arXiv:2601.03312v1 [math.GR] 6 Jan 2026

代数地枚举 AG-幺半群

穆罕默德·沙阿 和 S. SHPECTOROV

Abstract. AG-幺半群是 AG-群胚（满足称为左可逆律的恒等式（xy）z =（zy）x）且具有左单位元的群胚。本文通过代数方法枚举 AG-幺半群，随后在 GAP 中实现它们，以便通过计算求出这些幺半群。

AG-幺半群是 AG-群胚（满足称为左可逆律的恒等式（xy）z =（zy）x）且具有左单位元。关于 AG-群胚已有大量研究，例如参见 [3],[4],[6]。另一方面，幺半群是结合半群。我们从交换幺半群中寻找 AG-幺半群，然后在 GAP 中实现它们，以便通过计算求出这些幺半群。

首先，我们为 AG-幺半群的计数提供严谨的理论基础。这一基础建立在以下结果之上。

定理1。 假设$(S,+)$ 是一个交换幺半群，并假设 $\alpha \in$ 自同构群(S)满足 $\alpha^2 = 1$。在 S 上定义乘积如下： $a \cdot b := \alpha(a) + b$。那么$(S,\cdot)$ 是一个 *AG*-幺半群。此外，每个 *AG*-幺半群都可以由唯一一对(S,α)以这种方式得到。

证明。 首先，假设 $(S,+)$ 是一个交换幺半群，且 $\alpha \in$ Aut(S) 满足$\alpha^2 = 1$。我们来验证新乘积 $\cdot$ 满足左可逆律。

设 $x, y, z \in S$。那么 $(x\cdot y)\cdot z = \alpha(\alpha(x)+y)+z = \alpha^2(x)+\alpha(y)+z = x+\alpha(y)+z$，因为 $\alpha^2 = 1$。又因为 $(z \cdot y) \cdot x = z + \alpha(y) + x = x + \alpha(y) + z$ 由交换性可得，我们推知 $(x \cdot y) \cdot z = (z \cdot y) \cdot x$。为了证明 $(S,\cdot)$ 是一个 AG-幺半群，还需验证 0 是左单位元。取 $x \in S$，得到 $0 \cdot x = \alpha(0) + x = 0 + x = x$，第一个断言得证。

对于第二个命题，我们需要证明：给定任意一个 AG-幺半群 $(S,\cdot)$（其中左单位元记为 0），我们可以由此还原出一个适当的交换幺半群 $(S,+)$ 和一个对合自同构 α。

定义 $\alpha : S \to S$ by $\alpha(x) = x \cdot e$。此外，在 S 上定义加法为$x + y := \alpha(x) \cdot y$。我们需要证明 $(S,+)$ 是一个交换幺半群，并且 α是它的一个自同构，如上所述。

我们先证明 $+$满足交换性。根据左可逆律，有 $x + y = \alpha(x) \cdot y = (x \cdot 0) \cdot y = (y \cdot 0) \cdot x = \alpha(y) \cdot x = y + x$。对于结合性，回顾一下，AG-幺半群（作为 AG-群胚）满足中间律 $(a \cdot b) \cdot (c \cdot d) = (a \cdot c) \cdot (b \cdot d)$；结合左单位性质可知，对于所有 $a, b, c \in S$，都有 $a \cdot (b \cdot c) = b \cdot (a \cdot c)$。

现在，利用左可逆律和 $a \cdot (b \cdot c) = b \cdot (a \cdot c)$，我们得到 $(x + y) + z = ((x \cdot 0) \cdot y) + z = (((x \cdot 0) \cdot y) \cdot 0) \cdot z = (z \cdot 0) \cdot ((x \cdot 0) \cdot y) = (x \cdot 0) \cdot ((z \cdot 0) \cdot y) = (x \cdot 0) \cdot ((y \cdot 0) \cdot z) = x + ((y \cdot 0) \cdot z) = x + (y + z)$。因此，$(S,+)$ 是结合的。还需证明 0 是 $(S,+)$ 的单位元。事实上，$0 + x = (0 \cdot 0) \cdot x = 0 \cdot x = x$,

Key words and phrases. AG-幺半群、幺半群、代数地、GAP、8阶。

因为 0 是 $(S,\cdot)$ 的左单位元。因此，根据加法的交换性，我们有$x+0=0+x=x$。我们已经证明 $(S,+)$ 是一个交换幺半群。

转向 α，注意到对于每个$x\in S$，$\alpha^2(x)=(x\cdot 0)\cdot 0=(0\cdot 0)\cdot x=0\cdot x=x$。因此，$\alpha^2=1$，这尤其意味着 α 是双射。此外，$\alpha(x+y)=(x+y)\cdot 0=((x\cdot 0)\cdot y)\cdot 0$。根据左可逆律，后者等于 $(0\cdot y)\cdot(x\cdot 0)=y\cdot(x\cdot 0)$。另一方面，$\alpha(x)+\alpha(y)=((x\cdot 0)\cdot 0)\cdot(y\cdot 0)=((y\cdot 0)\cdot 0)\cdot(x\cdot 0)=((0\cdot 0)\cdot y)\cdot(x\cdot 0)=(0\cdot y)\cdot(x\cdot 0)=y\cdot(x\cdot 0)$。因此，$\alpha(x+y)=\alpha(x+\alpha(y)$，这表明 α是$(S,+)$上的对合自同构。

最后，$x\cdot y=\alpha^2(x)\cdot y=\alpha(x)+y$。这表明，可以按规定的方式从 $(S,\cdot)$ 恢复 $(S,+)$。显然，$(S,+)$ 和 α 都是以典范方式从 $(S,\cdot)$ 中恢复出来的，这意味着对于 $(S,\cdot)$，这对对象是唯一的。□

现在，我们通过一个例子来说明我们的构造。

例1. 我们从下面的交换幺半群 S 开始：

$+$	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	5	2	3	4	0
2	2	2	2	3	3	2
3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	3	3	4	4
5	5	0	2	3	4	1

可以验证，置换 $\alpha=(1,5)(2,4)$ 是这个交换幺半群的一个自同构，并且显然它的阶为二。将此 α 应用于 $(S,+)$，得到下面这个非结合 AG-幺半群。

例2。

$+$	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	5	0	2	3	4	1
2	4	4	3	3	4	4
3	3	3	3	3	3	3
4	2	2	2	3	3	2
5	1	5	2	3	4	0

为了能够计算非同构 AG-幺半群的数量，我们需要进一步明确定理1中的唯一性断言，如下所述。

定理2。设 $(S,+)$ 和 $(S',+)$ 是两个交换幺半群，并令 $\alpha\in Aut(S)$、$\alpha'\in Aut(S')$ 为它们的对合自同构。最后，令 $(S,\cdot)$（分别为 $(S',\cdot)$）为由 S 和 α（分别由 S' 和 α'）导出的 *AG-* 幺半群。那么，映射 $\phi: S\to S'$ 是 $(S,\cdot)$ 到 $(S',\cdot)$ 的同构，当且仅当 ϕ 是 $(S,+)$ 到 $(S',+)$ 的同构，并且 $\phi\alpha=\alpha'\phi$。

证明。首先假设 ϕ是从 $(S,\cdot)$ 到 $(S',\cdot)$ 的一个同构。那么，对于$x,y\in S$，有 $\phi(x)+\phi(y)=(\phi(x)\cdot 0')\cdot\phi(y)$，其中 $0'$ 是S'中的左单位元。注意，左可逆律意味着每个 AG-幺半群都有唯一的左单位元，这意味着 $0'=\phi(0)$，其中 0 是 S的左单位元。因此，$(\phi(x)\cdot 0')\cdot\phi(y)=(\phi(x)\cdot\phi(0))\cdot\phi(y)=\phi((x\cdot 0)\cdot y)=\phi(x+y)$。我们已经证明，$\phi$ 是从 $(S,+)$ 到 $(S',+)$ 的一个同构。

此外， $\phi(\alpha(x)) = \phi(x \cdot 0) = \phi(x) \cdot \phi(0) = \phi(x) \cdot 0' = \alpha'(\phi(x))$。由于这对所有 $x \in S$ 都成立，我们得出 $\phi\alpha = \alpha'\phi$，正如所声称的那样。

反过来，假设 ϕ 是 $(S, +)$ 到 $(S', +)$ 的一个同构，并满足 $\phi\alpha = \alpha'\phi$。那么，首先， $\phi(0) = 0'$，因为它们分别是相应交换幺半群中唯一的单位元。因此， $\phi(x \cdot y) = \phi(\alpha(x) + y) = \phi(\alpha(x)) + \phi(y) = \alpha'(\phi(x)) + \phi(y) = \phi(x) \cdot \phi(y)$，这证明了 ϕ 是 $(S, \cdot)$ 到 $(S', \cdot)$ 的一个同构。□

由此，我们立即得到以下结论。

推论 1. 设 $(S, +)$ 是一个交换幺半群，且 $\alpha, \alpha' \in$ 自同构群(S) 满足 $\alpha^2 = 1 = (\alpha')^2$。由 S 和 α 得到的 *AG*-幺半群，与由 S 和 α' 得到的 *AG*-幺半群同构，当且仅当 α 和 α' 在自同构群(S) 中共轭。

证明从略。容易看出，AG-群是结合的，当且仅当它是交换的；这也当且仅当其中的左单位元是双侧单位元。另一个等价条件是 $\alpha = 1$。特别地，从某个交换幺半群 S 可得到的非结合 AG-幺半群的数量，等于 Aut(S) 中非单位元的对合自同构的共轭类数量。

阶不超过 10[1] 的非同构交换幺半群数量已知。阶不超过 8 的列表可在 GAP[7] 的 SMALLSEMI 包 [2] 中找到。利用 GAP[7] 的 AGGROUPOIDS 包 [5] 中的函数，我们得以将上述方法应用于所有这些交换幺半群，结果如下表所示。

阶	3	4	5	6	7	8
交换幺半群	5	19	78	421	2637	20486
非结合 AG-幺半群	1	6	29	188	1359	11386
总计	6	25	107	609	3996	31872

TABLE 1. 阶为 n 的 AG-幺半群数量， $3 \leq n \leq 8$

REFERENCES

[1] Andreas Distler、Chris Jefferson、Tom Kelsey 和 Lars Kotthoff，《10 阶半群》，第 18 届约束编程原理与实践国际会议论文集 - 第 7514 883 899 页 -

[2] Distler, A. 和 Mitchell, J.，《Smallsemi：小半群库》，版本 0.7.2 (2025)（GAP 软件包），https://gap-packages.github.io/smallsemi/。[3] Andreas Distler、穆罕默德·沙阿和 Volker Sorge。《AG-群胚的枚举》。载于 James H. Davenport、William M. Farmer、Josef Urban 和 Florian Rabe 编，《智能计算数学》，《计算机科学讲义》第 6824 卷，第 114 页。Springer Berlin Heidelberg，2011[4] 穆罕默德·沙阿、Charles Gretton 和 Volker Sorge，《AG-群的枚举及 Smarandache AG-群研究》，《国际数学论坛》，第 6 卷，2011 年，第 62 期，3079–3086[5] 穆罕默德·沙阿，《AGGROUPOIDS》，用于计算和检验 AG-群胚的 GAP 软件包（编写中）。[6] M. Shah、I. Ahmad 和 A. Ali，《AG-群胚新类的介绍》，《近期科学研究杂志》，第 2 卷（第 1 期），67–70，2013 年 1 月，ISSN 2277-2502

[7]GAP——群、算法与编程，版本 4.4.12，2008。 http://www.gap-system.org*Email address*: mshahmaths@gmail.comDEPARTMENT OF MATHEMATICS,
QUAID-I-AZAM UNIVERSITY, ISLAMABAD, PAKISTAN*Email address*: sergeys@for.mat.bham.ac.ukSCHOOL OF MATHEMATICS,
UNIVERSITY OF BIRMINGHAM, UK.*Email address*: s.shpectorov@bham.ac.uk