# 耦合细胞系统中的异宿网络

Liliana Garrido da Silva[1]Pedro Soares[2⋆1] 波尔图大学数学中心，葡萄牙[2] 里斯本大学高等经济与管理学院，葡萄牙[2⋆]
psoares@iseg.ulisboa.pt

arXiv:2601.03370v1 [math.DS] 6 Jan 2026

2026年1月8日

**摘要**

耦合细胞系统是与耦合细胞网络相关联的常微分方程系统，其维数由细胞数量决定。异宿连接是常微分方程系统的两个平衡态之间的解轨线集合。异宿网络的实现是一个常微分方程系统，其中包含与节点对应的平衡态，以及根据异宿网络在这些节点之间形成的异宿连接。本文研究耦合细胞系统中异宿网络的实现，重点关注将异宿连接嵌入二维和三维不变子空间。我们调整了Field方法，即将每个异宿连接嵌入不同的二维同步子空间，以支持同一子空间中的多条连接。利用图论中的书嵌入概念，我们证明，任何异宿网络都可以通过耦合细胞系统实现，所需细胞数量与该网络的书厚度成正比。此外，我们将分析扩展到三维同步子空间，从而实现更复杂的构造。在这种情况下，实现所需的细胞数量与异宿网络中的节点数量成正比。

## 1 引言

异宿网络是一类由有向图表示的动力学现象，其中每个节点对应于动力系统的一个平衡点，每条有向边表示连接两个平衡态的轨迹。在这里，我们考虑由$\mathbb{R}^n$中的常微分方程组给出的动力系统。具体而言，异宿连接是位于源平衡态的不稳定流形与目标平衡态的稳定流形交集中的轨迹。通常，异宿网络被定义为异宿环的并集。这等价于假设有向图是强连通的，即任意一对节点之间都存在一条有向路径。

研究异宿网络的一个核心挑战是实现它们：构造一个相图包含所需网络的动力系统。异宿网络的实现并不唯一，同一有向图的不同实现可能呈现不同的动力学现象。鲁棒实现尤其有价值，这意味着它们在给定系统类别的小扰动下仍能持续存在。鲁棒实现通常依赖于

不变子空间的存在，尤其是二维不变子空间，这一点可见于等变系统 [3, 1],耦合系统 [2, 8],复制子动力学 [7]。

在这项工作中，我们着重研究如何利用耦合细胞系统实现异宿网络。耦合细胞系统是一种遵循底层耦合细胞网络结构的动力系统， [6, 5]。耦合细胞网络由有向图给出，其中节点和有向箭头分别称为细胞和耦合。耦合细胞系统的维数由细胞数量决定，因为每个细胞都对应常微分方程系统中的一个实变量。此外，若相应细胞之间存在耦合，则一个变量的动态会依赖于另一个变量。耦合细胞系统具有称为同步子空间的不变空间，在这些空间中，部分细胞以相同的方式演化。同步子空间由耦合细胞网络通过平衡着色唯一确定。

我们考虑具有非对称输入的齐次耦合细胞网络，这意味着所有细胞类型相同，但接收的耦合各不相同。在这种情形下，所有变量均相等的全同步子空间是一维的，在我们的构造中，它是平衡点所在的位置。异宿连接嵌入于更高维的同步子空间中，这些子空间为二维或三维。

在这项工作中，我们研究两种不同的网络：异宿网络和耦合细胞网络。为避免歧义，我们将异宿网络（用花体字母表示）与耦合细胞网络（用标准大写字母表示）区分开来。此外，我们分别将异宿网络的节点和边称为平衡节点和连接；而耦合细胞网络的节点和边则分别称为细胞和耦合。

# 2 结果与讨论

在这项工作中，我们通过两种方式，利用耦合动力系统探索异宿网络的实现。第一，二维不变子空间中可以容纳多少个异宿连接；第二，如何在三维不变子空间中容纳异宿连接。这两种方式得到的实现，其维数都低于文献中先前提出的实现。

Field [4] 证明，任何异宿网络都可以通过耦合细胞系统实现，方法是将每个异宿连接嵌入一个不同的二维同步子空间。这些子空间可以想象成书中的“页”，而全同步子空间则充当书脊。每一页都能稳健地支持一个鞍点与汇平衡点之间的单个异宿连接。

在本研究中，我们扩展了 Field 的构造，允许多个异宿连接共享同一个同步子空间。因此，我们采用了图论中的书嵌入概念 [9, 10]。书嵌入是对图的一种无自交三维表示：节点位于一条直线上，边则位于各页上，而页是以该直线为边界的半平面。这个概念通常用于无向图。我们通过施加额外约束，将其应用于异宿情形：同一页上的任何节点都不能同时有入连接和出连接，且同一页上的任何节点都不能有多个出连接。我们借鉴图论中的书厚度概念，将其定义为对异宿网络进行书嵌入所需的最少页数。我们证明，任何异宿网络都可以在一个耦合细胞系统中实现，且该系统的细胞数等于该网络的书厚度加一。

我们进一步推广了这一方法，将异宿连接嵌入三维同步子空间中。在这种情况下，

每个节点的不稳定流形可以是二维的，从而允许同一子空间内的单个节点有多个出向连接。我们构造具有适当同步子空间的耦合细胞网络，并证明任何具有 $n$ 个节点的异宿网络都可以在具有 $2n+1$ 个细胞的系统中实现。在这一实现中，每个节点在其中一个同步子空间中是鞍点，在其他同步子空间中则是汇。这种实现几乎是完备的，也就是说，不稳定流形中除去一个测度为零的子集外，其余部分都属于稳定流形。在这种方法中，实现该异宿网络的动力系统维数与平衡节点的数量成正比。

# 3 背景与预备知识

本节回顾两种不同的网络概念：耦合细胞网络和异宿网络。

## 3.1 耦合细胞网络

我们采用 [6, 5] 中给出的耦合细胞系统定义。

给定一个细胞集合 $C$，以及细胞之间（包括自环）的耦合多重集 $E \subset C \times C$。细胞和耦合分别根据细胞集合 $\sim_C$ 和耦合集合 $\sim_E$ 上的等价关系划分为不同类型。这里，我们假设所有细胞类型相同，且每个细胞恰好接收一个每种耦合类型的耦合。这通常称为具有非对称输入的齐性网络。在本文中，我们将“耦合细胞网络”一词用于此类网络。将边类型从 1 编号至 $k$，边的多重集可划分为 $E = E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_k$，其中集合 $E_i$ 中的边具有类型 $i$，而 $i = 1$，……，$k$。

**定义1.** 给定一个细胞集合 $C$及其子集 $E_i \subset C \times C$，对于 $i = 1, \ldots, k$。若对每个 $1 \leq i \leq k$ 和每个细胞$c \in C$，都存在唯一的 $c_i \in C$ 使得 $(c_i, c) \in E_i$，则三元组 $(C, E_1, \ldots, E_k)$ 是一个耦合细胞网络。$\Diamond$

在全文中，我们将指向目标细胞 $c \in C$、类型为 $i$ 的输入耦合的起始细胞记为 $c_i$，$(c_i, c) \in E_i$，其中 $i = 1, \ldots, k$。

**例1.** 设 $C = \{0, 1, 2\}$, $E_1 = \{(1,0), (0,1), (1,2)\}$ 以及 $E_2 = \{(2,0), (2,1), (0,2)\}$。三元组 $(C, E_1, E_2)$ 是一个包含3个细胞和2种边类型的耦合细胞网络。该网络是图2中从左数第二个网络。第一种边用普通箭头表示，第二种边用双箭头表示。$\Diamond$

为了以图形方式表示不同的边类型，我们使用具有不同箭头和形状的箭头，见图8。

我们按如下方式为给定的耦合细胞网络关联一个动力系统。每个细胞 $c$ 对应一个变量 $x_c \in \mathbb{R}$。对于函数 $f\colon \mathbb{R}^{k+1} \to \mathbb{R}$，我们关联以下可容许向量场 $f^N\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 其中 $n$ 是 $N$ 中的细胞数量，并且

$$f_c^N(x) = f(x_c, x_{c_1}, \ldots, x_{c_k}).$$

耦合细胞系统由常微分方程系统给出

$$\dot{x} = f^N(x).$$

耦合细胞系统的扰动是指对函数 $f$ 的扰动 .

**例2.** 令 $N$ 为图2中从左数第二个耦合细胞网络。与 $N$ 相关联的耦合细胞系统具有以下形式：

$$\begin{cases} \dot{x}_0 &= f(x_0, x_1, x_2) \\ \dot{x}_1 &= f(x_1, x_0, x_2) \\ \dot{x}_2 &= f(x_2, x_0, x_1) \end{cases},$$

对于某个函数 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$。 $\Diamond$

耦合细胞系统的一个关键特征是存在由底层网络结构决定的不变子空间。多对角子空间是$\mathbb{R}^n$ 的一个子空间，其中某些细胞坐标相等，即对于某些细胞 $i$ 和 $j$，有 $x_i = x_j$。给定一个多对角子空间 $\Delta$，我们可以为细胞指定一种着色，使得当且仅当它们在 $\Delta$中的坐标相等时，两个细胞具有相同的颜色。多对角子空间与细胞着色之间存在一一对应关系。细胞着色是细胞集合上的一个等价关系；如果两个细胞属于同一个等价类，我们就说它们具有相同的颜色。给定一个细胞着色 $\bowtie$，我们可以定义相应的多对角子空间 $\Delta_{\bowtie}$，其中当相应的细胞具有相同的颜色时，坐标相等

$$\Delta_{\bowtie} = \{x \in \mathbb{R} : c \bowtie d \Rightarrow x_c = x_d\}.$$

如果对于任意两个细胞 $c \bowtie d$，对于每一种边类型 $i = 1, \ldots, k$都有$c_i \bowtie d_i$，我们就称着色 $\bowtie$是平衡的。当且仅当与多对角子空间 $\Delta_{\bowtie}$ 相关联的着色 $\bowtie$ 是平衡的时，多对角子空间 $\Delta_{\bowtie}$ 在任意可容许向量场下是不变的。这类不变的多对角子空间称为同步子空间。

对于齐次网络（本例即为此情形），全同步子空间$\Delta_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : \forall_{c,d} x_c = x_d\}$ 始终是一个同步子空间。该子空间是一维的，我们将用它来确定平衡点的位置。每个同步子空间都包含全同步子空间，并且它们共同构成一个格结构。最小同步子空间是指除全同步子空间外不包含其他同步子空间的子空间。异宿连接将嵌入这些最小同步子空间中。注意，任意两个最小同步子空间的交集恰好是全同步子空间。

**例3**。令 $N$ 为图2中从左数第二个所示的耦合细胞网络。对于与 $N$相关联的任意耦合细胞系统，全同步子空间 $\Delta_0 = \{x_0 = x_1 = x_2\}$ 都是不变的。此外，该网络存在两个维数为2的同步子空间：

$$\Delta_1 = \{x_0 = x_2\}, \quad \Delta_2 = \{x_0 = x_1\}.$$

相应的平衡着色由类 $\{\{0, 2\}, 1\}$ 和 $\{\{0, 1\}, 2\}$ 给出。

着色 $\{0, \{1, 2\}\}$ 不是平衡的。细胞 1 和 2 具有相同的颜色，并且它们接收来自细胞 0 和 1 的第一类型的边。然而，细胞 0 和 1 的颜色不同。因此，该着色不是平衡着色，并且多对角子空间 $\{x_1 = x_2\}$ 对于与 $N$ 相关的某些耦合细胞系统不是不变的。$\Diamond$

## 3.2 异宿网络

考虑定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的光滑动力系统，其由以下方程控制

$$\dot{x} = F(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

其中，$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是一个光滑向量场。取一个平衡点 $\xi \in \mathbb{R}^n$,$F(\xi) = 0$。$\xi$的稳定流形和不稳定流形分别记为 $W^s(\xi)$和 $W^u(\xi)$，定义如下：

$$W^s(\xi) = \{x \in \mathbb{R}^n : \lim_{t\to+\infty} \phi_t(x) = \xi\}, \quad W^u(\xi) = \{x \in \mathbb{R}^n : \lim_{t\to-\infty} \phi_t(x) = \xi\},$$

其中，$\phi_t(x)$ 表示动力系统在时间 $t$、初始条件为 $x$ 时的流。设 $\xi$ 和 $\xi'$ 是该动力系统的两个平衡态。从 $\xi$ 到 $\xi'$ 的异宿连接是满足以下条件的轨迹 $\phi_t(x)$ 的像：

$$\lim_{t\to-\infty} \phi_t(x) = \xi_i, \quad \lim_{t\to\infty} \phi_t(x) = \xi_j.$$

存在这样的轨迹意味着 $W^u(\xi) \cap W^s(\xi') \neq \emptyset$。若 $\xi = \xi'$，则称该连接为同宿连接。

异宿环是由有限个平衡态 $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k\}$ 和异宿连接 $\gamma_i$ 构成的集合，并满足以下条件：

$$\lim_{t\to-\infty} \gamma_i(t) = \xi_i, \quad \lim_{t\to\infty} \gamma_i(t) = \xi_{i+1}, \quad \text{with } \xi_{k+1} := \xi_1.$$

异宿网络是此类异宿环的并集。我们用有向图 $\mathcal{N}$ 表示异宿网络，其中节点对应平衡态，边表示异宿连接。如果某动力系统的相图包含 $\mathcal{N}$ 所描述的平衡态和异宿连接，则称该动力系统实现了异宿网络 $\mathcal{N}$。

如果某个实现能够在系统的小扰动下保持存在，则称其具有鲁棒性。特别地，我们将考察与固定网络结构 $N$ 相关联的耦合细胞系统类中的扰动。

如果平衡点的不稳定流形没有充分包含在异宿网络中，则异宿网络的某个实现可能并不“可见”。实现被称为：

- 完全的，如果每个平衡点的不稳定流形都完全包含在异宿网络中。
- 几乎完全的，如果每个平衡点的不稳定流形除去一个勒贝格测度为零的集合后，都包含在异宿网络中，[1, 定义 2.6]。

为避免混淆这两种网络结构，异宿网络使用花体大写字母 $\mathcal{N}$ 命名，而耦合细胞网络则使用印刷体大写字母 $N$ 标记。

# 4 通过书嵌入实现

本节将调整 [4] 中介绍的、利用耦合细胞系统实现异宿网络的方法。Field 对异宿网络 [4] 的实现将平衡点置于完全同步线上，并使每个异宿连接分别属于不同的二维同步子空间。这可以看作一本书：每一页对应一个不同的 $2D$ 同步子空间，而平衡点沿着书脊排列。在图论中，图的书嵌入是$3D$ 一种图的表示方式，其中节点位于书脊（直线）上，每条边都完全处于某一页（平面）内，且各边互不相交。书嵌入允许每一页包含多条边。给定一个

异宿网络，我们证明存在一种稳健实现，它使用的细胞数量等于页数加一。我们将在下一小节中通过调整 Field 的实现来证明这一结果，使同一二维同步子空间中可以包含多个异宿连接。在最后一小节中，我们将展示一些示例，并将这种实现与文献中的其他实现联系起来。

首先，我们将图论中的书嵌入概念调整到异宿网络的语境中，并陈述主要结果。

**定义 2**。 设 $G = (V, E)$ 为一个有向图。书嵌入由以下部分组成 f:

- 一条直线 $l \subset \mathbb{R}^3$,
- 一组平面/页 $H_1, \dots, H_k \subset \mathbb{R}^3$,
- 将图嵌入到 $\mathbb{R}^3$ 中的方式 $\phi$： $G \to \mathbb{R}^3$,

使得

- 每个顶点 $v$ 都对应直线 $p \in l$, $\phi(v) = p \in l$上的一个不同点,
- 每条边 $e = v_1 \to v_2$ 都对应某个平面 $H_i$, $\phi(e) \subset H_i$内一条从 $\phi(v_1)$ 到 $\phi(v_2)$ 的光滑曲线,
- 这些平面恰好相交于直线 $l$, $H_i \cap H_j = l$,
- 这些曲线仅在起点和终点处与直线 $l$ 相交，即 $\phi(e) \cap l = \{\phi(v_1)\ \phi(v_2)\}$
- 任意两条边除直线 $l$, $[\phi(e_1) \cap \phi(e_2)] \setminus l = \emptyset$外均不相交

and

- 在每个平面内，每个顶点要么只有入边，要么只有出边,
- 在每个平面中，每个顶点最多有两条出边，每个半平面各一条。

图的书厚度是该图所有书嵌入中所需页数的最小值。◊

最后两项限制并不属于图论中通常所说的书嵌入。

**例 4.** 在图1中，左侧的异宿网络可以按右侧所示进行书嵌入。该嵌入使用两页，$H_1$ 和 $H_2$，每页各包含两条边。顶部的平衡节点既有入连接也有出连接，但按我们的限制要求，它们被放置在不同的页上。该异宿网络的任何书嵌入都需要两页。因此，该网络的书厚度等于 2。

不过，按照标准的图论定义，若不考虑最后两项约束，该网络可以嵌入单页。具体而言，如果某个节点在同一页上既有入连接又有出连接，那么我们对该异宿网络的动力学实现就不可能实现。我们用于实现该异宿网络的不变平面的交集是一条不变直线。根据连接是入连接还是出连接，该连接会趋近于这条直线或远离这条直线。由于这些连接不属于这条不变直线，二维不变平面不可能既包含趋近于同一平衡点的轨线，也包含远离该平衡点的轨线。◊

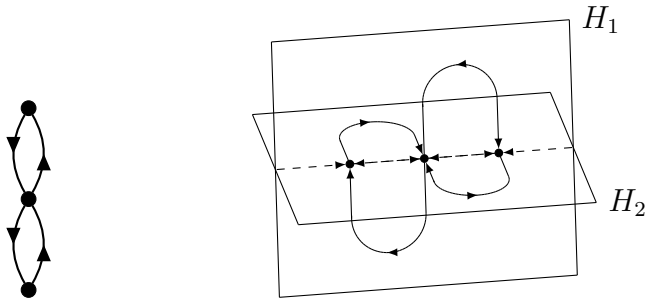


图1：异宿网络（左）及其书嵌入（右），其中每条连接都嵌入在一个不同的二维平面（页）中。

任何异宿网络（不含同宿连接）的一种简单书嵌入，是将每条边放在不同的页上。Field 的 [4]证明了，每个异宿网络（不含同宿连接）都可以用耦合细胞系统实现，正如这些简单书嵌入所示。我们将这一结果推广到上述定义的任意书嵌入。

**定理1**。设 $\mathcal{N}$ 是一个不含同宿连接的异宿网络，并设 $B$ 是 $\mathcal{N}$ 的一个书嵌入，含有 $k$ 页。那么，该异宿网络可以在一个含有 $k+1$ 个细胞的耦合细胞系统中鲁棒实现。

特别地，任何书厚度为 $b$ 且不含同宿连接的异宿网络，都可以在一个含有 $b+1$ 个细胞的耦合细胞系统中鲁棒实现。

该定理表明，利用耦合细胞系统实现异宿网络所需的维数，直接取决于网络嵌入书格式的效率。所需的页数越少，耦合细胞网络所需的细胞数就越少，动力系统的维数也越低。

## 4.1 证明

接下来，我们复现 [4] 中给出的实现，并将其调整为适用于任意书籍嵌入的形式。

**耦合细胞网络的构造** $P_n$

首先，我们说明如何构造一族具有所需二维同步子空间的耦合细胞网络。

实现中考虑的耦合细胞网络按如下方式递归定义。令 $P_1$ 为图2中的第一个网络，它包含两个细胞和一种边类型。令 $P_n$ 为由细胞 $\{0,1,\ldots,n\}$ 和按类型划分的边 $E_1$、$E_2$、……、$E_n$ 构成的网络。网络 $P_{n+1}$ 的细胞为 $\{0,1,\ldots,n,n+1\}$，且有 $n+1$ 种边类型。对于 $j=1$、……、$n$，类型为 $E_j \cup$ {的边为 ($j$、 $n+1$)}。新类型 $n+1$的边为 {($n+1$、 $c$)： $c=0$、1 ……、 $n$} $\cup$ {(0、 $n+1$)}。图2展示了通过上述构造得到的网络 $P_1$、 $P_2$、 $P_3$ 和 $P_5$ 。

根据 [4, 命题3.3 和引理 4.5], , 网络 $P_n$ 有 $n+1$ 个细胞和 $n$ 个非对称输入。此外，对于每个 $j=1,\ldots,n$， $\Delta_j=\{x_0=x_i, i\neq j\}$都是 $P_n$的一个二维同步子空间。在每个同步子空间 $\Delta_j$中，耦合细胞系统具有以下形式：

$$\begin{cases} \dot{x_0} = f(x_0, x_0, \ldots, x_0, \overbrace{x_j}^{\text{input j}}, x_0, \ldots, x_0) \\ \dot{x_j} = f(x_j, x_0, \ldots, x_0, x_0, x_0, \ldots, x_0) \end{cases}, \tag{1}$$

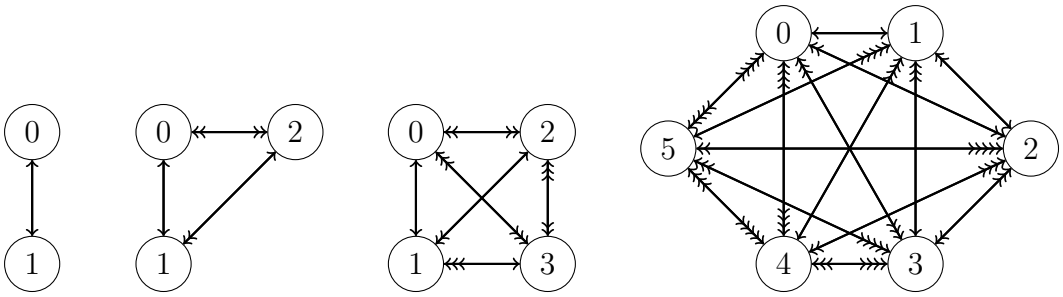


图2：用于实现具有二维同步子空间内连接的异宿网络的耦合细胞网络示例， $P_n$ 适用于 $n = 1$，2，3，5。

对于某个 $f$： $\mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$。设 $p \in \Delta_0 \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 是耦合细胞系统 $\dot{x} = f^{P_n}(x)$ 的一个完全同步平衡点。在 $p$ 处，方程 (1) 的雅可比矩阵的特征值为 $f_0(p) + f_1(p) + \cdots + f_n(p)$ 和 $f_0(p) - f_j(p)$，其中 $f_i$ 是 $f(y_0, y_1, \ldots, y_n)$ 关于 $y_i$的一阶导数。此外，耦合细胞系统 $\dot{x} = f^{P_n}(x)$ 在完全同步平衡点 $p \in \Delta_0$ 处的特征值为：

$$f_0(p) + f_1(p) + \cdots + f_n(p), f_0(p) - f_1(p), f_0(p) - f_2(p), \ldots, f_1(p) - f_n(p).$$

**平衡点附近的局部动力学**

给定一个厚度为 $k$ 且有 $n$个节点的异宿网络 $\mathcal{N}$ 的书嵌入，网络 $\mathcal{N}$的节点会映射到一条直线 $l \subset \mathbb{R}^3$上的点。不失一般性，可以假设这条直线与 $x$轴重合，即 $l = \{(x, 0, 0): x \in \mathbb{R}\}$。设节点 $n_i$ 在书嵌入下的像为$(\rho_i, 0, 0)$，并定义完全同步点 $p_i = (\rho_i, \ldots\ldots, \rho_i) \in \Delta_0 \subset \mathbb{R}^{k+1}$。这些点对应于利用与耦合细胞网络 $P_k$相关联的系统对异宿网络进行实现时的平衡点。书嵌入的平面 $H_j$ 将在二维同步子空间 $\Delta_{j+1}$中描绘异宿连接，其中$j = 1, \ldots\ldots, k$。

对于每个点 $p_i$，我们选择常数 $\alpha_0^i$， $\alpha_1^i$， $\ldots \alpha_k^i$，使得对于 $j = 1, \ldots\ldots, k$，如果平面 $H_j$ 上存在一条从 $p_i$ 出发的出边，则 $\alpha_0^i + \alpha_1^i + \cdots + \alpha_k^i < 0$；否则 $\alpha_0^i - \alpha_j^i > 0$。前述条件是可行的，因为每个平面 $H_j$ 上都只有来自某个平衡点的入边或出边，并且该异宿网络的每个节点至少有一条出连接。例如，取 $\alpha_0^i = -1$；如果平面 $H_j$ 上存在一条从 $p_i$ 出发的出边，则 $\alpha_j^i = -2k$；否则 $\alpha_j^i = 1$。

在每个完全同步点 $p_i \in \Delta_0 \subset \mathbb{R}^{k+1}$ 的一个充分小邻域内，我们定义 $f$： $\mathbb{R}^{k+1} \to \mathbb{R}$，使得 $f(p_i) = 0$，且 $f$ 在 $p_i$ 处的导数等于 $\alpha_0^i$， $\alpha_1^i$，……， $\alpha_k^i$，即

$$f_j(p_i) = \alpha_j^i,$$

对于 $j = 0, \ldots\ldots, k$。这意味着， $p_i$是耦合细胞系统 $f^{P_k}$ 的一个平衡点。此外，只有当页面 $H_j$ 上存在一条离开 $n_i$ 的出边时，才存在从 $p_i$ 逃逸到同步子空间 $\Delta_j$ 的轨线。该函数可按如下方式获得：取 $\epsilon_1, \ldots\ldots, \epsilon_n > 0$ 充分小，使得对于任意 ~~$i \neq j$~~， ~~$B_{2\epsilon_i}(p_i) \cap B_{2\epsilon_j}(p_j) = \emptyset$~~。并定义

$$f(y_0, y_1, \ldots, y_k) = \sum_{i=1}^{n} \delta_{p_i}(y_0, y_1, \ldots, y_k) \sum_{j=0}^{k} \alpha_j^i (y_j - \rho_i),$$

其中， $\delta_{p_i}$ 是一个隆起函数：当 $(y_0, y_1, \ldots\ldots, y_k) \in B_{\epsilon_i}(p_i)$ 时其值为 1，而当 $(y_0, y_1, \ldots\ldots, y_k) \notin B_{2\epsilon_i}(p_i)$ 时其值为 0。与 $P_k$ 相关联的耦合细胞系统具有如下形式

$$\begin{cases} \dot{x_0} = f(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k) \\ \dot{x_1} = f(x_1, x_0, x_2, \ldots, x_k) \\ \vdots \\ \dot{x_k} = f(x_k, x_1, x_2, \ldots, x_0) \end{cases}$$

注意， $f$ 的输入会发生置换，因此向量场 $f^{P_k}$ 在球$B_{2\epsilon_i}(p_i)$之外消失。此外，在每个球 $B_{\epsilon_i}(p_i)$内部，向量场 $f^{P_k}$是一个线性映射，使得 $p_i$是一个平衡点， $f^{P_k}(p_i) = 0$，并且 $J_f^{P_k}(p_i)$的特征值为

$$\alpha_0^i + \alpha_1^i + \cdots + \alpha_k^i, \alpha_0^i - \alpha_1^i, \alpha_0^i - \alpha_2^i, \ldots, \alpha_0^i - \alpha_k^i.$$

因此，向量场 $f^{P_k}$ 满足平衡点附近的局部条件，从而成为异宿网络 $\mathcal{N}$的一个实现。这意味着，如果 $n_i$是一个在第 $H_j$页上有出连接的平衡节点，那么平衡点 $p_i$ 在 $\Delta_j \setminus \Delta_0$ 中有一个不稳定方向。并且，如果 $n_i$ 是一个在第 $H$页上有入连接的平衡节点

$j$，那么平衡点 $p_i$ 在 $\Delta_j$中是一个汇。

**异宿连接的实现**

为了实现异宿连接，我们将改变直线 $\Delta_0$邻域之外的耦合细胞系统。考虑将从 $n_s$ 到 $n_t$ 的一条异宿连接嵌入为平面 $H_j$内的一条曲线。设 $\kappa > 0$ ，使得 $\kappa < \epsilon_s$, $\epsilon_t$ ，并且将 $\Delta_0$ 在 $\Delta_j$ 中平行平移 $\pm\kappa$ 后，与 $p_s$的不稳定流形横截相交。注意，平衡点在 $\Delta_0$中是稳定的，因为$\alpha_0^s+\alpha_1^s+\cdots+\alpha_k^s < 0$。由于 $\alpha_0^s-\alpha_j^s > 0$，当 $\kappa$ 足够小时， $p_s$在 $\Delta_j$中的不稳定流形与 $\Delta_0$的平行平移 $\pm\kappa$ 横截。此外，将 $\Delta_0$ 在 $\Delta_j$ 中平行平移 $\pm\kappa$后，与 $p_t$ 的稳定流形相交，因为$\alpha_1^t + \alpha_2^t + \cdots + \alpha_{k+1}^t$， $\alpha_1^t - \alpha_{j+1}^t < 0$ 且 $\kappa < \epsilon_t$。将 $\Delta_0$ 在 $\Delta_{j+1}$ 中平行平移 $\pm\kappa$后的结果由图3中的红线表示。由于异宿网络是有限的，我们可以选择 $\kappa$，使得上述条件对每一条异宿连接都成立。此外，不失一般性，我们可以假设，每条异宿连接的书本嵌入恰好两次穿过半径为 $\kappa$ 的 $l$ 管状邻域：一次是在离开起始节点时，另一次是在接近目标节点时。

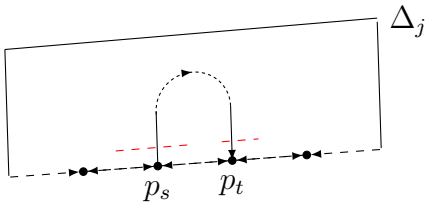


图3：示意一条嵌入在二维同步子空间 $\Delta_j$中的异宿轨道，该轨道连接 $n_s$ 与 $n_t$ 。

考虑从 $n_s$ 到 $n_t$ 的异宿连接，该连接通过书嵌入映射为平面 $H_j$ 内的一条曲线。为简化记号并给出耦合细胞系统的表达式，我们将平面 $H_j$ 旋转至 $xy$-平面。令 $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ 表示旋转到 $xy$-平面的异宿连接的书嵌入。于是，路径 $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ 从 $(\rho_s,0)$ 延伸至 $(\rho_t,0)$，并且它与

直线 $y = \pm\kappa$ 相交两次。因此，存在 $\tau_1$ 和 $\tau_2$，使得 $\gamma_2(\tau_1) = \gamma_2(\tau_2) = \pm\kappa$，并且 $|\gamma_2(t)| > \kappa$ 当且仅当 $\tau_1 < t < \tau_2$。接下来，将在耦合细胞系统 $f^{P_k}$ 中通过沿着弧$\psi$: $[\tau_1, \tau_2] \to \Delta_j \subset \mathbb{R}^{k+1}$的轨迹实现该异宿连接，该弧由 $(\psi)_i(t) = \gamma_1(t)$、$i \neq j$ 以及 $(\psi)_j(t) = \gamma_1(t) + \gamma_2(t)$ 给出。

我们修改函数 $f$，使得耦合细胞系统 $f^{P_k}$ 与弧 $\psi$ 相切：$[\tau_1, \tau_2] \to \mathbb{R}^{k+1}$ 位于完全同步线 $\Delta_0$ 的 $\kappa$ 管状邻域之外，$B_\kappa(\Delta_0)$。令 $A = B_\epsilon(\psi([\tau_1, \tau_2])) \setminus B_\kappa(\Delta_0)$ 和 $B = B_\epsilon(\{(\gamma_1(t) + \gamma_2(t)\ \gamma_1(t) \ldots, \gamma_1(t)) : t \in [\tau_1, \tau_2]\}) \setminus B_\kappa(\Delta_0)$ 为管状邻域。将 $\epsilon$ 取得足够小，我们便有 $A \cap B = \emptyset$。此外，当 $\kappa$ 足够小时，有 $W^u(p_s) \cap A \neq \emptyset$。集合 $A$ 和 $B$ 是函数 $f$ 在方程 (1) 中对应于输入的管状邻域。因此，我们将在这些管状邻域内，沿弧 $\psi$ 和 $\{(\gamma_1(t) + \gamma_2(t)\ \gamma_1(t) \ldots, \gamma_1(t)) : t \in [\tau_1, \tau_2]\}$，利用“水平流”来改变函数 $f$。令 $\delta_A(\delta_B)$ 为一个隆起函数，它在 $A(B)$ 之外等于零，在 $A(B)$ 内大于零。我们将以下项加到 $f$

$$\delta_A(y_0, y_1, \ldots, y_k)v(y) + \delta_B(y_0, y_1, \ldots, y_k)w(y),$$

其中，当 $y \in A$ 时，$v(y)$ 是 $\gamma_1$ 在时间 $t$ 处的导数；在该时刻，$y$ 投影到 $\psi([\tau_1, \tau_2])$（$A$ 的中心）上的投影等于 $\psi(t)$；而当 $y \in B$ 时，$w(y)$ 是 $\gamma_1 + \gamma_2$ 在时间 $t$ 处的导数；在该时刻，$y$ 投影到 $B$ 的中心上的投影等于（$\gamma_1(t) + \gamma_2(t)\ \gamma_1(t) \ldots, \gamma_1(t)$）。

耦合细胞网络 $\dot{x} = f^{P_k}(x)$ 为从 $n_s$ 到 $n_t$ 的异宿连接提供了实现，对应于从 $W^u(p_s) \cap \Delta_j \cap B_\kappa(\Delta_0) \neq \emptyset$ 出发的轨迹。该轨迹穿过 $\Delta_0$ 的管状邻域，随后沿着 $\psi$ 的方向运动，直到再次到达 $\Delta_0$ 的管状邻域，并靠近点 $p_t$。由于平衡点 $p_t$ 是 $\Delta_j$ 中的一个汇，我们知道该轨迹属于 $p_t$ 的稳定流形。图3 描绘了上述构造的异宿连接。此外，对函数 $f$ 的小扰动仍能保持该异宿连接的实现。

现在，我们应该对其他异宿连接重复这一过程。对于同一页上的其他连接，由于它们的嵌入不会相交，而且我们可以选取互不相交的管状邻域，因此实现这些连接时不会相互干扰。然而，对于其他页上的连接，如果两页重叠时不同页上的连接彼此相交，就可能产生干扰。接下来，我们将在必要时调整这些连接的书嵌入，以消除这种干扰。

**页面与连接重叠**

取另一条从 $n_{\tilde{s}}$ 到 $n_{\tilde{t}}$ 的异宿连接，将其书嵌入到平面 $H_{\tilde{j}}$ 中，并定义 $\tilde{\gamma}$ 为将该异宿连接旋转到 $xy$-平面后的书嵌入。根据 $\tilde{\gamma}$ 是否与之前的某条弧 $\gamma$ 相交，我们通过改变弧 $\tilde{\gamma}$来调整或不调整书嵌入。这两条弧之间的交点与它们是否位于同一页无关，因为每条弧都是旋转到 $xy$-平面的结果。事实上，只有当这两条连接属于不同的页时才可能发生交点，因为书嵌入~不允许交叉。当不存在交点时，管状邻域 $A$~和 $B$ 的定义与之前相同，即取足够小的半径，以避免与之前定义的管状邻域相交。在这种情况下，我们向函数 $f$ 中加入类似的项，以实现“水平流”，同时不改变之前异宿连接的实现。因此，这条从 $n_{\tilde{s}}$到 $n_{\tilde{t}}$的无交叉异宿连接在耦合细胞系统 $\dot{x} = f^{P_k}(x)$中得到鲁棒实现。接下来，我们考察一条与之前某些弧相交的弧的情形，即在 $xy$-平面中的情形。

假设弧 $\tilde{\gamma}$ 与之前的某条弧相交。我们可以假设每个交点恰好属于两条弧。此外，通过调整书嵌入，可以令该交点发生在 $|y| > \kappa$处。设 $\gamma$ 为与 $\tilde{\gamma}$相交的弧。注意，相交的两条弧必须对应于嵌入在两个不同平面中的异宿连接。因此，与 $\gamma$ 相关的异宿连接被书嵌入到页 $H_j$中，其中 $j \neq \tilde{j}$。令 $\gamma^j$、 $A$ 和 $B$ 为之前定义的，以实现在 $\Delta_j$中的异宿连接。并定义 $\tilde{\gamma}^j$ 为在 $\Delta_{\tilde{j}}$中的弧，以及 $\tilde{A}$和 $\tilde{B}$分别为 $\tilde{\gamma}^j$和 $(\tilde{\gamma}_1 + \tilde{\gamma}_2, \tilde{\gamma}_1, \ldots, \tilde{\gamma}_1)$、的管状邻域，对应于弧 $\tilde{\gamma}$。由于 $j \neq j$，我们有 $A$ 和 $A$ 不相交。考察方程（1）可见，项 $\delta_{\tilde{A}}(y)\tilde{v}(y)$可以加入函数 $f$ 中，而之前实现的异宿轨线仍然存在。然而， $B$和 $B$确实相交。 $\gamma_1+\gamma_2$ 和 $\tilde{\gamma}_1+\tilde{\gamma}_2$的导数应当同为正或同为负，即对于 $y \in B \cap B$， $w(y)\tilde{w}(y) > 0$。如果 $w(y)\tilde{w}(y) > 0$，那么我们可以将项 $\delta_{\tilde{B}}(y)\ \tilde{w}(y)$ 加入函数 $f$ 中，而不会扰动之前的异宿轨线，并实现与 $\tilde{\gamma}$相关的异宿连接。为了完成定理1的证明，我们说明如何调整弧 $\tilde{\gamma}$ ，以确保$w(y)\tilde{w}(y) > 0$。

设 $\tau_3$和 $\tau_4$为路径 $(\gamma_1(t) + \gamma_2(t)\ \gamma_1(t) \ldots, \gamma_1(t))$ 穿过管状邻域 $B$ 并经过交点时的时刻。类似地，设$\tilde{\tau}_3$和 $\tilde{\tau}_4$为弧 $(\tilde{\gamma}_1(t) + \tilde{\gamma}_2(t)\ \tilde{\gamma}_1(t) \ldots, \tilde{\gamma}_1(t))$ 穿过 $B$时的时刻。不失一般性，我们可以假设 $\dot{\gamma}_1$ 和 $\dot{\gamma}_2$ （$\tilde{\gamma}_1$ 和 $\tilde{\gamma}_2$）在 $\tau_3$ 与 $\tau_4$ （以及$\tilde{\tau}_3$ 与 $\tilde{\tau}_4$）之间不为零。图 4 展示了可能的情形：(a) $w(y)\tilde{w}(y) > 0$；(b) $w(y)\tilde{w}(y) < 0$和 $\tilde{\gamma}_1\tilde{\gamma}_2 < 0$；以及 (c) $w(y)\ \tilde{w}(y) < 0$和. $\tilde{\gamma}_1\tilde{\gamma}_2 > 0$。对于情形

(a) 无需调整弧 $\tilde{\gamma}$，因为 $w(y)\tilde{w}(y) > 0$；(b) 我们加快或减慢 $\tilde{\gamma}_1$，使 $(\tilde{\gamma}_1(t)$ $+\tilde{\gamma}_2(t))$ 和 $(\dot{\gamma}_1(t)+\dot{\gamma}_2(t))$的符号相同，因为 $\tilde{\gamma}_1\tilde{\gamma}_2 < 0$;

(c) 我们在区间 $[\tilde{\tau}_3, \tilde{\tau}_4]$ 内对弧 $\tilde{\gamma}$ 进行平滑调整，使调整后的弧任意接近以下直线的并集： $\tilde{\gamma}(\tilde{\tau}_3)$–$(\tilde{\gamma}_1(\tilde{\tau}_4)\ \tilde{\gamma}_2(\tilde{\tau}_3))$–$(\tilde{\gamma}_1(\tilde{\tau}_3)\ \tilde{\gamma}_2(\tilde{\tau}_4))$–$\tilde{\gamma}(\tilde{\tau}_4)$。在调整后的弧中，交点邻域附近的 $\tilde{\gamma}_2$ 符号反转。因此，我们可以加快或减慢 $\tilde{\gamma}_1$ ，使与 $(\tilde{\gamma}_1(t) + \tilde{\gamma}_2$ $(t))$ 和 $(\dot{\gamma}_1(t) + \dot{\gamma}_2(t))$ 的信号相匹配，如情况 (b) 所示。图4示意了上述对 $\tilde{\gamma}$ 所做的调整。

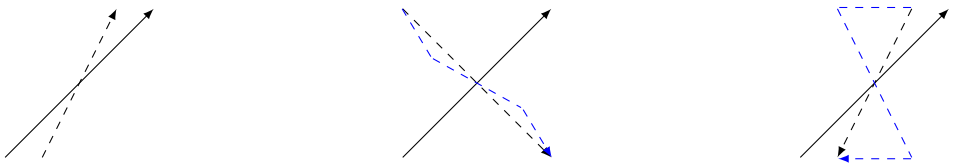


图4：重叠的书嵌入页中相交连接的调整示意图。在不同情况下，我们对 $\tilde{\gamma}$ 从黑色虚线调整为蓝色虚线，具体如下：(a) 无需调整；(b) 调整 $\tilde{\gamma}_1$的速度；(c) 修改 $\tilde{\gamma}_1$ ，使其在交点处反转 $\tilde{\gamma}_1$ 的符号。

对每个异宿连接重复上述过程，我们便在含有 $k+1$ 个细胞的耦合细胞系统中得到该异宿网络的稳健实现， $\dot{x} = f^{P_k}(x)$。至此，定理1的证明完成。注意，轨线属于二维同步子空间 $\Delta_j$，因此沿轨线，除细胞 $j$ 外的所有细胞都保持同步，而细胞 $j$ 会在异宿连接结束时重新与其他细胞同步。

## 4.2 示例与备注

为阐释定理1，我们给出一些示例，并讨论书厚度约束的影响。我们还将结果与文献中已有的构造进行比较。

**示例 5**。 如示例 4 所示，图1中的异宿网络的书厚度等于 2。因此，根据定理1，该异宿网络可以在具有 3 个细胞的耦合细胞系统中实现鲁棒实现，即在 $\mathbb{R}^3$ 中。◊

Castro 和 Lohse[3]研究了双重次邻异宿网络。他们在 $\mathbb{R}^6$ 中给出了一个实现该网络的显式常微分方程系统。在下一个示例中，我们将研究这些异宿网络，并验证根据平衡点的数量，它们可以在维数为 4、5 或 6 的耦合细胞系统中实现鲁棒实现。

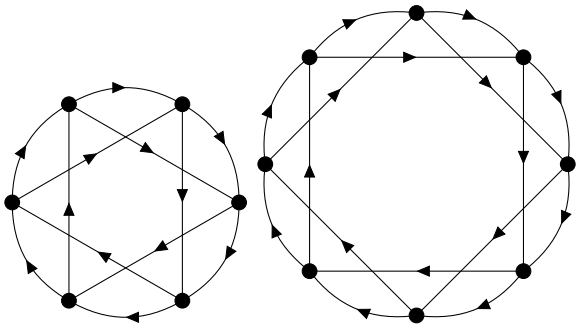

图 5：一些双重次近邻网络。

**示例 6**。 如果存在一种细胞排序，使得每个节点都从前面的两个节点（模 $n$）各接收一个连接，则具有 $n$ 个节点的网络称为双重次近邻网络。图 5 展示了一些示例。

我们考虑双重次近邻网络的以下书嵌入。平衡节点沿一条直线放置。从 1 到 2 的连接放在第 $H_1$ 页，从 1 到 3 的连接放在第 $H_2$ 页，从 2 到 3 的连接放在第 $H_2$ 页，从 2 到 4 的连接放在第 $H_3$ 页，从 3 到 4 的连接放在第 $H_3$ 页，从 3 到 5 的连接放在第 $H_1$ 页；我们重复这一过程，直到节点 $n-2$ 的出连接。通过依次将弧放置在直线上方和下方，可以在不产生交点的情况下完成前述连接的书嵌入。我们将从$n-1$ 到 $n$ 的连接放在与从 $n-2$ 到 $n$的连接相同的页上，设为 $H_k$。请注意， $k$ 取决于平衡节点的数量，即 $n$；最后 3 条连接的放置则取决于 $k$。

如果 $k=1$ （$n$ 模块 3 为 2），那么我们将从 $n-1$ 到 1 和从$n$ 到 1 的连接放在新页 $H_4$，并将从 $n$ 到 2 的连接放在第 5 页。
如果 $k=2$ （$n$ 模块 3 为 0），则将从 $n-1$ 到 1 和从 $n$ 到 1 的连接放在第 ge 3 页，并将从 $n$ 到 2 的连接放在第 1 页。
如果 $k=3$ （$n$ 模块 3 为 1），则将从 $n-1$ 到 1 和从 $n$ 到 1 的连接放在第 4 页，并将从 $n$ 到 2 的连接放在第 1 页。
在图6中，我们用不同颜色表示连接嵌入所在的不同页，从而展示这种书嵌入。因此，由定理1可知，根据平衡节点的数量，双重次邻异宿网络可以通过含有四个、五个或六个细胞的耦合细胞系统实现。◊

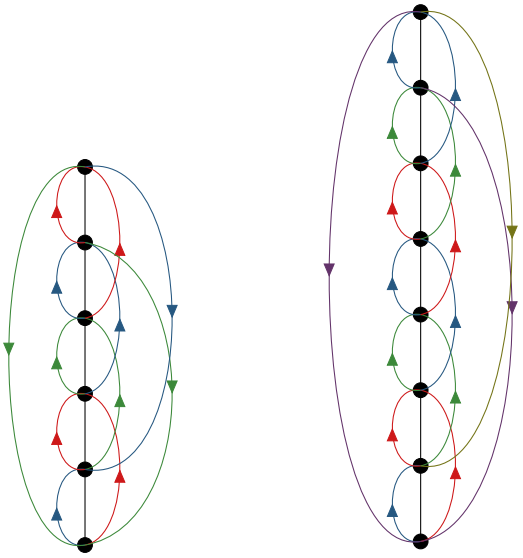

图 6：一些双重次近邻网络的书嵌入。连接的不同颜色表示它们嵌入的不同页。

在前一个例子中，几乎所有平衡节点的两条入连接都属于同一页。不过，我们也可以通过将每个平衡节点的两条出连接放在同一页，来对双重次邻网络进行书嵌入。这样，每个平衡点处的不稳定流形都是一维的，并且完全包含在异宿网络中。因此，存在能够实现任意双重次邻异宿网络的耦合细胞系统，而且这种实现是完备的。

**例7.** 图 7 展示了两个双重次邻异宿网络的书嵌入，其中每个平衡节点的出向连接都位于同一页。我们总能用 5 页找到这样的书嵌入。每个平衡点的不稳定流形属于唯一的二维同步子空间，且为一维。由于每个平衡点有两个出连接，其不稳定流形完全包含在异宿网络中。存在具有 6 个细胞的耦合细胞系统，能够完整实现双重次邻异宿网络。◊

虽然平面图通常可以嵌入四页，但我们加入的额外约束可能需要更多页。以下备注强调，动力学背景施加了更严格的嵌入规则。

**注1.** 计算一个图的书厚度是一个NP问题。然而，已知任何平面图都可以嵌入至多4页中。我们的定义限制更严格，因此平面异宿网络不一定能嵌入四页书中。例如，由四个具有共同节点的2异宿环构成的异宿网络至少需要5页，因为共同节点有四条出向连接，必须分别嵌入四个不同的页，而入向连接必须嵌入另一个页中。每页上的两条出向连接嵌入同一页。◊

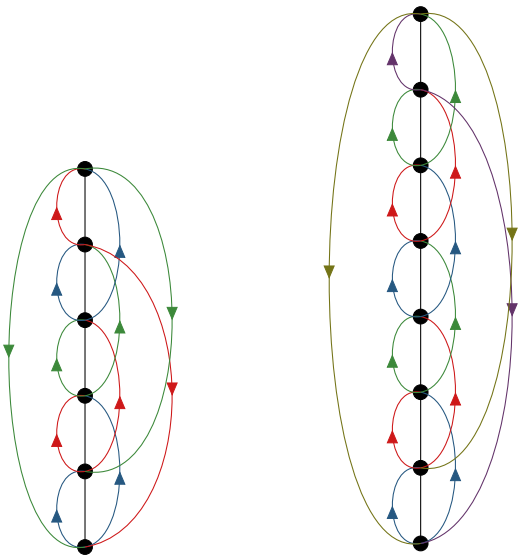

图 7：一些双重次近邻网络的书嵌入。连接的不同颜色表示它们所嵌入的不同页。

# 5 几乎完全实现

本节中，我们证明，利用耦合细胞系统，可以实现任意不含同宿连接的异宿网络的几乎完全实现。在这种情况下，我们在三维同步子空间上实现一些轨线，并且从每个节点出发的所有出连接都属于同一个同步子空间。

**定理 2。** 设 $\mathcal{N}$ 是一个不含同宿连接的异宿网络，其中 $n_1$ 节点具有一个或两个出向连接，而 $n_2$ 节点具有三个或更多出向连接。则该异宿网络可以在具有 $n_1 + 2n_2 + 1$ 个细胞的耦合细胞系统中得到鲁棒实现。此外，该实现几乎是完全的。

该结果扩展了先前的实现，允许在节点具有多个出向连接时，在三维同步子空间中存在连接。

该结果的证明遵循定理1证明中的相同步骤。首先，我们通过归纳构造一个耦合细胞网络，使其支持所需的最小同步子空间，并在全同步平衡点处具有适当的特征值。异宿网络的平衡节点将对应于全同步子空间内的平衡点。给定一个具有一个或两个出向连接的节点，其出向异宿连接将位于同一个二维同步子空间中。和之前一样，我们将从该节点出发的出向连接嵌入到一页 $\mathbb{R}^2$ 中，并利用该页实现从相应平衡点出发的出向异宿连接。对于一个具有三个或更多出向连接的节点，其出向异宿连接将位于同一个三维同步子空间中。在这种情况下，出向连接被嵌入到 $\mathbb{R}^3$ 中，并利用该子空间实现这些异宿连接。这些连接经过嵌入后，所得实现几乎是完全的。

**耦合细胞网络的构造 $Q_{n_1,\ n_2}$。**

现在，我们归纳地定义具有 $n_1 + 2n_2 + 1$ 个细胞的耦合细胞网络 $Q_{n_1,\ n_2}$。我们所考虑的耦合细胞网络取决于是否存在一个出边少于两条的节点： $n_1 > 0$，或者不存在这样的节点： $n_1 = 0$。

如果 $n_1 = 0$，令 $Q_{0,0}$ 为只有一个细胞（称为 0）且没有边的耦合细胞网络。假设耦合细胞网络 $Q_{0,k}$ 已知，我们通过按如下方式添加两个新细胞，归纳地定义网络 $Q_{0,k+1}$。$Q_{0,k}$ 的细胞集合为 $\{0, 1, \ldots, 2k\}$，并且有 $2k$ 种边类型，分别为 $E_1, E_2, \ldots, E_{2k}$。$Q_{0,k+1}$ 的细胞为 $\{0, 1, \ldots, 2k, 2k+1, 2(k+1)\}$，且它有 $2(k+1)$ 种边类型。对于每个 $j = 1, \ldots, 2k$，类型为 $i_j$ 的边为 $E_j \cup \{(j, 2k+1), (j, 2(k+1))\}$。类型为 $i_{2k+1}$ 的边为 $\{(2k+1, c) : c = 0, \ldots, 2k\} \cup \{(2(k+1)\ 2k+1), (0, 2(k+1))\}$。类型为 $i_{2(k+1)}$ 的边为 $\{(2k+2, c) : c = 0, \ldots, 2k\} \cup \{(2(k+1)\ 2k+1), (2k+1, 2(k+1))\}$。图 8 展示了一些示例。

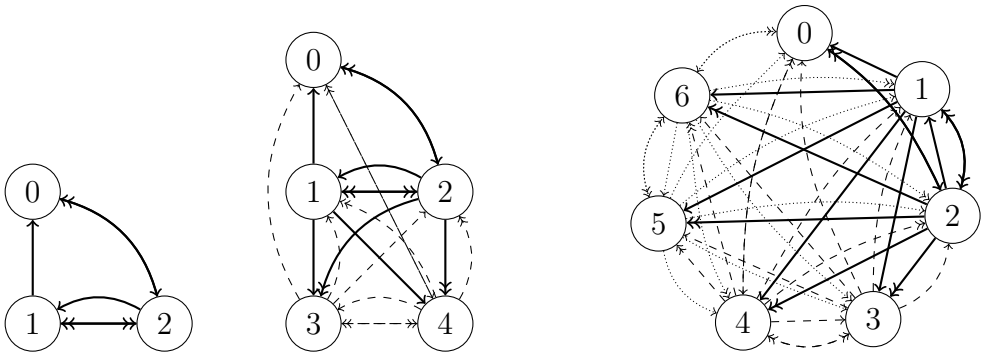


图 8：网络 $Q_{0,k}$ 的构造，用于 $k = 1,2,3$，展示如何添加额外的细胞和边类型来支持三维同步子空间。

如果存在一个出边不超过两条的节点 $n_1 > 0$，我们就从网络 $P_{n_1}$ 开始，并在每一步归纳地添加两个新细胞。定义 $Q_{n_1,0} := P_{n_1}$第4节中定义的、具有 $n_1 + 1$ 个细胞和 $n_1$ 种边类型的耦合细胞网络。假设 $Q_{n_1,k}$ 中的细胞为 $\{0, 1, \ldots, n_1 + 2k\}$，并用 $E_j$ 表示类型为 $i_j$的耦合集合，其中 $j = 1, \ldots, n_1 + 2k$。网络 $Q_{n_1,k+1}$ 是具有细胞 $\{0, 1, \ldots, n_1 + 2k, n_1 + 2k + 1, n_1 + 2(k + 1)\}$ 以及两种新边类型 $i_{n_1+2k+1}$ 和 $i_{n_1+2(k+1)}$ 的网络。对于每个 $j = 1, \ldots, n_1 + 2k$，类型为 $i_j$ 的边为$E_j \cup \{(j, n_1 + 2k + 1), (j, n_1 + 2(k + 1))\}$。类型为 $i_{n_1+2k+1}$ 的边是

$$\{(n_1+2k+1, c) : c = 0, \ldots, n_1+2k\} \cup \{(n_1+2(k+1), n_1+2k+1), (0, n_1+2(k+1))\}.$$

类型为 $i_{n_1+2(k+1)}$ 的边为

$$\{(n_1+2(k+1), c) : c = 0, \ldots, n_1+2k\} \cup \{(n_1+2(k+1)), n_1+2k+1), (n_1+2k+1, n_1+2(k+1))\}.$$

一些示例见图9。

在下一个结果中，我们描述网络$Q_{n_1, n_2}$的最小同步子空间以及雅可比矩阵 $J^{Q_{n_1, n_2}}$的特征值。记 $\Delta_j$为由 $\{(x_0, \ldots\ldots, x_k) : x_1 = x_i, \ i \neq j\}$ 给出的二维空间，并记 $\Delta_{j_1, j_2}$为由$\{(x_0, \ldots\ldots, x_k) : x_1 = x_i, \ i \neq j_1, \ j_2\}$给出的三维空间。

**命题1**。 网络 $Q_{n_1, n_2}$ 有 $n_1 + 2n_2 + 1$ 个细胞和 $n_1 + 2n_2 + 1$ 种边类型。。与 $Q_{n_1, n_2}$ 相关联的任意耦合细胞系统都包含以下最小同步子空间：

$$\Delta_1, \ldots, \Delta_{n_1}, \Delta_{n_1+1, n_1+2}, \ldots, \Delta_{n_1+2n_2-1, n_1+2n_2}.$$

证明。 这些子空间是不变的，因为耦合细胞系统的形式为 $f^{Q_{n_1, n_2}}$

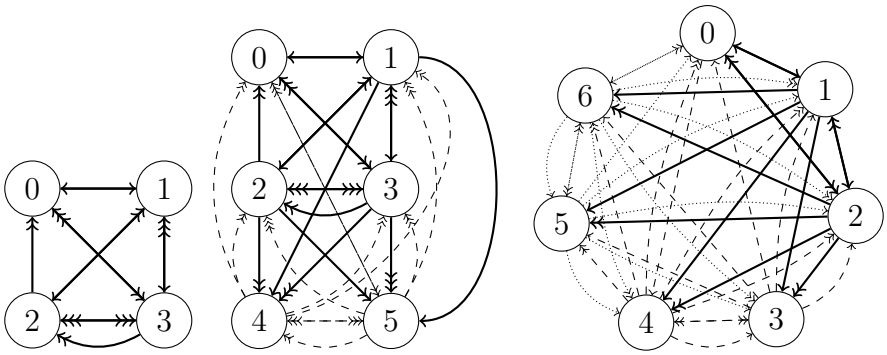


图9：网络 $Q_{1,\ 1}$、 $Q_{1,\ 2}$ 和 $Q_{2,\ 2}$ 结合二维和三维同步子空间，以支持异宿网络的几乎完全实现。

is

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = f(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}, x_{n_1+1}, x_{n_1+2}, \ldots, x_{n_1+2n_2-1}, x_{n_1+2n_2}) \\ \dot{x}_1 = f(x_1, x_0, x_2, \ldots, x_{n_1}, x_{n_1+1}, x_{n_1+2}, \ldots, x_{n_1+2n_2-1}, x_{n_1+2n_2}) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n_1} = f(x_{n_1}, x_1, x_2, \ldots, x_0, x_{n_1+1}, x_{n_1+2}, \ldots, x_{n_1+2n_2-1}, x_{n_1+2n_2}) \\ \dot{x}_{n_1+1} = f(x_{n_1+1}, x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}, x_{n_1+2}, x_{n_1+2}, \ldots, x_{n_1+2n_2-1}, x_{n_1+2n_2}) \\ \dot{x}_{n_1+2} = f(x_{n_1+2}, x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}, x_0, x_{n_1+1}, \ldots, x_{n_1+2n_2-1}, x_{n_1+2n_2}) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n_1+2n_2-1} = f(x_{n_1+2n_2-1}, x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}, x_{n_1+1}, x_{n_1+2}, \ldots, x_{n_1+2n_2}, x_{n_1+2n_2}) \\ \dot{x}_{n_1+2n_2} = f(x_{n_1+2n_2}, x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}, x_{n_1+1}, x_{n_1+2}, \ldots, x_0, x_{n_1+2n_2-1}) \end{cases}.$$

此外， $3D$ 同步子空间 $\Delta_{n_1+1,\ n_1+2}$,..., $\Delta_{n_1+2n_2-1,\ n_1+2n_2}$ 是极小的，因为子空间 $\Delta_k$ （其中 $k = n_1 + 1$， ... ， $n_1 + 2n_2$）不是不变的。 □

**平衡点附近的局部动力学**

异宿网络的平衡点将置于一维完全同步子空间 $\Delta_0 \subset \mathbb{R}^{1+n_1+2n_2}$ 中。我们检查是否存在一个函数$f$ ： $\mathbb{R}^{1+n_1+2n_2} \to \mathbb{R}$，使得每个平衡点的不稳定流形恰好包含于前述同步子空间之一。

**命题2**。 设 $p \in \Delta_0$ 是耦合细胞系统 $f^{Q_{n_1,\ n_2}}$ 的一个平衡点，其中 $f$: $\mathbb{R}^{1+n_1+2n_2} \to \mathbb{R}$。记该点处的雅可比矩阵为 $J^{Q_{n_1,\ f}\ \ n_2}$，记 $f(y_0,\ y_1,\ \ldots,\ y_{1+n_1+2n_2})$关于 $y_j$ 的导数为 $f_j$。将 $J^{Q_{n_1,\ f}\ \ n_2}$ 限制在 $\Delta_j$、 $j = 1$、 ...、 $n_1$ 上，其特征值为:

$$f_0(p) + f_1(p) + \cdots + f_{n_1+2n_2}(p), \quad f_0(p) - f_j(p).$$

而将特征值限制在 $J^{Q_{n_1},f\ \ n_2,n_1+2j}$, $j = 1, \ldots, n_2$ 上时，它们为:

$$f_0(p) + f_1(p) + \cdots + f_{n_1+2n_2}(p),$$

$$\frac{1}{2}(2f_0(p) - f_{n_1+2j-1}(p) - f_{n_1+2j}(p) \pm \sqrt{f_{n_1+2j}(p)^2 + 2f_{n_1+2j-1}(p)f_{n_1+2j}(p) - 3f_{n_1+2j-1}(p)^2}).$$

证明。 $J^{Q_{n_1},f\ \ n_2}$在子空间 $\Delta_j$, $j = 1, \ldots, n_1$中的特征值与第4节中得到的特征值类似。将 $f^{Q_{n_1},n_2}$ 限制在

$\Delta_{n_1+2k-1,n_1+2k}$ 在 $p$ 处的形式为：

$$\begin{bmatrix} f_0(p)+b & f_{2j}(p) & f_{2j+1}(p) \\ b & f_0(p) & f_{2j}(p)+f_{2j+1}(p) \\ b+f_{2j}(p) & f_{2j+1}(p) & f_0(p) \end{bmatrix},$$

其中 $b = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq 2j+1,\ 2j+2}}^{2k+1} f_i(p)$。计算特征值后，我们得到结果。 □

将异宿网络 $\mathcal{N}$ 的平衡节点排序，使具有两个或更少出连接的节点排在前面 $n_1$。对于异宿网络的每个平衡节点 $v_i$，取一个全同步点 $p_i \in \Delta_0$。在 $p_i$ 处，$f$ 关于 $y_l$ 的偏导数将由一组常数 $\alpha_l^i$ 给出，这些常数需从 $i = 1, \ldots\ldots, n_1+n_2$ 和 $l = 0, \ldots\ldots, n_1+2n_2$ 中选取。

对于 $i = 1, \ldots\ldots, n_1$，我们希望 $p_i$ 在 $\Delta_i \setminus \Delta_0$ 中是一个源，而在其他同步子空间 $\Delta_j$ 和 $\Delta_{n_1+2k-1,\ n_1+2k}$ 中是一个汇，其中 $j = 1, \ldots\ldots, i-1, i+1, n_1$ 和 $k = 1, \ldots\ldots, n_2$。这意味着，对于 $j \neq i$ 和 $k = 1, \ldots\ldots, n_2$，$\alpha_0^i + \alpha_1^i + \cdots + \alpha_{n_1+2n_2}^i < 0$、$\alpha_0^i - \alpha_j^i < 0$、$2\alpha_0^i - \alpha_{n_1+2k-1}^i - \alpha_{n_1+2k}^i \pm \sqrt{\alpha_{n_1+2k}^{i\ 2} + 2\alpha_{n_1+2k-1}^i\alpha_{n_1+2k}^i - 3\alpha_{n_1+2k-1}^{i\ 2}} < 0$ 和 $\alpha_0^i - \alpha_i^i > 0$。为说明前述条件可以满足，例如取 $\alpha_0^i = -1$、$\alpha_j^i = 0$（对于 $j = 1, \ldots\ldots, n_1$），以及 $j \neq i$、$\alpha_{n_1+2k}^i = \alpha_{n_1+2k-1}^i = 0$（对于 $k = 1, \ldots\ldots, n_2$），还有 $\alpha_i^i = -2$。

对于 $i = n_1+1, \ldots, n_1+n_2$，我们希望 $p_i$ 在 $\Delta_{n_1+2(i-n_1)-1,n_1+2(i-n_1)} \setminus \Delta_0$ 上为源，而在另一侧的 $\Delta_j$ 和 $\Delta_{n_1+2k,n_1+2k+1}$ 上为汇，其中 $j = 1, \ldots, n_1$ 和 $k \neq i - n_1$。为实现这一点，常数 $\alpha_l^i$ 需要满足以下不等式：$\alpha_0^i + \alpha_1^i + \cdots + \alpha_{n_1+2n_2}^i < 0$, $\alpha_0^i - \alpha_j^i < 0$,

$$2\alpha_0^i - \alpha_{n_1+2k-1}^i - \alpha_{n_1+2k}^i \pm \sqrt{\alpha_{n_1+2k}^{i\ 2} + 2\alpha_{n_1+2k-1}^i\alpha_{n_1+2k}^i - 3\alpha_{n_1+2k-1}^{i\ 2}} < 0$$

and

$$2\alpha_0^i - \alpha_{n_1+2(i-n_1)-1}^i - \alpha_{n_1+2(i-n_1)}^i \pm \sqrt{\alpha_{n_1+2(i-n_1)}^{i\ 2} + 2\alpha_{n_1+2(i-n_1)-1}^i\alpha_{n_1+2(i-n_1)}^i - 3\alpha_{n_1+2(i-n_1)-1}^{i\ 2}} > 0,$$

对于 $j = 1, \ldots, n_1$ 和 $k = 1, \ldots, n_2$，使得 $k \neq i - n_1$。满足前述不等式的一个解为 $\alpha_0^i = -1$, $\alpha_j^i = 0$, $\alpha_{n_1+2k-1}^i = \alpha_{n_1+2k}^i = 0$ 和 $\alpha_{n_1+2(i-n_1)-1}^i = \alpha_{n_1+2(i-n_1)}^i = -2$，其中 $j = 1, \ldots, n_1$ 和 $k = 1, \ldots, n_2$，使得 $k \neq i - n_1$。

现在，我们开始构造函数 $f$，它定义了实现该异宿网络的耦合细胞系统。与第4节中的做法相同，我们首先在完全同步平衡节点 $p_i$ 的一个小邻域内定义 $f$。我们考虑由围绕对角线的实心圆柱体构成的邻域，并用 $C_\epsilon(p_i)$ 表示半径为 $\epsilon$、高度为 $2\epsilon$ 的实心圆柱体，其中心轴与对角线重合，且点 $p_i$ 位于实心圆柱体的中间。取满足上述局部条件的常数 $\alpha_l^i \in \mathbb{R}$，并令 $\epsilon > 0$ 足够小，按如下方式定义 $f$：$\mathbb{R}^{n_1+2n_2+2} \to \mathbb{R}$：

$$f(y_0, y_1, \ldots, y_{n_1+2n_2+1}) = \sum_{i=1}^{n_1+n_2} \delta_{p_i}(y_0, y_1, \ldots, y_{n_1+2n_2+1}) \sum_{l=0}^{n_1+2n_2+1} \alpha_l^{p_i}(y_l - \rho_i),$$

其中，$p_i = (\rho_i, \ldots\ldots, \rho_i) \in \Delta_0$, $\delta_{p_i}$ 是一个隆起函数：当 $(x_0, x_1, \ldots\ldots, x_{n_1+2n_2+1}) \in C_\epsilon((\rho_i, \ldots\ldots, \rho_i))$ 时取值为 1；当 $(x_0, x_1, \ldots\ldots, x_{n_1+2n_2+1}) \notin C_{2\epsilon}((\rho_i, \ldots\ldots, \rho_i))$ 时取值为 0。

**异宿连接的实现**

实现异宿网络的最后一步，是在适当的同步子空间中构造异宿连接。与书本式嵌入实现类似，我们嵌入这些异宿连接。不过，我们针对每个节点 $\mathcal{N}$ 的出向连接分别进行嵌入，而不是将它们一起嵌入。对于 $n_1$ 个出向连接不超过两个的节点，出向连接嵌入平面 $\mathbb{R}^2$ 中，因为它们将在一个 $2D$ 同步子空间 $\Delta_j$中实现。其他 $n_2$ 个节点的出向连接则嵌入空间 $\mathbb{R}^3$ 中，因为它们将在一个 $3D$ 同步子空间$\Delta_{j_1,\ j_2}$中实现。由于异宿连接的实现会离开局部动力学，因此它将过渡到由该嵌入给出的水平流。

为了处理这些转变，对于前 $n_1$ 个平衡节点，我们考虑 $\mathbb{R}^2$ 中的一个矩形，使其两条边平行于对角线 $x = y$，另外两条边垂直于对角线 $x = y$。此外，该矩形的顶点位于圆心为 $(\rho_i, \rho_i)$、半径为 $2\epsilon_i$ 的圆上。将点 $(\rho_1, \rho_1)$、$(\rho_2, \rho_2)$.....$(\rho_{n_1}, \rho_{n_1})$ 附近对应的矩形分别记为 $R_1$、$R_2$..... $R_{n_1}$。对于其余 $n_2$ 个平衡节点，我们考虑 $\mathbb{R}^3$ 中的一个棱柱，其多边形底面有 $k$ 条边，其中 $k$ 是出连接的数量；底面垂直于对角线 $x = y = z$，棱柱的边则平行于该对角线。此外，我们还要求棱柱的顶点位于对角线周围、半径为 $2\epsilon_i$ 的圆柱面上。将点 $(\rho_{n_1+1}, \rho_{n_1+1}, \rho_{n_1+1})$、$(\rho_{n_1+2}, \rho_{n_1+2}, \rho_{n_1+2})$.....$(\rho_{n_1+n_2}, \rho_{n_1+n_2}, \rho_{n_1+n_2})$ 附近的棱柱分别记为 $S_{n_1+1}$、$S_{n_1+2}$..... $S_{n_1+n_2}$。图10和图11展示了示意图。注意，通过缩短与对角线的距离，我们可以假设 $\Delta_j$ 中对应的矩形或 $\Delta_{n_1+2j}$、$_{n_1+2j+1}$ 上的棱柱与平行于对角线的面上的不稳定流形相交。因此，异宿连接将横截地穿过这些矩形和棱柱的边。

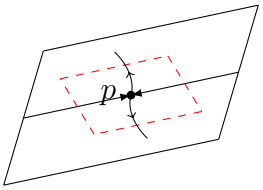


图10：二维同步子空间中包围一个平衡点的矩形区域。嵌入其中的异宿连接横截地穿过该矩形，从局部动力学过渡到全局轨迹。

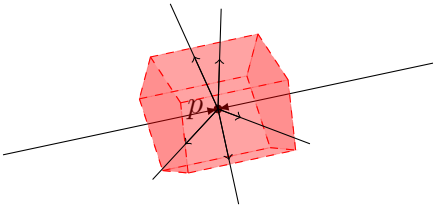


图11：嵌入三维同步子空间、底面为五边形的棱柱。棱柱包围一个平衡点，每个侧面都承载一条不同的向外异宿连接，从而实现多方向跃迁。

取异宿网络 $\mathcal{N}$ 中一个有两个或更少出连接的平衡节点 $n_i$, $i = 1, \ldots, n_1$。若 $n_i$ 只有一个出连接，目标节点为 $n_t$,

我们将该连接在平面中嵌入两次：一次嵌入半平面 $x > y$，另一次嵌入另一个半平面 $x < y$。令 $\gamma_1^i, \gamma_2^i : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ 为这两个嵌入，即 $\gamma_1^i(0) = \gamma_1^i(0) = (\rho_i, \rho_i)$，$\gamma_1^i(1) = \gamma_1^i(1) = (\rho_t, \rho_t)$，$\gamma_1^i(]0,1[) \subset \{x > y\}$ 和 $\gamma_2^i(]0,1[) \subset \{x < y\}$。若 $n_i$ 恰有两个出连接，分别指向 $n_{t_1}$ 和 $n_{t_2}$，则将这两个连接嵌入不同的半平面。将这些嵌入记为 $\gamma_1^i, \gamma_2^i$：$[0,1] \to \mathbb{R}^2$，使得 $\gamma_1^i(0) = \gamma_1^i(0) = (\rho_i, \rho_i)$，$\gamma_1^i(1) = (\rho_{t_1}, \rho_{t_1})$ 且 $\gamma_1^i(1) = (\rho_{t_2}, \rho_{t_2})$，$\gamma_1^i(]0,1[) \subset \{x > y\}$ 和 $\gamma_2^i(]0,1[) \subset \{x < y\}$。在第一种情况下，我们也用记号 $t_1$ 和 $t_2$ 表示 $t_1 = t_2 = t$。对于每个 $j = 1, 2$ 和 $i = 1, \ldots, n_1$，我们假设，通过改变嵌入，$\gamma_j^i$ 沿着平行于对角线的一条边恰好横截矩形 $R_i$ 一次。这意味着存在唯一的 $\tau_R$，使得 $\gamma_j^i(\tau_R) \in R_i$。此外，我们假设 $\gamma_j^i$ 除起点和终点外，始终与对角线保持足够远的距离。因此，存在 $\tau_S$ 和 $\tau_T$，使得 $\gamma_j^i([0, \tau_S[) \subset B_{2\epsilon}(\rho_i, \rho_i)$，$\gamma_j^i(]\tau_T, 1]) \subset B_{2\epsilon}(\rho_{t_j}, \rho_{t_j})$ 且 $\gamma_j^i([\tau_S, \tau_T]) \cap B_{2\epsilon}(\rho, \rho) = \emptyset$ 对任意 $\rho \in \mathbb{R}$ 均成立。

给定节点 $n_i, i = n_1 + 1, \ldots, n_1 + n_2$，其有 $k$ 条出连接，目标节点为 $n_{t_1}, n_{t_2}, \ldots, n_{t_k}$，其中 $k > 2$。我们将这些 $k$ 条出连接嵌入到 $\mathbb{R}^3$ 中，使其远离平面 $x = y$，$y = z$ 和 $x = z$。用 $\gamma_1^i, \gamma_2^i, \ldots, \gamma_k^i : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ 表示这些 $k$ 条出连接的嵌入，使得 $\gamma_j^i(0) = (\rho_i, \rho_i, \rho_i)$，$\gamma_j^i(1) = (\rho_{t_j}, \rho_{t_j}, \rho_{t_j})$，并且 $\gamma_j^i(]0,1[) \cap \{x = y \vee y = z \vee x = z\} = \emptyset$，其中 $j = 1, \ldots, k$。同样，我们假设每个嵌入都横截棱柱 $k$-棱柱 $S_i$ 上不同的侧面，该棱柱围绕 $(\rho_i, \rho_i, \rho_i)$，且除端点附近外，嵌入与对角线保持足够远的距离。这也意味着存在唯一的 $\tau_R, \tau_S$ 和 $\tau_T$，使得对于任意 $\rho \in \mathbb{R}, i = n_1 + 1, \ldots, n_1 + n_2$ 和 $j = 1, \ldots, k$，均有 $\gamma_j^i(\tau_R) \in S_i$，$\gamma_j^i([0, \tau_S[) \subset B_{2\epsilon}(\rho_i, \rho_i, \rho_i)$，$\gamma_j^i(]\tau_T, 1]) \subset B_{2\epsilon}(\rho_{t_j}, \rho_{t_j}, \rho_{t_j})$，以及 $\gamma_j^i([\tau_S, \tau_T]) \cap B_{2\epsilon}(\rho, \rho, \rho) = \emptyset$。

除起点和目标点外，我们对嵌入作如下假设：

- 从同一节点出发的任意两个嵌入都不相交。这意味着，对于任意 $i = 1, \ldots, n_1 + n_2$，$\gamma_{j_1}^i(]0,1[) \cap \gamma_{j_2}^i(]0,1[) = \emptyset$。
- 从前两个 $n_1$ 平衡节点出发的出向连接的嵌入彼此不相交，或者它们的交点满足图 4 中给出的条件。

- 从具有两个以上出向连接的不同节点出发的出向连接嵌入也彼此不相交，因为嵌入位于 $\mathbb{R}^3$中。对于任意$i_1, i_2 = n_1 + 1, \ldots, n_1 + n_2$，这意味着$\gamma_{j_1}^{i_1}(]0,1[) \cap \gamma_{j_2}^{i_2}(]0,1[) = \emptyset$。因此，存在互不相交的路径管状邻域。

现在，我们利用前面给出的嵌入，在对角线之外补充函数 $f$。对于前 $n_1$ 个只有一条或两条出向连接的节点，我们重复第4节中的操作。取其中一个节点 $n_i$，$i = 1, \ldots, n_1$，并考虑异宿连接在 $\mathbb{R}^2$ 中的嵌入 $\gamma_1^i$ 和 $\gamma_2^i$。这些异宿连接将在同步子空间 $\Delta_i$内实现。与第4节中一样，我们可以逐个处理节点，因为两条出向连接的嵌入之间的交点为空，或者满足图4中给出的条件。因此，我们得到一个函数 $f$，使耦合细胞系统 $\dot{x} = f^{Q_{n_1,n_2}}(x)$实现了前 $n_1$ 个节点的出向连接。注意，平衡点 $p_i = (\rho_i, \rho_i, \ldots, \rho_i)$处的不稳定流形 $\in \mathbb{R}^{n_1+2n_2+1}$ 是一维的。因此，这两个嵌入 $\gamma_1^i$ 和 $\gamma_2^i$ 迫使不稳定流形完全包含在异宿网络中。

最后，我们关注具有两个以上出向异宿连接的平衡节点。设 $n_i$ 是一个具有 $k > 2$ 个出向连接的节点，$\gamma_j^i$是出向连接在 $\mathbb{R}^3$中的嵌入，其中 $i = n_1 + 1$、.....、$n_2$和

$j = 1$、.....、 $k$。这些异宿连接将在同步子空间 $\Delta_{n_1+2(i-n_1)-1,\ n_1+2(i-n_1)}$ $= \Delta_{2i-n_1-1,\ 2i-n_1}$内实现。该同步子空间内的耦合细胞系统具有如下形式:

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = f(x_0, x_0, \ldots, x_0, x_{2i-n_1-1}, x_{2i-n_1}, x_0, \ldots, x_0) \\ \dot{x}_{2i-n_1-1} = f(x_{2i-n_1-1}, x_0, \ldots, x_0, x_{2i-n_1}, x_{2i-n_1}, x_0, \ldots, x_0) \\ \dot{x}_{2i-n_1} = f(x_{2i-n_1}, x_0, \ldots, x_0, x_0, x_{2i-n_1-1}, x_0, \ldots, x_0) \end{cases} .$$

对于以节点 $n_t$ 为目标的给定嵌入 $\gamma_j^i = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$，存在时刻 $\tau_S$ 和 $\tau_T$，使得 $\gamma_j^i(\tau_S)$ 穿过围绕 $(\rho_i, \rho_i, \rho_i)$ 的棱柱 $S_i$，而 $\gamma_j^i(\tau_T)$ 穿过以 $(\rho_t, \rho_t, \rho_t)$ 为中心、半径为 $\epsilon > 0$ 的球。异宿连接将沿着弧 $\psi$： $[\tau_S, \tau_T] \to \mathbb{R}^{n_1+2n_2+1}$，该弧由 $\psi_i(t) = \gamma_1(t)$、 $i \neq 2i - n_1 - 1$、 $2i - n_1$、 $\psi_{2i-n_1-1}(t) = \gamma_2(t)$ 以及 $\psi_{2i-n_1}(t) = \gamma_3(t)$ 给出。由于同步子空间 $\Delta_{2i-n_1-1,2i-n_1}$ 是三维的，我们需要找到三个管状邻域，分别对应于 $x_0, x_{2i-n_1-1}, x_{2i-n_1}$ 的输入，其中函数 $f$ 将发生改变。设 $A$、$B$ 和 $C$ 是围绕 $\psi([\tau_S, \tau_T])$ 的管状邻域，

$$\{(\gamma_2(t), \gamma_1(t), \ldots, \gamma_1(t), \gamma_3(t), \gamma_3(t), \gamma_1(t), \ldots, \gamma_1(t)) : t \in [\tau_S, \tau_T]\},$$

and

$$\{(\gamma_3(t), \gamma_1(t), \ldots, \gamma_1(t), \gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_1(t), \ldots, \gamma_1(t)) : t \in [\tau_S, \tau_T]\}.$$

这些管状邻域彼此不相交，因为嵌入 $\gamma_j^i$ 不与 $\{x = y \vee y = z \vee x = z\}$ 相交。记 $\mathfrak{f}$ 为棱柱 $S_i$ 中被 $\gamma_j^i$ 穿过的面，我们假设 $A$、 $B$ 和 $C$ 的底面分别等于面 $\mathfrak{f}$ 在 $\mathbb{R}^{n_1+2n_2+1}$ 中的提升。因此， $A$ 的底面等于 $\{(x_0,\ x_1,\ .....,\ x_{n_1+2n_2}):$ $\forall_{(x,y,z)\in\mathfrak{f}} x_i = x,\ x_{2i-n_1-1} = y,\ x_{2i-n_1-1} = z\}$。其他情况类似。现在，我们可以在函数 $f$ 中添加相关项，以实现异宿连接。我们在函数 $f(y_0,\ y_1,\ .....,\ y_{n_1+2n_2})$ 中添加以下项:

$$\delta_A(y_0, y_1, \ldots, y_{n_1+2n_2})\dot{\gamma_1}(t) + \delta_B(y_0, y_1, \ldots, y_{n_1+2n_2})\dot{\gamma_2}(t) + \delta_C(y_0, y_1, \ldots, y_{n_1+2n_2+1})\dot{\gamma_3}(t),$$

其中 $\delta_A$，$\delta_B$，$\delta_C$是隆起函数，在 $A$，$B$，$C$之外为零，在 $A$，$B$，$C$之内大于零; $t$是这样一个时刻：$(y_0,\ y_1, \ldots, y_{n_1+2n_2+1})$ 投影到 $A$的中心后，对应于 $(y_0,\ y_1, \ldots,$ $y_{n_1+2n_2+1}) \in A$ for$i = 1$，2，3 时的时刻 $t$。

$(\rho_i, \ldots, \rho_i)$ 的不稳定流形是二维的，它包含在 $\Delta_{2i-n_1-1,2i-n_1}$ 中，并与棱柱 $S_i$ 的侧面相交。特别地， $W^u(p_v)$ 与侧面 $\mathfrak{f}$ 的交集维数为 1，也就是说，它是一条线段。考虑经过这条线段上任意一点的轨迹，沿反向追踪时，我们趋向于平衡节点 $(\rho_i, \ldots, \rho_i)$。沿正向追踪时，我们沿着 $\psi$ 的轨迹前进，直到到达 $(\rho_t, \ldots, \rho_t)$ 的稳定流形。接着，我们继续前往平衡点 $(\rho_t, \ldots, \rho_t)$，它是 $\Delta_{2i-n_1-1,2i-n_1}$ 中的一个汇。因此，从 $n_i$ 到 $n_t$ 的异宿连接在耦合细胞系统 $\dot{x} = f^{Q_{n_1},n_2}(x)$ 中实现。这些异宿连接位于最小同步子空间 $\Delta_{2i-n_1-1,2i-n_1}$ 中，在该子空间里，目标平衡节点是稳定的，因此这些异宿连接对函数 $f$ 的小扰动具有鲁棒性。对于从该节点出发的其他出连接，我们可以重复上述过程，因为我们假设它们的嵌入除起始节点和目标节点外互不重叠。不稳定流形 $W^u((\rho_i, \ldots, \rho_i))$ 与棱柱 $S_i$ 的提升的交集位于同步子空间 $\Delta_{2i-n_1-1,2i-n_1}$ 内，并且是一个 $k$ 边形。经过该多边形的轨迹（其顶点除外）会收敛到一个

目标平衡点。经过该多边形顶点的轨迹集合的测度为零。因此，不稳定流形 $W^u((\rho_i, \ldots\ldots, \rho_i))$ 包含在异宿网络中，但零测集除外。

请注意，前面的项不会破坏从第一个 $n_1$ 平衡节点出发的出向异宿连接，因为 $\mathbb{R}^3$ 中的嵌入彼此不相交$\{x = y \vee y = z \vee x = z\}$。因此，先前在$f^{Q_{n_1,\ n_2}}$ 中实现的异宿连接不受影响，并将继续得到实现。对于其他具有两个以上出向连接的平衡节点，我们可以重复上述过程，因为 $\mathbb{R}^3$ 中的嵌入彼此不相交。由此证明，耦合细胞系统 $\dot{x} = f^{Q_{n_1,\ n_2}}(x)$ 以稳健且几乎完全的方式实现了异宿网络 $\mathcal{N}$。

# 6 结论与未来工作

本文提出了在耦合细胞系统中实现异宿网络的新方法，将异宿连接置于二维和三维同步子空间上。通过改进 Field 的构造以适用于二维同步子空间，并借鉴书嵌入的概念，我们证明可以根据网络的书厚度，将所需细胞数量降至最少。我们还扩展了这一框架，使其能够实现几乎完全实现，因为异宿连接属于三维同步子空间。本文引出了有关所构造异宿网络稳定性以及平衡态之间切换性质的问题。

# 致谢

PS 获得了由 FCT/MCTES 通过国家资金资助的 ISEG Research 项目 - UID/06522/2025 的支持。

# 参考文献

[1] P. Ashwin、S. Castro 和 A. Lohse。几乎完备且均衡的异宿网络。《非线性科学杂志》，30(1):1–22，2020。[2] P. Ashwin 和 C. Postlethwaite。根据图设计异宿网络。《物理学 *D*》，265:26–39，2013。[3] S. Castro 和 A. Lohse。固定低维状态空间中任意大的异宿网络，2023。[4] M. Field。齐次与非齐次同一细胞系统中的异宿网络。《非线性科学杂志》，25(3):779–813，2015。[5] M. Golubitsky 和 I. Stewart。《网络中的动力学与分岔：耦合微分方程的理论与应用》。工业与应用数学学会，2023。[6] M. Golubitsky、I. Stewart 和 A. T¨or¨ok。具有多重箭头的耦合细胞网络中的同步模式。《*SIAM* 应用动力系统杂志》，4(1):78–100，2005。[7] T. Peixe 和 A. Rodrigues。三维多矩阵复制子系统中的持久性奇异吸引子。《物理学 *D*》，438:论文编号 133346，19 页，2022。[8] R. Sousa 和 F. Minh´os。具有 $\phi$-拉普拉斯算子的非线性二阶耦合系统的异宿解与同宿解。《计算与应用数学》，40(5):论文编号 169，13 页，2021。

[9]维基百科。书嵌入 – 维基百科，自由的百科全书。
http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Book%20embedding& oldid
=1149027193，2023。[10] M. Yannakakis。将平面图嵌入四页。《计算机与系统科学杂志》，38(1):36–67，1989。