arXiv:2601.03363v1 [math.CO] 6 Jan 2026

图中的全隔离博弈

[1]Michael A. Henning 和 [2]Douglas F. Rall

[1]约翰内斯堡大学数学与应用数学系 奥克兰公园,
2006 南非电子邮箱：mahenning@uj.ac.za

[2]弗曼大学 Mathematics 名誉教授
格林维尔，南卡罗来纳州，美国电
子邮箱：doug.rall@furman.edu

摘要

全隔离博弈在一个图 G 上进行，由两名玩家轮流选择一个顶点；如果 S 是已经选取的顶点集，那么当且仅当该顶点与图 $G - N_G(S)$ 中一个阶至少为 2 的（非平凡）连通分支中的顶点相邻，或者与 $G - N_G(S)$ 中一个孤立的顶点相邻且属于集合 S时，才能选取该顶点，其中 $N_G(S)$ 是与 S中的某个顶点相邻的顶点集。支配者希望以最少的已选顶点数结束博弈，而 Staller 的目标则相反。博弈全隔离数$\iota_{\rm gt}(G)$是双方均采取最优策略时，支配者先手博弈中的步数。我们证明，若 G 是一个阶为 $n \geq 3$的连通图，则 $\iota_{\rm gt}(G) < \frac{5}{6}n$。此外，如果 G 的最小度至少为 2，那么我们证明 $\iota_{\rm gt}(G) \leq \frac{3}{4}n$。更一般地，若 G 是一个阶为 $n \geq 3$ 且最小度为 δ（其中 $\delta \geq 2$）的连通图，则我们证明 $\iota_{\rm gt}(G) \leq \left(\frac{2\delta-1}{3\delta-2}\right)n$。在其他结果中，我们证明了若 G 是一个直径为 2、阶为 n 的图，则 $\iota_{\rm gt}(G) \leq \frac{2}{3}n$。

关键词： 全隔离集；全隔离博弈；支配；全支配**美国数学学会主题分类：** 05C65, 05C69

1 引言

图 G 中的顶点 u 支配顶点 v，当且仅当 $u = v$ 或 u 与图 G中的 v 相邻。图 G 的支配集是一个顶点集合 S，其中图 G的每个顶点都被 G中的某个顶点支配。图 G 中的顶点u 全支配顶点 v，当且仅当 u 与图 G中的 v 相邻。图 G的全支配集是一个顶点集合 S，其中图 G 的每个顶点都被 S中的某个顶点全支配。因此，集合 S 是图 G 的支配集，当且仅当 V（G）中的每个顶点都与 S中的至少一个顶点相邻；集合 S 是图 G 的全支配集，当且仅当每个顶点都与 S中的至少一个顶点相邻。支配及其各种变体的概念已在理论、算法

和应用方面得到广泛研究。关于图中的（全）支配及其变体的全面论述，可参见书籍 [14, 15]。

顶点 v 在 G 中的开邻域 是 v 的所有邻点构成的集合，记为 $N_G(v)$；如果两个顶点相邻，则它们互为邻点 。因此， $N_G(v) = \{u \in V(G) : uv \in E(G)\}$。 v 的闭邻域 是集合 $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$。集合 $S \subseteq V(G)$ 的开邻域 是 S 中各顶点的所有邻点构成的集合，记为 $N_G(S)$；而 S 的闭邻域 是 $N_G[S] = N_G(S) \cup S$。因此，

$$N_G(S) = \bigcup_{v \in S} N_G(v) \quad \text{and} \quad N_G[S] = \bigcup_{v \in S} N_G[v].$$

如果从 G 中移除集合 $S \subseteq V(G)$ 及其邻域 $N_G(S)$ 后不剩下任何边，则集合 $S \subseteq V(G)$ 是 G 的一个隔离集 ，也就是说， $V(G) \setminus N_G[S]$ 是 G 中的一个独立集。这个概念由 Caro 和 Hansberg 于 2017年 在一个更一般的背景下引入 [11]。 G 的隔离数 $\iota(G)$ 是 G 的所有隔离集中基数最小者。这个参数等价于顶点-边支配数，该概念更早由 Peters 引入 [18]。关于图中的隔离问题，已有进一步研究，例如见 [1, 3, 10, 12, 13, 17, 19]。

全隔离集是一个隔离集 S ，并且满足以下附加性质：由 S 诱导的子图 $G[S]$不包含度为0的顶点。 G 的全隔离数 $\iota^t(G)$是 G所有全隔离集中基数的最小值。该参数最初由 Boutrig 和 Chellali [2]作为全顶点-边支配数引入，随后也有研究，例如文献 [4, 5, 10]。

2010年，Breˇsar、Klavˇzar 和 Rall [8]发表了关于支配博弈的开创性论文。支配博弈属于不断发展的竞争性优化图游戏这一类。图上的支配博弈如今已在文献中得到广泛研究。科学界随后迅速开展了大量关于图上支配博弈的研究，这促成了 Breˇsar、Henning、Klavˇzar 和 Rall [7], 近期出版了题为《图上的支配博弈》的著作。该书介绍了当时最前沿的研究成果，并指出这一领域仍有丰富的研究空间。本文研究图上的孤立博弈的全版本。

近期，Breˇsar、Dravec、Johnston、Kuenzel 和 Rall 在 [6], 中引入了隔离数对应的一种博弈形式，称为孤立博弈，其理念源自经典的支配博弈 [8]。随后， [9] 在2025年6月于斯洛文尼亚 Rogla 举行的第三届图上博弈研讨会上进一步研究了孤立博弈。本文介绍并研究全隔离数对应的一种博弈形式。

全隔离博弈在图 G 上进行，由支配者和 Staller 轮流从 G 中选择／选取顶点；规则是，若 S 为已经选取的顶点集，则仅当顶点 v 全支配图 $G - N_G$（S）中某个阶至少为 2 的（非平凡）连通分支内的顶点 u ，或者全支配图 $G - N_G$（S）中一个孤立顶点$u \in S$时，才可以选择该顶点。这样的顶点 v 称为可选顶点，选择 v 的一步称为合法步。当不存在可选顶点时，博弈结束。博弈结束时，选出的顶点集构成 G的一个全隔离集。

与支配博弈一样，在全隔离博弈中，支配者希望通过选择尽可能少的顶点结束博弈，而 Staller 则希望尽可能拖延这一过程。

因此，支配者力求使所选顶点集的边数最小，而 Staller 则试图使其尽可能大。如果由支配者先开始博弈，我们称之为D-博弈；否则称之为S-博弈。在双方都采取最优策略的前提下，博弈全孤立数 $\iota_{\mathrm{gt}}(G)$ 和 $Staller$- 先手博弈全孤立数 $\iota'_{\mathrm{gt}}(G)$ 分别是 D- 博弈和 S- 博弈中所选顶点的数量。

关于图论的符号和术语，我们通常遵循 [14]。具体而言，设 G为一个图，其顶点集为 $V(G)$，边集为 $E(G)$，阶为 $n(G) = |V(G)|$，边数为 $m(G) = |E(G)|$。我们将 v 在 G 中的度记为 $\deg_G(v)$。G中的最小度和最大度分别记为 $\delta(G)$和 $\Delta(G)$。G 中的孤立顶点是指在 G中度为 0 的顶点。如果一个图不含孤立顶点，则称其为无孤立顶点的。若对于 X 中的任意两个不同顶点 u、$v \in X$，都有 $d_G(u, v) \geq 3$，则称集合 X 为 G 中的打包集，因此 $N_G[u] \cap N_G[v] = \emptyset$。

平凡图 是阶为 1 的图，而非平凡图 的阶至少为 2。含有 n个顶点的圈 记为 C_n，含有 n个顶点的路 记为 P_n。含有 n 个顶点的完全图 记为 K_n。对于图 G的顶点子集 S，我们用 $G - S$ 表示从 G 中删除 S 中的顶点及与 S中的顶点关联的所有边后得到的图。如果 $S = \{v\}$，则我们简单地写作 $G - v$，而不写作 $G - \{v\}$。由集合 S 诱导的子图记为 $G[S]$。G的直径记为 $\mathrm{diam}(G)$，它是 G中所有顶点对之间的最大距离。

2 延续原理

分析支配博弈的主要工具之一，是 Kinnersley、West 和 Zamani 首先提出的延续原理 [16]。对于支配博弈的任一给定变体，延续原理的一个重要推论是：在双方都采取最优策略时，D-博弈和 S-博弈的步数至多相差 1。例如，已知延续原理适用于全支配博弈。作为更一般结果的一个特例，[6] 的作者证明了延续原理适用于孤立博弈。

考虑在一条路 P_5 上进行的全隔离博弈。令 G 为由 $v_1v_2v_3v_4v_5$ 给出的路 P_5。在 D-博弈中，支配者的第一步选择中央顶点 v_3，因此在支配者走出第一步后，已选顶点集立即变为 $S = \{v_3\}$。注意，$G - N_G(S)$ 的所有连通分支都是平凡的，并且顶点 v_3 是 $G - N_G(S)$ 中唯一属于集合 S 的孤立顶点。因此，Staller 唯一可走的合法着法是选择顶点 v_2 或顶点 v_4，以全支配顶点 v_3。Staller 走出第一步（选择 v_2 或v_4）后，博弈即告结束。因此，$\iota_{\mathrm{gt}}(G) = 2$。在 S-博弈中，Staller 第一步选择叶顶点 v_1。如果支配者第一步选择 v_2，那么 Staller 就选择 v_5 应对。如果支配者第一步选择 v_3，那么 Staller 就选择 v_4 应对。如果支配者第一步选择 v_4，那么 Staller 就选择 v_5 应对。如果支配者第一步选择 v_5，那么 Staller 就选择 v_4 应对。在这四种情况下，支配者都还需要再走一步才能结束博弈。因此，$\iota'_{\mathrm{gt}}(G) \geq 4$。（可以证明，结束 S-博弈总是只需四步，这意味着 $\iota'_{\mathrm{gt}}(G) = 4$，但此处不需要这一更强的性质。）因此，$|\iota_{\mathrm{gt}}(G) - \iota'_{\mathrm{gt}}(G)| \geq 2$。

由于总　　孤立博弈结合了全支配博弈和孤立博弈的特点　　n

，而且由于延续原理对这两种博弈都成立，人们或许会认为延续原理也适用于全隔离博弈。若果真如此，那么对于每个无孤立点图 G，我们都会得到这一理想性质：$|\iota_{\mathrm{gt}}(G)-\iota'_{\mathrm{gt}}(G)|\leq 1$。然而，由于存在一些图 G，使得 $|\iota_{\mathrm{gt}}(G)-\iota'_{\mathrm{gt}}(G)|>1$，我们得出以下结果。

观察 1 延续原理不适用于全隔离博弈。

3 给定最小度的上界

我们指出，延续原理是建立博弈支配类参数上界的有力工具，其中包括博弈支配数、博弈全支配数和博弈隔离数，这些都是延续原理适用的博弈。然而，对于若干支配博弈的变体，例如独立支配博弈和连通支配博弈，由于延续原理不适用，要为相关博弈参数找到较好的上界已被证明颇具挑战。因此，观察 1 表明，为博弈全隔离数寻找较好的上界很可能是一项困难的任务。本节旨在根据图的最小度，给出博弈全隔离数的上界。

在全隔离博弈进行过程中，若 S 是迄今为止已选顶点构成的集合，则当 $v\in N_G(S)$ 或者 $v\notin S$ 且 v 在 $G-N_G(S)$ 中是孤立的时，顶点 v 被视为已标记。请注意，已标记顶点可能可选，也可能不可选。若顶点未被标记，则称其为未标记。在全隔离博弈的任意给定阶段，我们将集合 S、M 和 U 定义如下：

- S 是已选顶点的集合。
- M 是已标记顶点的集合。
- U 是未标记顶点的集合。

注意，若 u 是一个未标记顶点，则 $u\in U$，并且 $u\in S$ 和 u要么是 $G-N_G(S)$ 中的一个孤立顶点，要么 u 属于图 $G-N_G(S)$ 中的一个非平凡连通分量。因此，全隔离博弈中的每个可选顶点都至少与一个未标记顶点相邻；选中这样的顶点后，至少有一个新顶点会被标记。当 G 的所有顶点都被标记时，博弈结束。

定理 1 若 G 是一个阶为 $n\geq 3$、最小度为 δ（其中 $\delta\geq 2$）且最大度为 Δ的连通图，则

$$\iota_{\mathrm{gt}}(G)\leq\left(\frac{2\delta-1}{3\delta-2}\right)n-\frac{\Delta-2}{3\delta-2}.$$

证明。设 G 是一个阶为 n、最小度为 δ 且满足 $\delta\geq 2$、最大度为 Δ的连通图。在 D-博弈进行过程中，设 m_{2i-1} 为支配者在第 i步标记的新顶点数，m_{2i} 为 Staller 在第 i步标记的新顶点数。假设博弈在 t 步后结束，则所有顶点都已标记，这意味着

$$n = \sum_{i=1}^{\lceil \frac{t}{2} \rceil} m_{2i-1} + \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{t}{2} \rfloor} m_{2i}. \tag{1}$$

下文中，假设支配者采用贪心策略：每一步都选择一个能使已标记顶点数增加最多的顶点。也就是说，支配者每一步都选择一个能标记尽可能多的先前未标记顶点的顶点。在支配者走出第一步之前，所有顶点都未标记，因此 $U = V(G)$ 且 $S = M = \emptyset$。令 t 表示支配者采用贪心策略时，博弈结束后所走的步数。我们将博弈分为两个阶段来考察。

阶段 1。如果存在一种 Staller 可行的着法，能标记至少两个新顶点，那么 Dominator 的这一步就属于阶段 1。如果 Dominator 上一步属于阶段 1，那么 Staller 的一步也属于阶段 1。

阶段 2。如果 Dominator 所有可行的着法都恰好标记一个新顶点，那么他的这一步就属于阶段 2。如果 Dominator 上一步属于阶段 2，那么 Staller 的一步也属于阶段 2。

如前所述，Dominator 每一步都采用贪心策略。我们先考虑博弈在阶段 1 结束的情况。

断言 1 如果博弈在阶段 1结束，那么 $t \leq \frac{2}{3}n - \frac{2}{3}(\Delta - 2)$。

证明。 如果 Dominator 第一步选择最大度为 Δ 的顶点 v，那么他至少会标记 Δ 个顶点，即 $N_G(v)$ 中的所有 Δ 个顶点，以及 $G - N_G(v)$ 中所有不同于 v 的孤立顶点（如果存在）。因此，Dominator 有一种可行的着法，能够标记至少 Δ 个顶点。根据 Dominator 的贪心策略，我们由此可知，他第一步至少标记 Δ 个顶点，因此 $m_1 \geq \Delta \geq 2$。每种可行的着法都至少标记一个新顶点。特别地，Staller 的每一步都至少标记一个新顶点，因此对于所有 $i \in \{1, \ldots, \lfloor t/2 \rfloor\}$， $m_{2i} \geq 1$。

假设阶段 1 包含支配者的 k_1 步。支配者的第一步至少标记 Δ 个顶点，而他在阶段 1 中其余的每一步至少标记两个新顶点，因此 $m_1 \geq \Delta$，并且如果 $k_1 \geq 2$，那么 $m_{2i-1} \geq 2$ 对所有 $i \in [k_1] \backslash \{1\}$ 均成立。若博弈在支配者走完第 k_1^{th} 步后立即结束，则 $t = 2k_1 - 1$；根据不等式 (1) 以及我们先前的观察，可得

$$n = \sum_{i=1}^{k_1} m_{2i-1} + \sum_{i=1}^{k_1-1} m_{2i} \geq (2k_1 + \Delta - 2) + (k_1 - 1) = 3k_1 + \Delta - 3,$$

因此

$$t = 2k_1 - 1 = \frac{2}{3}(n - \Delta + 3) - 1 < \frac{2}{3}n - \frac{2}{3}(\Delta - 2),$$

因此，断言中所述的所需上界成立（且为严格不等式）。故我们可以假设 $t \geq 2k_1$。如果 $t = 2k_1$，那么根据不等式 (1)，我们有 $n \geq (2k_1 + \Delta - 2) + k_1 = 3k_1 + \Delta - 2$，此时

$$t = 2k_1 \leq \frac{2}{3}(n - \Delta + 2),$$

因此，断言陈述中的所需上界再次成立。□

接下来，假设博弈在阶段 1 未结束，且阶段 1 由支配者进行 k_1 步。因此，$t > 2k_1$。在博弈的阶段 2 中，任一玩家的每个可行着法都恰好标记一个新的顶点。假设博弈阶段 2 总共进行了 k_2 个顶点的着法，因此

$$t = 2k_1 + k_2. \tag{2}$$

根据我们先前的假设，有 $t > 2k_1$，因此 $k_2 \geq 1$。现在考虑阶段 1 结束后、博弈进入阶段 2 之前，已选取、已标记和未标记顶点的集合 S、M 和 U。接下来，我们将证明图 G 满足的一些结构性质。

断言 2 图 G 满足以下性质。

(a) U 是 G 中的一个独立集。(b) $U \subseteq S$。(c) U 是 G 中的一个打包。

证明。 (a) 反设 U 不是独立集，并令 C 为 $G[U]$ 中的一个非平凡连通分量。设 $|V(C)| \geq 3$。此时，连通分量 C 中有一个顶点（记作 v）在 C 中的度至少为 2。若支配者选择顶点 v，则他会标记 v 在 C 中的邻点，还可能标记一些与 v 不相邻的额外顶点。因此，支配者的这一步至少会标记两个新顶点，这与博弈处于阶段 2 矛盾。故 $|V(C)| = 2$，因此 C 是 $G[U]$ 中的一个 P_2-连通分量。

令 C 为路 u_1u_2。若 $u_i \in S$，则顶点 u_{3-i} 将成为 $i \in [2]$ 的一个标记顶点，矛盾。因此，u_1 和 u_2 均不属于集合 S。图 G 是连通的，且 $\Delta \geq 2$。因此，如有必要，可重新命名连通分量 C 中的顶点，使得 $\deg_G(u_1) \geq 2$。令 u 为 u_1 的一个邻点，且不同于 u_2。顶点 u 必然已被标记但尚未被选中。也就是说，$u \in M \setminus S$。若支配者选择顶点 u，则他会标记属于 C 的邻点 u_1。此外，若 $uu_2 \notin E(G)$，顶点 u_2 此时会在图 $G - N_G(S \cup \{u\})$ 中变为孤立顶点；若 $uu_2 \in E(G)$，则 u_2 会被标记。无论哪种情况，若支配者选择 u，u_2 都会被标记。因此，支配者选择顶点 u 时至少会标记两个新顶点，这与博弈处于阶段 2 矛盾。由此证明了 (a) 部分。

（b）如果 U 中存在一个顶点，例如 x，不属于集合 S，那么 $x \notin S$ 和 x 在 $G - N_G(S)$ 中是孤立的。然而，这意味着顶点 x 是一个标记顶点，矛盾。因此，U 中的每个顶点都属于集合 S，所以 $U \subseteq S$。这证明了（b）部分。

(c) 反设 U 不是 G中的一个打包。因此，由于 U 是一个独立集，我们推知 U 中存在两个不同的顶点 u_1 和 u_2，它们在 G中有一个公共邻点，记作 v。必然地，顶点 v 已被标记，但尚未被选中。如果支配者选择顶点 v，

那么他会同时标记 u_1 和 u_2，还可能标记其他一些顶点。因此，支配者的这一步至少标记两个新顶点，这与博弈处于阶段 2 的事实矛盾。这就证明了 (c) 部分，并完成了断言的证明。□

根据断言 2(c)，集合 U 是 G 和 $U \subseteq S$ 中的一个打包。由此可知，阶段 2 中的每一步都会恰好标记一个属于集合 U 的顶点。令 $U = \{u_1, \ldots, u_{k_2}\}$，并令 $B_i = N_G(u_i)$，其中 $i \in [k_2]$。注意，集合 B_1、.....、B_{k_2} 两两顶点不相交。现在令 $B = N_G(U)$，于是 $B = \bigcup_{i=1}^{k_2} B_i$ 和

$$|B| = \sum_{i=1}^{k_2} |B_i| = \sum_{i=1}^{k_2} \deg_G(u_i) \geq \delta k_2. \tag{3}$$

如果集合 B 包含一个属于集合 S 的顶点，那么该顶点中属于集合 U 的邻点就会被标记，这与假设矛盾。因此，$B \cap S = \emptyset$。

回顾等式 (2)，我们有 $t = 2k_1 + k_2$，其中 t 表示支配者采用贪心策略时，博弈结束后所进行的步数。还要回顾一下，我们考虑的是阶段 1 结束后、博弈进入阶段 2 之前，已选顶点、已标记顶点和未标记顶点的集合 S、M 和 U。因此，在博弈的这一阶段，恰好已有 $2k_1$ 个顶点被选中。

令 A 为距离 U 中每个顶点至少为 2 的顶点集合，因此 $A = V(G) \setminus N_G[U]$。回顾一下，$U \subseteq S$ 和 $|U| = k_2$，因此集合 S 包含 U 中所有的 k_2 顶点。由于 $B \cap S = \emptyset$，S 中不属于 U 的 $2k_1 - k_2$ 顶点因此属于集合 A。于是，

$$|A| \geq |A \cap S| = 2k_1 - k_2. \tag{4}$$

回顾一下，根据假设 $\delta \geq 2$。注意到集合 A、B 和 U 两两顶点不相交，且 $V(G) = A \cup B \cup U$。因此，由不等式 (3) 和 (4)，并回顾 $|U| = k_2$，我们有

$$\begin{aligned} k_2 &= n - |A| - |B| \\ &\leq n - (2k_1 - k_2) - \delta k_2 \\ &= n - 2k_1 - (\delta - 1)k_2, \end{aligned}$$

因此 $(\delta - 1)k_2 \leq n - (2k_1 + k_2) = n - t$，或者等价地，

$$k_2 \leq \frac{n - t}{\delta - 1}. \tag{5}$$

博弈的阶段 1 一结束，我们便有

$$|M| = \sum_{i=1}^{k_1} m_{2i-1} + \sum_{i=1}^{k_1} m_{2i} \geq (2k_1 + \Delta - 2) + k_1 = 3k_1 + \Delta - 2.$$

回忆一下，根据等式 (2)，$t = 2k_1 + k_2$，因此 $k_1 = \frac{1}{2}(t - k_2)$。由这些观察可知，并根据

不等式 (5)，我们有

$$\begin{aligned} n &= |M| + |U| \\ &\geq (3k_1 + \Delta - 2) + k_2 \\ &= \tfrac{3}{2}(t - k_2) + k_2 + \Delta - 2 \\ &= \tfrac{3}{2}t - \tfrac{1}{2}k_2 + \Delta - 2 \\ &\geq \tfrac{3}{2}t - \tfrac{n-t}{2(\delta-1)} + \Delta - 2, \end{aligned}$$

或者，等价地，

$$\left(1 + \frac{1}{2(\delta-1)}\right) n \geq \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2(\delta-1)}\right) t + \Delta - 2. \tag{6}$$

不等式 (6) 化简后得到

$$\left(\frac{2\delta-1}{2\delta-2}\right) n \geq \left(\frac{3\delta-2}{2\delta-2}\right) t + \Delta - 2. \tag{7}$$

解出 t 后，得到不等式

$$t \leq \left(\frac{2\delta-1}{3\delta-2}\right) n - \frac{\Delta-2}{3\delta-2}. \tag{8}$$

回想一下，t 表示在支配者采用贪心策略时，博弈中所进行的步数。根据断言 1，若博弈在阶段 1 结束，则 $t \leq \frac{2}{3}n - \frac{2}{3}$（$\Delta - 2$）。若博弈未在阶段 1 结束，因而进入阶段 2，则由不等式 (8) 可得 $t \leq \left(\frac{2\delta-1}{3\delta-2}\right) n - \frac{\Delta-2}{3\delta-2}$。对于 $n \geq 3$ 和 $n - 1 \geq \Delta \geq \delta \geq 2$，注意到

$$\frac{2}{3}n - \frac{2}{3}(\Delta - 2) < \left(\frac{2\delta-1}{3\delta-2}\right) n - \frac{\Delta-2}{3\delta-2}.$$

因此，我们已证明，支配者的贪心策略保证能在至多 $\left(\frac{2\delta-1}{3\delta-2}\right) n - \frac{\Delta-2}{3\delta-2}$ 步内完成全隔离博弈，从而得到定理陈述中所需的上界。至此，定理1的证明完成。 □

若 $\delta = \Delta = 2$，则根据定理 1，我们有 $\iota_{\mathrm{gt}}(G) \leq \left(\frac{2\delta-1}{3\delta-2}\right) n$。若 $\delta \geq 2$ 且 $\Delta \geq 3$，则根据定理 1，我们有 $\iota_{\mathrm{gt}}(G) < \left(\frac{2\delta-1}{3\delta-2}\right) n$。因此，作为定理 1 的直接推论，我们得到博弈全孤立数的以下简化上界。

推论 1 若 G 是一个阶为 n、最小度为 δ 且 $\delta \geq 2$ 的连通图，则

$$\iota_{\mathrm{gt}}(G) \leq \left(\frac{2\delta-1}{3\delta-2}\right) n,$$

当最大度为 $\Delta \geq 3$ 时，不等式为严格不等式。

仿照定理 1 的证明，可得斯托勒先手总隔离博弈的如下上界。为完整起见，我们给出证明细节。

定理2 若 G 是一个阶为 $n \geq 3$ 、最小度为 δ 且 $\delta \geq 2$ 的连通图，则

$$\iota'_{\mathrm{gt}}(G) \leq \left(\frac{2\delta-1}{3\delta-2}\right) n - \frac{(\delta-1)(2\delta-3)}{3\delta-2}.$$

证明。设 G 是一个阶为 $n \geq 3$ 、最小度为 δ 、满足 $\delta \geq 2$ 且最大度为 Δ 的连通图。假设 $\Delta = n-1$。因此， G 包含一个控制顶点，即一个与其他每个顶点都相邻的顶点。在这种情况下，如果 Staller 首步不选择控制顶点，那么 Dominator 将选择该顶点，并在两步内完成博弈。因此，$\iota'_{\mathrm{gt}}(G) = 2$。此外，由于 $\delta \leq n-1$，我们有 $\frac{2}{3}(n-\delta+2) \geq 2$，从而 $\iota'_{\mathrm{gt}}(G) \leq \frac{2}{3}(n-\delta+2)$。因此，我们可以假设 $\Delta \leq n-2$。特别地， $n \geq 4$。如果 $n=4$，那么 $G = C_4$ 且 $\iota'_{\mathrm{gt}}(G) = 2 < \frac{2}{3}(n-\delta+2)$。因此，我们还可以进一步假设 $n \geq 5$。

在博弈进行过程中，设 m_{2i} 表示支配者在其第 i 步中标记的新顶点数，并设 m_{2i-1} 表示 Staller 在其第 i 步中标记的新顶点数。博弈结束时，所有顶点均已被标记，这意味着

$$n = |M| = \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{t}{2} \rfloor} m_{2i} + \sum_{i=1}^{\lceil \frac{t}{2} \rceil} m_{2i-1}. \tag{9}$$

下文中，设支配者采用贪心策略，即在每一步中选择一个能使已标记顶点数增加最多的顶点。在 Staller 的第一步之前，所有顶点都未被标记，因此 $U = V(G)$ 且 $S = M = \emptyset$。设 t 表示支配者采用贪心策略时，博弈结束后所进行的步数。

我们考虑定理 1 的证明中所定义的博弈阶段 1 和阶段 2。假设阶段 1 包含支配者的 k_1 步。由于根据假设有 $n \geq 5$ 和 $\Delta \leq n-2$，我们注意到 $k_1 \geq 1$。支配者在阶段 1 中的每一步 k_1 都至少标记两个新顶点，因此对于所有 $i \in [k_1]$，有 $m_{2i} \geq 2$。Staller 的第一步至少标记 δ 个顶点，而她之后的每一步至少标记一个新顶点。

断言 3 如果博弈在第1阶段结束，那么 $t < \frac{2}{3}(n-\delta+2)$。

证明。如果博弈在支配者走出他的第 k_1^{th}步后立即结束，那么 Staller 总共走了k_1 步，因此 $t = 2k_1$ ，并且根据方程（9），我们有

$$n = \sum_{i=1}^{k_1} m_{2i} + \sum_{i=1}^{k_1} m_{2i-1} \geq 2k_1 + (\delta + k_1 - 1) = 3k_1 + \delta - 1,$$

因此

$$t = 2k_1 = \frac{2}{3}(n-\delta+1) < \frac{2}{3}(n-\delta+2),$$

因此，断言中所述的目标上界成立。于是，我们可以假设$t \geq 2k_1 + 1$。由于博弈在阶段 1 中结束，我们推知 Staller 走了 $k_1 + 1$ 步，且$t = 2k_1 + 1$。由方程（9），我们有 $n \geq 2k_1 + (\delta + k_1) = 3k_1 + \delta$，在这种情况下

$$t = 2k_1 + 1 \leq \frac{2}{3}(n - \delta) + 1 < \frac{2}{3}(n - \delta + 2),$$

以及 s 所以，再一次，断言中的上界成立。□

接下来，假设博弈在阶段 1 未结束，因此进入阶段 2。设阶段 1 由支配者进行了 k_1 步。在博弈的阶段 2 中，任一玩家的每个可行着法都恰好标记一个新的顶点。假设博弈的阶段 2 中总共进行了 k_2 个顶点的着法，因此

$$t = 2k_1 + k_2 + 1. \tag{10}$$

定理 1 的证明中的断言 2 仍与之前完全相同。按照定理 1 的证明中的定义，令集合为 A 和 B，则有

$$|B| \geq \delta k_2 \quad \text{and} \quad |A| \geq 2k_1 + 1 - k_2. \tag{11}$$

根据不等式（11），并回想 $|U| = k_2$，我们有

$$\begin{aligned} k_2 &= n - |A| - |B| \\ &\leq n - (2k_1 + 1 - k_2) - \delta k_2 \\ &= n - (2k_1 + 1) - (\delta - 1)k_2, \end{aligned}$$

因此 $(\delta - 1)k_2 \leq n - (2k_1 + 1 + k_2) = n - t$，或者等价地，

$$k_2 \leq \frac{n - t}{\delta - 1}. \tag{12}$$

博弈的阶段 1 一完成，我们立即得到

$$|M| = \sum_{i=1}^{k_1} m_{2i} + \sum_{i=1}^{k_1+1} m_{2i-1} \geq 2k_1 + (\delta + k_1) = 3k_1 + \delta.$$

回顾一下，根据等式（10），$t = 2k_1 + 1 + k_2$，因此 $k_1 = \frac{1}{2}(t - k_2 - 1)$。由这些观察并根据不等式（12），我们得到

$$\begin{aligned} n &= |M| + |U| \\ &\geq (3k_1 + \delta) + k_2 \\ &= \tfrac{3}{2}(t - k_2 - 1) + k_2 + \delta \\ &= \tfrac{3}{2}t - \tfrac{1}{2}k_2 + \delta - \tfrac{3}{2} \\ &\geq \tfrac{3}{2}t - \tfrac{n-t}{2(\delta-1)} + \delta - \tfrac{3}{2}, \end{aligned}$$

或者，等价地，

$$\left(\frac{2\delta - 1}{2\delta - 2}\right) n \geq \left(\frac{3\delta - 2}{2\delta - 2}\right) t + \delta - \frac{3}{2}. \tag{13}$$

解出 t，得到不等式

$$t \le \left(\frac{2\delta-1}{3\delta-2}\right) n - \frac{(\delta-1)(2\delta-3)}{3\delta-2}. \tag{14}$$

回顾一下，t 表示支配者采用其贪心策略时博弈进行的步数。根据断言 3，若博弈在阶段 1 结束，则 $t < \frac{2}{3}(n-\delta+2)$。若博弈未在阶段 1 结束，因而进入阶段 2，则由不等式（14）可得 $t \le \left(\frac{2\delta-1}{3\delta-2}\right) n - \frac{(\delta-1)(2\delta-3)}{3\delta-2}$。对于 $n \ge 3$ 和 $n-1 \ge \delta \ge 2$，我们注意到

$$\frac{2}{3}(n-\delta+2) \le \left(\frac{2\delta-1}{3\delta-2}\right) n - \frac{(\delta-1)(2\delta-3)}{3\delta-2}.$$

因此，我们已经证明，支配者的贪心策略保证全隔离博弈至多经过 $\left(\frac{2\delta-1}{3\delta-2}\right) n - \frac{(\delta-1)(2\delta-3)}{3\delta-2}$ 步即可结束，从而得到定理陈述中的所需上界。定理2的证明至此完成。 □

若 $\delta = 2$，则由定理2可得 $\iota'_{\mathrm{gt}}(G) \le \left(\frac{2\delta-1}{3\delta-2}\right) n - \frac{1}{4}$。

若 $\delta \ge 3$，则由定理2可得 $\iota'_{\mathrm{gt}}(G) < \left(\frac{2\delta-1}{3\delta-2}\right) n - \frac{1}{4}$。

因此，作为定理2的直接推论，我们得到斯托勒先手博弈全隔离数的如下简化上界。

推论2 若 G 是一个阶为 $n \ge 3$、最小度为 δ 且满足 $\delta \ge 2$ 的连通图，则

$$\iota'_{\mathrm{gt}}(G) \le \left(\frac{2\delta-1}{3\delta-2}\right) n - \frac{1}{4},$$

当 $\delta \ge 3$ 时，取严格不等号。

对于 $\delta \ge 2$，我们注意到 $\frac{2\delta-1}{3\delta-2} \le \frac{3}{4}$（若 $\delta \ge 3$，则为严格不等式）。因此，推论 1 和推论2 得出以下上界：对于最小度至少为 2 的图，其（支配者先手）博弈全隔离数和斯托勒先手博弈全隔离数。

推论3 若 G 是一个阶为 $n \ge 3$、满足 $\delta(G) \ge 2$ 的连通图，则以下结论成立 *d.*

(a) $\iota_{\mathrm{gt}}(G) \le \frac{3}{4} n$。

(b) $\iota'_{\mathrm{gt}}(G) \le \frac{3}{4} n - \frac{1}{4}$。

3.1 直径为二的图

设 G 是一个阶为 $n \ge 3$、最小度为 δ 的连通图，其中 $\delta \ge 2$。由推论 1，$\iota_{\mathrm{gt}}(G) \le \left(\frac{2\delta-1}{3\delta-2}\right) n$；由推论3，$\iota'_{\mathrm{gt}}(G) \le \left(\frac{2\delta-1}{3\delta-2}\right) n - \frac{1}{4}$。因此，当 δ 趋于无穷时，$\iota_{\mathrm{gt}}(G)$ 的上界趋于 $\frac{2}{3} n$，而 $\iota'_{\mathrm{gt}}(G)$ 的上界趋于 $\frac{2}{3} n - \frac{1}{4}$。

作为定理 1 证明的推论，我们证明，对于阶为 $n \geq 3$ 且直径至多为 2 的连通图，（支配者先手）博弈全孤立数和 Staller 先手的游戏总隔离数至多为 $\frac{2}{3}n$。我们指出，根据 Erd˝os-R´enyi 随机图模型的一个性质，几乎所有图的直径都是 2。因此，根据下面的定理 3，几乎所有图 G 都满足 $\iota_{\mathrm{gt}}(G) \leq \frac{2}{3}n$ 且 $\iota'_{\mathrm{gt}}(G) \leq \frac{2}{3}n$

定理 3 若 G 是一个阶为 $n \geq 3$ 且满足 直径$(G) \leq 2$ 的连通图，则

$$\iota_{\mathrm{gt}}(G) \leq \frac{2}{3}n \quad and \quad \iota'_{\mathrm{gt}}(G) \leq \frac{2}{3}n.$$

证明。设 G 是一个阶为 $n \geq 3$ 且 diam$(G) \leq 2$ 的连通图。此外，设 G 的最小度为 δ，其中 $\delta \geq 1$，最大度为 Δ。若 $G = K_n$，则 $2 = \iota_{\mathrm{gt}}(G) \leq \frac{2}{3}n$ 且 $2 = \iota'_{\mathrm{gt}}(G) \leq \frac{2}{3}n$。因此，我们假设 diam$(G) = 2$，这意味着 $\Delta \geq 2$。

假设 $\delta = 1$。设 v_1 是 G 中度为 1 的顶点，且设 v 为其（唯一的）邻点。由于 diam$(G) = 2$，我们注意到 $V(G) = N_G[v]$，因此 deg$_G(v) = \Delta = n - 1$。于是，G 包含一个控制顶点，即 v。在 D-博弈中，若支配者第一步选择顶点 v，则会标记 G 中除 v以外的所有顶点。再走一步即可结束博弈，因此我们有$\iota_{\mathrm{gt}}(G) = 2 \leq \frac{2}{3}n$。在 S-博弈中，若 Staller 选择控制顶点 v，则支配者再走一步即可结束博弈；若 Staller 第一步不选择顶点 v，则支配者第一步选择顶点 v，博弈同样会在两步内结束。因此，$\iota'_{\mathrm{gt}}(G) = 2 \leq \frac{2}{3}n$。因此，我们可以假设 $\delta \geq 2$。

假设 $\Delta = 2$。由于 diam$(G) = 2$，我们推知 $G \in \{C_4, C_5\}$。由于 $\iota_{\mathrm{gt}}(C_4) = 2$ 且$\iota_{\mathrm{gt}}(C_5) = 3$，因此 $\iota_{\mathrm{gt}}(G) < \frac{2}{3}n$。此外，由于 $\iota'_{\mathrm{gt}}(C_4) = 2$ 且 $\iota'_{\mathrm{gt}}(C_5) = 2$，因此$\iota_{\mathrm{gt}}(G) < \frac{2}{3}n$。于是我们还可以进一步假设 $\Delta \geq 3$。

首先假设我们进行的是 D-博弈。在这种情况下，我们采用定理 1 中的记号和证明。特别地，t表示支配者采用其贪心策略时，在 D-博弈中所进行的步数，因此 $\iota_{\mathrm{gt}}(G) \leq t$。我们证明 $t \leq \frac{2}{3}n$。根据我们先前的假设，$\delta \geq 2$ 且 $\Delta \geq 3$。由定理 1 证明中的断言 2 可知，$U \subseteq \mathcal{S}$ 且 U 是 G中的一个打包。若 $|U| \geq 2$，则 diam$(G) \geq 3$，这与假设矛盾。因此，$k_2 = |U| \leq 1$。假设 $k_2 = 0$。于是，博弈在阶段 1 结束，且 $t = 2k_1 - 1$ 或 $t = 2k_1$。若 $t = 2k_1 - 1$，则如定理 1 的阶段 1 证明所示，我们有 $t < \frac{2}{3}n$。因此，可以假设 $t = 2k_1$。回想一下，对所有 $i \in [k_1]$，都有 $m_{2i-1} \geq 2$；对所有 $i \in [k_1]$，都有 $m_{2i} \geq 1$。如定理 1 的证明中支配者采用贪心策略后的论述所示，我们有 $m_1 \geq \Delta$，因此 $m_1 \geq 3$。于是，

$$n = \left(m_1 + \sum_{i=2}^{k_1} m_{2i-1}\right) + \left(\sum_{i=1}^{k_1} m_{2i}\right) \geq (2k_1 + 1) + k_1 = 3k_1 + 1,$$

因此，$t = 2k_1 \leq \frac{2}{3}(n - 1) < \frac{2}{3}n$。所以我们可以假设 $k_2 = 1$，否则所需的上界便成立。在这种情况下，我们有 $t = 2k_1 + k_2 = 2k_1 + 1$，因此

$$n = \left(m_1 + \sum_{i=2}^{k_1} m_{2i-1}\right) + \left(\sum_{i=1}^{k_1} m_{2i}\right) + k_2 \geq (2k_1 + 1) + k_1 + 1 = 3k_1 + 2,$$

这意味着 $t = 2k_1 + 1 \leq \frac{2}{3}(n-2) + 1 < \frac{2}{3}n$。

其次，假设我们进行的是 S-博弈。此时，我们采用定理2中的记号和证明。特别地， t 表示支配者采用其贪心策略时，S-博弈中所进行的步数，因此 $\iota_{\mathrm{gt}}(G) \leq t$。根据我们先前的假设， $\delta \geq 2$ 且 $\Delta \geq 3$。我们证明 $t \leq \frac{2}{3}n$。与 D-博弈的情形一样，我们有 $U \subseteq S$。此外，集合 U 是 G 中的一个打包，且 $k_2 = |U| \leq 1$。假设 $k_2 = 0$。因此，博弈在阶段 1结束，且 $t = 2k_1$或 $t = 2k_1 + 1$。若 $t = 2k_1$，则如定理2的证明中所示，我们有 $t \leq \frac{2}{3}(n - \delta + 1) < \frac{2}{3}n$，注意到 $\delta \geq 2$。因此，我们可以假设 $t = 2k_1 + 1$。回顾一下，对于所有 $i \in [k_1 + 1] \setminus \{1\}$，都有 $m_1 \geq \delta \geq 2$ 且 $m_{2i-1} \geq 1$；对于所有 $i \in [k_1]$，都有 $m_{2i} \geq 2$。因此，

$$n = \left(\sum_{i=1}^{k_1} m_{2i}\right) + \left(m_1 + \sum_{i=2}^{k_1+1} m_{2i-1}\right) \geq 2k_1 + (2 + k_1) = 3k_1 + 2,$$

因此，$t = 2k_1 + 1 \leq \frac{2}{3}(n-2) + 1 < \frac{2}{3}n$。所以我们可以假设 $k_2 = 1$，否则所需的上界即可得出。在这种情况下，我们有 $t = 2k_1 + 1 + k_2 = 2k_1 + 2$，因此

$$n = \left(\sum_{i=1}^{k_1} m_{2i}\right) + \left(m_1 + \sum_{i=1}^{k_1+1} m_{2i-1}\right) + k_2 \geq 2k_1 + (2 + k_1) + 1 = 3k_1 + 3,$$

这意味着 $t = 2k_1 + 2 \leq \frac{2}{3}(n-3) + 2 = \frac{2}{3}n$。 □

4 连通图的一般上界

接下来，我们研究连通图的（支配者先手）博弈全孤立数和斯托勒先手博弈全隔离数的一般上界。

定理4 若 G 是一个阶为 $n \geq 3$ 的连通图，则 $\iota_{\mathrm{gt}}(G) < \frac{5}{6}n$。

证明。设 G 是一个阶为 $n \geq 3$ 、最小度为 δ （其中 $\delta \geq 1$）、最大度为 Δ 的连通图。若 $\delta \geq 2$，则由推论 1 可得所需的上界。若 $\mathrm{diam}(G) \leq 2$，则由定理 3 可得所需的上界。因此我们可以假设 $\delta = 1$ ，且连通图 G 满足 $\mathrm{diam}(G) \geq 3$。下文沿用定理1的记号和证明。特别地， t 表示支配者采用其贪心策略时博弈进行的步数，因此 $\iota_{\mathrm{gt}}(G) \leq t$。

现在我们对支配者的策略作如下修改。与定理 1 的证明一样，支配者采用贪心策略，因此在他的每一步中，都会选择一个能标记尽可能多未标记顶点的顶点。在支配者遵循贪心策略的前提下，只要可能，他每一步都会选择一个非叶顶点。因此，如果支配者有两个或更多可选的贪心步（每一步标记相同数量的未标记顶点），那么只要可能，他就会从所有此类贪心步中选择一步，使其选择非叶顶点。我们将证明，采用修改后的策略后，我们有 $t \leq \frac{5}{6}n$。

考虑在阶段 1 结束后、博弈进入阶段 2 之前，已选顶点、已标记顶点和未标记顶点的集合 S、M 和 U。根据定理 1 证明中的断言 2，我们有 $U \subseteq S$，且 U 是 G 中的一个打包。回想一下，$k_2 = |U|$。如果 $k_2 = 0$，那么博弈会在阶段 1 结束，且 $t = 2k_1 - 1$ 或 $t = 2k_1$。在这两种情况下，如定理 1 的阶段 1 证明所示，我们有 $t \leq \frac{2}{3}n$。因此，我们可以假设 $k_2 \geq 1$。

采用定理1的证明中先前的记号，令 $U = \{u_1, \ldots, u_{k_2}\}$ and let $B_i = N_G(u_i)$ for $i \in [k_2]$。与之前一样，令 $B = N_G(U)$。如有必要，对 U 中的顶点重新命名，我们可以假设 $\deg_G(u_1) \leq \deg_G(u_2) \leq \cdots \leq \deg_G(u_{k_2})$。令 U_1 为 U 中在 G 里度为 1 的顶点子集，并令 $U_2 = U \setminus U_1$，因此 U_2 中的每个顶点在 G 中的度至少为 2。此外，令 $|U_i| = n_i$ for $i \in [2]$。若 $n_1 = 0$，则 $U = U_2$ and

$$|B| = \sum_{i=1}^{k_2} \deg_G(u_i) \geq 2k_2. \tag{15}$$

回顾定理1的证明中的不等式 (4)，我们有 $|A| \geq 2k_1 - k_2$。结合不等式 (15)，可得

$$\begin{aligned} k_2 = |U| &= n - |A| - |B| \\ &\leq n - (2k_1 - k_2) - 2k_2 \\ &= n - (2k_1 + k_2) \\ &= n - t. \end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned} n = |M| + |U| &\geq 3k_1 + k_2 \\ &= \tfrac{3}{2}(t - k_2) + k_2 \\ &= \tfrac{3}{2}t - \tfrac{1}{2}k_2 \\ &\geq \tfrac{3}{2}t - \tfrac{1}{2}(n - t), \end{aligned}$$

或者，等价地，$t \leq \frac{3}{4}n$。因此，我们可以假设 $n_1 \geq 1$。

断言 A $k_1 \geq n_1$。

证明。令 u 为 U_1中的任意一个顶点。因此，$\deg_G(u) = 1$。令 v 为 u的（唯一）邻点。根据假设，$\mathrm{diam}(G) \geq 3$，这意味着 v 有一个邻点（记作 w），其在 G中的度至少为 2。根据我们先前的观察，$U_1 \subseteq U \subseteq S$ 和 U 在 G中构成一个打包。此外，$k_2 = |U|$。回顾一下，S、M 和 U 分别表示阶段 1 结束后、博弈进入阶段 2 之前，已选择、已标记和未标记顶点的集合。特别要指出的是，U 中的所有顶点都是在博弈的阶段 1 中选取的。

我们证明了顶点 $u \in U_1$ 是由 Staller（在博弈的阶段 1 中）选取的。反设顶点 u是 Dominator 在博弈的阶段 1 中选取的。设在选取顶点 u 之前，S'、M' 和 U'分别表示已选顶点、已标记顶点和未标记顶点的集合。那么，$u \notin S'$和 $v \in U'$。此外，由于在阶段 1 结束时 u仍未被标记，因此可知 $u \in U'$。然而，如果 Dominator 选取顶点 w 而不是顶点 u，那么除了顶点 w （该顶点可能会在选取顶点 u时被标记）之外，他将标记所有在选取顶点 u时被标记的新顶点，而且还会标记顶点 u。

因此，与选取顶点 u相比，Dominator 选取顶点 w 至少会标记同样多的顶点。然而，由于 u 是叶顶点而 w 是非叶顶点，根据 Dominator 的修改后的策略，他会选取顶点 w，这就产生了矛盾。因此，顶点 u 必定是由 Staller 在博弈的阶段 1 中选取的。此外，当 Staller 选取顶点 u 时，Dominator 之前采取的（贪心）行动必然标记了至少两个新顶点；注意，选取顶点 w 将至少标记两个新顶点，即 u 和 v。

集合 U_1 中的顶点因此全都由 Staller 选取。由于 Staller 每次选择 U_1 中的顶点都发生在博弈的阶段 1，且 Staller 在博弈的阶段 1 总共走了 k_1 步，我们推得 $n_1 \leq k_1$。□

断言 B $k_2 \leq \frac{1}{2}(n - k_1)$。

证明。 根据假设， $n_1 \geq 1$。因此，

$$|B| = \sum_{i=1}^{n_1} |B_i| + \sum_{i=n_1+1}^{k_2} |B_i| \geq n_1 + 2(k_2 - n_1) = 2k_2 - n_1. \tag{16}$$

回顾定理 1 的证明中的不等式 (4)，我们有 $|A| \geq 2k_1 - k_2$。由断言 A，我们有 $k_1 \geq n_1$。结合不等式（16），这些观察得出以下不等式链:

$$\begin{aligned} k_2 = |U| &= n - |A| - |B| \\ &\leq n - (2k_1 - k_2) - (2k_2 - n_1) \\ &= n - 2k_1 - k_2 + n_1 \\ &\leq n - k_1 - k_2, \end{aligned}$$

或者，等价地， $k_2 \leq \frac{1}{2}(n - k_1)$。□

回顾 $n \geq \frac{3}{2}t - \frac{1}{2}k_2$。因此，由断言 B，我们推得 $n \geq \frac{3}{2}t - \frac{1}{4}(n - k_1)$，或者，等价地，$t \leq \frac{5}{6}n - \frac{1}{6}k_1$。由于 $k_1 \geq 1$，我们有 $t < \frac{5}{6}n$，如所要证明的。这就完成了定理4的证明。 □

定理5 若 G 是一个阶为 $n \geq 3$的连通图，则 $\iota'_{\mathrm{gt}}(G) \leq \frac{5}{6}n$。

证明。 设 G 是一个阶为 $n \geq 3$ 、最小度为 δ （其中 $\delta \geq 1$）且最大度为 Δ的连通图。若 $\delta \geq 2$，则由推论3可得 $\iota'_{\mathrm{gt}}(G) \leq \frac{3}{4}n - \frac{1}{4} < \frac{5}{6}n$。若 diam$(G) \leq 2$，则所需的界由定理 3 得出。因此，我们可以假设 $\delta = 1$ ，且连通图 G满足 diam$(G) \geq 3$。下文采用定理2中的记号和证明。特别地， t 表示支配者采用其贪心策略时，S-博弈中所进行的步数，因此 $\iota_{\mathrm{gt}}(G) \leq t$。

现在我们对支配者的策略作如下修改。与定理 3 的证明中一样，支配者采用贪心策略，因此每一步，支配者都会选择一个能标记尽可能多的先前未标记顶点的顶点。在支配者采用其

贪心策略的前提下，只要可能，支配者每一步都会选择一个非叶顶点。因此，如果支配者有两个或更多可选的贪心步（每一步都能标记相同数量的先前未标记顶点），那么只要可能，支配者就会从所有这些贪心步中选择一个非叶顶点。我们证明，采用修改后的策略后，有 $t \leq \frac{5}{6}n$。

考虑阶段 1 结束后、博弈进入阶段 2 之前选定、已标记和未标记顶点的集合 S、M 和 U。根据定理 1 的证明中的断言 2，我们有 $U \subseteq S$ 和 U 是 G 中的一个打包。回顾一下，$k_2 = |U|$。如果 $k_2 = 0$，那么博弈会在阶段 1 结束，并且 $t = 2k_1$ 或 $t = 2k_1 + 1$。在这两种情况下，如定理 2 的阶段 1 证明所示，我们有 $t \leq \frac{2}{3}n + \frac{1}{3}$，注意到 $\delta = 1$。因此，我们可以假设 $k_2 \geq 1$。

现在，我们沿用此前在定理 2 的证明中对集合 A 和 B 的记号，以及在定理 4 的证明中对集合 U、U_1 和 U_2 的记号。特别地，对于 $i \in [2]$，有 $|U_i| = n_i$。如果 $n_1 = 0$，那么 $U = U_2$，并且如定理 2 的证明中那样，我们据此推得

$$|B| \geq 2k_2 \quad \text{and} \quad |A| \geq 2k_1 + 1 - k_2. \tag{17}$$

根据不等式（17），并回想起 $|U| = k_2$，我们有

$$\begin{aligned} k_2 = |U| &= n - |A| - |B| \\ &\leq n - (2k_1 + 1 - k_2) - 2k_2 \\ &= n - (2k_1 + 1 + k_2) \\ &= n - t. \end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned} n = |M| + |U| &\geq (3k_1 + 1) + k_2 \\ &= \tfrac{3}{2}(t - k_2 - 1) + k_2 + 1 \\ &= \tfrac{3}{2}t - \tfrac{1}{2}k_2 - \tfrac{1}{2} \\ &\geq \tfrac{3}{2}t - \tfrac{1}{2}(n - t) - \tfrac{1}{2}, \end{aligned}$$

或者，等价地，$t \leq \frac{3}{4}n + \frac{1}{4}$。因此，我们可以假设 $n_1 \geq 1$。现在完全按照定理4的证明（见断言 A）进行推导，我们得到 $k_1 \geq n_1$ 和 $|B| \geq 2k_1 - n_1$。因此我们推断

$$\begin{aligned} k_2 = |U| &= n - |A| - |B| \\ &\leq n - (2k_1 + 1 - k_2) - (2k_2 - n_1) \\ &= n - k_1 - k_2 - 1 + (n_1 - k_1) \\ &\leq n - k_1 - k_2 - 1, \end{aligned}$$

或者，等价地，$k_2 \leq \frac{1}{2}(n - k_1 - 1)$。如前所示，我们有 $n \geq \frac{3}{2}t - \frac{1}{2}k_2 - \frac{1}{2}$。因此，$n \geq \frac{3}{2}t - \frac{1}{2}k_2 - \frac{1}{2} \geq \frac{3}{2}t - \frac{1}{4}(n - k_1 - 1) - \frac{1}{2}$，或者，等价地，$t \leq \frac{5}{6}n - \frac{1}{6}(k_1 + 1) + \frac{1}{3}$。由于 $k_1 \geq 1$，我们有 $t \leq \frac{5}{6}n$，正如所要证明的。定理5的证明至此完成。□

5 结束语

我们针对博弈全孤立数提出以下猜想。

猜想1 若 G 是一个阶为 n 的图，且 G 的每个连通分支的阶至少为3，则$\iota_{\mathrm{gt}}(G) \leq \frac{2}{3}n$。

我们指出，若猜想1成立，则关于博弈全孤立数的$\frac{2}{3}n$-上界是紧的。举例来说，设 G为一个阶为 n的图，其中每个连通分支都是一条 P_3-或 P_6-分支路径，或一个 C_3-或 C_6-分支圈。Staller 的策略是：针对 Dominator 的每一步，都在 Dominator 上一步落子的连通分支中落子。当 Dominator 在一个 P_3-或 C_3-分支中落子时，Staller 就在该连通分支中选择一个可选顶点，使所有顶点都被标记。当 Dominator 在一个 P_6-或 C_6-分支中落子时，Staller 就按照自己的最优策略，在该连通分支中选择一个可选顶点落子，从而确保在这些连通分支中共进行四步（Dominator 两步，Staller 两步）。（注意，如果 Dominator 在一个 C_6-分支 C中选择顶点 v 落子，那么 Staller 就在圈 C上选择与 v 距离为 3 的顶点落子，从而迫使双方在 C上额外落两步。）博弈结束时，每个 P_3-和 C_3-分支中落了两步，每个 P_6-和 C_6-分支中落了四步，这意味着 $\iota_{\mathrm{gt}}(G) \geq \frac{2}{3}n$。然而，若猜想1成立，则 $\iota_{\mathrm{gt}}(G) \leq \frac{2}{3}n$。因此，$\iota_{\mathrm{gt}}(G) = \frac{2}{3}n$。

参考文献

[1] P. Borg, 《关于由一个顶点支配的图的隔离问题猜想的证明》。离散应用数学**371** (2025年), 247–253.[2] R. Boutrig 和 M. Chellali, 《总顶点-边支配》。国际计算数学杂志 **95** (2018), 1820–1828.[3] G. Boyer 和 W. Goddard, 《不相交隔离集及具有最大隔离数的图》。离散应用数学**356** (2024年), 110–116.[4] G. Boyer、W. Goddard 和 M. A. Henning, 《图中的总隔离》。数学等式**99**(2025年), 623–633.[5] G. Boyer、W. Goddard 和 M. A. Henning, 《（正则）二部图的总隔离数界》，手稿，2025年.[6] B. Breˇsar、T. Dravec、D. P. Johnston、K. Kuenzel 和 D. F. Rall, 《图上的孤立博弈》。arXiv:2409.14180 (2024年).[7] B. Breˇsar、M. A. Henning、S. Klavˇzar 和 D. F. Rall，图上的支配博弈。*Springer*数学简明丛书。*Springer*，*Cham*，(2021) x + 122 页.[8] B. Breˇsar、S. Klavˇzar 和 D. F. Rall, 《支配博弈与想象策略》。*SIAM*离散数学杂志 **24** (2010年), 979–991.[9] Cs. Bujt´as、T. Dravec、M. A. Henning 和 S. Klavˇzar, 《博弈隔离数的界及路和圈的精确值》。arXiv:2507.08503 (2025年).[10] Y. Cao、X. An、Xinhui 和 B. Wu, 《图中 k团的总隔离》。离散数学**348**(2025年), 第114689号。

[11] Y. Caro 和 A. Hansberg, 《部分支配——图的隔离数》。*Filomat* **31**(2017年), 3925–3944. [12] A. Dapena、M. Lema´nska、M. J. Souto-Salorio 和 F. J. Vazquez-Araujo, 《树的隔离数与支配数》。*Mathematics* **9** (2021年), 第1325号.[13] W. Goddard 和 M. A. Henning, 《最小度为四的图的隔离数》。arXiv:2508.21551 (2025年).[14] T. W. Haynes、S. T. Hedetniemi 和 M. A. Henning, 《图的支配：核心概念》丛书：施普林格数学专著，Springer，Cham，2023年。xx + 644 页.[15] M. A. Henning 和 A. Yeo, 《图中的全支配》。丛书：施普林格数学专著，Springer，Cham，纽约，2013年。xiv + 178页.[16] W. B. Kinnersley、D. B. West 和 R. Zamani, 《博弈支配数的极值问题》。*SIAM*离散数学杂志**27** (2013年), 2090–2107.[17] M. Lema´nska、M. Mora 和 M. J. Souto-Salorio, 《隔离数等于阶的三分之一的图》。离散数学**347**(2024年), 第113903号.[18] J. W. Peters, 《支配与连通性的理论与算法结果》。博士论文，克莱姆森大学，克莱姆森（1986年）。.[19] P. Zyli´nski, 《图中的点边支配》。数学等式 93 (2019年), 735–742。