收缩良性引理的充分条件

Clemens Bannwart*

arXiv:2601.03275v1 [math.GN] 25 Dec 2025

摘要

良群由 Edelsbrunner、Morozov 和 Patel 于 [3]引入，用于衡量函数的几何特征对于扰动的稳健性。粗略地说， r-良群衡量的是在对函数进行幅度至多为 r的扰动后仍无法消除的特征数量。收缩良性引理指出，这些群的秩会随着 r 增大而减小。按照最初提出的一般形式，该结论并不成立。我们给出一个反例，并提出使该结论成立的条件。这些条件足够一般，能够涵盖良群的大多数应用情形。

1 背景与定义

定义和研究良群的框架如下。我们需要两个拓扑空间 X， Y、一个子集 $A \subseteq Y$以及一个连续函数 $f\colon\ X \to Y$。此外，我们还需要固定所有连续函数 $X \to Y$的集合中的一个子集 $\mathcal{P} \subseteq C(X,\ Y)$，以及 $\mathcal{P}$上的一个度量 $d_{\mathcal{P}}$。我们假设 $f \in \mathcal{P}$。

注 1. 若我们在 Y 上有一个度量 d_Y，则它会在 $C(X,Y)$ 上（从而也在 $\mathcal{P}$ 上）诱导出一个（扩展）度量：

$$d_{\mathcal{P}}(g,h) = \sup_{x\in X} d_Y(g(x),h(x)).$$

之所以称其为扩展度量，是因为一般来说，距离 $d_{\mathcal{P}}$ 也可以取值 ∞。对于良群，只有满足 $d_{\mathcal{P}}(f,g) < \infty$ 的那些 $g \in \mathcal{P}$ 才会发挥作用。

注 2. 一个特别值得关注的情形是： $X = \mathbb{R}^n$、 $Y = \mathbb{R}^n$、 $A = \{0\}$、$\mathcal{P} = C(X,Y)$ 中的 d_Y 是欧氏距离，而 $d_{\mathcal{P}}$ 是由 d_Y 按照上述方式诱导得到的。例如， [1, 4, 5] 中采用的就是这种设定。具体而言，这意味着对于 $f, g \in \mathcal{P}$,

$$d_{\mathcal{P}}(g,h) = \|g-h\|_\infty = \sup_{x\in X} \|g(x)-h(x)\|.$$

在论文 [3], 中，并未对空间 $\mathcal{P}$ 给出任何条件，不过文中建议可以考虑所有与 f同伦的映射所构成的空间。正如我们在下一节的反例中所见，为了使收缩良性引理（SWL）成立，我们应当对 X， Y， A， f， $\mathcal{P}$， $d_{\mathcal{P}}$施加一些条件。我们在第 3 节提出一组可能的条件。现在，我们来介绍定义良群所需的概念。

*意大利摩德纳和雷焦艾米利亚大学物理、数学与计算机科学系，clemens.bannwart@gmail.com

定义 3。给定 $r \geq 0$，r**-扰动** f是一个映射 $g \in \mathcal{P}$，满足 $d_{\mathcal{P}}(f, g) \leq r$。我们用 $\mathcal{P}_r$ 表示 f 的所有 r-扰动构成的集合。

定义 4. 我们将**井函数** $f_A\colon \quad X \to \mathbb{R}$ 定义如下:

$$f_A(x) := \inf\{r \geq 0 \mid \exists\ r\text{-perturbation } g \text{ such that } g(x) \in A\}.$$

注 5. 在 Y 上有度量的情况下，我们还可以考虑井函数的以下替代定义,

$$f'_A(x) := d_Y(f(x), A)$$

and

$$f''_A(x) := \inf\{r \geq 0 \mid f(x) \in A_r\},$$

其中 $A_r := \{y \in Y \mid d_Y(y, A) \leq r\}$ 以及 $d_Y(y, A) = \inf_{a\in A} d_Y(y, a)$。在良群主要应用的背景下，这三个定义是相同的，正如我们将在下一个命题中所示。在 [3] 中使用了 f_A，而在 [1] 中使用了 f'_A；不过在那里形式更简单，因为 A 仅由一个点组成。在 [1], 中研究的较不一般的情形，以及在 [4, 5], 中，这些不同定义也一致，正如我们将在下一个命题中所示。

命题 6. 假设给定 Y 上的度量 d_Y。

1. 对所有 $x \in X$，有 $f'_A(x) = f''_A(x)$。*2.* 对所有 $r \geq 0$，有 $f'^{-1}_A([0, r]) = f^{-1}(A_r)$。*3.* 假设度量 $d_{\mathcal{P}}$ 如定理 *1* 所述由 d_Y 诱导。那么，对所有 $r \geq 0$，有 $f_A^{-1}([0, r]) \subseteq f^{-1}(A_r)$。*4.* 进一步假设 Y 是赋范向量空间，且 d_Y 由范数诱导。那么，对所有 $r \geq 0$，有 $f^{-1}(A_r) \subseteq f_A^{-1}([0, r])$。*5.* 在条件 *4* 下，因此尤其是在定理 *2* 的条件下，有 $f_A = f'_A = f''_A$。

证明。

1. 我们有

$$\begin{aligned} f'_A(x) \leq r &\iff \inf_{a\in A} d_Y(f(x), a) \leq r \\ &\iff \forall \epsilon > 0\ \exists a \in A\ d_Y(f(x), a) \leq r + \epsilon \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} f''_A(x) \leq r &\iff \inf\{s \geq 0 \mid f(x) \in A_s\} \leq r \\ &\iff \forall \epsilon > 0\ f(x) \in A_{r+\epsilon} \\ &\iff \forall \epsilon > 0\ \inf_{a\in A} d_Y(f(x), a) \leq r + \epsilon \\ &\iff \forall \epsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists a \in A\ d_Y(f(x), a) \leq r + \epsilon + \delta. \end{aligned}$$

尽管第二个陈述中多用了一个变量，但这两个陈述是等价的，这表明 $f'_A(x) = f''_A(x)$。

2. 可直接由定义得出：

$$\begin{aligned} x \in {f'_A}^{-1}([0,r]) &\iff f'_A(x) \le r \\ &\iff \inf_{a\in A} d_Y(f(x),a) \le r \\ &\iff f(x) \in A_r \\ &\iff x \in f^{-1}(A_r). \end{aligned}$$

3. 设 $x \in f_A^{-1}([0,r])$。则 $f_A(x) \le r$，即对于所有 $\epsilon > 0$，都存在一个 $(r+\epsilon)$-扰动h_ϵ，使得 f 满足 $h_\epsilon(x) \in A$。于是

$$d_Y(f(x), h_\epsilon(x)) \le \sup_{x'\in X} d_Y(f(x'), h_\epsilon(x')) = d_{\mathcal{P}}(f, h_\epsilon) \le r + \epsilon.$$

由于这对任意 $\epsilon > 0$ 都成立，我们得到 $d_Y(f(x), A) \le r$，因此 $f(x) \in A_r$，即$x \in f^{-1}(A_r)$。

4. 该陈述的证明归结为以下事实：给定 $x \in X$ 和 $a \in Y$，若 $d_Y(f(x), a) \le s$，则对任意小的 $\epsilon > 0$，都存在 f 的 $(s+\epsilon)$-扰动 h_ϵ，使得 $h_\epsilon(x) = a$。下文将证明，当 Y 是赋范向量空间，且 d_Y 是由该范数诱导的距离时，这一事实成立。

设 $x \in f^{-1}(A_r)$。则 $f(x) \in A_r$，即 $d_Y(f(x), A) \le r$。这意味着，对于任意$\epsilon > 0$，都存在 $a = a_\epsilon \in A$，使得 $\|f(x) - a\| \le r + \epsilon$。
设 $\Phi\colon Y \to Y$是一个连续映射，使得

- Φ在 $B_{r+2\epsilon}(a)$之外是恒等映射。
- $\Phi \equiv a$ 在 $B_{r+\epsilon}(a)$ 上。
- $\|\Phi(y) - y\| \le r + 2\epsilon \ \forall y \in Y$。

要明确描述这样的映射并不太难。换句话说，Φ 将 $B_{r+\epsilon}(a)$压缩到点 a，同时保持$B_{r+2\epsilon}(a)$之外的一切不变。在两个球之间，我们要求 Φ 将点映射到离它们自身不太远的位置。

现在考虑 $h = h_\epsilon := \Phi \circ f$。我们有

$$\|h - f\| = \|\Phi \circ f - f\| = \sup_{x'\in X} \|\Phi(f(x')) - f(x')\| \le \sup_{y\in Y} \|\Phi(y) - y\| \le r + 2\epsilon.$$

因此，由于对所有 $\epsilon > 0$，$h(x) = a \in A$ 且 $\|h - f\| \le r + 2\epsilon$ 都是可能的，我们有 $f_A(x) \le r$，从而有 $x \in f_A^{-1}([0,r])$。

5. 根据 1，等式 $f'_A = f''_A$通常成立。由 3 和 4，f_A的子水平集由 $f^{-1}(A_r)$ 给出；另一方面，根据 2，它们等于 f'_A的子水平集。因此，f_A 和 f'_A 具有相同的子水平集，因而必然相等。□

定义 7。 注意，对于 f 的 r-扰动 g，我们有 $g^{-1}(A) \subseteq f_A^{-1}([0,r])$。我们将该包含映射在 0-同调上诱导的同态记为

$$\mathtt{j}_g^r\colon H_0(g^{-1}(A)) \to H_0(f_A^{-1}([0,r])).$$

我们使用取值于固定域的同调，并在记号中省略该域。请注意，在 [3] 中，r 被省略在记号中，也就是说，写作 $\mathtt{j}_g$，而不是 $\mathtt{j}_g^r$。

注记 8. 请注意，在 [3], 中，定义是通过对所有次数的同调群取直和给出的，而不只是次数 0。我们简化了定义，因为在我们感兴趣的情形下，只有 0-同调具有有意义的良群。此外，在 [4, 5], 中也只考虑 0-同调。在 [1] 中，考虑的是 n-同调，其中 n 是定义向量场的欧氏空间的维数。

定义 9. f（相对于 $(\mathcal{P}, d_{\mathcal{P}})$）的**良群** 定义为

$$U(r) := \bigcap_{g \in \mathcal{P}_r} \operatorname{im}(\mathtt{j}_g^r) \subseteq H_0(f_A^{-1}([0,r])),$$

对任意 $r \geq 0$。

$f^{-1}(A)$ 的同调类可以看作映射 f 的几何特征，并且它们满射到 $f_A^{-1}([0,r])$ 的同调类。良群 $U(r)$ 刻画了那些无法通过对 f 进行任何 r 扰动而避免的特征。现在，在陈述 SWL 之前，我们还需要给出最后一个定义。

定义 10. 对于 $r \leq s$，包含映射 $f_A^{-1}([0,r]) \subseteq f_A^{-1}([0,s])$ 在同调上诱导一个映射，记作

$$f_r^s \colon H_0(f_A^{-1}([0,r])) \to H_0(f_A^{-1}([0,s])).$$

引理 11（收缩良性引理）。对于 $r \leq s$ 我们有

$$U(s) \subseteq f_r^s(U(r)).$$

SWL 有一个非常容易出错的证明，内容如下：

$$\begin{aligned} U(s) = \bigcap_{g \in \mathcal{P}_s} \operatorname{im}(\mathtt{j}_g^s) &\subseteq \bigcap_{g \in \mathcal{P}_r} \operatorname{im}(\mathtt{j}_g^s) \\ &= \bigcap_{g \in \mathcal{P}_r} \operatorname{im}(f_r^s \circ \mathtt{j}_g^r) \\ &= \bigcap_{g \in \mathcal{P}_r} f_r^s(\operatorname{im}(\mathtt{j}_g^r)) \\ &= f_r^s \left(\bigcap_{g \in \mathcal{P}_r} \operatorname{im}(\mathtt{j}_g^r) \right) = f_r^s(U(r)). \end{aligned}$$

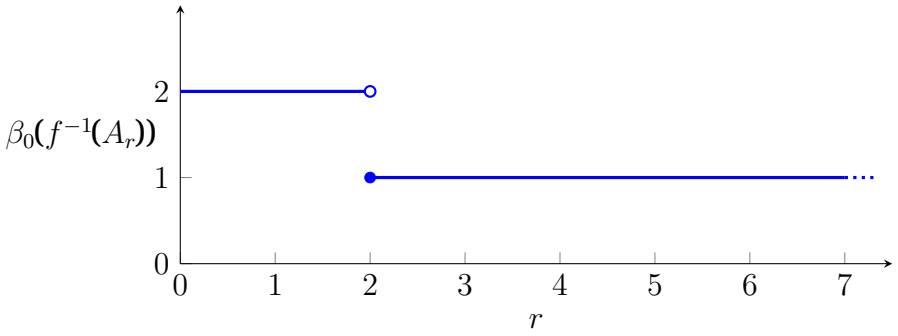
问题出在最后一行第一个等号（标红处）这一步，在某些情况下它可能不成立。一般来说，给定向量空间 V 中的线性子空间 A、B，以及线性映射 $F\colon V \to W$，我们有 $F(A) \cap F(B) \supseteq F(A \cap B)$，但反向的包含映射并非总是成立。不过请注意，如果 F 是单射，则等式成立。将此应用于我们的情形，即可证明当 f_r^s 是单射时 SWL 成立。条件 f_r^s 是单射，意味着从 $f_A^{-1}([0,r])$ 到 $f_A^{-1}([0,s])$ 时，没有两个路径连通分支合并。

2 一个反例

在下面的例子中，我们描述一种 SWL 不成立的情形，即存在两个半径 $r < s$，使得 $U(s)$ 的维数大于 $U(r)$。

例12。令 $X = [-3, 3]$, $Y = \mathbb{R}$, $A = \{-2, 2\}$，并记 $f\colon X \to Y$包含映射。令 $\mathcal{P} \subseteq C(X, Y)$ 表示保序等距嵌入的集合。用 d_Y 表示 Y 上的通常距离。这意味着，我们只允许向右或向左平移作为扰动，而不允许变形。从 $C(X, Y)$ 到 $\mathcal{P}$ 的上确界范数限制，在 $\mathcal{P}$ 上诱导出一个距离。

注意，$A_r = \{y \in Y \mid d_Y(y, A) \leq r\}$ 由 $[-2-r, -2+r] \cup [2-r, 4+r]$给出。另外，$f^{-1}(A_r) = A_r \cap X$。当 $0 \leq r < 2$ 时，它有两个连通分支；当 $2 \leq r < \infty$时，它有一个连通分支。因此



当 r 增大时，良群 $U(r)$ 的秩如何变化?

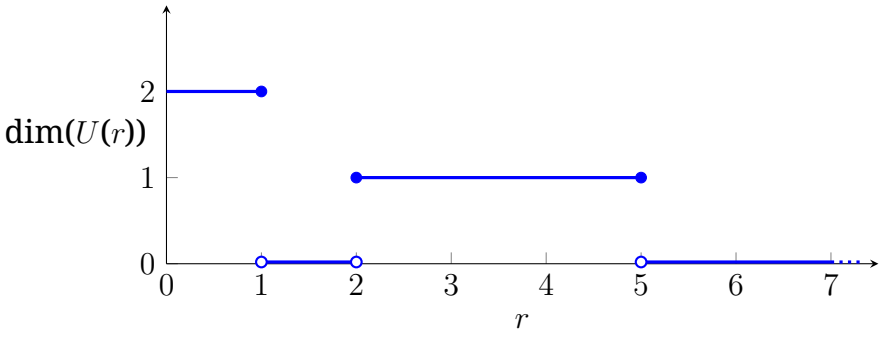
对于 $0 \leq r \leq 1$时，任意 r-扰动仍会命中 A的两个点，因此 $U(r)$ 的秩为 2 .

对于 $1 < r < 2$，对 f 进行 r-扰动，可以通过向左或向右移动距离 r来避开 A的两个点之一，但无法同时避开两者。因此$U(r) = 0$。

对于 $2 \leq r \leq 5$，我们有 $f^{-1}(A_r) = X$，因此现在只有一个连通分支。此外，不存在能避开 A 的两个点的 r-扰动。因此，$U(r)$ 的秩为 1。

对于 $r > 5$，存在一个 r-扰动 h of f with $h^{-1}(A) = \emptyset$ (即 h 避开了 A 的两个点)，因此 $U(r) = 0$。

综上，我们得到如下良群的秩:



因此，我们观察到，从值 $1 < r < 2$ 到值 $2 \leq s \leq 5$ 时，良群并未缩小。

请注意，这里的扰动空间 $\mathcal{P}$ 非常小（只允许向右或向左移动），正是利用这一点产生了本例中的非收缩。这与良群主要应用的情境并不相同，但它表明，为了证明 SWL，还需要制定一些额外条件。我们将在下一节中进行说明。

3 种驯性概念与 SWL 证明

我们正试图寻找一些条件，使其足够强，能够使 SWL 成立，同时又足够宽松，具有广泛的适用性。

[3]中使用了以下定义：

定义 13。 若函数 f满足： $f^{-1}(A) = f_A^{-1}(0)$ 的 0-同调群具有有限秩，则称其为**可容许**。

这一条件严格弱于要求 f_A 具有驯性或 q-驯性：

定义 14。 称函数 $F\colon X \to \mathbb{R}$ 为

- **驯化**，如果子水平集 $F^{-1}((-\infty, r])$ 的所有 0-同调群都具有有限秩，
- **q-驯化** 是指由包含映射 $F^{-1}((-\infty, r]) \subseteq F^{-1}((-\infty, s])$ 诱导的所有 0-同调映射对 $r < s$ 都具有有限秩。

下面的定理给出了 SWL 成立的充分条件。

定理 15. 若 $Y = \mathbb{R}^n$, d_Y 表示欧氏距离， $A = \{a\} \subseteq Y$ 由单个点组成， $\mathcal{P} = C(X, Y)$ 赋予上确界范数 $d_{\mathcal{P}}$，且 $f\colon X \to Y$是一个函数，使得 f_A 是驯化的，则 *SWL* 成立。

证明基于以下两个引理。

引理16. 设 X 为一个拓扑空间， Y 为一个赋范向量空间，且 $A = \{0\}$。设$\mathcal{P} = C(X, Y)$，并用 $d_{\mathcal{P}}$ 表示 $\mathcal{P}$上的上确界范数。设 g, g' 是 f 的两个 r-扰动，且 $C, C' \subseteq X$ 是两个闭集，并满足 g 在 C 上无零点，且 g' 在 C'上无零点。那么存在 f 的一个 r-扰动 h，使得 h 在 $C \cup C'$上无零点。

证明。 根据乌雷松引理（我们可以应用该引理，因为 Y 是赋范向量空间，因而可度量，也就正规），存在函数 $\varphi\colon Y \to [0, 1]$，使得 $\varphi \equiv 1$在 C 上成立，且 $\varphi \equiv 0$ 在 C' 上成立。我们定义 $h := \varphi \cdot g + (1 - \varphi) \cdot g'$，并且需要证明两件事。

h 是一个 r-扰动：对于任意 $x \in X$，我们有

$$\begin{aligned} \|f(x) - h(x)\| &= \|\varphi(x)(f(x) - g(x)) + (1 - \varphi(x))(f(x) - g'(x))\| \\ &\leq \varphi(x) \|f(x) - g(x)\| + (1 - \varphi(x)) \|f(x) - g'(x)\| \\ &\leq \varphi(x) \cdot r + (1 - \varphi(x)) \cdot r = r. \end{aligned}$$

h 在 $C \cup C'$ 上没有零点：在 C 上，我们有 $h \equiv g$，因此 h 在 C 上没有零点。在 C' 上，我们有 $h \equiv g'$，因此 h 在 C' 上也没有零点。 □

下一个引理的核心思想是给出 SWL 成立的一个充分条件。换言之，这个条件要求对于每个 $r \geq 0$，都存在一个 r-扰动 h，使得 h 在所有可能的路径分支上都没有零点；也就是说，对于 $f_A^{-1}([0, r])$ 的任意路径分支 C，如果存在一个在 C 上没有零点的 r-扰动，那么 h 在 C 上没有零点。现在我们将其更正式地定义。

定义 17. 称 r-扰动 $h \in \mathcal{P}_r$ 为 **r-极小化**的，如果

$$\bigcap_{g \in \mathcal{P}_r} \operatorname{im}(\mathtt{j}_g^r) = \operatorname{im}(\mathtt{j}_h^r).$$

引理 18.假设 $\mathcal{P}$ 具有这样的性质：对于每个 $r \geq 0$，都存在一个 r-极小化的 r-扰动。那么 *SWL* 成立。

证明。 这一性质很有用，因为它使我们之前给出的错误证明成立。具体如下：令 $r \leq s$，并令 $h \in \mathcal{P}_r$ 为一个 r-极小化的 r-扰动。于是我们得到

$$\begin{aligned} U(s) = \bigcap_{g \in \mathcal{P}_s} \operatorname{im}(\mathtt{j}_g^s) &\subseteq \bigcap_{g \in \mathcal{P}_r} \operatorname{im}(\mathtt{j}_g^s) \\ &= \bigcap_{g \in \mathcal{P}_r} \operatorname{im}(f_r^s \circ \mathtt{j}_g^r) \\ &= \bigcap_{g \in \mathcal{P}_r} f_r^s(\operatorname{im}(\mathtt{j}_g^r)) \\ &\subseteq f_r^s(\operatorname{im}(\mathtt{j}_h^r)) \\ &= f_r^s\left(\bigcap_{g \in \mathcal{P}_r} \operatorname{im}(\mathtt{j}_g^r)\right) = f_r^s(U(r)), \end{aligned}$$

其中，倒数第二行的包含映射以及最后一行的第一个等号（均为绿色）替换了之前的红色等号。 □

定理 *15* 的证明。 不失一般性，我们可以假设 $A = \{0\}$，因为否则只需将 f 替换为 f的一个平移即可。证明的策略是结合驯性与定理 16，证明对所有 $r \geq 0$都存在 r-极小化扰动。

令 $r \leq s$。由驯性可知， $H_0(f_A^{-1}([0, r])$具有有限秩，即 $f_A^{-1}([0, r])$有有限个路径连通分支。将它们标记为 C_1、……、C_m，使得对于 $1 \leq i \leq k$，存在一个 r-扰动 g_i，它在 C_i上没有零点；而对于分支 C_{k+1}、……、C_m，不存在这样的 r-扰动。

通过反复应用定理 16，我们可以得到一个在$C_1 \cup \cdots \cup C_k$上没有零点的 r-扰动。首先定义 $h_1 := g_1$。然后，在第 i步，如果我们已经找到了一个在 $C_1 \cup \cdots \cup C_i$上没有零点的r-扰动 h_i，就可以对 h_i和g_{i+1}应用定理 16，从而得到一个在 $C_1 \cup \cdots \cup C_{i+1}$上没有零点的 r-扰动 h_{i+1}。经过 d步后， $h := h_k$就是所需的 r-扰动，且

$$\bigcap_{g \in \mathcal{P}_r} \operatorname{im}(\mathtt{j}_g^r) = \operatorname{im}(\mathtt{j}_h^r).$$

这表明定理 18 中的条件得到了满足，因此 SWL 成立。 □

注 19。 如果考虑第 2 节中的反例，就会发现定理 18 的条件并不满足。具体而言，不存在适用于 $1 < r < 2$的 r-极小化 r-扰动。

注 20。 有人可能会认为，定理 2 中的情形最值得关注，因为 [1, 4, 5] 讨论的都是这种情形。在 [2], 中讨论的是一个略有不同的情形，其中 X可以是任意二维流形，而 A 可以是 $\mathbb{R}^2$中的任意一点。加入驯性假设后，由定理 15 可知，在这些情形下 SWL 成立。

4 结论与开放问题

我们给出了一个例子，表明在最一般的条件下 SWL 并不成立，并提出了一组足以保证 SWL 成立的充分条件。这些条件足够一般，适用于大多数值得关注的情形，但似乎还可能存在更弱的条件，也足以证明 SWL。例如，或许可以将 f_A 的驯性条件弱化为 q-驯服性，甚至只要求 f满足可容许性。另一个研究方向是针对 $\mathcal{P}$ 和 $d_{\mathcal{P}}$提出精确条件，而不是仅仅要求 $\mathcal{P} = C(X,\ Y)$，且 $d_{\mathcal{P}}$ 是由上确界范数诱导的距离。

致谢。 我要感谢我的导师 Claudia Landi，以及 Dmitriy Morozov，他们就这一主题与我进行了富有帮助的讨论。本研究在 INdAM-GNSAGA 的支持下，并作为 ARCES（博洛尼亚大学）活动的一部分开展。

参考文献

[1] F. Chazal、P. Skraba 和 A. Patel，计算上向量场的井图，《应用数学快报》**25**（2012），1725–1728。[2] H. Edelsbrunner、D. Morozov 和 A. Patel，可定向二维流形视轮廓的稳定性，《数据分析与可视化中的拓扑方法》（2010），27–41。[3] ，通过测量交集的鲁棒性量化横截性，《计算数学基础》**11** （2011），345–361。[4] B. Wang 和 I. Hotz，二维对称张量场拓扑的鲁棒性，《各向异性的建模、分析与可视化》（Cham）（Thomas Schultz、Evren Ozarslan 和 Ingrid Hotz 编），施普林格国际出版，2017，第 3–27 页。[5] B. Wang、P. Rosen、P. Skraba、H. Bhatia 和 V. Pascucci，时变向量场临界点鲁棒性的可视化，《计算机图形学论坛》**32** （2013），221–230。