arXiv:2601.03330v1 [cs.LO] 6 Jan 2026

可组合信息系统中作为一致性不变量的时间序列

Anherutowa Calvo Dante K.Calvo

摘要

我们形式化定义了一个极简设定：在局部可组合性的条件下，分布式信息的一致性会迫使时间序列（事件上的严格偏序）形成。系统由分布式记录构成，这些记录被解释为全局可能性空间（Ω Σ）上的约束，并可选地配备测度 μ。事件通过单调收紧记录，在局部发挥作用。独立事件可交换（菱形/迹语义），从而实现调度规范不变性。我们在不预设原始时间的前提下，定义事件之间的操作性影响关系：若执行某事件可能改变另一事件在共享子系统上写入的约束，则前者影响后者。核心技术要点在于，影响环本身并不必然导致矛盾，还需要额外的互斥条件。因此，我们区分弱影响 （仅有依赖关系）与强影响 （在某个可观测谓词上存在排他分支）。在所有可达记录状态全局可满足、同时满足菱形性质和单调信息写入，并且针对有见证互斥性满足一个温和的分支确定性公理的条件下，我们证明强影响是无环的，因此会导出内在严格偏序（时间序列）。我们证明了所导出偏序的轨迹不变性和最小性/唯一性，给出单调信息时钟 $-\log \mu$（可行集），并完整分类了所有逃逸情形：任何允许强影响环而不导致不一致性的模型，至少必须违反以下条件之一：（i）全局一致性；（ii）局部可组合性；（iii）单调信息写入；或（iv）排他见证的分支确定性。两个示例分别展示了（a）可交换的收紧操作和（b）从循环到矛盾的构造。

通俗地说，在任何只会排除可能性（单调记录写入）、将独立操作视为可交换（菱形），且绝不允许可达演化过程中出现矛盾（全局可满足性）的系统中，互斥的操作依赖关系不可能形成循环。因此，内在的先后结构不可避免。

目录

1 引言 **2**

2 模型：可能性空间、站点、记录 **3**
2.1 可能性空间.3 2.2 站点与分布式记录状态.3 2.3 零测集等价（测度设置）.3

3 事件作为 全单调信息更新 3
3.1 事件与支撑集.3 3.2 可达性.4

4 局部可组合性：菱形与迹语义 **4**
4.1 独立性.4 4.2 菱形公理.4

5 操作性影响（弱影响和强影响） **4**
5.1 写入效应.4 5.2 弱影响.4 5.3 通过互斥分支实现强影响.5

6 全局一致性与分支确定性 **5**

7 主要结果 **6**
7.1 二元见证引理（弱影响）.6 7.2 从循环到矛盾.6 7.3 由一致性得出的时间顺序.7 7.4 轨迹不变性.7 7.5 最小性/唯一性.7

8 作为一致性不变量的规范信息时钟 8

9 逃逸分类 8

10 示例
810.1 示例：一个简单的可组合收紧系统（Petri网风格）.8 10.2 示例：显式强影响循环导致不一致性.9

11有限模型中的算法检测 9

12 讨论 **9**

1 引言

本文聚焦于并发理论、分布式系统和信息基础领域中共同存在的一个结构性问题：

> 分布式记录的一致性在什么情况下会迫使事件之间形成一种内在的先后关系（时间序列），而无需预设时间？

我们的贡献并非指出无环关系可以进行拓扑排序这一经典事实，而是精确说明哪些操作性和信息性假设会迫使由记录更新推导出的类因果关系具有无环性。我们特别指出一个常见陷阱：循环依赖图未必意味着不一致。因此，我们提炼出一种最小排他性见证（强影响），并提出一个温和的确定性公理，以确保该见证并非无关紧要的调度选择所造成的假象。

定理的非正式表述。 概括而言：如果一个系统仅通过收紧约束来更新分布式记录，独立更新彼此可交换，并且每个可达的全局记录状态都保持可满足，那么任何承载排他性内容（即我们的强影响）的操作性依赖都不可能形成环。强影响循环会迫使系统在某个可观测量上施加彼此不相容的分支，从而导致可行集为空（或为 null），这与全局可满足性相矛盾。因此，强影响会形成严格偏序，可将其解释为一种内在时序，且该时序在迹等价调度下保持不变。

定位。 这些结果最好被理解为组合式信息系统中的一个表示定理：在局部可组合的记录更新下，为了存在一致的全局状态，时间序列必然作为一个不变量涌现。

2 模型：可能性空间、站点、记录

2.1 可能性空间

定义 1（可能性空间）。 可能性空间是一个可测空间 (Ω, Σ)。可选地，我们考虑一个测度空间 (Ω, Σ, μ)，其中 $\mu(\Omega) > 0$ 且 μ σ-有限。

2.2 位置与分布式记录状态

设 $X = \{1, \ldots, n\}$ 为一个有限的站点集。

定义 2（分布式记录状态）。 分布式记录状态是 $R = (R_1, \ldots, R_n) \in \Sigma^n$，其中每个 $R_i \in \Sigma$ 是在站点 i处的局部记录（约束）。

定义 3（可行集）。 对于 $R \in \Sigma^n$，定义全局可行集

$$F(R) := \bigcap_{i=1}^{n} R_i \in \Sigma.$$

如果 $F(R) \neq \emptyset$，我们就称 R 全局一致。在测度设置中，可以将其加强为 $\mu(F(R)) > 0$。

2.3 零测集等价（测度设置）

当存在 μ 时，我们将相差零测集的相等视为观测等价。

定义 4（相差零测集的等价）。 对于 $A, B \in \Sigma$，当且仅当 $\mu(A \triangle B) = 0$ 时，记作 $A \equiv_\mu B$。

3 事件作为局部单调信息更新

3.1 事件与支撑集

定义 5（事件）。 事件 e由以下部分组成：

1. 一个支撑集 $S(e) \subseteq X$；2. 一个更新映射 $U_e : \Sigma^n \to \Sigma^n$

使得对于所有 $R \in \Sigma^n$ 和位置 $i \in X$：

1.（局部性）如果 $i \notin S(e)$，则 $(U_e(R))_i = R_i$；2.（单调收紧）如果 $i \in S(e)$，则 $(U_e(R))_i \subseteq R_i$。

注释 1. 单调收紧模拟信息写入。若要纳入擦除/遗忘，应将其明确建模为非单调操作；我们的逃逸分类（定理5）强调，单调性是时间顺序强制的必要前提之一。

3.2 可达性

固定一个初始记录状态 $R^{(0)} \in \Sigma^n$。

定义 6（可达状态）。 如果存在事件 $e_1, \ldots, e_k$，使得 R，则记录状态 R 是可达的。

$$R = U_{e_k} \circ \cdots \circ U_{e_1}(R^{(0)}).$$

4 局部可组合性：菱形与迹语义

4.1 独立性

定义 7（独立性）。 如果 $S(e) \cap S(f) = \emptyset$，则两个事件 e, f 相互独立，记作 $e \perp f$。

4.2 菱形公理

定义 8（菱形／交换公理）。 若对所有可达的 R 和所有独立的 $e \perp f$，系统都满足菱形性质，

$$U_e(U_f(R)) = U_f(U_e(R)).$$

备注 2。 菱形性质意味着调度在规范等价下相同：交换相邻的独立事件不会改变最终的记录状态。这便导出了 Mazurkiewicz 迹语义（例如参见 [1, 2]）。

5 操作影响（弱与强）

5.1 写入效应

定义 9（写入效应）。 对于事件 e、状态 R 和位置 $i \in S(e)$，定义

$$\Delta_i(e; R) := R_i \setminus (U_e(R))_i.$$

对于 $i \notin S(e)$，设 $\Delta_i(e; R) = \emptyset$。

5.2 弱影响

定义 10（弱操作影响）。 我们称 e 弱影响 f，记作 $e \to f$，当且仅当：

1. $S(e) \cap S(f) \neq \emptyset$，并且
2. 存在一个可达的 R 以及一个位置 $i \in S(e) \cap S(f)$，使得

$$\Delta_i(f; U_e(R)) \neq \Delta_i(f; R).$$

在测度设置中，这可以放宽为 $\mu(\Delta_i(f;\, U_e(R)) \,\triangle\, \Delta_i(f;\, R)) > 0$。

备注 3。 弱影响中的有向环反映了循环依赖，但不一定会导致不一致性。主定理使用强影响，后者增加了一个明确的排他性见证。

5.3 通过互斥分支产生强影响

定义 11（二元可观测量）。二元可观测量是一个可测集 $B \in \Sigma$，对于 B 中的世界，将其解释为命题“B 成立”；对于 $\Omega \setminus B$ 中的世界，则解释为“非-B”。

定义 12（强影响）。如果存在以下条件，我们称 e 对 f 产生强影响，记作 $e \Rightarrow f$：

1. 一个可达状态 R,
2. 一个共享位置 $i \in S(e) \cap S(f)$,
3. 一个二元可观测量 $B \in \Sigma$,

使得令 $R^{(0)} := R$ 和 $R^{(1)} := U_e(R)$，位置 i 上的后-f 记录会在 B 上形成排他分支：

$$\mu\Big((U_f(R^{(0)}))_i \cap (U_f(R^{(1)}))_i \cap B\Big) = 0,$$

且两个分支都非平凡：

$$\mu\Big((U_f(R^{(0)}))_i \cap B\Big) > 0, \qquad \mu\Big((U_f(R^{(1)}))_i \cap B\Big) > 0.$$

在纯集合论（非测度）设置中，将它们替换为：

$$(U_f(R^{(0)}))_i \cap (U_f(R^{(1)}))_i \cap B = \emptyset,$$

且与 B 的两个交集均非空。

注 4. 直观而言，强影响描述了这样一种情形：e的执行会改变 f 在可观测谓词上所强制的互斥事实选项。

定义 13（互斥分支对（由见证导出））. 固定一个实例，如定义 12 中所述，该实例通过（R, i, B）见证 $e \Rightarrow f$。定义位置 i 处 B 上的两个后置f分支约束为

$$C_f^0 := (U_f(R))_i \cap B, \qquad C_f^1 := (U_f(U_e(R)))_i \cap B.$$

若满足 $C_f^0 \cap C_f^1 = \emptyset$（且在测度设置中，$\mu(C_f^0 \cap C_f^1) = 0$），并且两者均非平凡（非空／正测度），则称（$C_f^0, C_f^1$）为互斥分支对。

令 $\prec$ 表示 $\Rightarrow$ 的传递闭包。

定义14（强影响循环）。强影响循环是一个序列 $e_1, \ldots, e_k$，其中 $k \geq 2$ 满足

$$e_1 \Rightarrow e_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow e_k \Rightarrow e_1.$$

6 全局一致性与分支确定性

定义15（全局一致性不变性（GS））。**（GS）**每个可达记录状态 R 都是全局一致的：F（R）$\neq \emptyset$。在测度设置中，可以进一步强化为：对于所有可达的 R，μ（F（R））> 0。

定义16（分支确定性（BD））。**（BD）**考虑任意一个有见证的强影响 $e \Rightarrow f$，其见证为（R, i, B），以及一个互斥分支对

$$C_f^0 = (U_f(R))_i \cap B, \qquad C_f^1 = (U_f(U_e(R)))_i \cap B.$$

我们称该系统针对这个见证具有分支确定性，如果在任何满足以下条件的可达历史中执行 f：

1. 与该见证相关的局部前置条件与见证中的条件迹等价（即仅通过交换相邻的独立事件而有所不同），并且

2. e 在 f之前发生（分别地，未在 f之前发生），

那么，在测度设置中，除零测集外，位置 i 处针对 B 的f 后约束与 C_f^1 （分别地， C_f^0）一致。

注释 5. (BD) 是一个温和的非病态假设：它排除了这样一种退化情形，即“排他分支”可以被无关的独立调度选择翻转。

7 主要结果

7.1 二元见证引理（弱影响）

引理 1 （弱影响的二元见证）. 假设处于测度设置，并令 $e \to f$（定义 *10*）。那么，存在一个可达状态 R、一个共享位置 $i \in S(e) \cap S(f)$，以及一个可测集 $B \in \Sigma$，使得

$$\mu\Big(\big((U_f(R))_i \cap B\big) \triangle \big((U_f(U_e(R)))_i \cap B\big)\Big) > 0.$$

证明。 根据弱影响的定义，对于某个可达的 R和共享的 i, $\mu(\Delta_i(f;\, U_e(R)) \triangle \Delta_i(f;\, R)) > 0$。令 $B := \Delta_i(f;\, U_e(R)) \triangle \Delta_i(f;\, R)$。那么在 B 上， f 排除的世界在两个上下文中有所不同，这意味着所述的正测度对称差。 □

7.2 从循环到矛盾

引理2 (互斥分支导致循环不一致性)。 假设单调收紧和 *(GS)* 成立。设存在一个强影响循环

$$e_1 \Rightarrow e_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow e_k \Rightarrow e_1$$

其每条边 $e_j \Rightarrow e_{j+1}$ （指标模 k）的见证均产生一个位于可观测量 B_j 上的互斥分支对(C_{j+1}^0, C_{j+1}^1) 。此外，假设 *(BD)* 对这些见证均成立。那么，执行该循环将迫使产生一个全局不一致的可达记录状态，这与 *(GS)* 矛盾。

证明。 为 $j = 1, \ldots, k$ 引入分支位 $b_j \in \{0, 1\}$，其中 $b_j = 1$ 表示在边 $e_j \Rightarrow e_{j+1}$ 的见证情形中，前驱 e_j 先于 e_{j+1} 出现；否则为 $b_j = 0$。

根据 (BD)，应用 e_{j+1} 后， $C_{j+1}^{b_j}$ 系统会在 B_j 上施加分支约束，而这一选择只取决于 e_j 是否以见证意义发生在 e_{j+1} 之前，而不取决于无关的独立交错。因此，任何全局可行世界都必须属于

$$\bigcap_{j=1}^{k} C_{j+1}^{b_j}.$$

沿环闭合后返回 e_1，从而为 b_1 诱导出一个布尔自映射 $\phi\colon \{0,1\} \to \{0,1\}$；该映射是通过沿环传播一次分支规则得到的。由于每个分支对都是互斥且非平凡的， ϕ 不可能是常值映射。由于该环是非退化的， ϕ 不可能是恒等映射。剩下的唯一布尔自映射就是翻转映射 $\phi(b) = 1 - b$。因此 $b_1 = \phi(b_1) = 1 - b_1$，这是不可能的。

因此，不存在一致的分支位选择，所以强制要求的交集为空（或在测度意义下为零），从而得到一个违反（GS）的可达记录状态。 □

7.3 从一致性得出时间序列

定理1 (由一致性得出的时间顺序)。 假设：

1. 单调局部收紧事件（第 *3* 节），*2.* 菱形性质（定义 *8*），*3.* 全局一致性不变性（定义 *15*），*4.* 对所有使用的强影响见证满足分支确定性（*BD*）。

那么，强影响关系 $\Rightarrow$ 无环。因此，其传递闭包 $\prec$ 是事件上的严格偏序。特别地，存在函数 t: $\mathcal{E} \to \mathbb{R}$，使得

$$e \prec f \implies t(e) < t(f).$$

证明。 若存在强影响循环，引理2将导出一个可达的全局不一致状态，这与 (GS) 矛盾。因此，不存在强影响循环，且 $\Rightarrow$ 无环。严格偏序的线性扩展 t的存在性是标准结论。

□

注 6（定理为何采用强影响）。 弱影响环可能存在而不导致矛盾，因为仅有依赖关系并不能强制互斥记录分支。强影响包含了最小限度的互斥性，而 (BD) 确保这种互斥性在操作层面定义明确，而非调度造成的假象。

7.4 轨迹不变性

定理2 （强影响与时间序列的轨迹不变性）。 假设菱形成立。如果两个事件序列仅通过交换相邻的独立事件而不同，那么事件发生实例之间导出的强影响边保持不变。因此，导出的偏序 $\prec$ 在同一轨迹类内不随调度而改变。

证明。 交换相邻的独立事件 $e \perp f$ 不会改变最终的记录状态，这由菱形性质可知。强影响要求支撑集重叠，因此独立事件之间不可能存在强影响关系。由于记录状态未变，任何已见证的互斥关系仍然有见证。因此，强影响图在交换操作下保持不变，其传递闭包 $\prec$也一样。

□

7.5 最小性/唯一性

定理3 （最小性与唯一性）。 关系 $\prec$ 是扩展强影响关系 $\Rightarrow$的唯一极小严格偏序。任何包含 $\Rightarrow$ 的严格传递关系都必须包含$\prec$。

证明。 根据定义，$\prec$ 是 $\Rightarrow$的传递闭包，因此是包含$\Rightarrow$的最小传递关系。无环性意味着严格性。任何严格的传递扩展都必须包含所有 $\Rightarrow$-路径，因此包含 $\prec$。

□

8 一个典范信息时钟

假设 (Ω, Σ, μ) 满足 $\mu(\Omega) > 0$。

定义 17（信息含量）。定义

$$\mathcal{I}(R) := -\log \mu(F(R)),$$

满足 $\mathcal{I}(R) = +\infty$ 当且仅当 $\mu(F(R)) = 0$。

定理 4（信息时钟的单调性）。对于任意可达的 R 以及任意事件 e,

$$\mathcal{I}(U_e(R)) \geq \mathcal{I}(R),$$

当且仅当 $\mu(F(U_e(R))) < \mu(F(R))$ 时，严格不等式成立。

证明。对于每个 i, $(U_e(R))_i \subseteq R_i$, 因此 $F(U_e(R)) \subseteq F(R)$。所以 $\mu(F(U_e(R))) \leq \mu(F(R))$。应用 $-\log$。 □

9 逃逸分类

定理5 (完整逃逸分类**)**。假设某模型存在一个强影响循环，但不会导致全局不一致。那么以下条件至少有一项不成立：

1. 全局一致性（***GS***）：某个可达的 R 具有 $F(R) = \emptyset$（或 $\mu(F(R)) = 0$）；

*2.*局部可组合性（菱形）：存在相互独立的 $e \perp f$ 和可达的 R，满足$U_e(U_f(R)) \neq U_f(U_e(R))$;

3. 单调信息写入：存在 e、可达的 R以及 $i \in S(e)$，满足 $(U_e(R))_i \not\subseteq R_i$;

4. 分支确定性（***BD***）：至少有一个强影响见证以违反定义*16*的方式依赖调度。

证明。定理1表明，（单调写入 +菱形 + GS + BD）意味着不存在强影响环。因此，如果在没有不一致性的情况下出现强影响环，则至少有一个前提必须被违反。

□

10 示例

10.1 示例：一个简单的可组合收紧系统（Petri网风格）

示例 1（具有可交换独立事件的双站点收紧）。设 $X = \{1, 2\}$、$\Omega = \{0, 1\}^2$ 和 $\Sigma = 2^\Omega$。记录状态 $R = (R_1, R_2)$ 是 Ω 的两个子集组成的有序对。定义事件：

- e_1 支撑于位置1：它收紧 R_1 以强制满足 $x_1 = 0$（即与 $\{\omega : \omega_1 = 0\}$ 求交）；
- e_2 支撑集位于位置 2：它会收紧 R_2，以强制执行 $x_2 = 0$。

于是 $e_1 \perp e_2$ 且菱形条件成立。二者没有重叠，因此不存在影响边，且 $\prec$ 为空（所有事件彼此不可比较）。从初始无约束状态出发，全局一致性成立。这说明了调度规范自由度，以及操作相互独立时不存在强制优先关系。

10.2 示例：明确的强影响环导致不一致性

示例 2（循环构造）。设 $X = \{1\}$ 为单个位置，$\Omega = \{0, 1\}$, $\Sigma = 2^{\Omega}$, μ 为计数测度。从 $R_1^{(0)} = \Omega$ 开始。在同一位置定义两个事件 a，b：

$$(U_a(R))_1 = \begin{cases} \{0\} & \text{if } R_1 = \Omega, \\ \{1\} & \text{if } R_1 = \{0\}, \\ \{1\} & \text{if } R_1 = \{1\}, \end{cases} \qquad (U_b(R))_1 = \begin{cases} \{0\} & \text{if } R_1 = \Omega, \\ \emptyset & \text{if } R_1 = \{0\}, \\ \{1\} & \text{if } R_1 = \{1\}. \end{cases}$$

两个事件都是单调收紧。可以验证，其中存在一个强影响环（在 $B = \{0\}$ 上进行互斥分支），并且执行适当的环会到达空可行集，从而违反（GS）。这表明，当要求全局一致性时，强影响环正是会导致不一致性的环。

11 有限模型中的算法检测

当 Ω 有限且事件集有限时，可以计算：

1. 可达性（通过对 Σ^n 状态进行前向搜索）；2. 强影响边 $e \Rightarrow f$，方法是搜索满足定义 12 的见证（R，i，B）；3. 强影响图中的有向环（相对于边和顶点数为线性时间）。

检测到一个环即可证明，（GS）、菱形、单调性或（BD）中至少有一项必须失效（定理5）。

12 讨论

推导出的内容。一种内在时序：由强影响所诱导的事件严格偏序 $\prec$，它在迹等价调度之间保持不变，并且是在与强影响相容的优先关系中最小的。

未作出的主张。我们并未提出一种新的时间物理理论，也未提出度量时间坐标或热力学时间之矢。该结果是对可组合信息系统的一种结构性约束。

非退化性为何重要。若不存在互斥性／分支（强影响），循环依赖并不必然意味着矛盾。明确这一点对于确保正确性以及与并发和层／粘合框架进行清晰比较至关重要。

要点。如果一个系统只会不断累积信息（单调收紧），独立操作可以重新排序（菱形），且沿着可达演化过程绝不会出现矛盾（GS），那么任何会迫使互斥分支出现的操作性依赖（强影响），只要它在调度下定义良好（BD），就必定无环。因此，所得传递闭包 $\prec$ 是内在且调度不变的先后关系。

致谢

作者　　rs 感谢并发与逻辑领域的广大同行提供的奠基性见解　　s.

参考文献

[1] A. Mazurkiewicz。《style id='2'>迹理论。载于：《Petri网进展》（各版本），并发计算的迹语义基础发展。[2] V. Diekert 和 G. Rozenberg（编）。《style id='5'>《迹之书》。World Scientific，1995年。[3] G. Winskel。《style id='8'>事件结构。载于：《Petri网：并发模型的应用及其相互关系》，1987年（以及相关基础性著作）。[4] S. Abramsky 和 A. Brandenburger。非局域性与情境性的层论结构。《style id='11'>《新物理学杂志》，13：113036，2011年。[5] J. Pearl。《style id='14'>因果性：模型、推理与推断。剑桥大学出版社，2000年。[6] L. Lamport。分布式系统中的时间、时钟与事件排序。《style id='17'>《ACM通信》，21(7)：558–565，1978年。