据三角不等式，

$$\begin{aligned}|\tau_M(t_0) - \tau_N(t_0)| &\geq |S_{d_M}(f)(t_0) - S_{d_N}(f)(t_0)| \\ &\quad - |S_{d_M}(f)(t_0) - \tau_M(t_0)| - |S_{d_N}(f)(t_0) - \tau_N(t_0)| \\ &> 2^{-k_0+1} - 2 \cdot 2^{-k_0-1} \\ &= 2^{-k_0}.\end{aligned}$$

由于上述情况发生了无穷多次，M 且 N，$\{\tau_N\}_N$ 在 t_0 处也发散。于是存在一个 k_0 使得

$$\limsup_{M,N} |\tau_M(t_0) - \tau_N(t_0)| \geq 2^{-k_0}.$$

选择 N_0，使得对于所有 $N \geq N_0$，都有 $|\tau_N(t_0) - \tau_{N+1}(t_0)| \geq 2^{-k_0}$。由此可得

$$T(t_0) = \sum_{N=0}^{\infty} |\tau_N(t_0) - \tau_{N+1}(t_0)| \geq \sum_{N \geq N_0} 2^{-k_0} = \infty,$$

这就产生了矛盾，因为 t_0是 Martin-Löf 随机的。因此， $\{S_N(f)\}_N$在 t_0处收敛。

□

现在我们来证明逆命题。

定理 3.2。 设 p 是一个可计算实数，使得 $p > 1$。如果 $t \in [-\pi, \pi]$ 不是 *Martin-Löf* 随机的，那么存在一个弱可计算向量 f ，使得 $L^p[-\pi, \pi]$ 中 f 的傅里叶级数在 t 处发散。

证明。 设 t 不是 Martin-Löf 随机的。令 $\{U_n\}_n$ 为一个嵌套通用 Martin-Löf 检验，并满足 $\lambda(U_n) \leq 2^{-n}$ 和 $t \in \bigcap_n U_n$。对于每个 n，令 $\mathcal{I}_n$ 为包含于 U_n 中的所有有理闭区间的一个可计算枚举，并令 $\mathcal{I}_n[s]$ 为其中第一个 s 个这样的区间。对于 $I = [a, b] \in \mathcal{I}_n$，记 $c(I) = (a + b)/2$。

令 F_N 为 Fejér 核；也就是说，

$$F_N(\theta) = \frac{1}{N+1} \left(\frac{\sin\left(\frac{(N+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \right)^2$$

对每个 $N \in \mathbb{N}$。由命题 2.7，每个 F_N 都是一个非负有理三角多项式，其傅里叶谱包含于 $[-N, N]$。此外，存在一个（可计算的） $A_p \geq 1$ ，使得

$$A_p^{-1}(N+1)^{1-1/p} \leq \|F_N\|_{L^p([-\pi,\pi])} \leq A_p(N+1)^{1-1/p}$$

对所有 $N \geq 0$。此外，对于 $|\theta| \leq \pi/(N+1)$，我们有

$$F_N(\theta) \geq \frac{4}{\pi^2}(N+1).$$

固定 $C \in \mathbb{Z}^+$，并定义 $N_n := \lfloor (n+1)^{2p+2} \rfloor$。在阶段 $s = 2n+1$，令

$$g_n(\theta) := \frac{C}{N_n + 1} \sum_{I \in \mathcal{I}_n[s]} F_{N_n}\big(\theta - c(I)\big),$$

并定义

$$f_{2n} := \sum_{j<n} g_j, \qquad f_{2n+1} := f_{2n} + g_n, \qquad f := \lim_{s\to\infty} f_s.$$

由于 $|\mathcal{I}_n[s]| = 2n+1$,

$$\|g_n\|_p \leq \frac{C}{N_n+1}(2n+1)\|F_{N_n}\|_p \leq \frac{CA_p(2n+1)}{(N_n+1)^{1/p}} \leq \frac{CA_p(2n+1)}{(n+1)^{2+2/p}}.$$

由比值判别法， $\sum_s \|f_{s+1} - f_s\|_p = \sum_n \|g_n\|_p < \infty$。因此， f是 $L^p[-\pi, \pi]$中的一个弱可计算向量。

由于 $t \in U_n$，我们可以为每个 n 找到一个满足 $t \in I_n$ 的区间 $I_n \in \mathcal{I}_n$。因此，

$$|t - c(I)| \leq \tfrac{1}{2}|I| \leq \tfrac{1}{2}\lambda(U_n) \leq 2^{-n-1}.$$

由于 $N_n \geq n^{2p+2}$，对于所有充分大的 n，都有 $2^{-n-1} \leq \pi/(N_n+1)$。由此可得

$$F_{N_n}\big(t-c(I)\big) \;\geq\; \frac{4}{\pi^2}(N_n+1).$$

因此，

$$g_n(t) \;\geq\; \frac{C}{N_n+1}\,F_{N_n}\big(t-c(I)\big) \;\geq\; \frac{4C}{\pi^2} \;:=\; \beta \;>0$$

对所有充分大的 n。

由于 g_n 的傅里叶谱包含于 $[-N_n, N_n]$，

$$S_{N_n}(f)(t) - S_{N_{n-1}}(f)(t) = g_n(t) \;\geq\; \beta$$

对所有充分大的 n。因此，$\limsup_{M,\,N} |S_M(f)(t) - S_N(f)(t)| = \infty$。所以，$f$ 的傅里叶级数在 t处发散。□

4. 上半平面的狄利克雷问题

在本节中，我们证明，施诺尔随机实数恰好是这样的点：在这些点处，$L^1(\mathbb{R})$-可计算边界数据的泊松积分的径向极限与边界数据值一致。然后，我们证明，Martin-Löf 随机实数恰好是这样的点：在这些点处，弱 $L^1(\mathbb{R})$-可计算边界数据的泊松积分的径向极限与边界数据值一致。

定理 4.1. 若 $x \in \mathbb{R}$ 是施诺尔随机的，且 f 是一个 $L^1(\mathbb{R})$-可计算函数，则 $\lim_{y\to 0^+} P[f](x,y) = f(x)$。

我们首先需要以下引理。

引理 4.2. 设 $f \in L^1(\mathbb{R})$ 是 $L^1(\mathbb{R})$-可计算的，且设 $\{f_n\}_n$ 是一个由 $C_c(\mathbb{R})$ 中的有理顶点构成的分段线性函数序列，用以逼近 f。那么，我们可以一致地找到 Σ^0_1 个集合 $\{U_k\}_k$，使得以下陈述成立：

(1) $\lambda(U_k) \leq 3^{-(\sqrt{2}+2)\,2^k}$。*(2)* 序列 $\lambda(U_k)$ 是均匀可计算的。*(3)* 当 $x \notin U_k$ 且 $n \geq k$ 时，我们有

$$\int_{\mathbb{R}} P_y(x-t)|f(t) - f_{2n}(t)|\,dt \leq \frac{2+\sqrt{2}}{2^n}.$$

此时我们可以观察到，$\{U_k\}_k$ 将是一个施诺尔检验。

证明。**(1)** 假设 $f \in L^1(\mathbb{R})$ 是 $L^1(\mathbb{R})$-可计算的。令 $\{f_n\}_n$ 与上述相同，并给定 $\epsilon > 0$。定义一个集合类

$$S(f,\epsilon) = \{x \mid P^* f(x) > \epsilon\} = \bigcup_{y\in\mathbb{Q}^{>0}} \left\{ x \,\middle|\, \int_{\mathbb{R}} P_y(x-t)|f(t)|\,dt > \epsilon \right\}.$$

根据泊松极大定理（定理 2.8），$\lambda\{S(f, \epsilon)\} \leq \frac{3}{\epsilon} ||f||_1$。我们令 $S_i = S(f_i - f_{i+1}, 2^{-\frac{i}{2}})$ 和 $U_k = \bigcup_{i=2k}^{\infty} S_i$。显然，$\{U_k\}_k$ 是一致的 Σ_1^0。现在我们注意到

$$\lambda(U_k) \leq \sum_{i=2k}^{\infty} \lambda(S_i) \leq \sum_{i=2k}^{\infty} \frac{3}{2^{-\frac{i}{2}}} ||f_i - f_{i+1}||_1 \leq \sum_{i=2k}^{\infty} 3 \cdot 2^{-\frac{i}{2}} = \frac{3(\sqrt{2}+2)}{2^k}.$$

（2）显然，$x \in S_i$ 当且仅当存在一个有理数 $y > 0$，使得 $\int_{\mathbb{R}} P_y(x-t)|f(t)|\, dt > \epsilon$。由此可知，$\lambda(S_i)$ 关于 i 一致可计算。此外，$\lambda(S_i) \leq 3 \cdot 2^{-\frac{i}{2}}$ 意味着 $\lambda(U_k)$ 关于 k 一致可计算。

（3）设 $x \notin U_k$。对于每个 $y > 0$、所有 $n \geq k$ 以及所有 $i \geq 2n$，

$$\int_{\mathbb{R}} P_y(x-t)|f_i - f_{i+1}|\, dt \leq 2^{-\frac{i}{2}}$$

这意味着 $P[|f_i - f_{i+1}|](x, y) \leq 2^{-\frac{i}{2}}$。由于 $P[|f - f_n|](\cdot, y) \to 0$ 逐点成立，我们有

$$P[|f - f_{2n}|](x,y) \leq \sum_{i=2n}^{\infty} P[|f_i - f_{2n}|](x,y) \leq \frac{2+\sqrt{2}}{2^n}.$$

□

如上所述，我们可以看到，$\{U_k\}_k$ 是一个施诺尔检验。这个特定的施诺尔检验与类似引理 2.6 中的施诺尔检验，将用于定理 4.1 的证明。

定理 *4.1* 的证明。设 $W_k = U_k \cup V_k$，其中 $\{U_k\}_k$ 是引理 4.2 中的施诺尔检验，$\{V_k\}_k$ 是引理 2.6 中的施诺尔检验。只需证明，若 $x \notin \bigcap_{i=0}^{\infty} W_k$，则

$$\lim_{y \to 0^+} P[f](x,y) = f(x).$$

固定 $x \notin \bigcap_{i=0}^{\infty} W_k$。然后 $x \notin W_k$，对于某个 k。回忆一下，对于所有 $x \in \mathbb{R}$，只要 $g \in C_c(\mathbb{R})$，就有 $\lim_{y \to 0^+} P[g](x,y) = g(x)$。因此，选取 δ_n，使得 $0 < y < \delta_n$ 蕴含 $|P[f_{2n}](x,y) - f_{2n}(x)| < 2^{-n}$。由于 $x \notin V_k$，对于所有 $i \geq 2n$，都有 $|f_i(x) - f_{2n}(x)| \leq \frac{2+\sqrt{2}}{2^n}$。根据 f 的定义，我们可以选取足够大的 $i_0 \geq 2n$，使得 $|f_{i_0}(x) - f(x)| < 2^{-n}$。此外，由于 $x \notin U_k$，$P[|f - f_{2n}|](x,y) \leq \frac{2+\sqrt{2}}{2^n}$。

因此， $0 < y < \delta_n$ 蕴含以下结论。

$$\begin{aligned}|P[f](x,y) - f(x)| &\leq P[|f - f_{2n}|](x,y) \\ &\quad + |P[f_{2n}](x,y) - f_{2n}(x)| \\ &\quad + |f_{2n}(x) - f_{i_0}(x)| \\ &\quad + |f_{i_0}(x) - f(x)| \\ &\leq \frac{2+\sqrt{2}}{2^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{2+\sqrt{2}}{2^n} + \frac{1}{2^n} \\ &= \frac{6+2\sqrt{2}}{2^n}.\end{aligned}$$

因此，

$$\lim_{y \to 0^+} P[f](x,y) = f(x).$$

□

现在我们转向逆命题。

定理 4.3。 如果 $x \in \mathbb{R}$ 不是 *Schnorr* 随机的，那么存在一个 $L^1(\mathbb{R})$-可计算函数 f，使得 $\lim_{y\to 0^+} P[f](x,y) \neq f(x)$。

证明。 假设 $x \in \mathbb{R}$ 不是 Schnorr 随机的。那么存在一个 Schnorr 检验 $\{U_k\}_k$，使得 $x \in \bigcap_k U_k$。不失一般性，假设 $\lambda(U_k) = 2^{-(k+2)}$。定义 $\{V_n\}_n$ 为 $V_n = \bigcup_{k\geq n} U_k$。显然， $\{V_n\}_n$ 是一致 Σ^0_1的。此外，

$$\lambda(V_n) = \lambda\left(\bigcup_{k\geq n} U_k\right) \leq \sum_{k\geq n} \lambda(U_k) = \sum_{k\geq n} 2^{-(k+2)} = 2^{-(n+1)}.$$

由于 $\lambda(U_n)$ 关于 n 可一致计算， $\lambda(V_n)$ 关于 n 也可一致计算。因此， $\{V_n\}_n$ 是一个施诺尔检验。

对每个 k 定义 $I_k = [-k, k]$，并对每个 m 定义 $f_m = \sum_{k=0}^m 2^{-k}\chi_{I_{k+1}\setminus V_m}$。注意到

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f_m \, d\lambda &= \int_{\mathbb{R}} \sum_{k=0}^m 2^{-k}\chi_{I_{k+1}\setminus V_m} \, d\lambda \\ &= \sum_{k=0}^m 2^{-k}\lambda(I_{k+1} \setminus V_m) \\ &\leq \sum_{k=0}^m 2^{-k} 2(k+1) \\ &= \frac{2^{m+2} - m - 3}{2^{m-1}}.\end{aligned}$$

此外，该序列 $\{f_m\}_m$ 满足 $f_m \leq f_{m+1}$ 和 $f_m \geq 0$，对所有 m均成立。

我们断言，序列 $\{f_m\}_m$ 是 $L^1(\mathbb{R})$-可计算的。为此，请注意

$$\begin{aligned}
||f_{m+1} - f_m||_1 &= \int_{\mathbb{R}} (f_{m+1} - f_m)\, d\lambda \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{k=0}^{m+1} 2^{-k} \chi_{I_{k+1} \setminus V_{m+1}} - \sum_{k=0}^{m} 2^{-k} \chi_{I_{k+1} \setminus V_m} \right) d\lambda \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(2^{-(m+1)} \chi_{I_{m+2} \setminus V_{m+1}} - \sum_{k=0}^{m} 2^{-k} (\chi_{I_{k+1} \setminus V_{m+1}} - \chi_{I_{k+1} \setminus V_m}) \right) d\lambda \\
&= 2^{-(m+1)} \lambda(I_{m+2} \setminus V_{m+1}) + \int_{\mathbb{R}} \sum_{k=0}^{m} 2^{-k} \chi_{I_{k+1} \cap U_m}\, d\lambda \\
&= 2^{-(m+1)} \lambda(I_{m+2} \setminus V_{m+1}) + \sum_{k=0}^{m} 2^{-k} \lambda(I_{k+1} \cap U_m) \\
&\leq 2^{-(m+1)} 2(m+2) + \sum_{k=0}^{m} 2^{-k} \lambda(U_m) \\
&< \frac{2(m+2)}{2^{(m+1)}} + \frac{2^{m+1} - 1}{2^m} \frac{1}{2^{m+2}} \\
&< \frac{2m+5}{2^{m+1}}.
\end{aligned}$$

若 $t \in \bigcap_m V_m$，则对所有 m，$t \in V_m$。因此，对所有 m，$f_m(t) = 0$，从而 $\lim_{m\to\infty} f_m(t) = 0$。若 $t \notin \bigcap_m V_m$ 且 $|t| \leq k+1$，则当 $m \leq k+1$时，$f_m(t) = 0$；当 $m > k+1$时，$f_m(t) = \sum_{i=0}^{k} 2^{-i} = 2 - 2^{-k}$。因此，$\lim_{m\to\infty} f_m(t) = 2 - 2^{-k}$。

现在，令 f 由下式给出

$$f(t) = \lim_{m\to\infty} f_m(t) = \begin{cases} 0 & t \in \bigcap_m V_m \\ 2 - 2^{-k} & t \notin \bigcap_m V_m \text{ and } |t| \leq k \end{cases}.$$

Then $f = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \chi_{I_{k+1} \setminus \bigcap_n V_n}$.

由于 $\lambda(\bigcap_n V_n) = 0$，可知 f_m 几乎处处逐点收敛到 f。根据单调收敛定理，

$$\int_{\mathbb{R}} f\, d\lambda = \lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_m\, d\lambda \leq \lim_{m\to\infty} \frac{2^{m+2} - m - 3}{2^{m-1}} = 8.$$

此外，f 是 $L^1(\mathbb{R})$-可计算的，因为 f_m 关于 m 和 $||f - f_{2m}||_1 \leq 2^{-m}$是统一的 $L^1(\mathbb{R})$-可计算的。

我们还需要证明 $\lim_{y\to 0^+} P[f](x,y) \neq f(x)$。首先，

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} P_y(x-t)f(t)\ dt &\geq \int_{x-y/2}^{x+y/2} P_y(x-t)f(t)\ dt \\ &= \int_{-y/2}^{y/2} P_y(-s)f(s+x)\ ds \\ &= \int_{-y/2}^{y/2} P_y(s)f(s+x)\ ds\end{aligned}$$

注意，$|s| \leq y/2$ 意味着

$$P_y(s) = \frac{y}{\pi(s^2+y^2)} \geq \frac{y}{\pi((y/2)^2+y^2)} = \frac{y}{\pi(5/4)y^2} = \frac{4}{5\pi y}.$$

因此，

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} P_y(x-t)f(t)\ dt &\geq \frac{4}{5\pi y}\int_{-y/2}^{y/2} f(s+x)\ ds \\ &= \frac{4}{5\pi y}\int_{x-y/2}^{x+y/2} f(t)\ dt\end{aligned}$$

设 $K = \lfloor |x| \rfloor + 1$。那么，对于所有 $t \in [x-y/2, x+y/2]\setminus(\cap_n V_n)$，$f(t) = 2-2^{-K}$。固定 $y>0$。选择足够大的 m，使得 $\lambda(V_m) \leq 2^{-(m+1)} \leq y/4$。因此，

$$\lambda\left(\left[x-\frac{y}{2}, x+\frac{y}{2}\right] \setminus \left(\bigcap_n V_n\right)\right) \geq \lambda\left(\left[x-\frac{y}{2}, x+\frac{y}{2}\right] \setminus V_m\right) \geq y - \frac{y}{4} = \frac{3y}{4}.$$

由此可得

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} P_y(x-t)f(t)\ dt &\geq \frac{4}{5\pi y}\int_{x-y/2}^{x+y/2} f(t)\ dt \\ &\geq \frac{4}{5\pi y}\cdot\frac{3y(2-2^{-K})}{4} \\ &= \frac{3(2-2^{-K})}{5\pi}.\end{aligned}$$

因此，

$$\lim_{y\to 0^+} P[f](x,y) \geq \frac{3(2-2^{-K})}{5\pi} > 0 = f(x).$$

□

现在我们来关注 Martin-Löf 情形。作为背景，如果对于每个 Martin-Löf 随机的 $x \in \mathbb{R}$ [16]，函数 $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ 满足 $f(x) = g(x)$，那么这两个函数就是 *ML* 等价 的。

定理 4.4 ([16])。 每个弱 $L^1(\mathbb{R})$可计算函数都与两个 *Martin-Löf* 积分检验之差 *ML* 等价。反过来，任意两个 *Martin-Löf* 积分检验之差都与一个弱 $L^1(\mathbb{R})$ 可计算函数 *ML* 等价。

推论 4.5 ([16])。 设 f 是一个弱 $L^1(\mathbb{R})$ 可计算函数，且 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$是 f的有理逼近。那么，对于每个 Martin-Löf 随机 $x \in \mathbb{R}$，$\lim_n f_n(x) = f(x)$。

定理 4.6。 若 $x \in \mathbb{R}$ 是 *Martin-Löf* 随机，且 $f \in L^1(\mathbb{R})$ 是弱$L^1(\mathbb{R})$可计算的，则 $\lim_{y\to 0^+} P[f](x, y) = f(x)$。

证明。 设 $x \in \mathbb{R}$ 是 Martin-Löf 随机，且 $f \in L^1(\mathbb{R})$ 是弱 $L^1(\mathbb{R})$ 可计算的。那么，存在一个由紧支撑分段线性函数组成的可计算序列 $\{f_n\}_n$，这些函数具有有理顶点，使得对于几乎处处的 $t \in \mathbb{R}$ 和 $\sum_n ||f_n - f_{n+1}||_1 < \infty$， $f(t) = \lim_n f_n(t)$。根据推论 4.5，$f(t) = \lim_n f_n(t)$ 对所有 Martin-Löf 随机 $t \in \mathbb{R}$均成立。对于每个 $y > 0$，注意到

$$|P[f](x,y) - P[f_n](x,y)| = \left| \int_{\mathbb{R}} P_y(x-t)(f-f_n)(t)\, dt \right| \le \frac{1}{\pi y} ||f - f_n||_1 .$$

由于 $\sum_n ||f_n - f_{n+1}||_1 < \infty$ 和 $f = \lim_n f_n$ 几乎处处逐点成立，$\lim_{n\to\infty} ||f - f_n||_1 = 0$。因此，对所有 $(x, y) \in \mathrm{UHP}$，$\lim_n |P[f - f_n](x, y)| = 0$。

现在，固定 $\epsilon > 0$。由于对所有 $y > 0$，$\lim_n |P[f - f_n](x, y)| = 0$，存在一个 $N_1 \in \mathbb{N}$，使得对所有 $n \ge N_1$ 以及所有 $y > 0$， $|P[f - f_n](x, y)| < \epsilon/3$。由于 $f(x) = \lim_n f_n(x)$，存在一个 $N_2 \in \mathbb{N}$，使得对所有$n \ge N_2$， $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon_3$。令 $N = \max\{N_1, N_2\}$。由于 f_N具有紧支撑，$\lim_{y\to 0^+} P[f_N](x, y) = f_N(x)$。因此，存在一个 $\delta > 0$，使得若 $0 < y < \delta$，则有 $|P[f_N](x, y) - f_N(x)| < \epsilon/3$。因此， $0 < y < \delta$意味着

$$\begin{aligned} |P[f](x,y) - f(x)| &\le |P[f - f_N](x,y)| \\ &\quad + |P[f_N](x,y) - f_N(x)| \\ &\quad + |f_N(x) - f(x)| \\ &< 3 \cdot \frac{\epsilon}{3} = \epsilon. \end{aligned}$$

由于 $\epsilon > 0$ 是任意的，因此有 $\lim_{y\to 0^+} P[f](x, y) = f(x)$。 □

定理 4.7。 如果 $x \in \mathbb{R}$ 不是 *Martin-Löf* 随机的，那么存在一个弱L^1（$\mathbb{R}$）-可计算的 $f \in L^1$（$\mathbb{R}$），使得 $\lim_{y\to 0^+} P[f]$（x, y） $\neq f$（x）。

证明。 假设 $x \in \mathbb{R}$ 不是 Martin-Löf 随机的。那么存在一个嵌套通用 Martin-Löf 检验 $\{U_n\}_n$，使得 $x \in \bigcap_n U_n$。令 $\mathcal{I}_n$ 表示对每个 n，包含于 U_n 中的所有有理闭集的列表。令 $\mathcal{I}_n[s]$ 由枚举到 U_n中的前 s个有理闭区间组成。

对于每个 $I=[a,b]\in\mathcal{I}_n$，令 $\tau_{n,I}$ 为如下给出的函数

$$\tau_{n,I}(t)=\begin{cases}1 & \text{if } t\in[\frac{3a+b}{4},\frac{a+3b}{4}],\\ \frac{4}{b-a}(t-a) & \text{if } t\in(a,\frac{3a+b}{4}),\\ \frac{4}{a-b}(t-b) & \text{if } t\in(\frac{a+3b}{4},b),\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

若 $s=2n$，令 $f_s=0$。若 $s=2n+1$，令 $f_s=\sum_{I\in\mathcal{I}_n[s]}\tau_{n,\ I}$。令 $f=\lim_s f_s$。注意，若 $s=2n+1$，则

$$||f_s||_1=\left|\left|\sum_{I\in\mathcal{I}_n[s]}\tau_{n,I}\right|\right|_1\leq\sum_{I\in\mathcal{I}_n[s]}\lambda(I)\leq(2n+1)\lambda(U_n)\leq\frac{2n+1}{2^n}$$

因此，$\lim_s||f_s||_1=0$。由此可得 $f=0$ 几乎处处成立。由于 $\{f_s\}_{s\in\mathbb{N}}$ 是 $L^1(\mathbb{R})$ 中的一个可计算序列，且

$$\sum_{s=0}^{\infty}||f_s-f_{s+1}||\leq\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{2^n}<\infty,$$

由此可得 f 是弱 $L^1(\mathbb{R})$-可计算的。

现在注意，存在无穷多个奇数阶段 s，使得 $f_s(x)>0$；而在每个偶数阶段 s，$f_s(x)=0$。因此，$\lim_s f_s(x)$ 不存在。所以，$f(x)$ 未定义。然而，由于 $f=0$ 几乎处处成立，由此可得，对于上半平面 UHP 中所有 $(t,\ y)\in$，$P[f](t,\ y)=(P_y*f)(t)=0$。因此，

$$\lim_{y\to0^+}P[f](x,y)=0\neq f(x).$$

□

致谢

第一作者部分得到了西蒙斯基金会合作资助（编号 420806）的支持，该基金也为第三作者提供了差旅资助。作者谨此感谢 Laurent Bienvenu 进行的许多有益讨论。

参考文献

[1] Laurent Bienvenu、Adam R. Day、Mathieu Hoyrup、Ilya Mezhirov 和 Alexander Shen。关于 Martin-Löf 随机点的 Birkhoff遍历定理的构造性版本。*Inform. and Comput.*，210：21–30，2012。[2] Lennart Carleson。关于傅里叶级数部分和的收敛性与增长。*Acta Math.*，116：135–157，1966。[3] Rodney G. Downey 和 Denis R. Hirschfeldt。《算法随机性与复杂度》。Springer，2010。[4] Willem L. Fouché。柯尔莫哥洛夫复杂度与布朗运动的几何。*Math. Structures Comput. Sci.*，25(7)：1590–1606，2015。[5] Willem L. Fouché 和 Safari Mukeru。关于 Martin-Löf 随机布朗运动的局部时。*Theoret. Comput. Sci.*，979：论文编号114199，15页，2023。

[6] Willem L. Fouché、Safari Mukeru 和 George Davie。与算法随机布朗运动相关的测度的傅里叶谱。Log. Methods Comput. Sci.，10(3)：3:20，24页，2014。[7] Johanna N.Y. Franklin、Noam Greenberg、Joseph S. Miller 和 Keng Meng Ng。Martin-Löf 随机点满足有效闭集上的 Birkhoff遍历定理。Proc. Amer. Math. Soc.，140(10)：3623–3628，2012。[8] Johanna N.Y. Franklin、Timothy H. McNicholl 和 Jason Rute。算法随机性与傅里叶分析。Theory Comput. Syst.，63(3)：567–586，2019。[9] Johanna N.Y. Franklin 和 Christopher P. Porter，编。《算法随机性——进展与前景》，《逻辑讲义》第50卷。剑桥大学出版社，剑桥；符号逻辑协会，纽约州伊萨卡，2020。[10] Johanna N.Y. Franklin 和 Henry Towsner。随机性与非遍历系统。Mosc. Math. J.，14(4)：711–744，2014。[11] Cameron Freer、Björn Kjos-Hanssen、André Nies 和 Frank Stephan。Lipschitz函数的算法方面。Computability，3(1)：45–61，2014。[12] L. Grafakos。《经典傅里叶分析》。Springer，纽约州纽约，2014。[13] Mathieu Hoyrup。遍历分解的可计算性。Ann. Pure Appl. Logic，164(5)：542–549，2013。[14] Richard A. Hunt。关于傅里叶级数的收敛性。载于《正交展开及其连续类比》（1967年，伊利诺伊州爱德华兹维尔会议论文集），第235–255页。Southern Illinois Univ. Press，伊利诺伊州卡本代尔，1968。[15] Per Martin-Löf。随机序列的定义。Information and Control，9：602–619，1966。[16] Kenshi Miyabe。 L^1-可计算性、分层可计算性与Solovay可约性。Computability，2(1)：15–29，2013。[17] Kenshi Miyabe、André Nies 和 Jing Zhang。利用分析中的几乎处处定理研究随机性。Bull. Symb. Log.，22(3)：305–331，2016。[18] Alexander Nagel、Walter Rudin 和 Joel H. Shapiro。Dirichlet型空间中函数的切向边界行为。Annals of Mathematics，116：331–360，1982。[19] Piergiorgio Odifreddi。《经典递归论》。逻辑与数学基础研究第125卷。North-Holland，1989。[20] Piergiorgio Odifreddi。《经典递归论》第二卷。逻辑与数学基础研究第143卷。North-Holland，1999。[21] Noopur Pathak、Cristóbal Rojas 和 Stephen G. Simpson。Schnorr随机性与 Lebesgue微分定理。Proc. Amer. Math. Soc.，142(1)：335–349，2014。[22] Jason Rute。《算法随机性与可计算分析专题》。博士论文，卡内基梅隆大学，2013。[23] C. P. Schnorr。《随机性与概率》，《Lecture Notes in Mathematics》第218卷。Springer-Verlag，海德堡，1971。[24] Joel H. Shapiro。极大函数与狄利克雷问题。研讨会讲义，波特兰州立大学，2017。[25] Robert I. Soare。《图灵可计算性：理论与应用》。可计算性理论与应用。Springer，2016。[26] V. V. V′yugin。概率中的有效收敛，以及关于个体随机序列的遍历定理。Teor. Veroyatnost. i Primenen.，42(1)：35–50，1997。

（Franklin）数学系，罗斯福楼306室，霍夫斯特拉大学，亨普斯特德，纽约州11549-0114，美国电子邮箱地址：johanna.n.franklin@hofstra.edu网址：http://people.hofstra.edu/Johanna_N_Franklin/（Rodriguez）数学系，达拉斯大学，欧文，德克萨斯州775062-2206，美国电子邮箱地址：lerodriguez@udallas.edu （Rojas）数学与统计系，萨姆休斯顿州立大学，亨茨维尔，德克萨斯州77341-2206，美国电子邮箱地址：dar117@shsu.edu