arXiv:2601.03314v1 [physics.flu-dyn] 6 Jan 2026

湍流的混合度量双场框架：由单一标量涌现的应力各向异性与壁面渐近分析

Marcial Sanchis-Agudo[1], * 和 Ricardo Vinuesa[2, 1]

[1]*FLOW*，工程力学系，瑞典皇家理工学院，瑞典斯德哥尔摩 *SE-100 44*[2]密歇根大学航空航天工程系，美国密歇根州安娜堡，邮编 *MI 48109*（日期：2026年1月8日）

在我们先前的工作中 [1], ，我们提出，湍流中的黏性耗散可理解为微观路径不确定性的宏观印记，并证明，受平衡条件约束的核方差场$s(y)$可基于单一随机原理同时导出柯尔莫哥洛夫尺度和壁面律。在本工作中，我们将 s 提升为动力学场$s(\boldsymbol{x},\ t)$，其量纲为运动黏度，并构建一个双场框架，使速度$\boldsymbol{v}$场与间歇性 （或随机扩散率）场 s 以耦合方式演化。有效黏度为 $\nu_{\text{eff}} = \nu_0 + s$，而应力张量则推广为包含由应变与旋转的交换子驱动的非线性闭合项 $[\boldsymbol{S},\boldsymbol{\Omega}]$, ，以刻画涌现各向异性。 s的演化被定义为混合度量梯度流：针对形态的 Wasserstein-2梯度流 $\nabla\cdot(s\nabla s)$，与由客观耦合项 q驱动的局部 L^2 梯度流相结合。耦合项分解为 $q = q_{\text{prod}} - q_{\text{relax}}$，其中生成由涡量拉伸不变量$\mathcal{I} = \|\boldsymbol{S\omega}\|^2$驱动。这一选择确保生成在严格二维流动中恒为零。我们证明，在恒定应力、高雷诺数和重叠层尺度不变性等标准假设下，混合度量方程唯一的尺度不变重叠层解为 $s(y) \propto y$，由此恢复对数速度剖面。因此，同一混合度量方程在单一受能量约束的框架内统一描述壁面解析与壁面建模渐近行为。最后，我们将该框架解释为广义黏弹性理论的平衡态（马尔可夫）极限；这一理论建立在我们先前工作中引入的不确定性的几何之上。

I. 引言

预测湍流的挑战，很大程度上与近壁区域的行为有关。在我们先前的工作 [1] 中，我们从几何学角度出发，提出了一个问题：黏性耗散是否是人群试图穿过广场这一行为在宏观上的印记？想象一下，从 A 走到 B，穿过一座“宏伟的广场”。在空旷的广场上，你沿着一条直线测地线行走，这属于最小作用量的世界：也就是阿诺德理想流体 [2]。在拥挤的广场上，你的意图（平均路径）仍近似为测地线，但实际轨迹会因躲避他人而不断摇摆。你穿行于一团路径云中，平均而言，路程也会花费更长时间。在我们先前的工作 [1] 中，我们用一个核方差场对这团路径云进行编码，并表明，只要约束壁面附近的探索场，就足以重现湍流理论的两大基石：柯尔莫哥洛夫尺度（速度、时间和长度）以及壁面律。

本文提出了一个更明确的问题：是什么 s 作为一种物理场，我们能否为它写出演化方程，使其既受几何约束，又有助于建模?

从代数闭合到动态的 s场。

经典模型通过有效黏度处理未解析的湍流，无论是代数涡黏度——

黏度

$$\nu_t = (C_S\Delta)^2 K \quad \text{or} \quad \nu_t \sim \ell_m^2|U'|$$

在大涡模拟和混合长度理论中， [3–6], ，或通过更复杂的双方程闭合，例如 k–ϵ 或 k–ω [7, 8]。在所有情况下，有效黏度都被构造为已解析速度梯度和少数额外标量的泛函，这些标量经过选择以满足对称性并拟合数据，但并非源自某种演化原理。

我们此前的工作 [1] 提出了一个不同的出发点：黏度是微观路径不确定性的结果。在这一图景中， s不只是一个调节函数，而是用于量化轨迹围绕平均流探索范围的场。在此，我们采用这种解释，并将 s 提升为时空场 $s(\boldsymbol{x},\ t)$，使其与速度共同演化：

- 速度 $\boldsymbol{v}$ 描述了利用动力学，即广场上有组织的平均运动;
- 标量场 s 描述了探索动力学，即产生耗散的微观游走局部强度。

在整篇论文中，我们赋予 s 运动黏度的单位（L^2/T），并将其解释为随机扩散率（路径空间中的方差率）。那么，有效黏度为

$$\nu_{\text{eff}}(\boldsymbol{x}, t) = \nu_0 + s(\boldsymbol{x}, t), \tag{1}$$

其中， ν_0 是分子贡献， s是湍流贡献。

* sanchis@kth.se

与我们先前工作中的核方差的关系。在我们先前的工作中 [1], 符号 $s(y)$ 作为方差尺度出现，单位为长度平方。这里 $s(\boldsymbol{x},t)$的单位为 L^2/T，因为它以加性形式出现在 $\nu_{\rm eff}=\nu_0+s$ 中，并起到随机扩散率的作用。如果引入一个很小的核时间尺度 Δt_*，并将底层布朗探索的方差写为

$$\sigma^2(y) \;\sim\; 2\,\nu_{\rm eff}(y)\,\Delta t_* \;\equiv\; 2\,[\nu_0+s(y)]\,\Delta t_*. \tag{2}$$

在这一粗粒化图景中，我们先前工作的“方差剖面”为 $\sigma^2(y)$，而本文的间歇性场为

$$s(y)=\nu_{\rm eff}(y)-\nu_0. \tag{3}$$

除相差常数因子 $2\Delta t_*$ 外，二者都刻画了路径不确定性的相同壁法向结构：在先前的工作中，我们强调的是（有量纲的）方差；在这里，我们采用相应的 方差率，并将其用作动力学场。因此，我们在双场框架中沿用符号 s，并在其定义中隐含地吸收了 Δt_*。

本文的核心问题是如何定义 s 的演化，使其满足以下条件：

1. 具有变分结构化形式，使其部分动力学由梯度流原理确定，而非临时拼凑；

2. 通过能够检测真正三维拉伸的不变量，与已解析的速度梯度客观耦合；

3. 兼容壁面物理，即在渐近极限下同时恢复黏性底层和对数重叠层。

框架总结。
我们提出了一个双场框架，其中：

- 动量方程由 $\nu_{\rm eff}=\nu_0+s$以及一个新兴的非线性应力项闭合，该项用于描述旋转各向异性，

- 场 s 遵循混合度量梯度流演化：形态能量的 Wasserstein-2 梯度流产生多孔介质理论中熟知的退化扩散 $\nabla\cdot(s\nabla s)$ [9]，此外还有一个局部的 L^2 梯度流，其反应势对生成和弛豫进行编码。

我们明确指出，这是一种由公理构建的建模框架，并非从我们先前工作 [1] 中的薛定谔桥形式主义完整推导而来：SB视角为标量扩散率场的存在性及其可加性提供了动机，但下文将 s 的演化具体设定为受物理原理指导的建模假设。

一个关键的结构要素是不变量驱动的产生项。我们认为，自然的选择是涡量拉伸向量的平方范数，

$$\mathcal{I}(\boldsymbol{S},\boldsymbol{\omega})=\|\boldsymbol{S}\boldsymbol{\omega}\|^2, \tag{4}$$

其中，$\boldsymbol{S}$ 是应变率张量，$\boldsymbol{\omega}=\nabla\times\boldsymbol{v}$ 是涡量。该物理量衡量流动拉伸和倾斜涡旋结构的强度，在严格二维流动中恒为零，并且其量纲适合出现在 s方程的源项中。

本文其余部分安排如下。第II节将形式化介绍双场设定和符号。第III节将推导 s 的混合度量梯度流，并明确生成项和弛豫项。第IV 节将分析壁面渐近行为，并展示同一方程在重叠区中给出 $s\sim y^2$，当 $y\to 0$ 时为 $s\propto y$。第V 节将产生系数解释为基于科尔莫戈罗夫理论的恒温器。第VII节将阐释不确定性的几何的物理意义，最后在第VIII节作总结。

II. 双场框架

我们考虑一种不可压缩流体，其由速度场 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},\ t)$ 和第二个标量场 $s(\boldsymbol{x},\ t)$ 描述。我们将后者解释为局部间歇性，或与我们先前工作 [1] 中引入的微观路径不确定性过程相关的随机扩散率。

运动学与不变量。速度梯度分解为对称部分和反对称部分：

$$\nabla\boldsymbol{v}=\boldsymbol{S}+\boldsymbol{\Omega}, \tag{5}$$

其中应变率张量为 $\boldsymbol{S}$，旋转率张量$\boldsymbol{\Omega}$为

$$S_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right), \tag{6}$$

$$\Omega_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}-\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right). \tag{7}$$

涡量为 $\boldsymbol{\omega}=\nabla\times\boldsymbol{v}$，标量剪切强度为

$$K:=\sqrt{2\,\boldsymbol{S}:\boldsymbol{S}}. \tag{8}$$

具有涌现各向异性的动量方程。 为封闭动量方程，我们假设有效应力张量由标量幅值 s 决定，但其结构受局部流动几何支配。我们保留左侧的不可压缩纳维–斯托克斯形式，并将新的应力解释为微观路径不确定性的宏观表现：

$$\partial_t\boldsymbol{v}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}=-\nabla p+\nabla\cdot\boldsymbol{\Sigma},\qquad \nabla\cdot\boldsymbol{v}=0, \tag{9}$$

其中，总黏性应力张量 $\boldsymbol{\Sigma}$ 定义为：

$$\boldsymbol{\Sigma}=2(\nu_0+s)\boldsymbol{S}+\boldsymbol{\tau}_{\rm aniso}. \tag{10}$$

项 $2s\boldsymbol{S}$ 表示对偏应力的涡黏性（各向同性）贡献，这与将 $\nu_{\text{eff}} = \nu_0 + s$ 视为分子扩散率和湍流（随机）扩散率之和相一致。项 $\boldsymbol{\tau}_{\text{aniso}}$ 则捕捉了应变与旋转相互作用所产生的应力各向异性。受显式代数雷诺应力建模思想的启发，我们定义：

$$\boldsymbol{\tau}_{\text{aniso}} = C_2 \frac{s}{K} \left(\boldsymbol{S\Omega} - \boldsymbol{\Omega S} \right). \tag{11}$$

这里，交换子 $[\boldsymbol{S},\boldsymbol{\Omega}] = \boldsymbol{S\Omega} - \boldsymbol{\Omega S}$ 量化了由平均旋转造成的主应力轴和主应变轴之间的错位。系数 s/K 确保了量纲一致性（L^2/T^2），同时将各向异性的强度与不确定性场 s联系起来。在数值实现中，因子 $1/K$ 需要进行正则化（例如，$1/\max(K, \epsilon)$），以避免弱应变区域中的奇异性。

我们强调，方程（11）是一种建模选择（并非从薛定谔桥形式体系推导而来），其依据是客观性以及各向异性贡献在 $s = 0$ 时消失这一要求。

核心问题是如何以有原则的方式定义s的演化。

III. s的混合度量梯度流

我们将 s 的演化视为能量泛函 $E[s]$在不同度量下的两个梯度流的叠加。

定义 1 (混合度量梯度流)。令

$$E[s] = E_{\text{morph}}[s] + E_{\text{react}}[s], \tag{12}$$

$$E_{\text{morph}} = \int \frac{1}{2} s^2 \, \mathrm{d}\boldsymbol{x}, \tag{13}$$

$$E_{\text{react}} = \int V(s; \boldsymbol{S}, \boldsymbol{\omega}) \, \mathrm{d}\boldsymbol{x}. \tag{14}$$

s 的演化定义为以下各项之和：

- the Wasserstein-2 gradient flow of E_{morph} (morphology),
- the L^2 gradient flow of E_{react} (reaction/coupling),

由解析速度 $\boldsymbol{v}$平流。

一个简洁的中间步骤。定义

$$u := \tfrac{1}{2} s^2 \qquad (u \geq 0). \tag{15}$$

注意，

$$\Delta u \;=\; \nabla \cdot (s \nabla s). \tag{16}$$

特别地，$E_{\text{morph}}[s] = \int \frac{1}{2} s^2 \, \mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 的Wasserstein-2梯度流给出

$$\left(\partial_t s\right)_{\text{morph}} = \nabla \cdot \left(s \, \nabla \frac{\delta E_{\text{morph}}}{\delta s} \right) = \nabla \cdot (s \nabla s) = \Delta u, \tag{17}$$

表 I. 进入 s 方程的物理量的量纲一致性。

物理量	符号	量纲
间歇性（随机扩散率）	s	L^2/T
剪切率大小	K	T^{-1}
应变率张量	$\boldsymbol{S}$	T^{-1}
涡量	$\boldsymbol{\omega}$	T^{-1}
产生不变量	$\mathcal{I} = \|\boldsymbol{S\omega}\|^2$	T^{-4}
线性弛豫	sK	L^2/T^2
二次弛豫（无量纲 C_4）	$(C_4/\nu_0)\ s^2 K$	L^2/T^2
产生源	$C_I(\nu_0 + s)\mathcal{I}$	L^2/T^2

这明确展现了 s变量中的多孔介质型（退化）结构。

应用混合度量构造可得

$$\partial_t s + \boldsymbol{v} \cdot \nabla s = \underbrace{\nabla \cdot (s \nabla s)}_{\text{morphology}} + \underbrace{q(\boldsymbol{v}, s)}_{\text{coupling}}, \tag{18}$$

其中耦合项 q 通过 V 表征与已解析流的交换。

稳态平衡与泊松预解式。 在时间导数和平流相对于形态与耦合可忽略的稳态区域内，该方程化简为

$$\Delta u = -q, \tag{19}$$

其形式解为

$$u = (-\Delta)^{-1} q = \int_0^\infty e^{t\Delta} q \, \mathrm{d}t, \tag{20}$$

即，u通过与热核卷积得到。该预解结构与我们先前工作 [1] 中狄利克雷核组织壁面层的方式相呼应。

A. Coupling term and dimensional consistency

我们将其分解为

$$q = q_{\text{prod}} - q_{\text{relax}}, \tag{21}$$

其中，q_{prod} 是由三维涡量拉伸驱动的生成项，q_{relax} 表示由已解析剪切驱动的弛豫。

我们要求 q 具有量纲

$$[q] = \frac{L^2}{T^2}, \tag{22}$$

以使方程（18）中的所有项具有一致的单位。基本量汇总于表I。

为清晰起见（并使自由参数保持无量纲），我们将饱和系数写作 (C_4/ν_0)，其中C_4 为无量纲量，并将产生系数参数化为 $C_I = C_k \tau_\eta^3$，其中 C_k 为无量纲量（参见第 V节）。

B. 产生不变量：涡量拉伸与因果闭合

一个核心建模选择是驱动生成的不变量。我们提出四项要求：

1. 客观性： 必须与坐标系无关，即不受叠加的刚体运动影响 [12, 13]。

2.维度性： 必须严格区分二维极限（无涡量拉伸）与真正的三维湍流 [14]。

3. 一致性： 其量纲必须为 T^{-4}ble I)。 (Ta-

4.因果性： 必须与涡量拉伸/倾斜相关联，这是正向级联背后的运动学机制 [6, 15]。

运动学要求。 引入涡量 $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \boldsymbol{v}$ 和涡量拉伸向量 $\boldsymbol{w} := \boldsymbol{S}\,\boldsymbol{\omega}$。根据涡量输运方程，我们采用：

公理1（因果联系）。： 局地产生率q_{prod} 必须与涡旋拉伸率的平方成正比，

$$q_{\text{prod}} \;\propto\; (\text{flow intensity}) \times \|\boldsymbol{S}\boldsymbol{\omega}\|^2, \tag{23}$$

从而 $q_{\text{prod}} \geq 0$ 在没有涡量拉伸或倾斜时，生成为零。

我们选择

$$\mathcal{I}(\boldsymbol{S},\boldsymbol{\omega}) = \|\boldsymbol{S}\boldsymbol{\omega}\|^2 = (\boldsymbol{S}\boldsymbol{\omega})\cdot(\boldsymbol{S}\boldsymbol{\omega}), \qquad \boldsymbol{\omega} = \nabla\times\boldsymbol{v}. \tag{24}$$

在任何严格二维流动 $\boldsymbol{v}(x,\ y,\ t) = (u(x,\ y,\ t)\ v(x,\ y,\ t),\ 0)$ 中，若其不依赖于第三个坐标，则涡量完全位于平面外，对称应变无法拉伸它；可得 $\boldsymbol{S}\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{0}$因此

$$\mathcal{I}(\boldsymbol{S},\boldsymbol{\omega}) = 0 \quad \text{for all strictly two-dimensional flows.} \tag{25}$$

量纲闭合。我们将源项建模为

$$q_{\text{prod}} = C_I(\nu_0, s, \epsilon)\,(\nu_0 + s)\,\mathcal{I}(\boldsymbol{S},\boldsymbol{\omega}), \tag{26}$$

因此 $(\nu_0 + s)\mathcal{I}$的量纲为 L^2/T^5，从而 $[C_I] = T^3$。

我们先前的工作 [1]促使我们将 C_I 与柯尔莫哥洛夫时间尺度联系起来

$$\tau_\eta = \left(\frac{\nu_0}{\epsilon}\right)^{1/2}. \tag{27}$$

公理2（量纲闭合）： 系数 C_I由局部耗散时间尺度决定，即我们取

$$C_I(\boldsymbol{x},t) = C_k\,\tau_\eta(\boldsymbol{x},t)^3, \tag{28}$$

与 C_k 无量纲。

C. 弛豫与饱和

弛豫建模为

$$q_{\text{relax}} = sK + \frac{C_4}{\nu_0}\,s^2K, \tag{29}$$

其中 C_4 为无量纲量。线性项 sK 在尺度不变重叠层中占主导地位，而二次项则在 s变大时提供饱和作用。

汇总所有贡献，

$$q(\boldsymbol{v},s) = C_I(\nu_0,s,\epsilon)\,(\nu_0+s)\,\mathcal{I}(\boldsymbol{S},\boldsymbol{\omega}) \;-\; sK \;-\; \frac{C_4}{\nu_0}\,s^2K. \tag{30}$$

IV. 壁面渐近分析

我们考察方程 (18) 在平面壁面附近的行为，重点关注与大涡模拟实践相关的两种渐近状态：

- 壁面解析大涡模拟 （WRLES）： 近壁区得到充分解析，因此建模贡献必须在壁面处平滑地趋于零；

- 壁面建模大涡模拟 （WMLES）： 重叠区采用与常应力论证一致的渐近模型处理。

我们考虑一个典型平面通道，壁面法向坐标为 y，壁面位于 $y = 0$，流向平均速度为$U(y)$。我们假设流向和展向均具有统计定常性和均匀性。

A. 壁面解析大涡模拟极限：近壁行为

在黏性底层（$y^+ \lesssim 10$）中，平均流接近简单剪切。尽管瞬时近壁湍流具有三维特征，涡拉伸受到强烈限制；在严格的二维剪切极限下，不变量 $\mathcal{I}$ 恒等于零。因此，作为最内层区域的首阶渐近模型，我们取

$$q_{\text{prod}} \approx 0, \tag{31}$$

稳态 s 方程则化简为形态与弛豫之间的平衡，

$$\Delta u \approx q_{\text{relax}}, \qquad u = \tfrac{1}{2}s^2. \tag{32}$$

在一维近似下（$s = s\,(y)$， $K \approx K_0$ 靠近壁面），这可写为

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2}\left(\tfrac{1}{2}s^2\right) \;\approx\; sK_0 + \frac{C_4}{\nu_0}\,s^2K_0. \tag{33}$$

假设壁面处满足无滑移条件且方差率有限，我们施加

$$s(0)=0, \qquad s(y)\geq 0, \qquad \big(s\,\partial_y s\big)\big|_{y=0}=0, \tag{34}$$

其中，最后一个条件就是无通量形态边界条件。

一种稍微更稳健的主导阶论证。假 $s(y)=a_1y+a_2y^2+\mathcal{O}(y^3)$。无通量条件意味着 $s\,s'|_{y=0}=0$，这使得a_1 但并不强制其成立。代入（33）可知，如果 $a_1\neq 0$，那么左端表现为常数，而右端表现为 $\mathcal{O}(y)$，这与之矛盾。因此 $a_1=0$，且首个非零项为二次项。

等价地，设幂律形式为 $s(y)\sim c\,y^n$，当 $y\to 0$ 时可得相同结论。取 $u=\frac{1}{2}s^2\sim\frac{1}{2}c^2y^{2n}$，则有 $u''\sim\frac{1}{2}c^2(2n)(2n-1)y^{2n-2}$，而主导弛豫项为 $sK_0\sim cK_0y^n$。平衡指数可得 $2n-2=n$，即 $n=2$:

$$s(y)\sim c\,y^2, \qquad u(y)\sim\tfrac{1}{2}c^2y^4 \quad \text{as } y\to 0. \tag{35}$$

与实际壁面解析大涡模拟（*WRLES*）阻尼及 y^3条件的联系。在许多基于 Smagorinsky 型或动态亚格子尺度模型的壁面解析大涡模拟实现中，涡黏度会乘以 van Driest 阻尼函数，使建模的湍流黏度呈现如下行为

$$\nu_t^{\mathrm{SGS}}(y^+)\;\propto\;(y^+)^3 \quad \text{as } y^+\to 0, \tag{36}$$

同时在对数区恢复 $\nu_t\propto y$；例如参见 Härtel & Kleiser [16] 和 van Driest [17]。在我们的框架中，内禀的小-y 标度为 $s\sim y^2$，即$\nu_t^{\mathrm{core}}(y)=s(y)\sim y^2$ 在解析极限下。

若希望在粗网格上对非常小的 y^+ 强制施加 $\nu_t\sim y^3$，可将 s 与阻尼函数 $D(y^+)$ 组合实现，例如

$$\nu_t^{\mathrm{WRLES}}(y)=D(y^+)\,s(y), \qquad D(y^+)\sim y^+ \quad (y^+\to 0), \tag{37}$$

因此，$s\sim y^2$ 与 $D\sim y^+$ 结合，可在不修改核心双场 ^{3} 偏微分方程的情况下得到 $\nu_t^{\mathrm{WRLES}}\sim y$。

B. WMLES 极限：重叠层与对数律

在重叠层中，我们假设：

1. 恒应力区域：$\tau_{xy}\approx\rho u_\tau^2$。

2. 高雷诺数：$s\gg\nu_0$，因此 $\nu_{\mathrm{eff}}\approx s$。

3.重叠层尺度不变性：除 y 之外，没有其他长度尺度进入主导阶平衡 [18–20]。

平均动量平衡。对于稳态、充分发展通道，

$$(\nu_0+s)U'\approx u_\tau^2, \tag{38}$$

其中 $U'=\mathrm{d}U/\mathrm{d}y$。各向异性应力项（11）不会改变平行剪切流的平均剪切应力平衡。

在重叠极限 $\nu_0\ll s$ 下，

$$s(y)\,U'(y)\approx u_\tau^2. \tag{39}$$

尺度不变性选出 $s(y)\propto y$。为确定y对 s的依赖关系，假设主导阶重叠区动力学不引入除 y 之外的长度尺度。考虑一维形态算子，

$$\mathcal{L}[s]:=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(s(y)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\right). \tag{40}$$

若 $s(y)\sim y^\alpha$，则在膨胀变换 $y\mapsto\lambda y$ 下，

$$\mathcal{L}[s](\lambda y)\sim\lambda^{\alpha-2}\,\mathcal{L}[s](y). \tag{41}$$

重叠层尺度不变性（除 y 外不存在内禀长度）选定 $\alpha=1$，因此

$$s(y)=c\,y, \tag{42}$$

其中 c 是一个具有速度量纲的常数。

将（42）代入（39）得

$$c\,y\,U'(y)\approx u_\tau^2 \quad\Rightarrow\quad U'(y)\approx\frac{u_\tau^2}{c}\frac{1}{y}, \tag{43}$$

so

$$U(y)\approx\frac{u_\tau^2}{c}\ln y+B. \tag{44}$$

令 $c=\kappa u_\tau$，可得

$$U^+(y^+)=\frac{1}{\kappa}\ln y^++B^+. \tag{45}$$

定理1（由尺度不变性导出的对数律 s）。在恒定应力、高雷诺数（$\nu_0\ll s$）和重叠层尺度不变性的假设下，唯一的非平凡重叠层剖面满足 $s\,(y)\;\propto\;y$，从而得到对数平均速度剖面。

五、能量诠释与C_I 恒温器

方程 C_I（26）中的产生系数具有能量学上的解释。将单位质量的局部耗散率定义为

$$\epsilon(\boldsymbol{x},t)=\nu_{\mathrm{eff}}K^2. \tag{46}$$

在我们之前的工作中 [1]，我们阐述了Kolmogorov时间尺度的依据

$$\tau_\eta = \left(\frac{\nu_0}{\epsilon}\right)^{1/2} \tag{47}$$

作为一个由耗散控制的微观调整时间。与 $[C_I] = T^3$ 一致的一种最简选择是

$$C_I(\boldsymbol{x}, t) = C_k\, \tau_\eta^3 = C_k \left(\frac{\nu_0}{\epsilon(\boldsymbol{x}, t)}\right)^{3/2}, \tag{48}$$

其中 C_k 为无量纲量。这使得生成在拉伸强烈且耗散时间尺度较长的区域最强，而在耗散已经很强的区域较弱。

VI. 与经典湍流模型的关系

涡黏度与混合长度。在 Smagorinsky 型大涡模拟中 [3, 4], 可写为

$$\nu_t = (C_S \Delta)^2 K. \tag{49}$$

在混合长度理论中，可在 $\nu_t \propto y$ 重叠区恢复该关系，从而得到对数律 [6]。在这里， $\nu_{\text{eff}} = \nu_0 + s$ 并非通过代数关系强行设定，而是由（18）自然涌现；在重叠区，基于尺度不变性可得 $s \propto y$，无需预先假定即可恢复混合长度行为。

双方程模型与各向异性。在 k–ϵ 或 k–ω 模型 [7, 8]中， ν_t 与独立演化的湍流量相关。本框架只演化一个标量场 s，但包含交换子驱动的各向异性修正（11），以捕捉旋转引起的应力与应变之间的最小失配。

WRLES 与 *WMLES*。 WRLES 和 WMLES 极限自然地表现为同一偏微分方程的渐近状态。在内区，生成受到强烈约束（在严格二维极限下则消失），而在重叠区，尺度不变性选出 $s \propto y$。关于壁面建模和 WMLES 的综述及最新观点可见 [21, 22], ，统一的壁面解析/壁面建模策略包括例如 [23]。

RANS 单方程基线模型。 作为基线背景，Spalart–Allmaras 等单方程 RANS 封闭模型 [24] 以及 DES 等混合 RANS/LES 策略 [25] 提供了有用的参照。当前的双场设定并非旨在直接替代现有模型，而是作为一种替代性的几何组织原理。

复杂几何与浸入边界法。在复杂几何中，壁面建模通常与浸入边界法及相关的锐界面技术结合使用。虽然离散化不在本文讨论范围内，但标准参考文献包括 Peskin [26] 和 Mittal & Iaccarino [27]。有关与壁面湍流建模相关的压力梯度边界层背景，另请参阅 [28]。

VII. 不确定性的几何：一种物理诠释

……的本体论 s （大小）。多孔介质形态项 $\nabla\cdot(s\nabla s)$ 支持紧支撑扰动以有限速度传播。从这个意义上说，不确定性场组织成传播前沿，而非像线性热方程那样瞬时扩散。

各向异性的出现（结构）。 非线性应力封闭关系 $\boldsymbol{\tau}_{\text{aniso}} \propto \frac{s}{K}[\boldsymbol{S},\boldsymbol{\Omega}]$ 体现了最小的几何挫折：应变倾向于使应力对齐，而旋转则诱导重新定向。交换子刻画了 $\boldsymbol{S}$ 与 $\boldsymbol{\Omega}$无法同时对角化的程度，因而提供了旋转诱导的失配的客观表征。

因果性与正向级联。 通过 $\mathcal{I} = \|\boldsymbol{S}\boldsymbol{\omega}\|^2$ 驱动生成施加了一项运动学条件：只有在涡量拉伸活跃的区域才会持续生成，而在严格的二维极限下则会停止。

VIII. 结论

基于我们先前的工作 [1], ，我们构建了一个双场框架，其中速度 $\boldsymbol{v}$ 与间歇性场 s 以耦合方式演化。有效黏度为 $\nu_{\text{eff}} = \nu_0 + s$，总应力包含一个涌现的交换子项 $\frac{s}{K}[\boldsymbol{S},\boldsymbol{\Omega}]$，打破了纯粹的布辛涅斯克各向同性。

在壁面解析渐近极限下，通过涡量拉伸不变量约束生成，并平衡形态与弛豫，可得 $s \sim y^2$ 为$y \to 0$。在重叠层中，高雷诺数、恒定应力和尺度不变性共同决定了 $s(y) \propto y$ 是唯一的非平凡剖面，从而复现壁面律。

致谢

M.S-A. 感谢欧盟博士网络 MODELAIR 提供的资金支持。M.S.-A. 感谢 Emelie Saga Stark 进行的大量讨论以及富有洞见的建议。特别感谢 Francesco Mario D'Afiero 和 Eduardo Terres-Caballero 参与讨论，这些讨论进一步完善了概念基础。

附录 A：反常标度与 K62 间歇性修正的推导

本附录展示了 s 动力学的乘法结构如何为粗粒化耗散带来对数正态统计特征，并重现 Kolmogorov–Obukhov 精细相似性假说（K62） [29–31]。

1. 沿拉格朗日轨迹的乘性动力学

定义物质导数 $D_t := \partial_t + \boldsymbol{v}\cdot\nabla$。在高雷诺数极限（$\nu_0 \ll s$）下，对于形态项相对于源汇项可忽略的局部时间尺度，方程（18）简化为

$$D_t s \approx q_{\mathrm{prod}} - q_{\mathrm{relax}}. \tag{A1}$$

利用方程（26）–（29），忽略 ν_0 相对于 s，并保留线性弛豫（在重叠区/惯性区的平衡中占主导地位），可得

$$D_t s \approx s\Big(C_I\,\mathcal{I}(\boldsymbol{S},\boldsymbol{\omega}) - K\Big). \tag{A2}$$

定义净放大率

$$\xi(t) := C_I(t)\,\mathcal{I}(t) - K(t), \tag{A3}$$

我们得到乘性（对数）定律

$$D_t \ln s = \xi(t). \tag{A4}$$

二次饱和项在 s极大时提供非线性阻尼；方程（A4）仍是乘性涨落的主导阶驱动项，前提是线性弛豫占主导地位。

2. s的对数正态性

沿轨迹从A4积分方程（ $t=0$ 至$t=T$,

$$\ln\frac{s(T)}{s(0)} = \int_0^T \xi(t')\,\mathrm{d}t'. \tag{A5}$$

如果 $\xi(t)$ 是平稳的，具有有限相关时间，并且在 T 远大于该相关时间时满足中心极限定理型条件，则该积分趋近于高斯随机变量。因此，$\ln s$ 近似服从正态分布，而 s 近似服从对数正态分布。

3. 粗粒化耗散与 K62 方差

对于 $\nu_0 \ll s$,

$$\epsilon(\boldsymbol{x},t) = \nu_{\mathrm{eff}} K^2 \approx sK^2. \tag{A6}$$

定义尺度为 r 的球体上的粗粒化耗散,

$$\epsilon_r(\boldsymbol{x},t) := \frac{1}{|B_r|}\int_{B_r(\boldsymbol{x})} \epsilon(\boldsymbol{y},t)\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}. \tag{A7}$$

K62 假设级联深度随 $\ln(L/r)$ 缩放，因此得到

$$\mathrm{Var}(\ln\epsilon_r) = \mu \ln\left(\frac{L}{r}\right), \tag{A8}$$

间歇性系数为 μ。 ffi i t
选择 $\ln\epsilon_r$ 的均值以满足 $\langle\epsilon_r\rangle = \epsilon_0$，得到对数正态矩公式

$$\langle\epsilon_r^q\rangle = \epsilon_0^q\left(\frac{L}{r}\right)^{\frac{\mu}{2}q(q-1)}. \tag{A9}$$

4. 结构函数的反常标度

精细相似性给出（在惯性区间内）

$$\langle|\delta u_r|^p\rangle \sim \left\langle\epsilon_r^{p/3}\right\rangle r^{p/3}. \tag{A10}$$

取 $q = p/3$ 代入式（A9）得到

$$\langle|\delta u_r|^p\rangle \sim r^{\zeta_p}, \qquad \zeta_p = \frac{p}{3} - \frac{\mu}{18}p(p-3), \tag{A11}$$

这就是标准的 K62 对数正态间歇性修正。

[1]M. Sanchis-Agudo 和 R. Vinuesa，湍流普适定律的几何基础，arXiv:2512.00068 [physics.flu-dyn]。[2] V. I. Arnold，《无限维李群的微分几何及其在理想流体流体动力学中的应用》，Ann. Inst. Fourier **16**，319（1966）。[3] J. Smagorinsky，《采用原始方程的环流试验：I. 基本试验》，Mon. Weather Rev. **91**，99（1963）。[4] D. K. Lilly，《数值模拟实验中小尺度湍流的表示》，Proc. IBM Sci. Comput. Symp. Environ. Sci.，195（1967）。[5]U. Schumann，平面通道和环隙中湍流有限差分模拟的亚网格尺度模型，J. Comput. Phys. **18**, 376 (1975). [6] S. B. Pope，《湍流》（剑桥大学出版社，2000）。[7] B. E. Launder 和 D. B. Spalding，湍流的数值计算，Comput. Methods Appl. Mech. Eng. **3**, 269 (1974). [8] F. R. Menter，面向工程应用的双方程涡黏性湍流模型，AIAA J. **32**, 1598 (1994). [9] R. Jordan、D. Kinderlehrer 和 F. Otto，福克–普朗克方程的变分表述，SIAM J. Math. Anal. **29**, 1 (1998).

[10] F. Otto，耗散演化方程的几何：多孔介质方程，《偏微分方程通讯》26, 101 (2001). [11] J. L. Vázquez，《多孔介质方程：数学理论》（牛津大学出版社，2007）。[12] C. Truesdell 和 W. Noll，《非线性力学场论》，《物理学手册》第 III/3 卷（Springer-Verlag，柏林，1965）。[13] C. G. Speziale，湍流建模中涡量输运方程的优势，《计算物理学杂志》73, 476 (1987). [14] R. H. Kraichnan，二维湍流中的惯性区间，《流体物理学》10, 1417 (1967). [15] H. Tennekes 和 J. L. Lumley，《湍流入门》（麻省理工学院出版社，马萨诸塞州剑桥，1972）。[16] C. Härtel 和 L. Kleiser，近壁湍流中亚格子尺度运动的分析与建模，《流体力学杂志》356, 327 (1998). [17] E. R. van Driest，壁面附近的湍流，《航空科学杂志》23, 1007 (1956). [18] A. A. Townsend，《湍流剪切流的结构》，第2版（剑桥大学出版社，1976）。[19] I. Marusic、J. P. Monty、M. Hultmark 和 A. J. Smits，壁面湍流中的对数区，J. Fluid Mech. 716, R3 (2013). [20] S. Hoyas、R. Vinuesa、P. J. Schmid 和 H. M. Nagib，壁面约束湍流中对数速度剖面的敏感性研究，《物理评论：流体》9, 054601 (2024). [21] U. Piomelli 和 E. Balaras，大涡模拟的壁层模型，《流体力学年度评论》34, 349 (2002). [22] S. T. Bose 和 G. I. Park，《复杂湍流流动的壁面模型大涡模拟》，《流体力学年度评论》50, 535 (2018). [23] F. De Vanna、M. Cogo、M. Bernardini、F. Picano 和 E. Benini，《一种用于可压缩壁面约束流动的大涡模拟的壁面解析与壁面建模统一方法》，《物理评论：流体》6, 034614 (2021). [24] P. R. Spalart 和 S. R. Allmaras，《用于空气动力流动的单方程湍流模型》，美国航空航天学会论文 10.2514/6.1992-439 (1992). [25] P. R. Spalart，《分离涡模拟》，《流体力学年度评论》41, 181 (2009). [26] C. S. Peskin，《浸入边界法》，Acta Numerica 11, 479 (2002). [27] R. Mittal 和 G. Iaccarino，《浸入边界方法》，《流体力学年度评论》37, 239 (2005). [28] R. Vinuesa、P. H. Rozier、P. Schlatter 和 H. M. Nagib，《不同历史效应下局部压力梯度的实验与计算》，《美国航空航天学会期刊》52, 368 2014( ). [29] A. N. Kolmogorov，《对关于高雷诺数下黏性不可压缩流体中湍流局部结构的先前假设的修正》，《流体力学杂志》13, 82 (1962). [30] A. M. Obukhov，《大气湍流的一些特征》，《流体力学杂志》13, 77 (1962). [31] U. Frisch，《湍流：A. N. Kolmogorov的遗产》（剑桥大学出版社，1995）。