arXiv:2601.03293v1 [math.CO] 5 Jan 2026

# 广义彼得森图独立多项式的奇偶性依赖的实根性

Rohan Pandey华
盛顿大学rpande@uw.edu

2026年1月8日

**摘要**

我们研究了广义彼得森图族 GP($n, k$) 的独立多项式 I($G, x$) 在复平面上的零点分布。尽管这些图的独立数及其系数已有研究，但其根的整体行为仍鲜有探索。我们使用一个以 $k$ 为参数的精确转移矩阵算法，计算了 $n$ 不超过 30 且 $k \in \{1,2,3,4\}$ 时的 I(GP($n, k$) $x$)。数值分析揭示了一个显著的奇偶性二分现象：当 $k$为奇数时，根呈现共轭复结构，并聚集在闭曲线上；而当 $k$为偶数时，根似乎严格为负实数。受此证据启发，我们猜想，当且仅当 $k$ 为偶数时，I(GP($n, k$) $x$) 才是实根的，因而也是对数凹的。这一现象将 GP($n, k$) 的代数性质与硬核格气模型中的无零点区域及极限行为问题联系起来。

**关键词：** 独立多项式、广义彼得森图、实根性、转移矩阵方法、对数凹性。**2020年数学主题分类：** 05C31, 05C69, 05A15, 82B20

## 1 引言

图的独立多项式编码了有关其独立集的基本组合信息。给定图 $G$，独立多项式 定义为

$$\mathrm{I}(G, x) = \sum_{k=0}^{\alpha(G)} i_k(G)\, x^k, \tag{1}$$

其中 $i_k(G)$ 表示基数为 $k$ 的 $G$中的独立集数量，而 $\alpha(G)$ 是独立数 [6]。

对这些多项式的研究源于其在统计力学中的应用，其中 I($G, x$) 与逸度为 $x$ [8] 的硬核格气模型的配分函数一致。一个核心问题是确定该多项式的零点在复平面中的位置。在物理学中，这些零点（李–杨零点）决定相变：正实轴邻域内不存在根，意味着自由能 [7] 具有解析性。在组合学中，如果 I($G, x$) 的所有根都是实根，牛顿不等式则表明系数序列 $\{i_k(G)\}$是对数凹的且为单峰的 [9]。

匹配多项式的实根性已在两类图中得到证明：线图 [7] 以及无爪图的独立集多项式 [4]。相比之下，对于不属于这些类别的三次图，相关研究则少得多。广义彼得森图$\mathrm{GP}(n,k)$ 构成了一个经典的三次图族。尽管其独立数已经得到确定 [5, 1]，但其独立多项式的根的整体结构此前尚未得到研究。

本文采用精确的转移矩阵框架，对 I(GP($n,k$) $x$) 的根进行了计算研究。我们的结果揭示了一种稳定的奇偶性现象：这些多项式似乎恰好在步长 $k$ 为偶数时具有实根。由于我们的结论基于有限但精确的计算以及数值求根，因此它们提出的是一个猜想，而非证明。本文的主要贡献是，在 I(GP($n,k$) $x$) 的根的几何结构中识别出此前未曾报道的奇偶二分现象，并提出了一个可用于这一类问题精确计算的转移矩阵框架。

**研究范围与结果性质。** 本文属于计算研究，基于精确的转移矩阵构造，并针对有限但系统递增的$n$取值进行数值求根。尽管本文没有给出证明，但所有受测实例中观察到的行为始终一致，因此我们提出一个明确的猜想。本文旨在识别并清晰表述这一现象，将其作为未来理论研究的潜在目标。

## 2 预备知识与方法论

### 2.1 广义彼得森图

**定义 2.1** ([10])。对于整数 $n \geq 3$ 和 $1 \leq k < n/2$，图 GP($n,k$) 的顶点集为$U \cup V$，其中

$$U = \{u_0, \ldots, u_{n-1}\}, \quad V = \{v_0, \ldots, v_{n-1}\}.$$

边集由以下部分组成

(i) $u_i u_{i+1}$ （外圈），
(ii) $v_i v_{i+k}$ （内弦），
(iii) $u_i v_i$（辐条边），

下标均模 $n$取值。

### 2.2 参数化转移矩阵方法

为了计算较大 $n$ 下的 I(GP($n,k$) $x$)，我们将最初为梯子图和网格图 [3] 开发的转移矩阵方法加以推广。与棱柱图（$k = 1$）不同，GP($n,k$) 中存在长程内边，因此需要追踪多个顶点的占据历史。

在步骤 $j$，我们将状态编码为一个二进制向量

$$S_j = (u_j, v_j, v_{j-1}, \ldots, v_{j-k+1}) \in \{0,1\}^{k+1},$$

其中每个条目表示相应顶点是否属于独立集。转移矩阵 $T_k$ 的维度为 $2^{k+1} \times 2^{k+1}$。当且仅当状态 $B$ 能够在满足以下条件的情况下有效地跟随状态 $A$时，条目 $T_k$($A$, $B$) 非零，其权重为$x^{|B|}$:

- **移位一致性：** $B$ 的历史分量与 $A$的尾随分量一致。
- **独立性约束：**没有任何一条边 $(u_j,\ u_{j-1})$ 、 $(u_j,\ v_j)$ 或 $(v_j,\ v_{j-k})$ 的两个端点同时被占据。

通过对 $T_k^n$ 取迹来实现循环闭合，得到

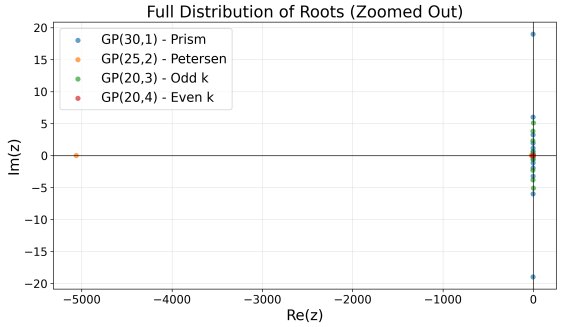
$$\mathrm{I}(\mathrm{GP}(n,k),x)=\mathrm{Tr}(T_k^n). \tag{2}$$

所有系数均以整数形式精确计算。随后使用标准多项式求根方法求得根，并验证数值精度达到 $10^{-10}$。

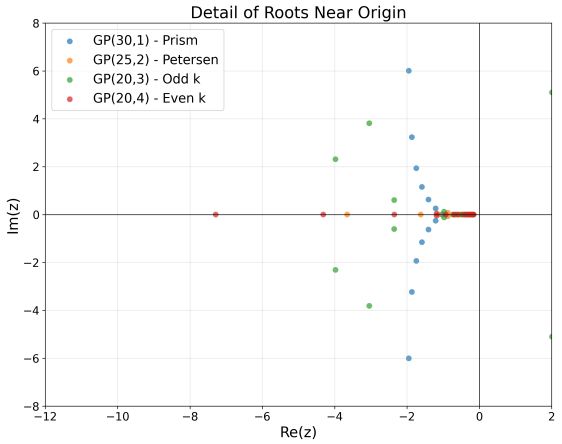
**计算范围与验证。**所有转移矩阵均精确构造，多项式系数则以整数形式进行符号计算。使用标准多项式求根程序求得根，并验证数值精度达到 $10^{-10}$。计算涵盖所有 $k\in\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ 以及 $20\le n\le 30$，在此范围内均观察到一致的定性行为。

## 3 根分布分析

我们计算了$\mathrm{I}(\mathrm{GP}(n,\ k)\ x)$ 在第 2 节所述计算范围内的根。代表性结果见图1。




(a) 全局视图，显示实根沿负实轴延伸。




(b) 原点附近的放大图，突出显示奇数 $k$ 对应的共轭结构。

图1：**GP(,** $k$**)** 的根分布。 $k$ 为偶数时，根全部为负实根；而 $k$ 为奇数时，会生成共轭复曲线。

### 3.1 奇数 $k$：复根与极限形状

对于 $k=1$ 和 $k=3$，根始终出现在实轴之外。

- $k=1$**：** 根形成一个闭合的垂直椭圆，中心位于$R(z)\approx -0.5$附近，这证实 GP$(n,\ 1)$不是实根。

- $k = 3$：根形成更复杂的共轭曲线，并呈现出鲜明的叶瓣结构。

当 $n$ 增加时，这些根似乎逐渐趋近于连续的极限曲线，这与其他图族中观察到的现象一致 [2]。

### 3.2 偶数 $k$：表观实根性

I相比之下，对于 $k = 2$ 和 $k = 4$，所有计算得到的根都位于负实轴上 .

- $k = 2$：对于 $n = 25$，所有 $2n$ 根在数值容差范围内均为实数。
- $k = 4$：对于 $n = 20$，观察到了相同的行为。

这种持续性强烈表明这是真正的实根性，而非有限规模效应。

## 4 讨论与猜想

奇偶性相关行为可能源于内部边配置的结构差异。当 $k$ 为偶数时，内部子图分解为若干二分图分量；而奇数 $k$则会引入奇圈，可能妨碍实根性。尽管交错或稳定性论证等现有技术无法直接适用，但观察到的鲜明二分现象表明，或许能够从结构上加以解释。

**猜想 4.1** (奇偶性猜想)。 对于所有整数 $n \geq 2k + 1$，独立多项式I$(\mathrm{GP}(n, k)\ x)$ 仅当 $k$ 为偶数时才具有实根。

**意义**。 若该猜想得到证明，将确认 GP$(n, 2k)$ 是爪自由图类之外一族新的、具有实根独立多项式的无限图族，有助于厘清三次图中实根与非实根行为之间的界限。

## 5 结论

我们发现，广义彼得森图的独立多项式根分布呈现出奇偶性驱动的二分现象。奇数步长会产生复根曲线，而偶数步长似乎确保实根性。这些发现促使我们进一步从理论上探究这一现象背后的代数机制。

## 数据可用性

用于生成所有转移矩阵和根图的源代码已公开发布，地址为
https://github.com/Rohan-Pandey1729/polynomial-independence。

## 致谢

作者感谢 Konstantinos Mamis 教授的指导，以及 Ray Chen 的宝贵讨论。

## 参考文献

[1] Nazli Besharati、Javad B. Ebrahimi 和 Azin Azadi。广义彼得森图的独立数。*Ars Combinatoria*，124:239–255，2017。[2] Jason I. Brown、Cameron A. Hickman 和 Richard J. Nowakowski。独立多项式根的位置。*Journal of Algebraic Combinatorics*，19(3):273–282，2004。[3] Neil J. Calkin 和 Herbert S. Wilf。网格图中独立集的数量。*SIAM* 离散数学杂志，11(1):54–60，1998。[4] Maria Chudnovsky 和 Paul Seymour。无爪图的独立多项式的根。组合理论杂志 *B* 辑，97(3):350–357，2007。[5] Joseph Fox、Ralucca Gera 和 Pantelimon Stănică。广义彼得森图的独立数。*Ars Combinatoria*，103:439–451，2012。[6] Ivan Gutman 和 Frank Harary。匹配多项式的推广。*UtilitasMathematica*，24:97–106，1983。[7] Ole J. Heilmann 和 Elliott H. Lieb。单体-二聚体系统理论。数学物理通讯，25(3):190–232，1972。[8] Alexander D. Scott 和 Alan D. Sokal。排斥晶格气体、独立集多项式与洛瓦兹局部引理。统计物理学杂志，118(5-6):1151–1261，2005。[9] Richard P. Stanley。代数、组合学和几何学中的对数凹与单峰序列。载于纽约科学院年刊，第576卷，第500–535页。Wiley，1989。[10] Mark E. Watkins。关于泰特着色的一个定理及其在广义彼得森图中的应用。组合理论杂志，6(2):152–164，1969。