arXiv:2601.03247v1 [math.DS] 6 Jan 2026

非线性谱　建模与软体机器人肌肉的控制　m

Data

Leonardo Bettini[1†], Amirhossein Kazemipour[2†], Robert K. Katzschmann[2*], GeorgeHaller[1*1]机械系统研究所，苏黎世联邦理工学院，莱昂哈德街21号，8092苏黎世，瑞士。[2]软体机器人实验室，苏黎世联邦理工学院，坦嫩街3号，8092苏黎世，瑞士。

*通讯作者。电子邮箱：rkk@ethz.ch; georgehaller@ethz.ch;
†这些作者对本研究贡献相同。

摘要

人工肌肉对于柔顺肌肉骨骼机器人技术至关重要，但其非线性多物理场动力学特性使控制更为复杂。液压放大静电（HASEL）致动器是一类软体人工肌肉，性能出色，但存在记忆效应和滞后。本文提出一种基于谱子流形（SSM）理论的数据驱动降阶与控制策略。在输入相对于内禀瞬态变化缓慢的绝热区间内，轨迹会迅速收敛至低维慢流形。我们仅利用受迫响应轨迹，学习该流形上的显式输入到输出映射，从而避免可能触发滞后的衰减实验。我们将基于 SSM 的模型用于拮抗式 HASEL 离合关节的实时控制。在相同设置下，与仅反馈和仅前馈基线相比，该方法显著降低了跟踪误差。这一记录与控制工作流程无需详细的基于物理的建模，即可快速表征软体肌肉及肌肉驱动关节，并实现高性能控制。

关键词：非线性动力学、人工肌肉、数据驱动建模、闭环控制

1 引言

生物系统的适应性、柔顺性和效率不断推动机器人学的发展。在人类手臂等肌肉骨骼系统中，刚性部件（骨骼）提供结构支撑并传递力，而柔性部件（肌肉、韧带、肌腱）则将其连接起来并驱动它们，从而实现精细控制，并能与脆弱环境安全互动。柔性部件可避免刚性接触造成损伤，确保系统具有柔顺性。软材料机器人拓展了这些优势，具有灵活性、适应性，并能适配复杂几何形状；这些特点在人机交互应用中尤为重要，例如手术工具和假肢。人工肌肉模仿生物力生成，是推动肌肉骨骼机器人学和辅助技术创新的关键。

尽管具有这些优势，软体人工肌肉的建模与控制仍然面临挑战，主要原因在于软材料、静电力、流体动力学和摩擦接触之间复杂的相互作用。这些效应会导致记忆效应、滞后及其他非线性现象，使分析和实时控制更加复杂。因此，降阶模型（ROM）颇具吸引力，因为它们只需少量方程即可捕捉关键动力学，同时兼顾可解释性和效率（近期综述见 [1, 2]）。实际应用中，人工肌肉在较大型组件中运行，并会受到局部黏附或错位等制造缺陷的影响，从而引入不确定性。在这些条件下，解析降阶模型的适用性有限且难以扩展，因此有必要转向数据驱动建模，直接从数据中捕捉系统动力学，而无需精确的参数辨识。

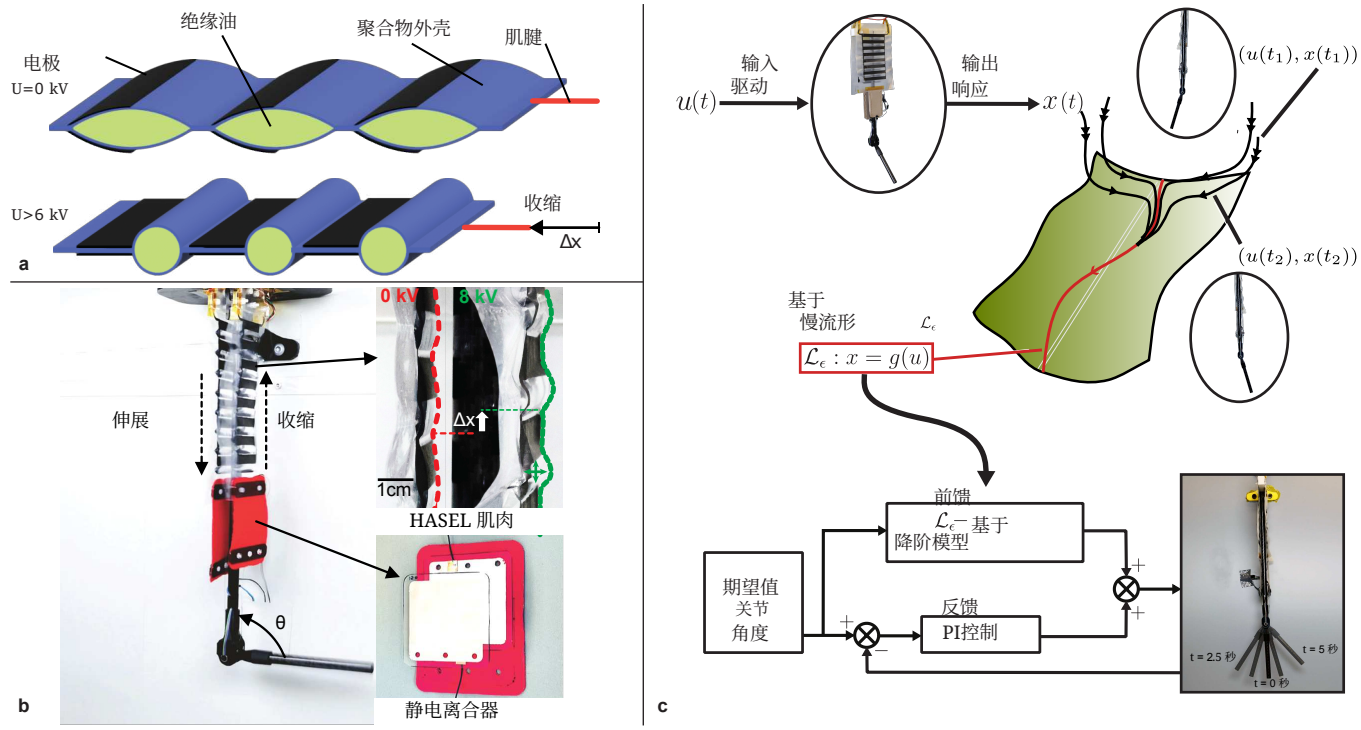


图1：拮抗式人工肌肉的慢流形数据驱动建模与控制概述。（a）HASEL致动器的工作原理：柔性聚合物外壳内充满绝缘油，外部覆盖电极；施加电压（最高达 $U = 8$ kV）会产生静电压力，使流体重新分布，从而在肌腱负载 Δx 下产生轴向收缩。（b）实验平台：由配有静电离合器的HASEL人工肌肉驱动的拮抗式肌骨关节，可实现双向运动和可变刚度； θ表示关节角度。插图显示了在0 kV和8 kV下的收缩 Δx 。（c）数据驱动建模与控制：显著的时间尺度分离使轨迹能够快速收敛至低维慢流形 $\mathcal{L}_\epsilon$，该流形直接从受迫响应轨迹中学习得到。学习得到的多项式映射 $x = g(u)$（u）将控制输入 u（t）与系统状态 x（t）相关联。逆慢流形模型提供前馈控制，并结合比例积分（比例积分）反馈以抑制扰动。

在数据驱动建模技术中，近期发展的谱子流形（SSM）降阶已在各种物理系统中应对了类似挑战 [3]。SSM降阶以紧凑且易于解释的形式，保留了高维系统的关键非线性动力学。具体而言，慢谱子流形是相空间中低维、光滑且具有吸引性的不变流形，由系统最慢的线性模态产生 [4]。

邻近谱子流形的轨迹会迅速收敛到该流形，并按照其内部动力学演化，从而得到准确且稳健的非线性降阶模型。事实证明，SSM降阶在基于方程和纯数据驱动场景中均行之有效 [3], ，能够准确捕捉自由响应中的非线性衰减，并预测周期激励和准周期激励下的受迫响应 [5–10]。

近期的理论进展将 SSM 理论扩展到了受非周期时变激励的非线性系统[3, 11], ，拓宽了其在机器人学等实际工程领域的适用性。扩展后的理论适用于时变输入幅值适中，或相对于系统未受控时的内部时间尺度变化缓慢的情形。后一种情形称为绝热情形。在 SSM 理论用于软体机器人控制方面取得了令人鼓舞的仿真结果后 [12], ，Alora 等人 [13] 展示了一种实验实现：采用锚定于原点的绝热谱子流形（aSSM）首阶近似，同时实现了计算效率与数据效率。然而，该方法假设轨迹始终处于原点附近，因此适用范围有限。Kaundinya 等人 [14], 近期突破了这一限制，针对软体躯干机器人的有限元模型，开发了一种数据驱动的绝热谱子流形降阶与控制策略。

本文同样聚焦于绝热情形，即内禀动力学的演化速度远快于外部强迫。我们进一步考虑这样一种情形：时间尺度分离足够显著，因而可以忽略绝热谱子流形（aSSM）上的内部动力学，转而关注 aSSM 所锚定的慢流形（SM）。对于软体人工肌肉而言，这是合理的近似，因为其内部驱动和材料瞬态通常受到强烈阻尼，相较于沿期望轨迹的运动会迅速衰减。关键的是，学习得到的慢流形具有快速逆映射，因此能够实现实时前馈控制，并可与反馈相结合，从而在拮抗肌肉构型中实现精准的轨迹跟踪。

软体机器人系统中存在显著时间尺度分离的实验依据，例如可见于液压放大型自愈静电（HASEL）致动器，这也是本研究的关注对象。HASEL属于更广泛的电液人造肌肉类别，它克服了电磁电机体积庞大、刚性强且顺应性有限等缺点，为电机驱动系统提供了一种颇具吸引力的替代方案 [15–21]。这些设计的灵感来自动物肌肉骨骼结构，其中骨骼、肌腱和收缩式致动器协同工作，实现高效且顺应性良好的运动 [22–25]。HASEL致动器结合柔性流体驱动与静电驱动，在轻质、可扩展的结构中实现顺应性良好而有力的收缩。它们由充满油液、部分覆有电极的聚合物囊袋构成；施加电压会使囊袋变形，重新分布介电液体并产生收缩。在多肌肉组件中，伸展可由外部负载被动实现，也可通过拮抗驱动实现[26], ，从而实现双向运动、可变刚度和快速扰动抑制。快速的静电与流体瞬态响应

相较于较慢的机械响应，形成了绝热区间的慢–快动力学，使HASEL成为本文所介绍的基于SM的建模的理想平台。

Kellaris等人 [27] 提出了一种用于HASEL致动器的准静态模型，其中，致动器行程以单个自由度为参数，通过最小化系统自由能来求得平衡状态。该方法最初针对静电拉链式致动器 [28–30], 而开发，通过解析关系将静态变形与施加电压联系起来；该关系取决于初始囊袋角度、薄膜厚度、致动器宽度、未变形囊袋长度和介电常数等物理参数，因此需要精确测量才能保证准确性。后续研究强调了建模在闭环控制中的作用。Johnson等人 [31] 通过频率响应测试辨识输入输出关系，从而支持频域控制器设计。Yeh等人 [32] 采用端口哈密顿形式开发了三维动力学模型。与准静态模型一样，这些方法依赖于详细的物理参数辨识，体现了解释性与精确测量系统属性所面临的实际挑战之间的权衡。

然而，这些研究聚焦于单独的HASEL致动器，而它们很少单独使用。在实际应用中，HASEL致动器被集成到复杂组件中。例如，Kazemipour等人 [26] 通过将HASEL致动器与静电离合器集成，扩大了机械臂的运动范围。这些薄而柔韧的电粘附元件通过低电流电压信号调节剪切粘附，可在高保持力状态（传递肌肉力）与低摩擦状态（释放对抗肌腱）之间快速切换，从而无需肌腱松弛即可实现双向关节运动和可变刚度。对此类拮抗系统进行精确控制，需要准确且计算高效的模型。连续体模型的运算速度不足以满足实时应用，而黑箱方法则缺乏可靠性。多物理场耦合和切换动力学会引入难以通过解析方法处理的非线性和滞后，因此需要采用数据驱动的降阶建模：直接从实验中学习系统动力学，同时保持较高的计算效率。在此背景下，我们基于慢流形的数据驱动方法提供了一种可扩展且可解释的方案，可用于预测和控制多致动器HASEL系统，并能自然地考虑组件间相互作用和制造缺陷。

在本研究中，我们提出了一种直接从实验数据进行慢流形（SM）降阶的方法，并展示了该方法在拮抗式人工肌肉实时控制中的应用。如图 1c 所示，具体流程详见第 2.1 节和第 2.2节，并在第 2.3节应用于数值示例，随后在第 2.4节通过实验数据进行验证。第2.5 节介绍了针对采用 HASEL致动器和静电离合器的拮抗式肌肉骨骼关节开展的闭环控制实验。我们比较了三种策略：仅采用 PI反馈、仅采用逆SSM前馈，以及二者组合（方法 4.3），结果表明，组合控制器能显著降低跟踪误差。

在采用相同饱和限制和变化率限制的随机测试轨迹下，逆SSM+PI控制器（均方根误差为 2.38°，最大值为 10.41°）优于各项基线，即仅前馈（均方根误差为 3.63°，最大值为 16.67°）和仅反馈（均方根误差为 7.63°，最大值为 26.00°）。这些结果证实，数据驱动慢流形模型不仅能准确预测系统行为，还能实现对复杂拮抗肌肉系统的高性能实时控制，从而弥合理论模型降阶与实际机器人应用之间的差距。据我们所知，这是首次通过实验展示谱子流形理论应用于拮抗式软体机器人系统的闭环控制，并量化其相较于标准控制基线的性能提升。

2 结果

我们首先介绍理论与数据驱动的降阶方法（SSM、aSSM 和 SM），并在解析模型和实验用 HASEL 致动器上对其进行验证，随后展示其在拮抗关节上的闭环控制效果。这些结果共同表明，在慢流形上学习得到的简单逆映射能够实现准确预测，并在硬件上进行实时控制。

2.1 谱子流形的模型降阶

考虑如下形式的自治动力系统

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}_0(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \\ \boldsymbol{f}_0 \in \mathcal{C}^r, \quad \boldsymbol{f}_0 = \mathcal{O}\left(|\boldsymbol{x}|^2\right), \end{aligned} \tag{1}$$

其中 $r \geq 1$ 为某个整数， $\boldsymbol{f}_0(\boldsymbol{x})$ 表示非线性部分，且 $\boldsymbol{f}_0(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$，因此该系统在原点处有一个不动点。我们假设该不动点是线性渐近稳定的，即，

$$Re\lambda_n \leq Re\lambda_{n-1} \leq \cdots \leq Re\lambda_2 \leq \lambda_1 < 0. \tag{2}$$

线性部分 λ_j $\boldsymbol{A}$ 的每个不同特征值都对应一个实 特征子空间 E_j，该子空间由对应于 λ_j的特征向量或广义特征向量的实部和虚部张成。慢 谱子空间 E 定义为一组对应于 ℓ 式（ ℓ 2）中最慢特征值的特征子空间的直和

$$E = E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots \oplus E_\ell. \tag{3}$$

正如 Haller 和 Ponsioen [4], 所讨论的，在谱的非共振条件通常成立时，特征子空间和谱子空间都存在唯一最光滑的非线性延拓 $\boldsymbol{A}$。这些延拓称为主谱子流形（SSMs），记作 $\mathcal{W}(E)$。主谱子流形会指数级吸引相空间中所有邻近轨迹，因此其内部动力学可作为整个系统理想的非线性降阶模型。

2.2 绝热谱子流形与慢流形

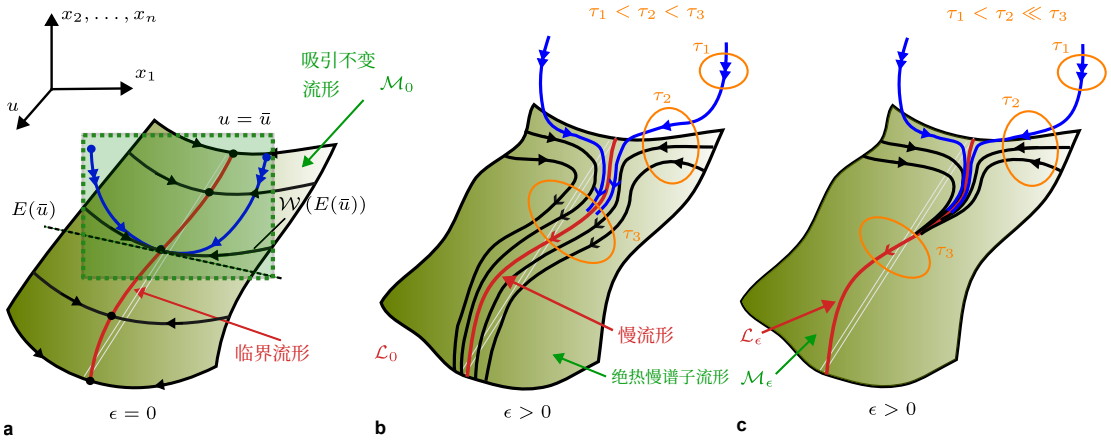


图 2：**(a)** 吸引不变流形 $\mathcal{M}_0$ 的几何结构。该流形由一族谱子流形组成， $\mathcal{W}(E(u))$，并由外部强迫参数 u参数化，其中 $\epsilon = 0$。为简便起见，此图中假设 u 为标量。临界流形 $\mathcal{L}_0$ 由对应于 u各个取值的不动点构成。**(b)** 对于 $\epsilon \neq 0$，流形$\mathcal{M}_0$ 发生扰动，形成 aSSM $\mathcal{M}_\epsilon$；而 $\mathcal{L}_0$ 发生扰动，形成慢流形 $\mathcal{L}_\epsilon$。外部强迫的动力学由空心箭头表示。**(c)** 当自治动力学的时间尺度 τ_1 和 τ_2 远快于外部激励的时间尺度 τ_3 时，轨迹会迅速收敛到 $\mathcal{L}_\epsilon$ 。

现在，我们在时变强迫 $\boldsymbol{u}(t) \in \mathbb{R}^f$ 的作用下，重新考察系统 (1)，其形式为

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}} &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}_0(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}), \qquad \boldsymbol{f}_1 \in \mathcal{C}^r, \\ \dot{\boldsymbol{u}} &= \epsilon \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}, \epsilon t), \qquad\qquad\qquad 0 \leq \epsilon \ll 1, \end{aligned} \tag{4}$$

其中 ϵ 用于表征外部驱动变化率的阶数。对于 $0 \leq \epsilon \ll 1$， $\boldsymbol{u}(t)$的演化时间尺度比系统的内禀动力学更慢，因此系统处于 Haller 和 Kaundinya [11]所定义的绝热状态。在控制应用中，术语 $\boldsymbol{f}_1$ 表示施加于系统的外部输入，其对自治动力学的加性贡献已在补充材料中得到论证。该输入既取决于系统状态（通过反馈律），也取决于时间，以便跟踪期望轨迹。绝热假设尤其适用于机器人学，因为系统的内部动力学（例如执行器响应）明显快于受控运动的演化。这样的时间尺度分离使系统能够迅速与控制输入同步，并以很高的精度和响应速度跟踪复杂轨迹。

对于 $\epsilon = 0$，外部驱动变为常数，并作为系统的固定参数。如图2a所示，对于 $\boldsymbol{u}$的每个固定值，系统动力学都会沿着相应的慢速谱子流形演化，并趋向唯一的吸引不动点， $\mathcal{W}(E(\bar{u}))$。这些不动点构成一个不变流形，记为 $\mathcal{L}_0$；按照几何奇异摄动理论的术语，它是一个临界流形（参见 Fenichel [33]）。对 $\boldsymbol{u}$ 所有取值对应的谱子流形的并集定义了一个更高维的不变流形 $\mathcal{M}_0$，它能够全局吸引附近的轨迹。

对于 $\epsilon > 0$，外部强迫随时间缓慢变化，如图 2b、c 所示。在此状态下，临界流形$\mathcal{L}_0$ 扰动后形成慢流形（SM），$\mathcal{L}\epsilon$而不变流形 $\mathcal{M}_0$ 扰动后形成绝热慢谱子流形（aSSM），记为 $\mathcal{M}\epsilon$。该流形 $\mathcal{M}_\epsilon$ 仍具有吸引性，并随缓慢变化的强迫平滑变化。其内部动力学捕捉了完整系统的本质低维行为，因此可作为精确的降阶模型。重要的是，这一降阶模型可以直接从数据中学习，正如我们在方法4.1 节中所述。

在此绝热情形下，我们辨识出三个彼此清晰分离的时间尺度：

- 一个快速时间尺度 τ_1，与位于 aSSM 之外的瞬态动力学相关， $\mathcal{M}_\epsilon$ ；
- 一个中间时间尺度 τ_2，支配受限于 aSSM 上的动力学， $\mathcal{M}_\epsilon$；
- 一个慢速时间尺度 τ_3，由外部强迫的变化速率决定；该速率也决定了慢流形上的演化， $\mathcal{L}_\epsilon$ 而 $\mathcal{M}_\epsilon$ 附着于该慢流形。

这三个时间尺度满足以下层级关系 $\tau_1 < \tau_2 < \tau_3$，如图2所示。对 HASEL 致动器和基于 HASEL 的人工肌肉的实验观测证实了这一时间尺度层级关系：系统动力学迅速收敛至 aSSM， $\mathcal{M}_\epsilon$随后较慢地趋近慢流形， $\mathcal{L}_\epsilon$。从物理角度来看，这意味着内部瞬态响应的衰减速度远快于沿期望轨迹的演化速度，即 $\tau_1 < \tau_2 \ll \tau_3$，如图2c 所示。因此，仅在慢流形上对动力学建模，就能准确且高效地计算系统的主导动力学（见方法4.2），而无需解析快速瞬态响应。因此，SM降阶为控制提供了一种实用方案，因为更快的 aSSM 动力学对性能的贡献微乎其微。

现在，我们引入无量纲度量 ρ，用于量化控制输入信号 $\boldsymbol{u}(t)$（对应时间尺度 τ_3）相对于自主衰减 $\boldsymbol{x}(t)$（对应 τ_1 和 τ_2）的缓慢程度。其灵感来自 Haller 和 Kaundinya [11] 以及 Kaundinya 等人 [14]定义的类似量。我们假设，标量观测量$s(t)$表征自主系统响应，而 $\gamma(t)$表征外部强迫 $u(t)$下的响应。对于控制应用， $\gamma(t)$即为期望路径。必要时，将观测量 $s(t)$平移，使其在 $x = 0$ 原点处为零。

我们进一步将 $s(t)$ 归一化为

$$\tilde{s}(t) = \frac{s(t)}{\left(\int_0^\infty |s(t)|^2 dt\right)^{1/2}} \tag{5}$$

且 $\gamma(t)$作为

$$\tilde{\gamma}(t) = \frac{\gamma(t)}{\left(\int_{t_i}^{t_f} |\gamma(t)|^2 dt\right)^{1/2}}, \tag{6}$$

其中，强迫信号在时间区间 $[t_i, t_f]$ 内考虑。我们定义无量纲缓慢度度量

$$\rho = \frac{\left(\int_{t_i}^{t_f} |\dot{\tilde{\gamma}}(t)|^2 dt\right)^{1/2}}{\left(\int_0^\infty |\dot{\tilde{s}}(t)|^2 dt\right)^{1/2}}. \tag{7}$$

例如，对于一个线 近自治系统，其观测位移为 $s(t) = s_0 e^{\lambda t}$ 且 $\lambda < 0$, ρ 可简化为

$$\rho = \frac{\left(\int_{t_i}^{t_f} |\dot{\tilde{\gamma}}(t)|^2 dt\right)^{1/2}}{|\lambda|}. \tag{8}$$

在这种情况下，条件 $\rho \ll 1$ 确保强迫动力学相对于系统的固有衰减缓慢演化，从而证明将系统约化到慢流形是合理的（见图 2c）。图 3直观地展示了调节任务中度量 ρ 的含义，并比较了缓慢和快速控制动作与系统自治瞬态衰减的关系。

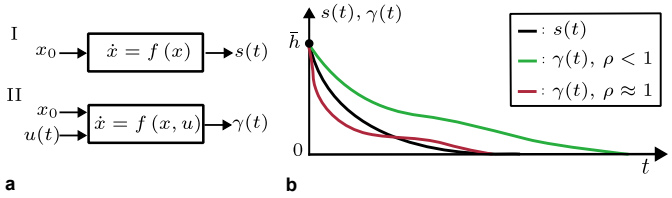


图 3: **(a)** 自治系统（I）和外部强迫系统（II）。**(b)** 比较从同一初始点 h 出发、经自治瞬态衰减以及在调节任务中采用较慢 ($\rho < 1$) 和较快 ($\rho \approx 1$) 控制时，收敛至零的轨迹¯。

下文中，我们采用 Cenedese 等人提出的归一化平均轨迹误差（NMTE） [5] 作为预测轨迹与实际轨迹之间平均偏差的度量，以评估模型的准确性。NMTE

定义为

$$\text{NMTE} = \frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \|\boldsymbol{x}_j - \hat{\boldsymbol{x}}_j\|, \tag{9}$$

其中， $\boldsymbol{x}$ 表示真实数据， $\hat{}\boldsymbol{x}$ 表示相应的模型预测， N 表示时间观测值的总数。

2.3 Il 解析模式下数据驱动的 aSSM 和慢流形建模示例 ls

我们首先通过解析的 HASEL 致动器模型生成的数据，展示 aSSM 降阶建模的强大之处。

2.3.1 HASEL致动器的简单唯象模型

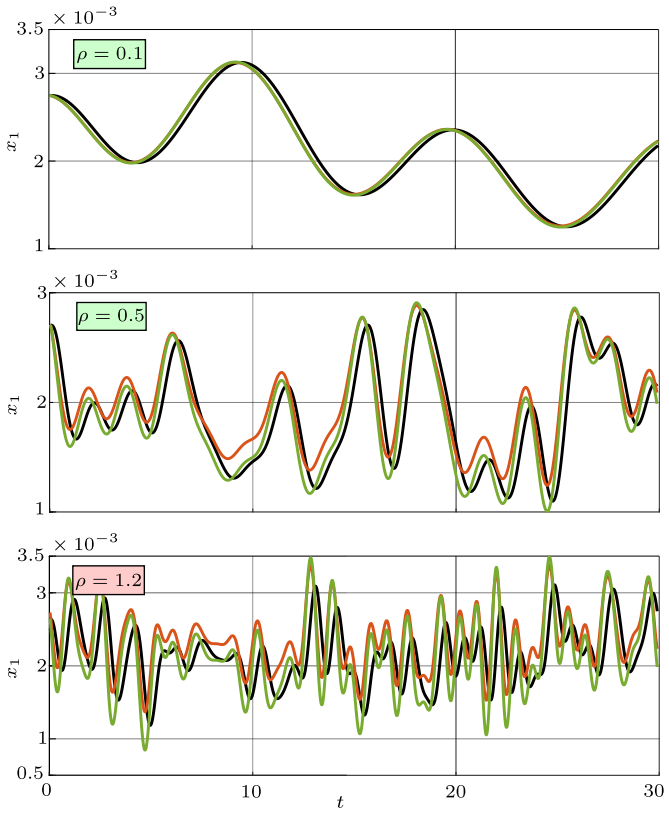
我们考虑一个单自由度非线性振子，用以捕捉 HASEL致动器在电压驱动激励下的定性行为。该振子模型采用无量纲形式

$$m\ddot{x} + c\,(u)\,\dot{x} + kx + \alpha x^3 = \gamma u^2(t), \tag{10}$$

其中 $c(u) = \tilde{c} - \beta u^2$，且 $u(t)$ 表示外部施加的电压。与 β 成正比的项引入了一种电压依赖阻尼机制，使输入能够调节系统的有效弛豫时间。尽管在实验系统中，阻尼与电压之间的关系可能是非线性且非单调的，但当前模型旨在捕捉输入对内部衰减率的潜在影响。与 γ 成正比的项则充当纯外部强迫输入。为再现实验 HASEL致动器中观察到的过阻尼行为，我们将模型参数设为 $m = 0.022$、 $k = 1$、 $\tilde{c} = 0.3$、 $\alpha = 0.7$、 $\beta = 5 \cdot 10^{-3}$ 和 $\gamma = 0.5$。

本例旨在说明外部驱动的速率如何影响基于 aSSM 和 SM近似的降阶模型（此处为一维模型）的预测性能。我们采用方法 4.1中概述的 aSSM 首阶近似。通过收集固定电压水平下的衰减轨迹来构建 aSSM。对于每个固定输入，系统都会收敛到一个局部吸引慢谱子流形，并据此学习约化动力学和参数化。随后，对这些局部慢谱子流形在不同电压值处进行插值，以近似 aSSM， $\mathcal{M}_\epsilon$ 及其在缓慢变化的驱动下的内部动力学。作为这一流程的简化，SM 方法直接从受迫轨迹推断输入—状态关系，无需进行衰减实验。该方法假设内部动力学衰减得足够快，使系统状态始终接近由输入瞬时定义的低维流形。

图 4比较了随机电压强迫下 aSSM 和 SM 模型预测的响应。尽管通常 SM 由输入的非线性函数定义，但在线性近似下就足以处理这个简单的例子。我们考虑了两种强迫速率不同的情况。对于快速强迫情况（$\rho = 0.5$），首阶 aSSM 引入的修正显著提高了预测精度。相较之下，正如图 4b 所示，当强迫变化较慢时（$\rho = 0.1$），系统仍接近 SM，SM 模型能够给出足够准确的预测。最后，对于更快的强迫（$\rho = 1.2$），正如预期的那样，基于 SM 和 aSSM 的预测都不再准确。



ρ	$\mathrm{NMTE}_{\mathrm{aSSM}}$ [%]	$\mathrm{NMTE}_{\mathrm{SM}}$ [%]
0.1	1.7	1.7
0.5	6.3	6.6
1.2	12.6	12.0

图4： **(a)** 在随机外部激励速度逐渐增加的条件下，对比公式（10）中单自由度系统的基于aSSM和基于SM的降阶模型（$\rho = 0.1$ （上）、 $\rho = 0.5$ （中）和 $\rho = 1.2$ （下））。正如理论所预测的，当 $\rho \ll 1$时，慢流形近似是准确的；而在最后一种情况下，即使是基于aSSM的首阶近似也会失效。**(b)** 图例及列出不同情况下NMTE值的表格。

尽管在实际应用中， ρ如此高的值并不常见，但它说明了 aSSM 降阶的数学结果所依赖的时间尺度分离是必要的。我们还强调，这里仅使用了 aSSM 参数化和约化动力学的首阶近似。Haller 和 Kaundinya [11] 推导的高阶近似可以进一步提高精度，但为避免过拟合，也需要更多数据。

2.3.2 文献中的HASEL致动器解析模型

现在，我们通过纳入图5a 所示的囊袋几何形状，对 HASEL 致动器的简单模型（10）进行扩展。该扩展将囊袋的偏转角 α 与产生的行程 x联系起来，并对作用于电极的静电力进行显式建模。假设面外深度的影响可以忽略不计，因此将囊袋视为二维结构。致动器几何形状采用 Kellaris 等人 [27]提出的构型。虽然

我们采用拉格朗日方法推导控制方程，这些方程与通过端口哈密顿形式 [34, 35] 由 Yeh 等人 [32]得到的方程等价。推导的更多细节见补充材料。

该致动器由 N 个串联连接的囊袋组成。每个囊袋均由两片矩形介电薄膜沿边缘粘合而成，每片薄膜的长度为 L_p、宽度为 w、厚度为 t。在所关注的实验参数范围内，介电薄膜可建模为不可伸长且无弯曲刚度的膜。在这些假设下，液体填充囊袋的横截面形状由两个相交的圆弓形段组成，其圆心角为 $2\alpha_0$，弧长等于未变形囊袋长度 L_p。流体体积决定横截面积 A，该面积与角度 α 的关系为

$$A = \frac{1}{2}L_p^2\left(\frac{\alpha - \sin\alpha\cos\alpha}{\alpha^2}\right). \tag{11}$$

初始致动器长度为

$$h = L_p\left(\frac{\sin\alpha_0}{\alpha_0}\right). \tag{12}$$

长度为 L_e、宽度为 w 的电极分别连接在致动器两侧的上表面。当施加电压 u 时，电极从囊袋边缘开始，沿长度 l_e 相互贴合。若忽略介电流体厚度的影响，则电极间距变为 $2t$。由于膜不可伸长且介电流体不可压缩，几何参数 L_p、w 和 A 在整个驱动过程中保持不变，从而导致致动器发生竖直收缩。在此过程中，流体填充区域保持圆柱弓形段形状，并由圆心角 α 参数化。

可以将囊袋未拉链部分的弧长 l_p、拉链长度 l_e、致动器的行程 x 以及拉链区域的电容 C 与角偏转 α 联系起来（参见补充材料）。该模型还引入了一个阈值电压，低于此电压时，静电力不足以引发任何拉链式闭合。此外，模型假设电能仅来自电极拉链式闭合的区域，因为未拉链区域的电场会迅速衰减。

关于第 i 个囊袋电极拉链区域的行程 x_i 和电荷 Q_i，控制方程为

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_i + c\dot{x}_i + kx_i &= mg - \frac{1}{2}\frac{Q_i^2 C_{x_i}}{C(x_i)^2}, \qquad i = 1, \ldots, N \\ \dot{Q}_i &= -\frac{1}{RC(x_i)}Q_i + \frac{1}{R}u, \end{aligned} \tag{13}$$

其中 g 是重力加速度常数， $C_{x_i} = \frac{dC}{dx_i}$ 描述电容与致动器行程之间的关系。模型参数经过调整，以模拟实验中 HASEL 致动器的行为。

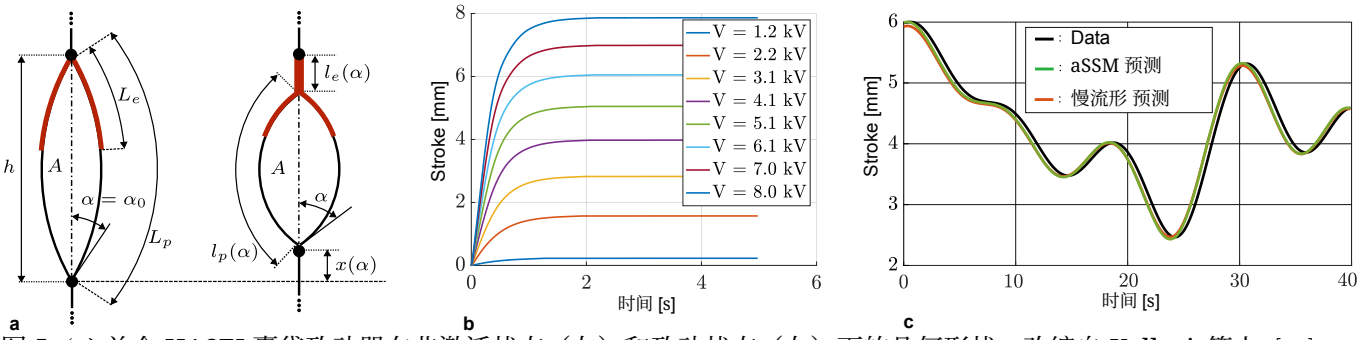


图 5: **(a)** 单个 HASEL囊袋致动器在非激活状态（左）和致动状态（右）下的几何形状。改编自 Kellaris等人 [27]. **(b)** 不同恒定电压等级下，解析 HASEL 致动器模型（13) 的自主响应。 **(c)** 在随机激励下，基于 aSSM 和 SM 的数据驱动模型对系统（13) 中致动器行程的预测。

2.4 实验人工肌肉的数据驱动建模

现在，我们来考察图中所示的实验用 HASEL 致动器。6a，该致动器由十五个囊袋组成。随机电压驱动下的实验结果表明，致动器的内禀动力学显著快于输入的典型变化速率，而这种输入变化速率正是实际产生典型 HASEL 收缩模式所需的。如此显著的时间尺度分离，证明了采用基于慢流形的一维降阶模型是合理的，因为输入 $u(t)$ 是一维的。

为构建此类模型，我们将致动器的行程作为唯一的可观测量，并直接利用受迫数据训练基于慢流形的降阶模型。慢流形由一个多项式函数近似，该函数使用七条随机驱动的轨迹进行训练。值得注意的是，线性近似

$$x_\epsilon(u) = 1.12 \cdot 10^{-7} + 1.56 \cdot 10^{-3} u, \tag{14}$$

对该系统表现出显著的有效性。作为比较，我们还构建了一个基于 aSSM 的模型，并对流形参数化和约化动力学均采用三次阶近似。如图 6b 所示，aSSM 模型的预测迅速收敛到 SM 模型的预测，未带来显著改进。对于慢度指标不同的电压输入，这一表现 ρ始终一致。图 6b 所示的示例采用了无量纲速率 $\rho = 0.28$，得到的归一化平均轨迹误差为 $\mathrm{NMTE}_{\mathrm{aSSM}} = 7.90\%$ 和 $\mathrm{NMTE}_{\mathrm{SM}} = 8.16\%$。如图所示，这两种误差均处于实验不确定性范围内；该范围根据相同电压输入下的重复试验估算得出。

如 Kaundinya 等人 [14], 所述，构建 aSSM 模型需要生成一组初始条件，这些条件是对不同恒定电压所对应稳态的扰动。对于 HASEL 致动器，这些新的初始条件通过相对于恒定输入施加突发电压跃变来产生。然而，这种高幅度跃变往往会引发致动器迟滞行为，而这类行为在典型运行条件下通常不会出现。这种不匹配限制了基于实验数据的 aSSM 方法在此类系统中的适用性。

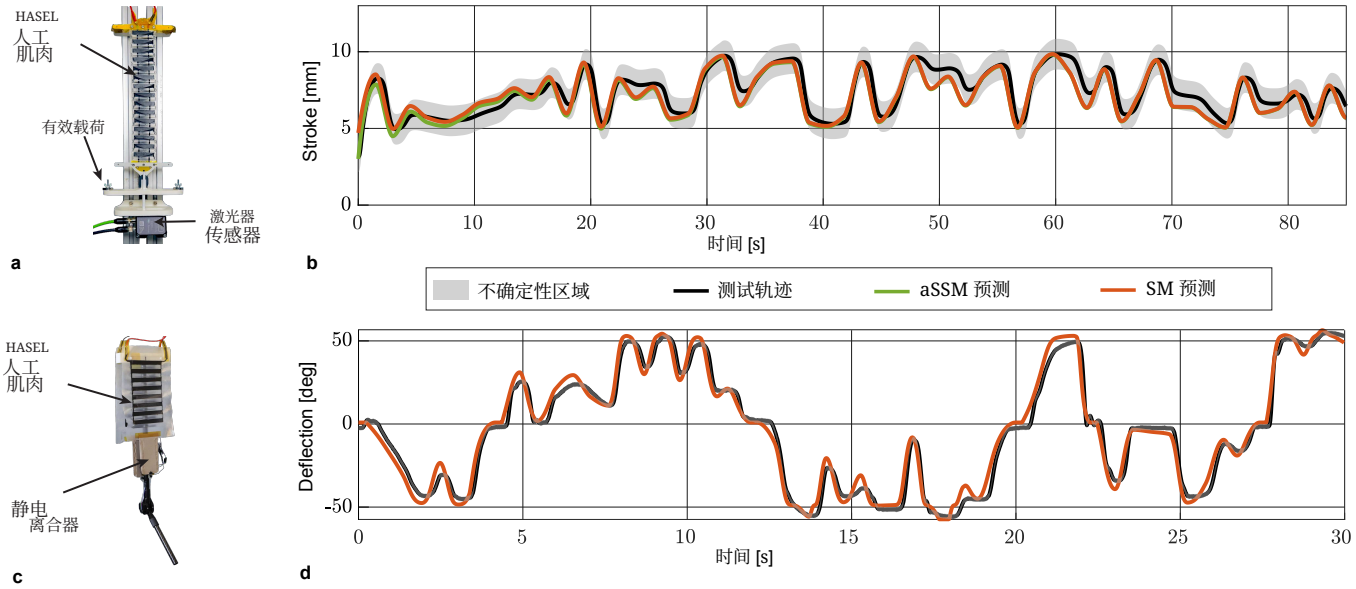


图 6：实验用 HASEL人工肌肉及数据驱动慢流形预测。（**a**）带有效载荷和激光位移传感器的单个 HASEL致动器。（**b**）随机激励下致动器行程的预测：基于 aSSM 的预测（绿色）迅速收敛至基于慢流形的预测（橙色），二者均与测试轨迹（黑色）高度吻合。（**c**）由一对 HASEL致动器和静电离合器组成的肌肉骨骼关节。（**d**）随机激励下关节偏转的慢流形预测，显示其能够准确跟踪测试轨迹。

每个囊袋由方程（13）描述，对应三个一阶常微分方程，因此整个致动器的相空间维数为 $n = 3N$。外部驱动（电压）的维数为 $f = 1$。鉴于该致动器表现出过阻尼行为（见图 5**b**），且电极上的电荷动力学演化快得多，因此降阶模型实际上是一维的。数据驱动建模所用的唯一可观测量是致动器的总行程。图 5**c** 展示了随机激励下，基于 aSSM 和基于 SM 的降阶模型的预测结果对比，其中 $\rho = 0.13$。这两个模型的归一化平均轨迹误差分别为 $NMTE_{aSSM} = 1.7\%$ 和 $NMTE_{SM} = 1.8\%$。这些结果证实了系统（13）的数据驱动 aSSM 模型和 SM 模型具有较高的准确性。

相比之下，基于 SM 的降阶建模仅依赖受迫响应数据，这些数据可在正常运行条件下采集，无需引入不必要的滞后。这一实用优势，加上

SM 模型具有相当的预测精度，使慢流形方法更适合用于 HASEL致动器建模。有关致动器滞后以及数据采集和处理的更多细节，请参阅补充材料。

现在，我们将分析范围从单个致动器扩展到完整的人工肌肉系统。具体而言，我们研究一种拮抗式构型：两个HASEL致动器分别布置在刚性结构的两侧，且每个致动器都配有一个静电离合器。该装置的设计灵感来自Kazemipour等人 [26] 提出的方案，如图6c 所示。该装置拓展了运动范围，使人工肌肉能够模拟生物肢体的拮抗驱动。

在此构型中，系统有四个控制输入：两个用于驱动HASEL致动器，另外两个用于接合静电离合器。在本研究中，我们假设同一侧的HASEL致动器与离合器同时启动，且任一时刻只有肌肉的一侧处于活动状态。该假设将输入空间简化为单一标量输入：输入的符号决定肌肉哪一侧接合，从而以简化的形式保留拮抗驱动行为。

与独立致动器不同，由于多输入配置和机械耦合十分复杂，为人工肌肉设计衰减轨迹要困难得多。这使得aSSM 的实用性较低，因为构建 aSSM 需要衰减数据，而生成这类数据会引发不理想的滞后行为，这种行为在正常工作条件下并不常见。相比之下，基于慢流形的方法只需使用受迫轨迹进行训练，因而更具实用性。在此，我们采用最高 7 阶的慢流形多项式近似，仅使用三条受迫响应轨迹进行训练。如图 6d 所示，基于慢流形的模型能够准确预测肌肉偏转，归一化平均轨迹误差为 $\mathrm{NMTE}_{\mathrm{SM}} = 8.13\%$。

在验证数据驱动的慢流形模型的预测准确性后，我们现在通过在拮抗关节上实施基于模型的前馈，并将其性能与仅反馈和仅前馈基线进行比较，来展示这些模型在实时控制中的实用性。

2.5 基于慢流形的拮抗关节闭环控制

为了在闭环控制设置中测试我们数据驱动的慢流形模型，我们使用图 $\theta_d(t)$所示的拮抗式 HASEL–离合器装置观测随时间变化的关节角度6c，测量值为 $\theta(t)$。我们评估了三种控制策略：比例–积分（PI）反馈、在 PI 反馈中加入逆SSM前馈项，以及逆SSM前馈

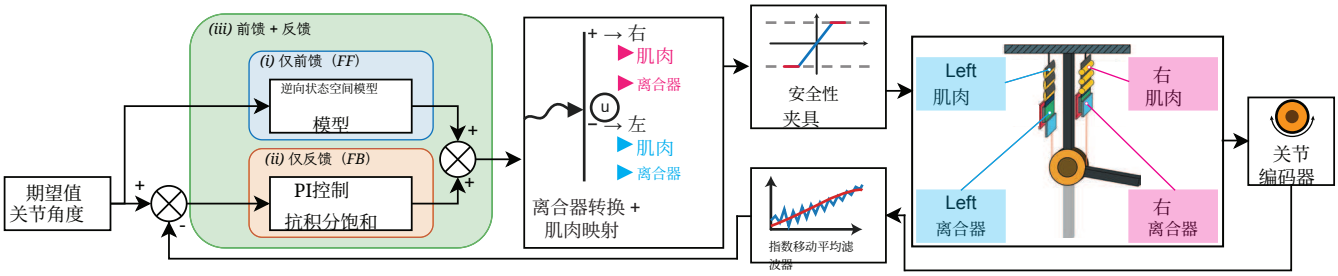


图 7：闭环控制架构（FF、PI、FF+PI）。(i) 前馈：期望关节角度通过逆 SSM 模型 g^{-1}映射为电压指令。(ii) 反馈：带抗积分饱和功能的比例积分（PI）控制器作用于经指数移动平均（EMA）滤波的关节编码器测量值。(iii) 组合控制器：将前馈与反馈相加，并经离合器切换与肌肉映射阶段传递；随后由安全限幅器实施饱和和变化率限制，再驱动拮抗的左右肌肉及其离合器。

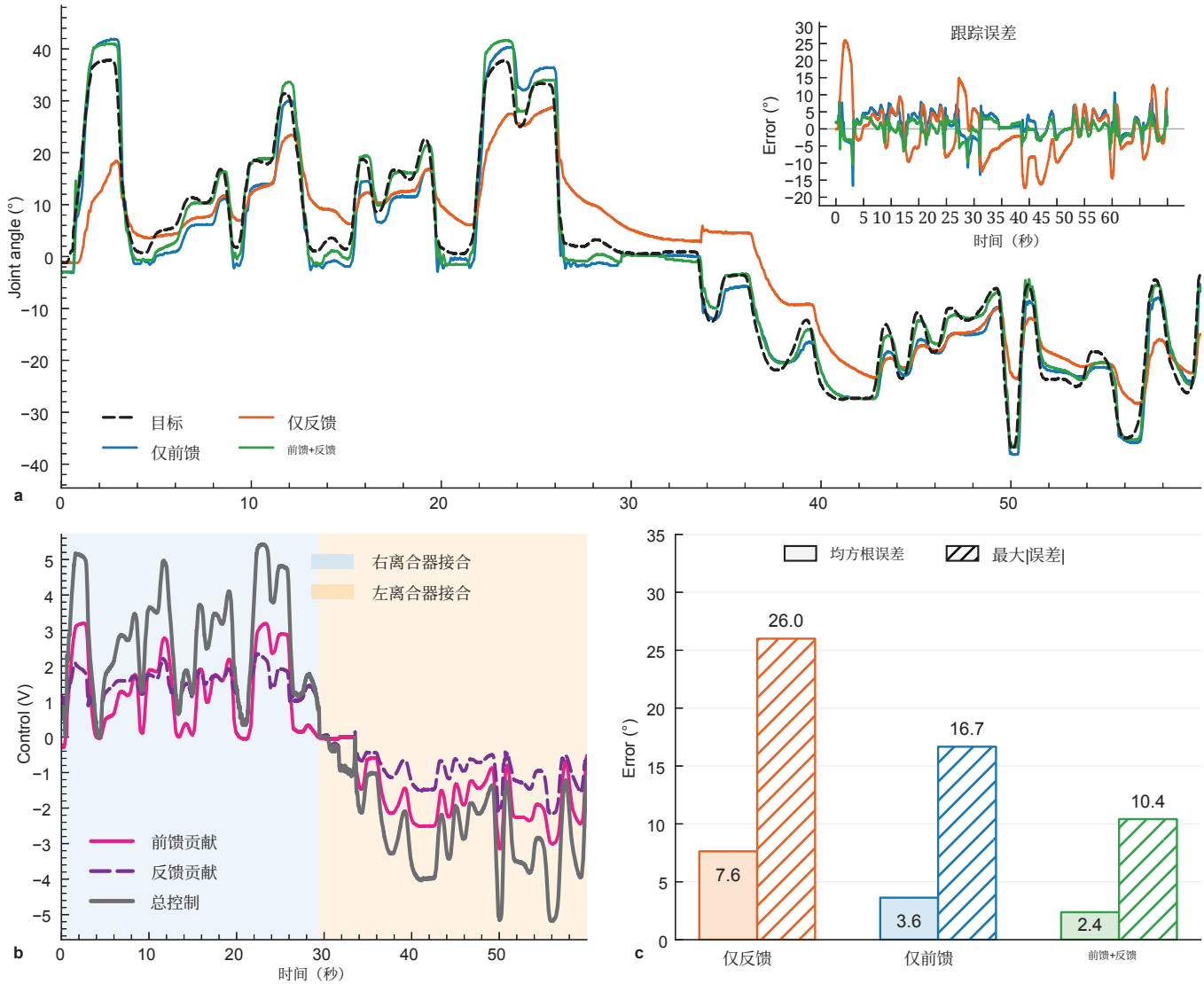


图 8：组合式基于模型的前馈与反馈控制实现了更优的跟踪性能。**(a)** 三种控制器对应的目标关节角度（虚线）和测量角度：仅 PI 控制、仅逆 SSM 前馈控制，以及组合式逆 SSM+PI。**(b)** 组合控制器的控制信号，分解为前馈与反馈分量；阴影区域表示右侧和左侧离合器的接合状态。**(c)** 性能汇总，显示均方根（RMS）误差和最大绝对误差 $|e|_{\max}$，表明相较于仅反馈控制，误差降低了三分之二。

单独而言，PI 控制律为 $u(t) = k_p e(t) + k_i \int_0^t e(\tau)\,\mathrm{d}\tau$ 其中 $e(t) = \theta_d(t) - \theta(t)$。逆 SSM 项由已识别的慢流形映射 $\theta \approx g(u)$（第 2.4 节）通过 $g^{-1}(\theta_d(t)$ 得到。

增益（k_p，k_i）针对组合控制器和仅反馈控制器，分别在一条较短的校准轨迹上进行调节，之后保持不变。所有控制器均在相同的安全约束和离合器调度下，针对一条不同的随机参考轨迹运行。性能通过均方根（RMS）跟踪误差和最大绝对误差 $\max_t |e(t)|$ 进行量化。

在未见过的轨迹上，逆 SSM+PI 控制器取得了最低误差（RMS 2.38°；最大值 10.41°）。仅前馈控制的 RMS 为 3.63°，最大值为 16.67°；仅反馈控制的 RMS 为 7.63°，最大值为 26.00°。控制功直接根据两块肌肉的指令电压量化（$|u_{\text{right}}| + |u_{\text{left}}|$ 每个采样点）；各条件下的 RMS 和平均幅值相近（平均值 $\approx$ 2.68–2.98 V；RMS $\approx$ 3.01–3.15 V），其中仅反馈控制的平均幅值最大（2.98 V）。图 8a 叠加显示了所有条件下的目标角度和测量角度；图 8b 将组合控制分解为前馈与反馈分量，并以阴影标示离合器接合；图 8c 汇总了 RMS 误差和最大误差。

单独使用时，逆 SSM 控制策略能够跟踪慢趋势，但无法抑制扰动，导致 $|e|$ 中出现更高的峰值。仅 PI 策略可以纠正误差，但需要更高的电压，且在拮抗侧切换时瞬态响应较慢。在组合控制策略中，指令电压各项的贡献表明，前馈承担了主要的控制 effort：前馈项的平均幅值为 1.47 V（RMS 为 1.77 V），而反馈项为 1.21 V（RMS 为 1.32 V），即平均贡献大 $\approx$1.22 $\times$，RMS 贡献大 $\approx$1.34 $\times$。

综合来看，这些观察结果表明，基于 SSM 的前馈承担了主要的驱动负担，而 PI 项能有效抑制扰动和残余模型误差。

3 讨论

我们提出了一种针对人工肌肉的数据驱动降阶建模方法，并通过拮抗式 HASEL–离合器关节的闭环控制验证了其性能。仿真和实验中一个突出的共同观察结果是，基于 aSSM 的模型降阶需要显著的时间尺度分离：轨迹会迅速收敛到一个吸引低维集合上，然后沿着缓慢变化的响应演化。在此情况下，直接从受迫数据中学习得到的慢流形（SM）模型足以用于预测和控制，而完整的 aSSM 降阶则能进一步提高精度。然而，后者在实际应用中带来的额外收益有限，因为它需要进行可能激发滞后的快速衰减实验。相较于 SM，对 aSSM 进行降阶的优势

在时间尺度分离较弱时会更加明显，例如驱动变化更快，或软体机器人的内部动力学更慢时。

值得强调的是，数据驱动建模方法本身就是我们的主要贡献：本文开发的 SM/aSSM 工作流具有样本高效（仅需少量受迫轨迹进行训练）、预测准确（在单致动器和拮抗肌测试中，归一化均方跟踪误差均为个位数）且计算开销低等特点。它还生成了显式逆映射 g^{-1}，评估时间仅为微秒级，从而能够在嵌入式硬件上实现实时前馈。

本研究的一项关键成果是证明，数据驱动降阶模型不仅是准确的预测器，也是拮抗式人工肌肉系统的有效控制工具。受生物肌肉对启发，拮抗驱动可实现可变阻抗和双向运动，但由于切换动力学、多物理场耦合以及实时计算需求，控制此类组件一直颇具挑战。我们成功地在拮抗式 HASEL 离合关节上实现了基于模型的前馈控制，并显著降低了相较于仅反馈基线的误差，由此证明，所学习的慢流形逆映射为实现精确的软体机器人控制提供了一条切实可行的路径，且无需付出高昂的计算开销。这弥合了理论模型降阶与可部署机器人系统之间的关键鸿沟，表明借助计算开销低、源自实验的模型，可以准确控制仿生拮抗式设计。

我们的控制实验验证了这些建模选择。将学习得到的逆映射 g^{-1} 用作前馈，并加入轻量级比例积分反馈项后，组合控制器在一条未见过的随机轨迹上实现了最低的跟踪误差（图 8）。与仅前馈和仅 PI 控制相比，均方根误差分别降低了约三分之一和三分之二，最大误差也相应改善。值得注意的是，在这三种条件下，施加于肌肉的指令电压幅值处于相近范围，这表明精度提升并非通过大幅增加驱动获得。在组合控制器中，指令分解结果显示，前馈贡献占据了更大的驱动力份额（平均幅值 $\approx$1.47V，而反馈为$\approx$1.21 V），均方根幅值也呈现类似的主导关系。因此，模型承担了大部分驱动负担，而反馈主要用于抑制扰动和残余建模误差。

这些发现为实现缓慢变化运动目标下的软体机器人肌肉控制提供了实用方案：（i）从运行数据中学习一维慢流形映射；（ii）将其逆映射用作快速、稳健的前馈项；（iii）加入一个带抗积分饱和功能的小型比例积分回路，以提高稳健性。由此得到的控制器易于调试，可在千赫兹速率下运行，并兼容拮抗驱动和离合器调度。除了当前系统外，同一建模流程也适用于其他表现出明显时间尺度分离的软体机器人致动器，可提供具有可解释性、便携性且能直接用于控制的模型。

所展示的方法对 HASEL致动器以外的系统也具有重要意义。其他表现出显著时间尺度分离的软体机器人系统，例如气动人工肌肉（PAM）、某些介电弹性体执行器（DEA），或具有快速热瞬态响应的形状记忆合金（SMA）致动器，都可能受益于这一样本高效建模框架。只需少量训练轨迹即可学习准确模型的能力，使该方法适用于难以进行大规模数据采集的现场部署，并为自适应假肢、微创手术机器人和协作制造开辟了新途径；在这些领域，柔顺而精准的驱动至关重要。此外，慢流形逆映射计算开销低，能够部署在资源受限的嵌入式控制器上，这类控制器常见于可穿戴和便携式机器人系统。

我们的方法并非没有局限性。SM近似假设外部变化缓慢（慢变率 ρ较小），而在引发滞后的电压突变下，其保真度会下降。我们的拮抗式实现假设离合器接合互斥；更丰富的行为（例如短暂重叠或双侧驱动）则需要更高维的慢流形。最后，尽管当前的逆映射是静态的，但适度考虑速率依赖性，或可进一步提高其在较快参考轨迹下的准确性。

基于这些局限性，未来工作将着重于：(i) 通过更高维的aSSM/慢流形实现异步HASEL/离合器激活和双侧同步驱动；(ii) 针对较快输入，采用考虑滞后的修正或速率依赖性修正；(iii) 对 g 进行在线自适应，以补偿漂移；以及 (iv) 对离合器时序进行有原则的优化，以平衡性能与安全性。

4 方法

4.1 基于绝热谱子流形的数据驱动建模

对于 $\epsilon = 0$，我们假设系统（4）具有一个依赖于 $\boldsymbol{u}$的、均匀有界且一致双曲的不动点 $\boldsymbol{x}_0$（$\boldsymbol{u}$），如 Haller 和 Kaundinya [11]中所述。在此情形下，系统具有一个 f维的、法向吸引不变流形

$$\mathcal{L}_0 = \left\{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^f : \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0\left(\boldsymbol{u}\right)\right\}, \tag{15}$$

它由 $\boldsymbol{x}_0(\boldsymbol{u})$ 不动点组成，在几何奇异摄动理论 [33] 的术语中称为临界流形。流形 $\mathcal{L}_0$ 随后满足

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0\left(\boldsymbol{u}\right) + \boldsymbol{f}_0\left(\boldsymbol{x}_0\left(\boldsymbol{u}\right)\right) + \boldsymbol{f}_1\left(\boldsymbol{x}_0\left(\boldsymbol{u}\right), \boldsymbol{u}\right) = \boldsymbol{0}. \tag{16}$$

现在我们进行变量替换

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0(\boldsymbol{u}), \tag{17}$$

从而使临界流形变平。随后我们可以重写式（4）

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\xi}} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_0(\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{\xi}) + \boldsymbol{f}_0(\boldsymbol{x}_0(\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{\xi}) \\ \qquad + \boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x}_0(\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{u}) - \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{x}_0(\boldsymbol{u})\dot{\boldsymbol{u}}, \\ \dot{\boldsymbol{u}} = \epsilon \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}_0(\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{\xi}, \epsilon t). \end{cases} \tag{18}$$

现在，我们对（18）中第一个方程右端进行泰勒级数展开，得到

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f}_0(\boldsymbol{x}_0(\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{f}_0(\boldsymbol{x}_0(\boldsymbol{u})) + \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}_0(\boldsymbol{x}_0(\boldsymbol{u}))\boldsymbol{\xi} \\ + \frac{1}{2}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{x}}^2\boldsymbol{f}_0(\boldsymbol{x}_0(\boldsymbol{u}))\boldsymbol{\xi} + \mathcal{O}(3), \end{aligned} \tag{19}$$

and

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x}_0(\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x}_0(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{u}) + \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}_0(\boldsymbol{x}_0(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{u})\boldsymbol{\xi} \\ + \frac{1}{2}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{x}}^2\boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x}_0(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{u})\boldsymbol{\xi} + \mathcal{O}(3). \end{aligned} \tag{20}$$

因此，方程（18）变为

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\xi}} = \hat{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{x}_0(\boldsymbol{u})\dot{\boldsymbol{u}} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}_0(\boldsymbol{x}_0(\boldsymbol{u})) \\ \qquad + \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{x}}^2\boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x}_0(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{u})\}\boldsymbol{\xi} + \mathcal{O}(3), \\ \dot{\boldsymbol{u}} = \epsilon \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}_0(\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{\xi}, \epsilon t), \end{cases} \tag{21}$$

其线性部分为

$$\hat{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}_0(\boldsymbol{x}_0(\boldsymbol{u})) + \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x}_0(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{u}) \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

我们将 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{u}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 记为 $\hat{}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{u})$ 的右特征向量列矩阵，并将 $\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u}) \in \mathbb{R}^{d\times n}$ 记为前 d 个左特征向量的行矩阵。

现在，我们应用模态坐标变换

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{u}) \begin{pmatrix} \boldsymbol{\eta} \\ \boldsymbol{v} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^d, \quad \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^{n-d}. \tag{22}$$

T绝热慢谱子流形上的约化动力学的首阶近似于是变为 s

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\eta}} = \boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{u}} \hat{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{u}) \boldsymbol{P}(\boldsymbol{u}) \begin{pmatrix} \boldsymbol{\eta} \\ \boldsymbol{h}_0(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{x}_0(\boldsymbol{u})) \end{pmatrix} \\ + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\eta} \\ \boldsymbol{h}_0(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{x}_0(\boldsymbol{u})) \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P}(\boldsymbol{u})^{\mathrm{T}} \Big(\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{f}_0(\boldsymbol{x}_0(\boldsymbol{u})) \\ + \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{x}}^2 \boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x}_0(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{u}) \Big) \boldsymbol{P}(\boldsymbol{u}) \begin{pmatrix} \boldsymbol{\eta} \\ \boldsymbol{h}_0(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{x}_0(\boldsymbol{u})) \end{pmatrix} + \mathcal{O}(3), \end{aligned} \tag{23}$$

其中，关系式 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{h}_0(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{x}_0(\boldsymbol{u}))$ 是 ϵ 中 aSSM 参数化的首阶近似。有关高阶修正的讨论，请参见 Haller 和 Kaundinya [11]。

给定一个标量观测量 $s(t) \in \mathbb{R}^N$，例如 HASEL致动器的行程或肌肉骨骼关节的偏转角，我们应用 延迟嵌入 以确保嵌入维数足以在观测空间 [36] 中重构流形。对于标量外部输入 $u \in \mathbb{R}$，以下过程使我们能够恢复 aSSM 的首阶近似及其相关的约化动力学:

1. 给定冻结时间极限 $u = \bar{u} \in \mathbb{R}$下观测到的数据 $s \in \mathbb{R}^N$，评估稳态解 $s_0(\bar{u})$。2. 对数据进行延迟嵌入，并构造 $\boldsymbol{x}(t)$ 和 $\boldsymbol{x}_0(\bar{u})$，其中 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{x}_0(\bar{u}) \in \mathbb{R}^{p \times N}$。3. 定义相对于不动点 $\boldsymbol{x}_0(\bar{u})$ 的移位 $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0(\bar{u})$。4. 通过奇异值分解（SVD）近似 $\boldsymbol{\xi}(t)$ 的切空间 $\boldsymbol{V} \in \mathbb{R}^{p \times d}$，其中 d 是降阶模型的维数。在我们的例子中，$d = 1$。5. 定义约化坐标 $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{V}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^{d \times N}$。6. 计算 SSM参数化 $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{h}_0(\boldsymbol{\eta}; \bar{u}) = [\boldsymbol{H}_1(\bar{u}) \ \ldots \boldsymbol{H}_m(\bar{u})] \boldsymbol{\eta}^{1:m}$，它是一个多元多项式，且 $\boldsymbol{H}_i \in \mathbb{R}^{p \times d_i}$；它是 $u = \bar{u}$ 处 aSSM 在 ϵ 中的零阶近似。

7. 计算约化动力学 $\dot{\boldsymbol{\eta}} = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{\eta};\ \bar{u}) = [\boldsymbol{R}_1(\bar{u}) \ldots,\ \boldsymbol{R}_r(\bar{u})]\,\boldsymbol{\eta}^{1:r}$，它同样是一个多元多项式，其中 $\boldsymbol{R}_i \in \mathbb{R}^{d\times d_i}$，并且它是方程（23）在约化坐标 $\boldsymbol{\eta}$中截至第 r^{th} 阶的近似。

8. 计算 SSM 参数化如下

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{h}_0(\boldsymbol{\eta};\bar{u}) = \sum_{|\boldsymbol{k}|=1}^{m} \boldsymbol{H}_{\boldsymbol{k}}(\bar{u})\,\boldsymbol{\eta}^{\boldsymbol{k}}, \tag{24}$$

其中，$\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{k}}(\bar{u}) \in \mathbb{R}^{p\times d_{\boldsymbol{k}}}$ 为系数矩阵，$\boldsymbol{k} = (k_1,\ldots,k_d) \in \mathbb{N}^d$ 为多重指标，$|\boldsymbol{k}| = k_1 + \cdots + k_d$ 表示其总次数，且 $\boldsymbol{\eta}^{\boldsymbol{k}} = \eta_1^{k_1}\eta_2^{k_2}\cdots\eta_d^{k_d}$。此表达式表示一个多元多项式，它对应于在 $u = \bar{u}$处取值的 aSSM 在 ϵ 中的零阶近似。

9. 计算约化动力学如下

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{\eta};\bar{u}) = \sum_{|\boldsymbol{k}|=1}^{r} \boldsymbol{R}_{\boldsymbol{k}}(\bar{u})\,\boldsymbol{\eta}^{\boldsymbol{k}}, \tag{25}$$

其中 $\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{k}}(\bar{u}) \in \mathbb{R}^{d\times d_{\boldsymbol{k}}}$ 为系数矩阵。此表示给出了方程（23）在约化坐标 $\boldsymbol{\eta}$中截至 r 阶的多元多项式近似。

对采样中的每个电压值 u 重复此过程。随后对所得不动点 $\boldsymbol{x}_0(u)$进行插值，以重建临界流形的几何形状，以及相关的参数化和作为电压 u函数的约化动力学。此插值假设在采样范围内 SSM 的维数保持不变。虽然 SSM 的切空间可能随电压变化，但可以对其进行插值；或者，为降低计算成本，也可以假设切空间恒定。在后一种情况下，必须确保该固定平面在所有电压值下都与快子空间充分横截。如果快子空间相对于慢子空间具有强烈的非正规性，也可以采用斜投影（参见 Bettini等人 [10]）。

4.2 基于慢流形的数据驱动建模

对于 $\epsilon > 0$ 足够小的情况下，方程（ $\mathcal{L}_0$ 15 中定义的临界流形15）会扰动为一个唯一、吸引且f维的慢流形（SM）

$$\mathcal{L}_0 = \left\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^f : \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_\epsilon(\boldsymbol{u})\right\}, \tag{26}$$

其与 $\mathcal{L}_0$ 微分同胚。更多详情请参阅 Haller 和 Kaundinya [11]。

从实验数据中观察到的现象以及图 2c 所示，系统轨迹在缓慢变化的外部输入作用下，不仅会快速收敛到 aSSM，也会收敛到其底层的慢流形。此观察使得我们能够直接从受迫响应数据中识别慢流形，实质上将其视为从输入到可观测量的映射。对于标量观测量 $s(t) \in \mathbb{R}$ 和标量输入 $u(t) \in \mathbb{R}$，慢流形可近似为一个多项式函数

$$x_\epsilon(u) \doteq s(u) = \sum_{i=0}^{n} S_i u^i, \quad S_i \in \mathbb{R}. \tag{27}$$

也可以采用其他近似方法（径向基函数、神经网络；参见 Powell [37]，Hagan 等人 [38]，Park 和 Sandberg [39]），但在我们的测试中，这些方法的效率较低（参见补充材料）。

4.3 控制设计与实现

如第 2.5 节所述，我们评估了拮抗驱动的 HASEL 肘关节的三种控制器实现方案：(i) 仅前馈，(ii) 仅反馈，以及 (iii) 前馈+反馈组合。三种实现方案均遵循相同的安全约束，对离合式拮抗器采用相同的驱动时序，并以固定采样周期T_s（在我们的实现中为 1 kHz）运行。整体信号流总结于控制框图（图 7）中，其中包括基于逆 SSM 的前馈通路、作用于经 EMA 滤波的测量值并带有抗积分饱和的 PI 反馈通路、离合器转换与执行器映射阶段，以及在驱动拮抗肌肉和离合器之前用于强制执行硬件限制的末端安全限幅器。下文将总结控制律、离散化细节和拮抗驱动流程。

符号说明：令 $\theta_d(t)$ 表示期望关节角度， $\theta(t)$ 表示测量角度。控制信号 $V(t)$ 是施加到主动肌肉上的高电压指令。安全约束包括电压饱和 $V \in [\underline{V}, \bar{V}]$ 和变化率上限 $|V(t) - V(t - T_s)| \leq \Delta V_{\max}$。在离散时间下，对原始测量值进行一阶低通滤波，得到滤波后的角度 θ_k，以抑制量化误差和噪声。

基于 SSM 的模型的前馈：我们辨识电压与准静态关节角度之间的静态单调映射， $\theta \approx g(V)$（第 2.4 节）。前馈指令通过对该关系求逆，根据期望角度轨迹生成：

$$V_{\text{ff}}(t) = g^{-1}\big(\theta_d(t)\big).$$

数值逆变换：我们根据学习得到的多项式正向映射，预先计算覆盖（$\underline{V}$， $g(\underline{V})$) 的稠密一维插值函数，并通过线性插值恢复 V_{ff}。这样可避免逐样本求根，运行时间达到微秒级

运行时间。范围保护： θ_d 被限制在 g 的标定像范围内，以避免外推；随后将所得 V_{ff} 限制在 $[V, V]$，并通过 $\Delta V_{\max}$ 进行速率限制。

在仅前馈基准中，施加的指令为

$$V(t) = \mathrm{sat}_{\underline{V},\overline{V}}\big(u(t)\big), \qquad u(t) = \mathrm{rl}_{\Delta V_{\max}}\{V_{\mathrm{ff}}(t)\},$$

其中，sat 用于确保电压处于高压驱动器输出范围和 HASEL 肌肉介电击穿电压设定的电压边界内；$\mathbf{rl}_{\Delta V_{\max}}\{\cdot\}$ 是转换速率限制器，用于限制 $|u(t) - u(t - T_s)| \le \Delta V_{\max}$ (采样周期 T_s)；等效地，$|\dot{u}(t)| \le S_{\max}$，其中 $S_{\max} = \Delta V_{\max}/T_s$ (V/s)。我们调整 $\Delta V_{\max}$，以限制可能导致超调或干扰拮抗式离合器调度的指令突变，同时遵守硬件转换速率限制。

PI反馈：我们针对跟踪误差 $e(t) = \theta_d(t) - \theta(t)$采用 PI 控制器：

$$V_{\mathrm{fb}}(t) = k_p\, e(t) + k_i \int_0^t e(\tau)\, \mathrm{d}\tau.$$

离散时间实现（采样 T_s）对积分状态采用梯形积分，并通过条件积分实现抗积分饱和：每当暂定指令会违反饱和限制或转换速率限制时，积分器便会冻结。测量值经过低通滤波，表示为 $\theta_k = \alpha\,\theta_k + (1-\alpha)\,\theta_{k-1}$，其中 α较小。

在仅反馈基准中，施加的指令为

$$V(t) = \mathrm{sat}_{\underline{V},\overline{V}}\big(\mathrm{rl}_{\Delta V_{\max}}\{V_{\mathrm{fb}}(t)\}\big).$$

组合前馈 + 反馈： 组合控制器在执行相同的安全约束之前，将两项贡献叠加：

$$V_{\mathrm{tot}}(t) = V_{\mathrm{ff}}(t) + V_{\mathrm{fb}}(t), \qquad V(t) = \mathrm{sat}_{\underline{V},\overline{V}}\big(\mathrm{rl}_{\Delta V_{\max}}\{V_{\mathrm{tot}}(t)\}\big).$$

前馈项由基于 SSM 的模型提供大部分指令；比例积分项则补偿残余模型误差和扰动。

使用离合器的拮抗式驱动时序：肘关节由两块拮抗式 HASEL 肌肉驱动，每块肌肉都通过一个开关式离合器连接。任意时刻只有一个离合器接合并接收指令 V（t）。我们实现了一个

轻量级状态机，以安全、平稳地调度侧切换：触发：当参考轨迹经过零作用力附近的死区时（例如，在前馈/组合模式下的 $|V_{\mathrm{ff}}| < \varepsilon$ ），或在仅反馈模式下期望角度变号时，会请求切换。接合等待：触发后，两个电压均设为零，目标离合器接合，随后等待固定的机械接合时间 τ_{eng}。平滑斜坡：接合后，主动侧电压在 τ_{ramp} 内从 0 线性渐增至目标幅值，以避免冲击。冷却时间：短暂的冷却时间 τ_{cool} 可防止在抖动参考信号下发生频繁切换。安全保障：所有安全检查（饱和、变化率限制、 $\{0,1\}$ 中的数字输出，以及已配置的关节角度边界）都将应用于最终发送至硬件的指令。

基准测试方案： 每种控制器变体（仅前馈、仅反馈、组合控制）都在相同的安全约束和离合器调度器下跟踪同一参考轨迹。为确保公平性和稳定性，组合控制和仅反馈条件下的比例积分增益分别单独调校（仅前馈控制没有增益），目标是在遵守相同饱和和变化率限制的前提下，将均方根跟踪误差降至最低。

致谢。 我们感谢 Joar Ax°as 对基于数据对 HASEL 致动器进行建模所开展的初步研究。我们也感谢 PatriciaApostol 为生成第 2.3.2 节示例数据所用代码作出的贡献，并感谢 Roshan S. Kaundinya 就将绝热慢谱子流形应用于控制提供了宝贵的讨论。

作者贡献。 L.B.、A.K.、R.K. 和 G.H. 设计了这项研究。L.B. 和 A.K. 开展了研究。L.B. 负责建模部分并开发了相关软件。A.K. 开展了实验并开发了控制部分。L.B. 和 A.K. 撰写了论文。R.K. 和 G.H. 审阅了论文。G.H. 和 R.K. 领导了研究团队。

利益冲突。作者声明不存在利益冲突。

参考文献

[1] Benner, P., Gugercin, S., Willcox, K.：参数化动力系统投影式模型降阶方法综述。SIAMRev. **57**(4), 483–531 (2015)

[2] Ghadami, A., Epureanu, B.I.：动力系统中的数据驱动预测：最新进展。英国皇家学会哲学汇刊 A **380**(2229), 20210213(2022)

[3] Haller, G.：《从方程与数据中建模非线性动力学——及其在固体、流体和控制中的应用》。工业与应用数学学会，费城，宾夕法尼亚州（2025）

[4] Haller, G., Ponsioen, S.：非线性正规模态与谱子流形：其存在性、唯一性及在模型降阶中的应用。非线性动力学 **86**，1493–1534（2016）https://doi.org/10.1007/s11071-016-2917-z

[5]Cenedese, M., Axˆas, J., B¨auerlein, B., Avila, K., Haller, G.：通过谱子流形对不可线性化动力学进行数据驱动建模与预测。《自然通讯》**13**（1），872（2022）https://doi.org/10.1038/s41467-022-28518-y

[6] Cenedese, M., Axˆas, J., Yang, H., Eriten, M., Haller, G.：机械系统中向谱子流形的数据驱动非线性模型降阶。《英国皇家学会哲学汇刊》**A380**（2229）（2022）

[7] Axˆas, J., Cenedese, M.,Haller, G.：非线性动力系统的快速数据驱动模型降阶。《非线性动力学》**111**（9），7941–7957（2023）

[8] Bettini, L., Cenedese, M., Haller, G.：分段光滑动力系统向谱子流形的模型降阶。《国际非线性力学杂志》**163**（2024）

[9] Axˆas, J., B¨auerlein, B., Avila, K., Haller, G.：由非线性共振引起的次谐波受迫响应的数据驱动建模。《科学报告》**14(1)**，25991（2024）

[10] Bettini, L., Kasz´as, B., Zybach, B., Dual, J., Haller, G.：通过斜投影进行数据驱动的非线性模型降阶至谱子流形。《混沌：非线性科学跨学科期刊》**35(4)**（2025）https://doi.org/10.1063/5.0243849

[11] Haller, G., Kaundinya, R.S.：降阶至时间非周期谱子流形的非线性模型。《混沌》**34(4)**（2024）https://doi.org/10.1063/5.0187080

[12] Alora, J., Cenedese, M., Schmerling, E., Haller, G., Pavone, M.：用于高维机器人的非线性最优控制的数据驱动谱子流形降阶。2023 IEEE国际机器人与自动化会议（ICRA），2627–2633（2023）https://doi.org/10.1109/ICRA48891.2023.10160418

[13] Alora, J.I., Cenedese, M., Haller, G., Pavone, M.：发现用于非线性连续体机器人控制的主导动力学。npj Robotics **3**(1), 5 (2025) https://doi.org/10.1038/s44182-025-00021-8

[14] Kaundinya, R.S., Alora, J.I., Matt, J.G., Pabon, L.A., Pavone, M., Haller, G.：基于数据的软体机器人控制：通过绝热谱子流形。arXiv预印本 arXiv:2503.10919（2025）https://doi.org/10.48550/arXiv.2503.10919

[15] Asano, Y., Kozuki, T., Ookubo, S., Kawamura, M., Nakashima, S., Katayama, T., Yanokura, I., Hirose, T., Kawa- harazuka, K., Makino, S., Kakiuchi, Y., Okada, K., Inaba, M.：面向现实世界物理交互动作的人类仿生肌肉骨骼人形机器人Kengoro。2016年IEEE-RAS第16届人形机器人国际会议（Humanoids），876–883（2016）https://doi.org/10.1109/HUMANOIDS.2016.7803376

[16]J¨antsch, M., Wittmeier, S., Dalamagkidis, K., Panos, A., Volkart, F., Knoll, A.：Anthrob——打印式仿人机器人，第2015卷，（2013）

[17] Richter, C., Jentzsch, S., Hostettler, R., Garrido, J., Ros, E., Knoll, A., R¨ohrbein, F., Smagt, P., Conradt, J.：肌肉骨骼机器人：神经控制的可扩展性。《IEEE机器人与自动化杂志》**23**，128–137（2016）

[18] Acome, E., Mitchell, S.K., Morrissey, T.G., Emmett,M.B., Benjamin, C., King, M., Radakovitz, M., Keplinger, C.：具有类肌肉性能的液压放大型自修复静电致动器。《科学》**359**（6371），61–65（2018）

[19] Yang, G.-Z.,Full, R.J., Jacobstein, N., Fischer, P., Bellingham, J., Choset, H., Christensen, H., Dario, P., Nelson, B.J., Taylor, R.：年度十大机器人技术。《科学·机器人》**4(26)**（2019）

[20] Buchner, T.J.K., Fukushima, T., Kazemipour, A., Gravert,S.-D., Prairie, M., Romanescu, P., Arm, P., Zhang, Y., Wang, X., Zhang, S.L., Walter, J., Keplinger, C., Katzschmann, R.K.：用于敏捷、自适应且高能效运动的电液驱动肌肉骨骼机器人腿。《自然·通信》**15(1)**，7634（2024）

[21] Gravert, S.-D., Varini, E., Kazemipour, A., Michelis, M.Y., Buchner, T., Hinchet, R., Katzschmann, R.K.：用于无缆机器人技术的低电压电液致动器。《科学进展》**10(1)**（2024）

[22] Kurumaya, S., Suzumori, K., Nabae, H., Wakimoto, S.：由多丝肌肉驱动的肌肉骨骼式下肢机器人。《ROBOMECH期刊》**3(1)**（2016年）

[23] Niiyama, R., Nagakubo, A., Kuniyoshi, Y.：Mowgli：一种采用人工肌肉骨骼系统的双足跳跃与着陆机器人，第2546–2551页（2007年）

[24] Niiyama, R., Nishikawa, S., Kuniyoshi, Y.：采用人体肌肉激活模式进行双足跑步的运动员机器人。201010th IEEE-RAS国际人形机器人会议，Humanoids 2010 (2010)

[25] Ogawa, K., Narioka, K., Hosoda, K.：采用气动肌骨系统的全身人形机器人“pneumat-bs”的开发。2011 IEEE/RSJ智能机器人与系统国际会议，4838–4843 (2011)

[26] Kazemipour, A., Hinchet, R., Katzschmann, R.K.：用于肌肉骨骼拮抗关节全运动范围的可拉伸电液人工肌肉。arXiv预印本 arXiv:2409.11017（2024）https://doi.org/10.48550/arXiv.2409.11017

[27] Kellaris, N., Venkata, V., Rothemund, P., Keplinger, C.：用于设计性能大幅提升的Peano-HASEL致动器的解析模型。Extreme Mechanics Letters **29**，100449（2019）https://doi.org/10.1016/j.eml.2019.100449

[28] Saif, M.T.A., Alaca, B.E., Sehitoglu, H.：用于微型泵的静电膜致动器解析建模。《微机电系统期刊》**8**（3），335–345（1999）

[29] Maffli, L., Rosset, S., Shea, H.：拉链式介电弹性体致动器：表征、设计与建模。《智能材料与结构》**22**(2013)

[30] Righi, M., Fontana, M., Vertechy, R., Duranti, M., Moretti, G.：介电流体换能器分析，(2018)

[31] Johnson, B., Sundaram, V., Naris, M., Acome, E., Ly, K., Correll, N., Keplinger, C., Humbert, J., Rentschler, M.：非线性软致动器和传感器系统的识别与控制。IEEE机器人与自动化快报(2020) https://doi.org/10.1109/ACCESS.2020.3024519

[32] Yeh, Y., Cisneros, N., Wu, Y., Rabenorosoa, K., Le Gorrec, Y.：基于端口哈密顿方法的HASEL致动器建模与位置控制。IEEE机器人与自动化快报**7**, 1–8(2022) https://doi.org/10.1109/LRA.2022.3181365

[33] Fenichel, N.：常微分方程的几何奇异摄动理论。《微分方程杂志》**31**（1），53–98（1979）https://doi.org/10.1016/0022-0396(79)90152-9

[34] Schaft, A.、Jeltsema, D.：端口哈密顿系统理论：入门概述。《系统与控制基础及趋势》**1**（2-3），173–378（2014）

[35] Lohmayer, M., Kotyczka, P., Leyendecker, S.：《火用端口哈密顿系统：建模基础》。动力系统的数学与计算机建模

27**27**（1），489–521（2021）[36] Takens, F.：《湍流中的奇异吸引子检测》，第366–381页。施普林格，柏林、海德堡（1981）[37] Powell, M.J.D.：载于：Light, W.（编），《1990年径向基函数逼近理论》。牛津大学出版社，在线版（1992）[38] Hagan, M.T., Demuth, H.B., Beale, M.H., De Jes´us, O.：《神经网络设计》。Martin Hagan，波士顿（2014）[39] Park, J., Sandberg, I.W.：使用径向基函数网络进行通用逼近。Neural Comput **3**（2），246–257（1991）

非线性谱建模与控制

基于数据的软体机器人肌肉

补充材料

Leonardo Bettini[1†]、Amirhossein Kazemipour[2†]、Robert K. Katzschmann[2*]、George Haller[1*]1机械系统研究所，苏黎世联邦理工学院，莱昂哈德街21号，8092苏黎世，瑞士。[2]苏黎世联邦理工学院软体机器人实验室，坦嫩街3号，8092苏黎世，瑞士。

*通讯作者。电子邮箱：rkk@ethz.ch; georgehaller@ethz.ch；
†这些作者对本研究贡献相同。

1 加性慢变强迫的一般论证

考虑非自治动力系统

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) & \boldsymbol{F}, \in \mathcal{C}^r, \\ \dot{\boldsymbol{u}} = \epsilon \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}, \epsilon t), & 0 \leq \epsilon \ll 1, \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ 和 $\boldsymbol{u}(t) \in \mathbb{R}^f$ 表示时变外部强迫。我们采用如下记号

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0}) = \tilde{\boldsymbol{f}}_0(\boldsymbol{x}). \tag{2}$$

现在考虑积分

$$\int_0^1 \frac{d}{ds} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, (1-s)\boldsymbol{u})\, ds, \tag{3}$$

其可计算为

$$\int_0^1 \frac{d}{ds} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, (1-s)\boldsymbol{u})\, ds = \tilde{\boldsymbol{f}}_0(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}). \tag{4}$$

另一方面，根据链式法则，我们有

$$\int_0^1 \frac{d}{ds} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, (1-s)\boldsymbol{u})\, ds = -\left[\int_0^1 \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, (1-s)\boldsymbol{u})\, ds\right] \boldsymbol{u}, \tag{5}$$

其中 $\boldsymbol{D_u F}$ 表示 th　　关于输入 $\boldsymbol{F}$ 的雅可比矩阵 $\boldsymbol{u}$。令（4）和（5）相等，可得分解式

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) = \tilde{\boldsymbol{f}}_0(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}), \tag{6}$$

其中

$$\boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) \doteq \left[\int_0^1 \boldsymbol{D_u F}(\boldsymbol{x},(1-s)\,\boldsymbol{u})\,ds\right]\boldsymbol{u}. \tag{7}$$

进一步将自治部分分解为线性分量和非线性分量后，

$$\tilde{\boldsymbol{f}}_0(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}_0(\boldsymbol{x}), \tag{8}$$

我们恢复了正文中式（4）的形式。

2 绝热谱子流形参数化及其约化动力学的基于数据

我们在此详细说明主稿件第4.1 节，重点介绍基于绝热谱子流形（aSSM）的数据驱动模型降阶方法。我们的目标是获得 aSSM 的首阶近似， $\mathcal{M}_\epsilon$。尽管式（ ϵ 主稿件中的（4）允许 $\mathcal{M}_\epsilon$非零，我们仍分别用其冻结极限对应物 $\mathcal{L}_\epsilon$和 $\mathcal{M}_0$ 近似 aSSM， $\mathcal{L}_0$及其对应的慢流形（SM）， $\epsilon > 0$；当 $\mathcal{M}_\epsilon$ 较小时，由于 $\mathcal{L}_\epsilon$ 和 ϵ 对[1]的平滑依赖，这些近似效果良好（参见 Haller 和 Kaundinya）。

为在此近似下对 aSSM 进行参数化，我们通过扰动系统在不同恒定电压输入所对应的稳态附近，生成一族衰减轨迹。具体而言，通过相对于基准恒定输入施加突发电压跃变来引入这些扰动。系统在固定电压下达到稳态后，我们突然将输入改为一个新的恒定值。这一突变会使稳态沿着 $\epsilon = 0$ 系统扩展相空间中的外部输入 u 轴移动至一个新位置，从而有效地将先前的稳态变为新的初始条件。对于每个电压值 $u = \bar{u}$，我们都会获得一条或多条衰减轨迹，据此提取谱子流形（SSM）的局部参数化$\mathcal{W}(E(\bar{u}))$及其对应的约化动力学，详情见稿件的方法4.1 节。如图2所示，我们在一系列电压值下重复这一过程，从而对扩展相空间的不同切片进行采样。随后，对不同电压等级下得到的局部 SSM 参数化及其对应的约化动力学进行插值，以构建 aSSM 的全局近似。

然而，通过诱发突发电压跃变来生成衰减轨迹的初始条件，会引入致动器正常运行状态下并不存在的滞后效应。这种行为给 aSSM 的实际构建带来了挑战。如图 1 所示，在扩展相空间中，尽管轨迹的初始条件各不相同，但若对应于同一参考电压平面 $u = \bar{u}$ ，它们仍可能收敛到不同的不动点。虽然在涉及极端电压的状态下，对此类行为进行建模

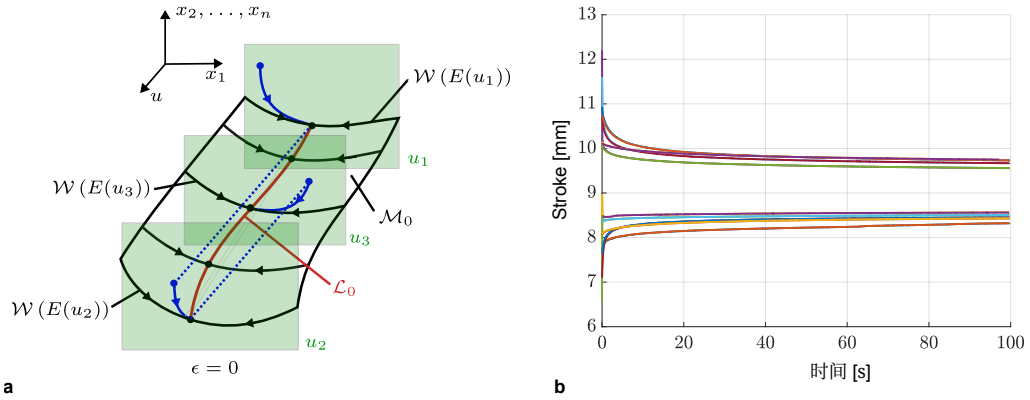


图1：(a) aSSM $\mathcal{M}_0$ 数据驱动的主导阶参数化及其约化动力学识别流程。(b) 电压跃变会产生滞后；为在固定电压水平下获得不同的初始条件，必须施加电压跃变 $\bar{u}$，这会导致系统收敛到不同的不动点。

会变得相关，但这超出了本研究的范围。在我们的应用中，这些较大的输入跃变仅用于填充构建 aSSM 所需的数据，并不反映致动器的标准用法。

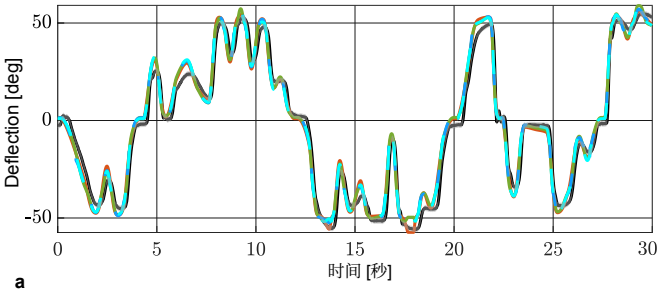
然而，为了在 aSSM 上一致地定义约化动力学，必须将唯一的不动点与每个电压值 $\bar{u}$ 相关联。为此，我们利用从随机驱动轨迹中获得的慢流形（SM）校准不动点的选择。

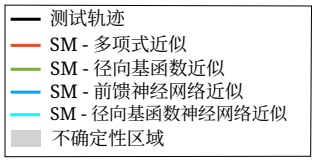
3 拮抗式肌骨关节的慢流形建模

第 2.4 节所述的拮抗式肌肉骨骼关节采用拮抗配置的 HASEL致动器，每个致动器均与静电离合器相连，以模拟生物肢体的驱动（Kazemipour等人 [2]）。正如正文所述，此类系统会迅速收敛到慢流形（SM），因此可以采用基于SM的建模来简化基于 aSSM 的建模方法。这种简化方法直接从受迫响应数据中识别慢流形，将其表示为从输入到可观测量的映射。具体而言，我们考虑一个标量输入 $u(t) \in \mathbb{R}$ 以及一个标量观测量 $s(t) \in \mathbb{R}$。

一种实用且易于理解的方法是用关于 u 的多项式来近似这一映射；该多项式也易于求逆，这对于需要逆映射的控制应用来说是一项优势。作为替代方案，我们还测试了径向基函数（RBF）近似（Powell [3]），其中 $M = 15$ 个中心均匀分布在外部输入的取值范围 $[u_{\min}, u_{\max}]$ 内，方差为 $\sigma = (u_{\max} - u_{\min})/M$。RBF模型虽然仍具有可解释性，但在保证单调性方面可能存在困难，因此求逆不那么直接。

我们进一步考虑了两种神经网络（NN）架构：(i) 具有一个包含 10 个神经元的隐藏层并采用 Tanh激活函数的前馈神经网络（FNN）（Hagan 等人 [4]）；(ii) 具有高斯激活函数第一层和线性输出层的径向基函数神经网络（RBF-NN）（Park 和 Sandberg [5]）。尽管这些模型与多项式模型和 RBF模型实现了相似的预测结果和归一化平均轨迹误差（NMTE）（见图 2），但它们的可解释性较差，且更难求逆。





	NMTE_{SM} [%]
Polynomial ($\mathcal{O}(7)$)	8.13
RBF	8.20
NNF	8.12
NN-RBF	8.14

c

图 2：用于拮抗性肌骨系统基于 SM 的一维建模的不同数据驱动方法比较。**(a)** 测试轨迹上的时间序列预测。**(b)** 图例。**(c)** 归一化平均轨迹误差（NMTE）。

4 HASEL致动器的解析建模

我们考虑主稿件第 2.3节中提出的 HASEL致动器模型。在本附录中，我们基于 Kellaris等人所描述的几何构型，推导致动器单个囊袋的控制方程 [6]。我们的推导遵循拉格朗日形式，并证明其等价于 Yeh等人 [7], Lohmayer 等人 [8]所采用的端口哈密顿形式（van der Schaft 和 Jeltsema [9]）。

参见稿件中的图 5(a)，囊袋未拉链部分的弧长为

$$l_p(\alpha) = \left(\frac{2A\alpha^2}{\alpha - \sin\alpha\cos\alpha} \right)^{1/2}, \tag{9}$$

而拉链长度为

$$l_e(\alpha) = L_p - l_p(\alpha). \tag{10}$$

致动器的行程，即其相对于初始长度的收缩，与 α 的关系为

$$x = h - \left(l_p(\alpha)\frac{\sin\alpha}{\alpha} + l_e(\alpha) \right), \tag{11}$$

该式描述了几何非线性。拉链区域的电容为

$$C(\alpha) = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 w}{2t}, l_e(\alpha), \tag{12}$$

其中 ϵ_r 表示介电薄膜的相对介电常数，而 ϵ_0 表示真空介电常数。利用公式（11），电容还可以表示为致动器行程 x 的函数。

将单个囊袋建模为与电路耦合的单自由度非线性振子。第 i 个囊袋的拉格朗日量定义为

$$\mathcal{L}_i = T_i - V_i = \frac{1}{2}m\dot{x}_i^2 - \frac{1}{2}kx_i^2 - mgx_i - \frac{1}{2}\frac{Q_i^2}{C\left(x_i\right)}, \qquad i = 1, \ldots, N, \tag{13}$$

其中， x 表示垂直位移， Q 表示累积在电极上的电荷， $C(x_i)$表示电容，该电容通过拉链区域间接受 α 影响。势能包括弹性弹簧、重力以及储存在电容器中的静电能所产生的贡献。

为考虑耗　　散效应，我们引入一个与垂直速度呈线性关系的瑞利耗散函数，即　　e.,

$$\mathcal{R}_i = \frac{1}{2}c\dot{x}_i^2, \qquad i = 1, \ldots, N, \tag{14}$$

where c 表示黏性阻尼系数。此后，为简便起见，我们省略下标 i　　.

由主稿件中的式（13）可得运动方程，写为

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial \dot{x}} = 0. \tag{15}$$

为完善机电耦合模型，我们加入电极拉链区域中累积电荷 Q 的控制方程。该方程由RC电路模型描述

$$\dot{Q} = -\frac{1}{RC}Q + \frac{1}{R}u. \tag{16}$$

由外部电压源 u 驱动。在文献中，端口哈密顿形式常用于描述机电系统。尽管 哈密顿量 一词传统上指保守系统，但端口哈密顿方法将这一形式扩展到包含耗散效应。本节将通过明确推导受耗散扰动的哈密顿形式方程，阐明耗散拉格朗日量与端口哈密顿表述之间的联系。

我们将广义动量定义为

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}, \tag{17}$$

由此可得

$$\dot{p} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right). \tag{18}$$

由式（15），我们得到

$$\dot{p} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{x}}. \tag{19}$$

现在，我们应用经典的勒让德变换，从拉格朗日量形式转到哈密顿量形式。具体做法是将 $\dot{x}$ 表示为（x， p）的函数，即 $\dot{x} = \dot{x}$（x， p），并将哈密顿函数定义为

$$\mathcal{H}(x,p) = p\dot{x}(x,p) - \mathcal{L}(x,\dot{x}(x,p)). \tag{20}$$

根据此定义，我们得到

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}, \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \dot{x}. \tag{21}$$

将这些表达式　　代入式（19），可得广义动量的控制方程:

$$\dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{x}}. \tag{22}$$

最后，耦合演化方程的受扰哈密顿形式为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \tfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}, \\ \dot{p} &= -\tfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} - \tfrac{\partial \mathcal{R}}{\partial p}\tfrac{\partial p}{\partial \dot{x}}. \end{aligned} \tag{23}$$

参考轨迹

[1] Haller, G., Kaundinya, R.S.：非线性模型降阶至时间非周期谱子流形。Chaos**34**（4）（2024）https://doi.org/10.1063/5.0187080

[2] Kazemipour, A., Hinchet, R., Katzschmann, R.K.：用于肌肉骨骼拮抗关节全运动范围的可拉伸电液人工肌肉。arXiv 预印本 arXiv:2409.11017（2024）https://doi.org/10.48550/arXiv.2409.11017

[3] Powell, M.J.D.：载于：Light, W.（编）《径向基函数逼近理论》，1990年。牛津大学出版社，在线版（1992）

[4] Hagan, M.T., Demuth, H.B., Beale, M.H., De Jes ´us, O.：《神经网络设计》。Martin Hagan，波士顿（2014）

[5] Park, J., Sandberg, I.W.：使用径向基函数网络实现通用逼近。Neural Comput **3**（2），246–257（1991）

[6] Kellaris, N., Venkata, V., Rothemund, P., Keplinger, C.：一种用于设计性能大幅提升的 Peano-HASEL致动器的解析模型。Extreme Mechanics Letters **29**, 100449(2019) https://doi.org/10.1016/j.eml.2019.100449

[7] Schaft, A., Jeltsema, D.：端口哈密顿系统理论：入门概述。Foundations and Trends in Systems and Control **1**(2-3), 173–378 (2014)

[8] Lohmayer, M., Kotyczka, P., Leyendecker, S.：耗散火用端口哈密顿系统：建模基础。《动力系统的数学与计算机建模》**27**(1), 489–521 (2021)

[9] Yeh, Y., Cisneros, N., Wu, Y., Rabenorosoa, K., Le Gorrec, Y.：通过端口哈密顿方法对 HASEL 致动器进行建模和位置控制。IEEE机器人与自动化快报**7**, 1–8 (2022) https://doi.org/10.1109/LRA.2022.3181365