必然-几乎必然随机奇偶博弈的算法与策略构造

Laurent Doyen 巴黎-萨克雷大学，法国国家科学研究中心，巴黎-萨克雷高等师范学院，LMF，吉夫叙尔伊维特，法国

Shibashis Guha 塔塔基础研究院，孟买，印度

arXiv:2601.03381v1 [cs.GT] 6 Jan 2026

摘要

我们研究轮流行动的双人随机博弈，其中结合了一个必须必然满足的奇偶条件，即在所有可能的结果路径中都满足；以及一个必须几乎必然满足的奇偶条件，即其满足概率为 1。在超越最坏情况的综合框架中，判断此类博弈是否存在获胜策略是一个核心问题：该框架将必须必然满足的硬性要求与较为宽松的要求结合起来。近期研究表明，该问题是 coNP 完全的，并且一般而言必须采用无限记忆策略，即使在单人博弈（即马尔可夫决策过程）中也是如此。然而，对手玩家采用无记忆策略便已足够。尽管已有这些全面的结果，现有的算法解法仍会枚举对手的所有无记忆策略，这在所有情况下都是指数级的；而且当获胜策略存在时，该解法并不会构造出该策略。

我们提出了一种基于获胜区域刻画的递归算法，从而能够更深入地理解这一问题。特别地，我们展示了如何构造获胜策略，以实现必然奇偶目标与几乎必然奇偶博弈的结合，并针对通过固定两个奇偶条件之一的索引而定义的问题特殊类别，推导出新的复杂度和记忆界。

2012 年 ACM 学科分类 计算数学 → 概率与统计

关键词与短语 随机博弈、奇偶目标、反应式综合

1 引言

轮流行动博弈为综合满足给定规格的系统组件提供了一个简单模型。组件被视为一个试图实现由规格定义的获胜条件的玩家，而不论其他组件的行为如何。将其他组件抽象为对抗性与随机环境的组合，便得到在图上进行的双人随机博弈标准模型 [18, 19], ，其中图的顶点划分为系统顶点、环境顶点和随机顶点。从初始顶点出发，对局路径是一条无限路径，其中每个顶点的后继由拥有该顶点的玩家（对于系统顶点和环境顶点）选择，或按照概率分布（对于随机顶点）确定。一般而言，策略规定玩家的选择，而这些选择可能取决于此前访问过的顶点序列，即历史。组件的综合对应于为系统构造一种策略，使其在不论环境策略如何的情况下，最大化获胜的概率（即满足获胜条件的概率）。

我们考虑由奇偶条件描述的规格，这类条件是表达对对局路径的所有 ω-正则需求的典型方式，并且 [27, 15], 具有如下性质：双方都存在无记忆最优策略 [12, 定理 1。2], 无需记住博弈历史即可使获胜概率最大化。判定奇偶博弈中哪位玩家拥有获胜策略属于 NP $\cap$ coNP [12, 推论 1。1], ，但目前尚无针对该问题的多项式时间算法，即使在非随机博弈中也是如此。不过，已有更优的复杂度界和准多项式算法 [21, 8, 22, 23]。

2 必然-几乎必然随机奇偶博弈的算法与策略构造

在组件综合中，一个自然的需求是确保获胜条件以概率 1 成立，这称为几乎必然获胜。例如，要通过可能以固定概率丢失消息的网络发送消息 p，一种策略是持续发送同一条消息，直到消息送达；这属于几乎必然获胜，因为经过 k 次尝试后仍未送达的概率会趋于零，如 $p^k \to 0$ 当 $k \to \infty$。更强的需求是，所有可能的结果路径，无论其概率如何，都应满足规格，这称为必然获胜。这对应于最坏情况，此时环境顶点和随机顶点上的选择完全具有对抗性。必然获胜通常用于关键需求，而几乎必然获胜则用于确保在随机环境中取得良好表现。近期研究了同时结合必然奇偶条件与几乎必然奇偶条件的规格 [5, 13], ，它们是超越最坏情况的综合框架中的一个基本实例 [7]。对于这类规格，博弈是确定的 [13, 定理 5] ，且综合问题是 coNP 完全 [13, 推论 7]；环境玩家有无记忆策略可用 [13, 定理 6], ，而系统玩家则必须使用无限记忆 [5, 例 1], ，即使在马尔可夫决策过程（MDP，即不存在环境顶点的博弈）中也是如此。

尽管已有这些全面的结果，整体图景仍不完整。首先是算法方面的问题。coNP 算法 [13] 需要猜测环境玩家的一种无记忆策略，然后检查在由此得到的马尔可夫决策过程中，系统玩家是否必败（利用决定性），这可以在 NP ∩ coNP [5, 定理 15]中完成。实际上，枚举环境玩家的无记忆策略总是需要指数时间，因此效率低下。另一个相关问题是为系统玩家构造获胜策略，这在综合问题中至关重要。只有在马尔可夫决策过程的情形下，（无限内存）获胜策略的结构才已有描述 [5, 定义 10]。然而，当前针对博弈的综合问题解决方案，并未说明系统应如何行动才能满足规格。我们认为，这些问题反映出人们对兼具必然奇偶条件和几乎必然奇偶条件的博弈尚缺乏更深入的认识。

主要贡献 我们概述本文的主要贡献。

- 我们提出了一种递归算法，用于判定是否存在一种策略，既能对第一个奇偶条件必然获胜，又能对第二个奇偶条件几乎必然获胜。该算法以最坏情况下的指数时间计算系统玩家的获胜集。我们利用对各玩家获胜集的刻画证明算法正确，并由此更深入地了解这类博弈的结构与性质。我们精确描述了系统玩家的获胜策略，以及如何通过在简单（无记忆）策略之间切换，并借助无界计数器将每种策略重复足够长的时间来构造这些策略。
- 直观而言，一种对两个奇偶条件都仅能几乎必然获胜的策略可能存在违反条件的结果路径，但这些结果路径所占的概率质量为 0。最终，必须切换到对第一个奇偶条件必然获胜的策略，才能确保所有结果路径都满足该条件，但这可能会导致违反第二个条件。关键在于要足够少地切换，使这些违反条件的结果路径所占的概率质量为 0，从而维持第二个奇偶条件几乎必然得到满足。类似的思路也适用于马尔可夫决策过程：通过组合几乎必然访问某些终端分量的策略来实现 [5]。然而，将其推广到随机博弈并非易事，因为博弈中不再存在终端分量这一概念。借助新的算法和分析，我们得到了该问题若干子类在复杂度和内存需求方面的新界限，这些子类涉及奇偶指标（即定义奇偶条件的优先级数量）。当两个奇偶条件中的任意一个
-

具有固定指标时，我们证明综合问题可在非确定性多项式时间 ∩ coNP 内求解；当两者的指标都固定时，该问题属于多项式时间。当必然条件为 coBüchi 条件时，系统玩家只需采用无记忆策略；当几乎必然条件为 Büchi 条件时，有限记忆便已足够。这就给出了一个紧确而完整的图景，因为已知必然 Büchi 条件与几乎必然 coBüchi 条件的组合需要无限记忆，即使在马尔可夫决策过程中也是如此 [5, 例 1 与定理 18]。

一个具有独立研究价值的技术结果是，构造一个与两个 DPW 的交集等价的确定性奇偶自动机（DPW），其规模膨胀仅在两个 DPW 中任一个的奇偶指标上呈指数级。除了两个自动机的状态空间的乘积外，规模还会增加一个因子 $\sqrt{\min(d_1^{d_2}, d_2^{d_1})}$，其中 d_i（$i = 1,2$）是第 i 个自动机的奇偶指标。我们的方法并不特别复杂，但我们未能在文献中找到具有这一性质的构造。当其中一个奇偶条件具有固定指标时，该构造对于证明综合问题属于非确定性多项式时间 ∩coNP 至关重要。

相关工作 综合满足多个目标组合的策略，在验证 [1], 规划 [20], 和人工智能 [25]等许多应用中自然会出现。在非随机博弈中，因此对于必然获胜的情形，已有研究考虑奇偶目标 [10] 以及均值收益目标 [28] 的组合。在随机博弈中，多目标条件的定量分析进展甚微，尤其是针对布尔目标（如奇偶条件）；已知的正面结果适用于可达性目标或某些博弈子类 [14, 4]。正如 [5], 所观察到的，定量目标的组合在概念上有时比布尔目标更简单。针对多个定量目标的几乎必然获胜问题，已有研究考察了均值收益条件的情形 [9]。超越最坏情况综合这一框架最初是在最短路径和均值收益等定量目标下进行研究的 [7]。

我们已经讨论了与我们工作最为接近的结果 [5, 13]。值得注意的是，极限必然获胜（即以任意接近 1 的概率获胜）这一概念也曾与必然获胜结合考虑，其综合问题是 coNP 完全的。其中，coNP 上界是通过猜测一个环境玩家的无记忆策略，再求解一个具有必然—极限必然奇偶条件的马尔可夫决策过程得到的；已有结果证明，该问题可在多项式时间内归约为马尔可夫决策过程中的必然—几乎必然问题 [13]。针对马尔可夫决策过程，也有人研究了必然获胜与几乎必然获胜的布尔组合 [3]。一个自然的扩展方向是考虑与必然获胜结合的任意满足概率（而非概率 1）。这一问题已针对马尔可夫决策过程得到解决 [5], ，但对于博弈仍未解决。

2 预备知识

2.1 基本定义

有限集合 V 上的概率分布是一个函数 $d\colon V \to [0,1]$，满足 $\sum_{v\in V} d(v) = 1$。d 的支撑集是集合 $\mathrm{Supp}(d) = \{v \in V \mid d(v) > 0\}$。我们用$\mathcal{D}(V)$表示 V 上所有概率分布构成的集合。给定 $v \in V$，我们用 1_v 表示 v上的狄拉克分布，它将概率 1 赋给 v。

一个随机博弈$\mathcal{G} = \langle V,(V_1, V_2, V_\Diamond)\ E, \delta\rangle$ 由有限顶点集合 V、两两不相交（但可能为空）的集合 $V_1, V_2, V_\Diamond$（分别对应玩家1、玩家2和概率顶点）、 $V = V_1 \cup V_2 \cup V_\Diamond$、边集 $E \subseteq V \times V$以及概率转移函数 $\delta\colon V_\Diamond \to \mathcal{D}(V)$构成。我们用 $E(v) = \{v' \mid (v, v') \in E\}$ 表示顶点的所有后继集合

。对于顶点 $v \in V$，我们要求其至少有一个后继，即对所有顶点 $v \in V$， $E(v) \neq \varnothing$；并且对于所有概率顶点 $v \in V_\diamondsuit$， $\mathrm{Supp}(\delta(v)) = E(v)$。本文中的判定问题与转移概率无关，因此随机博弈只需通过给出划分$(V_1, V_2, V_\diamondsuit)$和边集 E 即可定义。玩家 i 的马尔可夫决策过程（*MDP*）是随机博弈的一个特例，其中一名玩家不起作用，即 $V_{3-i} = \varnothing$。

博弈以轮次进行，从初始顶点 v_0 开始。在顶点 v 处的一轮中，如果 $v \in V_i$ $(i = 1, 2)$，则由玩家 i 选择一个后继 $v' \in E(v)$（这始终可行，因为 $E(v) \neq \varnothing$）；否则， $v \in V_\diamondsuit$，并以概率 $\delta(v)$ 选择一个后继 $v' \in E(v)$。下一轮从顶点 v' 开始。对局路径是一个无限路径 $v_0, v_1, \ldots$，满足对所有 $j \geq 0$，均有 $(v_j, v_{j+1}) \in E$。历史是对局路径的有限前缀。对于 $\tau = v_0, v_1, \ldots, v_k$ 和 $j \leq k$，令 $|\tau| = k+1$ 为 τ 的长度，定义 $\mathrm{Last}(\tau) = v_k$，并令 $\tau(j\triangleright) = v_j, \ldots, v_k$。给定一个定义在顶点上的函数 $\Omega : V \to Z$，定义 $\Omega(\tau) = \Omega(v_0), \Omega(v_1) \ldots, \Omega(v_k)$ 为 Ω 在历史上的扩展。

在 G 中，玩家 $i\,(i = 1, 2)$ 的策略是一个函数 $\sigma_i \colon V^* V_i \to V$，使得对于所有历史 $\tau \in V^*$ 和顶点 $v \in V_i$，$(v, \sigma_i(\tau v)) \in E$ 是一条边。对局路径 $v_0, v_1, \ldots$ 是 σ_i 的一个结果，当且仅当对于所有满足 $v_j \in V_i$ 的 $j \geq 0$，都有 $v_{j+1} = \sigma_i(v_0, v_1, \ldots, v_j)$。我们用 $\mathrm{Out}(v, \sigma)$ 表示以初始顶点 v 开始、策略 σ 的所有结果路径的集合，并用 $\mathrm{Out}(v, \sigma_1, \sigma_2)$ 表示集合 $\mathrm{Out}(v, \sigma_1) \cap \mathrm{Out}(v, \sigma_2)$。我们用 $\Pr_{v_0}^{\sigma_1\ \sigma_2}$（在玩家 i 的马尔可夫决策过程中也简称为 $\Pr_{v_0}^{\sigma_i}$）表示定义在以初始顶点 v_0 开始的（无限）对局路径集合上的 σ-代数上的标准概率测度；该 σ-代数由历史 [2] 张成的柱集生成。

如果存在一个定义在历史上的有限指数右同余（即可以由有限状态转换器生成），使得 $\tau \approx \tau'$ 蕴含$\sigma_i(\tau) = \sigma_i(\tau\prime)$，则策略 σ_i 使用有限记忆 $\approx$。

目标是对局路径的一个可测集 $\psi \subseteq V^\omega$。给定优先级函数 $\Omega : V \to \mathbb{N}$，我们考虑经典的奇偶目标 $\mathrm{Parity}(\Omega) = \{v_0, v_1, \cdots \in V^\omega \mid \limsup_{j\to\infty} \Omega(v_j)$ 为偶数$\}$，并将 $\mathrm{Parity}^c(\Omega) = V^\omega \setminus \mathrm{Parity}(\Omega)$ 记为该目标的补集（它本身也可定义为一个奇偶目标，使用优先级函数 Ω^{+1}，其中 $\Omega^{+1}(v) = \Omega(v) + 1$）。Büchi目标是优先级函数 $\Omega : V \to \{1, 2\}$ 的特殊情形，要求优先级 2 被访问无穷多次；而 coBüchi目标是优先级函数 $\Omega : V \to \{0, 1\}$ 的特殊情形，要求优先级 1 仅被访问有限次。奇偶目标的一项关键性质是前缀无关性：对于所有 $\theta \in V^\omega$ 和 $\tau \in V^*$， $\theta \in \mathrm{Parity}(\Omega)$ 当且仅当 $\tau\theta \in \mathrm{Parity}(\Omega)$。给定集合 $U \subseteq V$ 和优先级 $p \in \mathbb{N}$，我们将 $U(\Omega\ p) = \{v \in U \mid \Omega(v) = p\}$ 记为 U 中优先级为 p 的顶点集合，并将 $\pi_{\Omega \geq p}(\tau)$ 记为从 $\Omega(\tau)$ 中移除所有小于 p 的优先级后得到的序列。例如，如果 $\tau = v_2 v_3 v_1 v_3 v_4 v_1 v_3$ 且 $\Omega(v_i) = i$，那么 $\pi_{\Omega \geq 3}(\tau) = 3343$。

若对局路径 $\mathrm{Out}(v, \sigma_1) \subseteq \psi$，则玩家1的策略 σ_1 从初始顶点 v 出发对目标 ψ 必然获胜；若对所有玩家2的策略 σ_2，$\Pr_v^{\sigma_1\ \sigma_2}(\psi) = 1$，则该策略几乎必然获胜。注意，对 ψ 必然获胜会立即推出对 ψ 几乎必然获胜（反之则不成立）；而一个策略若对 ψ_1 和 ψ_2 都几乎必然获胜，则它对 $\psi_1 \cap \psi_2$ 也几乎必然获胜（此处反之亦成立）。

我们研究奇偶目标的必然-几乎必然综合问题：给定一个初始顶点为 v、具有两个优先级函数 Ω_1,Ω_2, 的随机博弈 $\mathcal{G}$，判断是否存在玩家1的策略 σ_1，使其对目标 $\mathrm{Parity}(\Omega_1)$ 必然获胜，并对目标 $\mathrm{Parity}(\Omega_2)$ 几乎必然获胜。我们称这样的策略为必然-几乎必然获胜策略（假设博弈 $\mathcal{G}$、初始顶点 v以及优先级函数 Ω_1,Ω_2 在上下文中均已明确）。我们称所有存在此类策略的初始顶点构成的集合为必然-几乎必然获胜区域，并称其补集为必然-几乎必然破坏

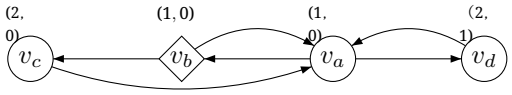

图 1 一个马尔可夫决策过程，其中必然 Büchi 与几乎必然 coBüchi 的组合需要无限记忆 [5]。每个节点 v 都标记有一对优先级 $(\Omega_1(v),\Omega_2(v))$，由此定义了一个（必然）Büchi 条件，即无限次访问顶点 $\{v_c, v_d\}$，以及一个（几乎必然）coBüchi 条件，即有限次访问 v_d。

区域。必胜区域和几乎必然获胜区域的定义与此类似。

已知有限记忆策略不足以实现必然且几乎必然获胜，即使是在同时具有必然 Büchi目标和几乎必然 co-Büchi目标的马尔可夫决策过程中也是如此，如图 1 所示（图中，玩家 1 顶点用圆形表示，玩家 2 顶点用方框表示，概率顶点用菱形表示）。只有在 v_a 处存在策略选择。通过相较于选择 v_d，越来越频繁地选择 v_b，可以必然地无限次访问集合 $\{v_c, v_d\}$ 中的某个顶点，同时几乎必然地只有限次访问 v_d；选择 v_d 无限多次的概率为 0，而在所有从某个时刻起不再访问 v_c 的结果路径中，v_d 都会被无限次访问。

2.2 子博弈与陷阱

令 $\mathrm{SurePre}_i : 2^V \to 2^V$ 和 $\mathrm{PosPre}_i : 2^V \to 2^V$ 分别表示玩家 i 的必然前驱算子和正概率前驱算子，对所有 $U \subseteq V$，定义为 $\mathrm{SurePre}_i(U) = \{v \in V_i \mid E(v) \cap U \neq \varnothing\} \cup \{v \in V_{3-i} \cup V_\Diamond \mid E(v) \subseteq U\}$，以及 $\mathrm{PosPre}_i(U) = \{v \in V_i \cup V_\Diamond \mid E(v) \cap U \neq \varnothing\} \cup \{v \in V_{3-i} \mid E(v) \subseteq U\}$。

给定集合 $T \subseteq V$，玩家 i 的必然吸引集 $\mathrm{SureAttr}_i(T)$ 是算子 $X \mapsto \mathrm{SurePre}_i(X) \cup T$ 的最小不动点，因此 $\mathrm{SureAttr}_i(T) = \bigcup_{j \geq 0} \mathrm{SurePre}_i^j(T)$（其中 $\mathrm{SurePre}_i^0(T) = T$）；而玩家 i 的正概率吸引集 $\mathrm{PosAttr}_i(T)$ 是算子 $X \mapsto \mathrm{PosPre}_i(X) \cup T$ 的最小不动点。

直观而言，从 $\mathrm{SureAttr}_i(T)$ 中的顶点出发，玩家 i 有一种无记忆策略，可以确保最终（事实上，至多经过 $|V|$ 轮次）到达 T 中的某个顶点，而不受玩家 $3-i$ 的选择以及概率转移结果的影响；从 $\mathrm{PosAttr}_i(T)$ 中的顶点出发，玩家 i 有一种无记忆策略，可以确保以正概率T到达目标，而不受玩家 $3-i$ 的选择影响。我们称这类策略为吸引子策略。

集合 $U \subseteq V$ 诱导出子博弈$\mathcal{G}$，记作 $\mathcal{G}^U$，当且仅当 $E(v) \cap U \neq \varnothing$ 对所有 $v \in U \cap (V_1 \cup V_2)$ 成立，且 $E(v) \subseteq U$ 对所有 $v \in U \cap V_\Diamond$ 成立；也就是说，两位玩家可以合作，使对局路径永远留在 U 中。若此外 $E(v) \subseteq U$ 对所有 $v \in U \cap V_i$ 成立，则集合 U 是玩家 i 的陷阱。例如，集合 $V \setminus$ 正概率吸引集$_i(T)$ 始终是玩家 i 的陷阱。陷阱的一项关键性质是：如果玩家 i 从某个初始顶点 $v \in U$ 出发，在$\mathcal{G}^U$中（针对某个目标 ψ）拥有确定获胜（分别为几乎必然获胜）策略，且 U 是玩家 $3-i$ 的陷阱，那么玩家 i在$\mathcal{G}$ 中从 v 出发，针对 ψ也拥有确定获胜（分别为几乎必然获胜）策略。

考虑一个集合 $U \subseteq V$，它仅对所有 $v \in U \cap (V_1 \cup V_2)$ 满足条件 $E(v) \cap U \neq \varnothing$，正如 $U = V \setminus$ 必然吸引集$_i(T)$ 的情况。令 $\mathrm{Bnd}(U) = \{v \in U \cap V_\Diamond \mid E(v) \not\subseteq U\}$ 表示 U 中有后继位于 U 之外的（边界）概率顶点集合。通过将离开 U 的（概率）转移重定向至一个汇点，定义子博弈闭包 $\lceil \mathcal{G} \rceil_U = \langle U', (U_1, U_2, U_\Diamond)\ E', \delta' \rangle$（形式化定义见图 4）：

- $U' = U \cup \{v_{\mathsf{sink}}\}$，$U_1 = U \cap V_1$；$U_2 = U \cap V_2$；
- $U_\Diamond = (U \cap V_\Diamond) \cup \{v_{\mathsf{sink}}\}$，

- $E' = E \cap (U \times U) \cup \mathrm{Bnd}(U) \times \{v_{\mathsf{sink}}\} \cup \{(v_{\mathsf{sink}}, v_{\mathsf{sink}})\}$，$\delta'(v)(v') = \delta(v)(v')$ 对所有 $v \in U_\Diamond$ 和 $v' \in U$；$\delta'(v)(v_{\mathsf{sink}}) = \sum_{v' \in V \setminus U} \delta(v)(v')$ 对所有 $v \in U_\Diamond$；以及 $\delta'(v_{\mathsf{sink}}) = 1_{v_{\mathsf{sink}}}$。

注意，如果 U 诱导出 $\mathcal{G}$ 的一个子博弈，那么 $\lceil \mathcal{G} \rceil_U$ 是 $\mathcal{G}\upharpoonright U$ 与 $\}$ 的不相交并。我们通常将优先级 $\Omega_1(v_{\mathsf{sink}}) = \Omega_2(v_{\mathsf{sink}}) = 0$ 赋给汇点，使其成为玩家1的获胜顶点。于是，关键性质是：如果玩家1从初始顶点 $v \in U$ 出发，在 $\lceil \mathcal{G} \rceil_U$ 中对于某个目标 ψ 没有必然获胜（分别为几乎必然获胜）策略，那么玩家1在 $\mathcal{G}$ 中从 v 出发，对于 ψ 也没有必然获胜（分别为几乎必然获胜）策略。

3 奇偶条件的合取

在下文中，考虑奇偶条件的合取会很有用：我们的算法（第 5 节）需要计算两个奇偶目标 $\mathrm{Parity}(\Omega_1) \cap \mathrm{Parity}(\Omega_2)$ 的合取的几乎必然获胜区域。

我们重新考察这样一个问题：如何将由两个奇偶条件合取指定的目标，转换为由单个奇偶条件指定的目标。由于奇偶条件是表达 ω-正则目标的一种规范方式，且 ω-正则目标类在布尔运算 [27]下封闭，因此这种转换总是可行的。然而，我们未能在文献中找到直接的构造，尤其是当两个优先级函数之一的取值范围固定时（即某个奇偶条件中的优先级数量固定时）仅产生多项式膨胀的构造。

鉴于这种构造本身具有独立价值（例如，在形式语言和自动机理论中），我们将通过自动机模型来介绍它，而不涉及目标和博弈。定义在有限字母表 Σ 上的**确定性自动机** 是一个元组 $\mathcal{A} = \langle Q, q_\varepsilon, \delta, \alpha \rangle$，由有限状态空间 Q、初始状态 $q_\varepsilon \in Q$、转移函数 $\delta\colon Q \times \Sigma \to Q$，以及接受条件（它定义了 Q^ω 的一个子集）组成；这里的接受条件是奇偶条件的合取。自动机$\mathcal{A}$ 在无限字 $w = \sigma_0\sigma_1\ldots$ 上的运行是一个序列 $q_0q_1\ldots$，满足 $q_0 = q_\varepsilon$ 且$\delta(q_i, \sigma_i) = q_{i+1}$ 对所有 $i \geq 0$ 均成立，因此每个词都有唯一的运行。给定优先级函数 $\Omega_1,\Omega_2\colon Q \to \mathbb{N}$，所有运行满足奇偶条件 $\mathrm{Parity}(\Omega_1)$ 和 $\mathrm{Parity}(\Omega_2)$ 的词所构成的集合 $L(\mathcal{A})$，称为**自动机** $\mathcal{A}$的语言。我们将这类自动机记为 D2PW；在 $\Omega_1 = \Omega_2$ 的特殊情形下，则记为 DPW，后者是经典的确定性奇偶自动机。

将 D2PW 转换为 DPW 时产生的膨胀不可避免地是指数级的，这一点已由 [6, 定理 9] 证明，并且从如下事实也可得到印证：具有两个奇偶目标合取的博弈是 coNP 完全的 [10], ，而具有单个奇偶目标的博弈属于 NP $\cap$ 和 coNP [17]。一种自然的转换路径，是将奇偶条件视为 Streett 条件的特殊情形 [6]；Streett 条件对交集封闭，接着再将 Streett 自动机（由 D2PW 得到）转换为 DPW。取值范围为$[d_1] = \{0, \ldots, d_1\}$ 和 $[d_2] = \{0, \ldots, d_2\}$ 的优先级函数分别给出 $k = O(d_1 + d_2)$ 个 Streett 对，而转换为 DPW 时的膨胀因子为 $O(k^k)$ [26]。一个关键观察是，即使 d_1 或 d_2 之一为常数，这种膨胀仍是指数级的。这种方法通过“合并”奇偶条件将其“扁平化”；使用（非确定性）Büchi 自动机时也会出现这种情况[1] [6, 第 3 节。1]。

相比之下，我们直接从 D2PW 构造 DPW，这种构造在概念上

[1] DPW 可以二次转换为非确定性 Büchi 自动机；Büchi 自动机的交集可得到膨胀规模为多项式的 Büchi 自动机，但转换回 DPW 则需要指数级开销 [24]。这种方法也在一定意义上“压平”了奇偶条件，因为指数级开销同时出现在 d_1 和 d_2中。

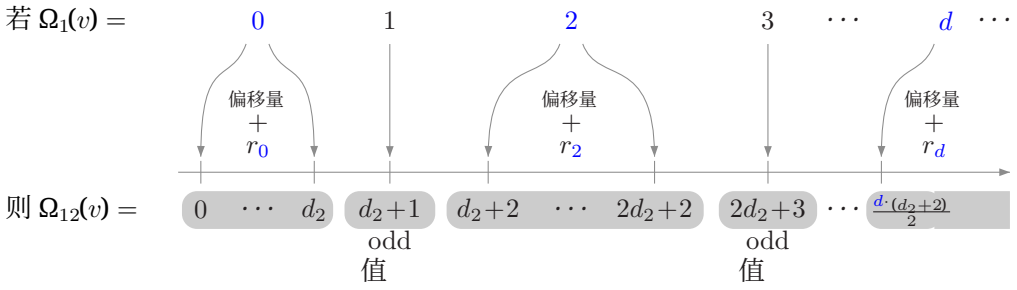

图 2 优先级函数的构造 Ω_{12} 对于由优先级函数定义的奇偶条件的合取Ω_1 和Ω_2。偶数Ω_1-优先级的偏移量 d 计算为$\frac{d}{2}\cdot(d_2+2)$。寄存器 r_d 存储自上次访问Ω_2-优先级以来的最大Ω_1-优先级 d。

简单，膨胀幅度至多为 $O(\max(d_1^{d_2/2}, d_2^{d_1/2}))$，因此，如果两个优先级函数中任意一个的取值范围固定，构造规模就是多项式级的。

构造

给定一个 D2PW，其中两个奇偶条件中的最大优先级分别为 d_1 和 d_2，我们构造一个等价的 DPW，使其最大优先级为 $O(d_1 \cdot d_2)$。我们将由优先级函数 Ω_i 定义的优先级非正式地称为 Ω_i-优先级。为方便起见，不妨假设 d_2 为偶数；这不会损失一般性（如果 d_2 为奇数，我们可以将 d_2 加一）。

直观地说，给定 D2PW 中某个有限词 w 上的有限运行 $\tau = q_0 q_1 \dots q_k$，其中优先级为 $\Omega_1(\tau) = a_0 a_1 \dots a_k$ 和 $\Omega_2(\tau) = b_0 b_1 \dots b_k$，我们的 DPW 在 w 上的运行具有优先级序列 $c_0 \dots c_k$，并满足以下性质（另见图 2）：

(P_1) 如果 Ω_1-优先级 a_k 为奇数，那么 c_k 为奇数，且 c_k 的值仅取决于 a_k；(P_2) 对于 D2PW 中某个有限词 w'上的所有运行 τ'，若 $\Omega_1(\tau') = a'_0 \dots a'_k$，则 $a_k < a'_k$时 $c_k < c'_k$（其中 c'_k 是我们的 DPW 在 w'上的运行中最后一个状态的优先级）；这是通过分配互不相交的区段来实现的，c_k 的值可能落在这些区段中。与 a_k 关联的区段范围为 $[d_2]$（若 a_k 为偶数），若 a_k 为奇数，则该区段为单个奇数值；(P_3) 如果 Ω_1-优先级 a_k 为偶数，那么 c_k 的值计算为偏移量 $\nu(a_k)$ 与自上次访问 Ω_1-优先级 a_k 以来（或者如果在 τ中首次访问 a_k，则自运行开始以来）的最大 Ω_2-优先级之和。也就是说，$c_k = \nu(a_k) + \max\{b_i, b_{i+1}, \dots, b_{k-1}\}$，其中 i 是小于 k 且满足 $a_i = a_k$ 的最大索引（或者，$i = 0$）。

为了满足（P_3），DPW 自动机针对每个偶数 Ω_1-优先级 d维护一个寄存器 r_d，其中存储自上次访问具有 Ω_1-优先级 d 的状态以来（或自运行开始以来）出现的最大 Ω_2-优先级。

给定一个 D2PW $\mathcal{A} = \langle Q, q_\varepsilon, \delta, \alpha \rangle$，其接受条件 α 是由两个优先级函数 Ω_1 和 Ω_2，定义的奇偶条件的合取，令 $\mathcal{A}' = \langle Q', q'_\varepsilon, \delta', \alpha' \rangle$ 为如下定义的 DPW：

- $Q' = Q \times [d_2]^{[d_1]_{\text{even}}}$其中 $[d_1]_{\text{even}} = \{0、2、\dots\dots、2\lfloor \frac{d_1}{2} \rfloor\}$；一个状态 $(q、r_0、r_2、\dots\dots、r_{2\lfloor \frac{d_1}{2} \rfloor}) \in Q'$由 $\mathcal{A}$ 的一个状态 q 以及每个偶数 Ω_1-优先级 d对应的一个寄存器 r_d 组成，其取值范围为$[d_2] = \{0、\dots\dots、d_2\}$；$q'_\varepsilon = (q_\varepsilon、0、0、\dots\dots、0)$；

- 对于每个状态 $(q, r_0, r_2, \ldots, r_{2\lfloor \frac{d_1}{2} \rfloor})$ $\in Q'$ 和 $\sigma \in \Sigma$，定义 $\delta((q, r_0, r_2, \ldots, r_{2\lfloor \frac{d_1}{2} \rfloor}), \sigma) = (q', r'_0, r'_2, \ldots, r'_{2\lfloor \frac{d_1}{2} \rfloor})$，其中 $q' = \delta(q, \sigma)$，且对于每个 $d \in [d_1]_{\text{even}}$：

$$r'_d = \begin{cases} \max(r_d, \Omega_2(q)) & \text{if } \Omega_1(q) \neq d \\ \Omega_2(q) & \text{if } \Omega_1(q) = d \end{cases}$$

- 接受条件 α' 是由优先级函数 Ω_{12} 定义的奇偶条件，使得 $\Omega_{12}(q, r_0, r_2, \ldots, r_{2\lfloor \frac{d_1}{2} \rfloor}) = \begin{cases} d \cdot \frac{d_2+2}{2} + d_2 & \text{若 } d = \Omega_1(q) \text{ 为奇数} \\ d \cdot \frac{d_2+2}{2} + r_d & \text{若 } d = \Omega_1(q) \text{ 为偶数} \end{cases}$

  值 $\nu(d) \cdot \frac{d_2+2}{2}$ 称为对应于偶数 Ω_1-优先级 d 的偏移量（见图2）。

▶ **示例**。在图3左侧，我们给出了输入 D2PW $\mathcal{A}$，其状态为 Q，字母表为 $\{a, b\}$。要接受一个词，它必须无限次访问 q_3。在图中，每个状态 $q \in Q$ 上方的括号内标出了优先级 $\Omega_1(q)$ 和 $\Omega_2(q)$。因此 $\Omega_1(q_0) = \Omega_1(q_1) = 0$，$\Omega_1(q_2) = 2$，$\Omega_1(q_3) = 1$ 以及 $\Omega_2(q_0) = 5$，$\Omega_2(q_1) = 3$，$\Omega_2(q_2) = 1$，$\Omega_2(q_3) = 6$。

在右图中，我们展示了所构造的自动机 A′，其状态为 Q'。注意，对于自动机 A，第一维上出现的唯一偶数优先级是 0 和 2。如上所述，A′ 的初始状态为 $q'_0 = (q_0, 0, 0)$。当自动机 A 读取一个字母并从 q_0 转移到状态 q_1 时，自上次访问满足 $\Omega_1(q) = 0$ 的状态 q 以来，第二维上所见的最大优先级为 5；自上次访问满足 $\Omega_1(q) = 2$ 的状态 q 以来，第二维上所见的最大优先级也为 5。因此，A′ 从初始状态 $(q_0, 0, 0)$ 转移到状态 $(q_1, 5, 5)$。随后，自动机 A 再读取一个字母，并从 q_1 转移到 q_2。对于 $d = 0$，我们有，q_1 是在当前访问 q_2 之前最后访问的、满足 $\Omega_1(q) = 0$ 的状态 q。由于 $\Omega_2(q_1) = 3$，我们现在在 A′ 中转移到状态 $(q_2, 3, 5)$。从 q_2 出发，如果 A 现在读取一个字母并转移到 q_0，由于 $\Omega_1(q_2) = 2$ 且 $\Omega_2(q_2) = 1$，我们将在 A′ 中转移到状态 $(q_0, 3, 1)$。A′ 中的其他状态可以类似地定义。

现在我们来描述优先级函数 Ω_{12}。注意，$d_2 = 6$。由于 $\Omega_1(q_0) = 0$，且该值为偶数，因此 $\Omega_{12}(q_0, 0, 0) = 0 \cdot \frac{8}{2} + r_0 = 0 + 0 = 0$。同样，由于 $\Omega_1(q_1) = 0$，因此 $\Omega_{12}(q_1, 5, 5) = 0 \cdot \frac{8}{2} + r_0 = 0 + 5 = 5$。对于状态 $(q_2, 3, 5)$，由于 $\Omega_1(q_2) = 2$，因此 $\Omega_{12}(q_2, 3, 5) = 2 \cdot \frac{8}{2} + r_2 = 8 + 5 = 13$。对于状态 $(q_3, 3, 1)$，由于 $\Omega_1(q_3) = 1$，且该值为奇数，因此 $\Omega_{12}(q_3, 3, 1) = 1 \cdot \frac{8+6}{2} = 7$。对于 Q' 中的其他状态，奇偶函数 Ω_{12} 可以用类似的方式定义。图中每个状态在 A′ 中对应的优先级标在该状态上方。此外，对于 A′ 中从状态 (q, r_2, r_4) 到状态 (q', r'_2, r'_4) 的每条转移，在 A 中都有一条从状态 q 到状态 q' 的对应转移，且 A′ 中标记该转移的字母与 A 中标记该转移的字母相同。为避免图示过于杂乱，我们没有在描述 A′ 的图中标出这些转移上的字母。

A 中的优先级数量为 $O(d_1 \cdot d_2)$，状态数量膨胀的倍数为 $d_2^{d_1/2}$。通过在我们的构造中交换两个优先级函数，我们可以得到膨胀倍数 $d_1^{d_2/2}$，并且可以选择两个倍数中较小的那个构造。

▶ **定理 1.** 给定一个 *D2PW A*，我们可以构造一个 *DPW A′*，使得 $L(A) = L(A')$，A' 中的优先级数量为 $O(d_1 \cdot d_2)$，且状态数量的膨胀（相较于 A）倍数为 $\sqrt{\min(d_1^{d_2}, d_2^{d_1})}$。

证明。我们首先证明 $L(\mathcal{A}) \subseteq L(\mathcal{A}')$。考虑一个词 $w \in L(\mathcal{A})$，并令 p_i $(i = 1, 2)$ 为在 A 的运行中无限多次访问的最大 Ω_i-优先级，该运行在 w 上进行。于是 p_1 和 p_2 都是

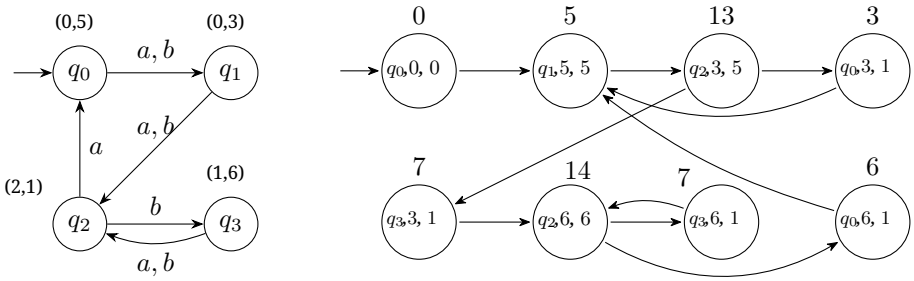

图3 D2PW 的一个示例（左）及其构造出的 DPW（右）

偶数，并且根据 $\mathcal{A}'$的构造， w 在 $\mathcal{A}'$ 中的运行沿途无限多次访问的最大优先级为 $p_{12} = {}^{p_1 \cdot (d_2+2)}_{2} + p_2$ （见 ~~Ω_{12}~~ ~~的定义~~），因为寄存器 r_{p_1}会无限多次包含 Ω_2-优先级 p_2，并且从某一点开始，它将不再包含更大的值。由于我们假设 d_2 是偶数，因此可得 p_{12} 是偶数，且 $w \in L(\mathcal{A}')$。

反过来，我们证明 $L(\mathrm{A}') \subseteq L(\mathrm{A})$。考虑一个词 $w \in L(\mathrm{A}')$，并令 p_{12} 为 A′ 在 w 上的运行中无限次出现的最大 Ω_{12}-优先级。那么 p_{12} 为偶数，并且容易看出，A 在 w 上的运行中无限次出现的最大 Ω_1-优先级 p_1 为偶数：反证，若它为奇数，则根据性质 (P_1) 和 (P_2)，无限次出现的最大 Ω_{12}-优先级也会是奇数。A′ 运行中优先级为 Ω_{12} 的状态，对应于 A 运行中优先级为 Ω_1 的状态；并且 $p_{12} = {}^{p_1 \cdot (d_2+2)}_{2} + r_{p_1}$（见 Ω_{12} 的定义），其中 r_{p_1} 是优先级为 Ω_1 的寄存器内容，也就是自上次访问优先级为 Ω_1 的状态以来最大的 Ω_2-优先级 p_1。

因此，根据性质（P_3），在$\mathcal{A}$的运行中对 p_1 的（无限多次）访问里，有无限多个位置满足 r_{p_1} 是 $p_2 = p_{12} - {}^{p_1 \cdot (d_2+2)}_{2}$，该值为偶数（因~~为我们~~假设 d_2 为偶数），并且从某个时刻起， r_{p_1} 的值始终不大于此值。因此，从该时刻起，$\mathcal{A}$ 的运行可以分解（划分）为有限多个片段，每个片段的最大 Ω_2-优先级至多为 p_2，且有无限多个片段的最大值等于 p_2。因此，$\mathcal{A}$ 在 w 上的运行中无限多次出现的最大 Ω_2-优先级是 p_2，该优先级为偶数。由此可知，$\mathcal{A}$ 在 w 上的运行满足两个奇偶条件，且 $w \in L(\mathcal{A})$。◀

作为推论，当 D2PW 中任一优先级函数的取值范围固定（但可以任意）时，定理 1 中的变换具有多项式时间复杂度。特别地，对于带有两个确定（或几乎确定）奇偶条件合取的博弈，其综合问题一般而言是 coNP-完全的；若定义这些奇偶条件的任一优先级函数的取值范围固定，则该问题的复杂度变为 NP ∩ coNP，因为它可在多项式时间内归约为标准奇偶博弈。

请注意，同样的构造可用于将两个奇偶条件的析取转换为一个奇偶条件。这是因为 $\psi_1 \cup \psi_2 = (\psi_1^c \cap \psi_2^c)^c$，而且由优先级函数 Ω 定义的奇偶条件的补集也是一个奇偶条件，其优先级函数为 Ω^{+1}。

4 获胜策略与获胜区域

我们非正式地描述玩家1的一种必然且几乎必然获胜策略。首先，我们采用奇偶目标的合取 Parity(Ω_1)∩Parity(Ω_2) 的几乎必然获胜策略。奇偶目标的合取可以表示为一个定义在规模大得多的博弈图上的单个奇偶目标（定理 1），其规模呈指数级增长；

因此，我们可以假设该几乎必然获胜策略使用有限记忆。

为了保证第一个目标必然获胜，关键在于避免出现违反 Parity(Ω_1) 的结果路径（这是可能的，尽管其概率为 0）：不时切换到一种策略，以确保访问 Ω_1，的某个较大偶数优先级，而忽略第二个目标，因此可能需要付出访问 Ω_2，的某个较大奇数优先级的代价；然后再切换回针对目标合取的几乎必然获胜策略。切换应当足够罕见，使得无限次切换的概率为 0，从而不会潜在地违反第二个目标 Parity(Ω_2)。另一方面，在所有情况下，切换仍应保证消除单个结果路径违反 Parity(Ω_1) 的可能性。

直观地说，切换的一个条件是：在对局路径中已经看到一段很长的奇数优先级序列，且期间没有看到任何更大的优先级。给定奇数优先级 p 和整数 N，令

$$\mathsf{Unlucky}(p, N) = \{\rho \in V^\omega \mid \text{the first } N \text{ elements of } \pi_{\Omega_1 \geq p}(\rho) \text{ are } p\}$$

至少有 N 个优先级 $\geq p$ 出现，且前 N 个此类优先级为 p 的事件。

在博弈 $\mathcal{G}$ 中固定奇偶性(Ω_1) 的几乎必然获胜策略后得到的马尔可夫决策过程中，随着 N 趋于无穷大，遭遇不幸事件（即观测到 Unlucky(p, N)）的可能性会越来越低。

▶**引理 2**。考虑一个马尔可夫决策过程，其优先级函数 Ω_1 定义了奇偶目标$\psi =$ 奇偶性(Ω_1)，并且对所有顶点 $v \in V$ 和所有策略 σ，均有 $\mathsf{Pr}_v^\sigma(\psi) = 1$。设 p 是 Ω_1 值域中的一个奇数优先级。那么对所有 $\varepsilon > 0$，存在 N_ε，使得对所有策略σ和所有顶点 v，都有 Pr_v^σ(不幸事件$(p, N_\varepsilon)) < \varepsilon$。

证明。我们证明其逆否命题。假设存在 $\varepsilon > 0$，使得对所有 N，存在一个策略 σ_N和一个顶点 v_N，满足 $\mathsf{Pr}_{v_N}^{\sigma_N}$(不幸事件$(p,\ N)) \geq \varepsilon$。

考虑一个顶点 v_∞，使得对于无穷多个 N 的值，$v_\infty = v_N$ 成立。我们构造一个策略 σ_∞，使得对于所有 N，都有 $\mathsf{Pr}_{v_\infty}^{\sigma_\infty}$(不幸事件 $(p,\ N)) \geq \varepsilon$，这意味着 $\mathsf{Pr}_{v_\infty}^{\sigma_\infty}$(不幸事件 $(p,\ \infty)) \geq \varepsilon$，因此 $\mathsf{Pr}_{v_\infty}^{\sigma_\infty}(\psi) \leq 1 - \varepsilon < 1$，由此完成逆否命题的证明。

归纳地定义 σ_∞。令 $\sigma_\infty(v_\infty) = v_0$，其中 v_0 满足对于无穷多个 N 的值，$\sigma_N(v_\infty) = v_0$。考虑由所有与 σ_∞ 在 v_∞ 处的值相同的策略 σ_N 构成的集合 Σ，也就是说 $\sigma_N(v_\infty) = \sigma_\infty(v_\infty)$。这个集合是无限的。归纳构造如下：假设我们已经构造出一个无限策略集合 $\Sigma_k \subseteq \Sigma$，其中的策略在所有长度不超过 k 的历史上都与 σ_∞ 一致，并定义 σ_∞ 在所有长度为 $k+1$ 的历史上的值，以及一个无限策略集合 $\Sigma_{k+1} \subseteq \Sigma_k$，其中的策略对于所有长度不超过 $k+1$ 的历史都与 σ_∞ 一致。

对于每个策略 $\sigma \in \Sigma_k$，考虑 $k+1$ 长度的每段历史上 σ 的值所构成的元组。注意，由于该马尔可夫决策过程的分支数有限，这个元组是有限的。因此，存在一个无限策略集合 $\Sigma_{k+1} \subseteq \Sigma_k$，其中的策略在该元组中的值上相同。我们用这个元组来定义 $k+1$ 长度的各段历史上 σ_∞ 的值。

这一构造保证，对于任意大的 k，σ_∞ 在所有长度为k的前缀上都与某个策略 σ_k 一致。令 Unlucky$^{\leq k}(p, N) = \{\rho \in V^\omega \mid$的前 N个 $\pi_{\Omega_1 \geq p}(\rho \lhd k)$元素为 $p\}$，其中 $\tau(\lhd k)$ 是 ρ的长度为 k 的前缀。该事件表示在前 k 个顶点中至少出现 N 个优先级 $\geq p$，且最先出现的 N 个此类优先级为 p。（非递减）序列 $\mathsf{Pr}_{v_\infty}^{\sigma_\infty}$(Unlucky$^{\leq k}(p, N))$（$k = 1$、2、.....）收敛于 $\mathsf{Pr}_{v_\infty}^{\sigma_\infty}$(Unlucky$(p, N))$，后者也等于 $\lim_{k\to\infty} \mathsf{Pr}_{v_\infty}^{\sigma_k}$(Unlucky$^{\leq k}(p, N)) \geq \varepsilon$，因为该序列中的所有项都至少为 ε。因此，$\mathsf{Pr}_{v_\infty}^{\sigma_\infty}$(Unlucky$(p, N)) \geq \varepsilon$，如所需。◀

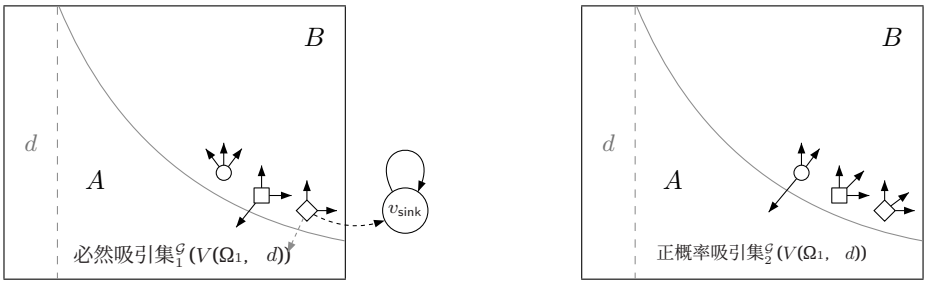

图 4 获胜区域的分解：对于具有偶数最大 Ω_1-优先级 d 的获胜区域，将其分解为具有奇数最大 Ω_1-优先级 d 的必然吸引子，以及A（对于玩家1）到 d 的子博弈闭包和$B = V \setminus A$。正吸引集 A（对于玩家2）到 d 以及由 $B = V \setminus A$诱导的子博弈。**图 5**

直观来说，由于 Unlucky(p, N) 以正概率发生，并且如果玩家1在事件 Unlucky(p, N) 发生时就从几乎必然获胜策略切换，那么根据博雷尔-坎特利引理 [16], ，玩家1将以概率 1 进行切换（甚至无限多次）。对于所有固定的 N，这一点都成立，尽管通过适当选择 N （根据引理 2），不幸事件发生的概率可以任意小。无限次切换并不可取，因为这可能导致违反第二个奇偶目标。然而，如果在看到 N 个优先级 $\geq p$ （无论是否属于不幸事件）后增大 N，那么无限次切换的概率可能降至 0，这是可以接受的。

对于所有 $i > 0$，令 $N_i = N_\varepsilon$，其中 N_ε 由引理 2 针对 $\varepsilon = 2^{-i}$定义。利用该序列（N_i），我们证明，从某一轮 i 开始始终不发生不幸事件的概率可以由表达式 $\prod_{j \geq i}(1 - 2^{-j})$（下方）界定。简单计算表明，当 $i \to \infty$ 时，该表达式趋于 1（例如，参见 [5, 引理 12]的证明）。

4.1 获胜区域的刻画

我们给出两个引理，分别刻画：（1）其最大 Ω_1-优先级为偶数时的必然-几乎必然获胜区域 W（对于玩家1）；以及（2）其最大 Ω_1-优先级为奇数时的必然-几乎必然破坏区域 $V \setminus W$（对于玩家2）。这些是确立我们在第 5 节中给出的递归算法正确性所需的基础情形。对称情形——获胜区域中的最大 Ω_1-优先级为奇数，或破坏区域中的最大 Ω_1-优先级为偶数——则通过对优先级数量较少的子博弈进行递归调用来求解。

在引理3中，我们证明：当其最大 Ω_1-优先级 d 为偶数时，必然-几乎必然获胜区域 W（它是玩家2的一个陷阱，并由此诱导出一个所有顶点均获胜的子博弈）可由以下条件刻画（另见图 4）：

- 玩家1针对目标奇偶性(Ω_1)的几乎必然获胜策略 σ_{AS} ∩奇偶性(Ω_2)；玩家1在子博弈闭包 $\lceil \mathcal{G} \rceil_B$ 中针对奇偶目标奇偶性(Ω_1)和奇偶性(Ω_2)的必然且几乎必然获胜策略 σ_{sub}，其中 $B = V \setminus A$ 以及 $A =$ 必然吸引集$_1$(V(Ω_1,d))。

容易证明，这些条件是玩家1在 W 中获胜的必要条件，而引理3的关键在于证明它们也充分：通过在 σ_{AS} 中构造一个必然且几乎必然获胜策略 σ_1，并在 A 中构造吸引策略 σ_{Attr}。当必然获胜目标是 Büchi 条件时，我们非正式地描述 σ_1：此时优先级为

12 必然-几乎必然随机奇偶博弈的算法与策略构造

{1,2}：必然且几乎必然获胜策略首先按照 σ_{AS} 行动，并设定一个时间界限 N，在此之前优先级 2 应至少出现一次。N 越大，这种情况发生的可能性就越高（引理 2）。然而，为了确保更强的必然获胜目标 Parity(Ω_1)，策略 σ_1 会在不幸事件发生时偏离 σ_{AS}，也就是优先级 2 未能在时间界限 N 内出现时：只要历史仍处于 B 中，我们就遵循必然且几乎必然获胜策略 σ_{sub}；每当历史进入 A，我们便遵循吸引策略σ_{Attr}，直到优先级 2 出现，然后继续遵循 σ_{AS}。吸引策略可能会危及第二个奇偶目标的（几乎必然）满足，例如访问较大的奇数 Ω_2-优先级。按照引理 2 之后所述的方法增大时间界限 N，即可确保这种情况无限次发生的概率为 0。将这一构造推广到必然奇偶目标在技术上较为复杂，需要跟踪每个 Ω_1-优先级，但概念上类似。

▶**引理3**。 设 G 是一个具有由优先级函数 Ω_1,Ω_2，诱导的必然-几乎必然奇偶目标的随机博弈，且 G 中最大的 Ω_1-优先级为偶数。令$A = 必然吸引集_1(V(\Omega_1, d))$，并令 $B = V \setminus A$。

当且仅当满足以下条件时，G 中所有顶点对于奇偶目标奇偶性(Ω_1) 和 奇偶性(Ω_2) 都是玩家1 的必然且几乎必然获胜顶点：

- G 中所有顶点对于目标奇偶性(Ω_1) ∩奇偶性(Ω_2)都是玩家1 的几乎必然获胜顶点，并且 $\lceil G \rceil_B$ 中所有顶点对于奇偶目标奇偶性(Ω_1)和 奇偶性(Ω_2)都是玩家1 的必然且几乎必然获胜顶点。

证明。 我们首先证明，引理中的条件足以确保 $\mathcal{G}$ 中的所有顶点都是玩家 1的必然且几乎必然获胜顶点。

设 σ_{AS} 是玩家1 针对目标 Parity(Ω_1) ∩Parity(Ω_2) 的几乎必然获胜策略，σ_{Attr} 是到 $V(\Omega_1, d)$ 的必然吸引策略，而 σ_{sub} 是玩家 1 在 $\lceil \mathcal{G} \rceil_B$ 中针对奇偶目标 Parity(Ω_1) 和 Parity(Ω_2) 的必然且几乎必然获胜策略。

我们定义玩家1 的策略 σ_1，然后证明它是必然且几乎必然获胜策略。该策略使用一个名为 unlucky 的布尔标志，以及针对 $\mathcal{G}$ 中每个出现的奇数优先级 p 的整数变量 k_p，i_p。变量 k_p 是指向历史中某个位置的指针，而 i_p 是与优先级 p 相关联的阶段编号。初始时，unlucky $= \bot$（false），且对所有奇数 p，$k_p = i_p = 0$。

给定一段历史 $\tau \in V^*V_1$，通过依次执行以下指令来定义值 $\sigma_1(\tau)$ 和变量的更新，并在执行到指令 对局路径 时终止（序列 (N_i) 在引理 2 之后定义）：

1. 若 Ω_1(Last(τ)) $= d$，则设置不幸事件 $= \bot$ 并执行对局路径 $\sigma_{AS}(\tau)$；2. 若发生不幸事件 $= \bot$，a. 若对于所有奇数 p，均有 $|\pi_{\Omega_1 \geq p}(\tau(k_p \triangleright))| < N_{i_p}$，则执行对局路径 $\sigma_{AS}(\tau)$；b. 否则，对于每个满足 $|\pi_{\Omega_1 \geq p}(\tau(k_p \triangleright))| \geq N_{i_p}$ 的奇数 p，i. 若 $\pi_{\Omega_1 \geq p}(\tau(k_p \triangleright))$ 的前 N_{i_p} 个元素全都是 p，则设置不幸事件 $= \top$；ii. 递增 i_p，并设置 $k_p = |\tau|$；

3. 如果发生不幸事件 $= \bot$，则进行对局路径 $\sigma_{AS}(\tau)$；4. 如果发生不幸事件 $= \top$，a. 如果 Last(τ) $\in B$，则进行对局路径 $\sigma_{sub}(\tau')$，其中 τ' 是完全位于 B 中的 τ 的最长后缀；b. 否则 Last(τ) $\in A$，并进行对局路径 $\sigma_{Attr}(\tau)$。

请注意，始终留在 B 中的 $\mathcal{G}$ 对局路径也是 $\lceil\mathcal{G}\rceil_B$ 中的对局路径，因此条件 4a 中使用策略σ_{sub} 是定义良好的。

我们证明 σ_1 是必然且几乎必然获胜的。首先证明，对于目标 Parity(Ω_1)， σ_1 是必然获胜的。考虑 σ_1 的任意一个结果 ρ，令 $p_{\max}$ 为在 ρ 中无限次出现的最大优先级（根据 Ω_1），并考虑 ρ 中的一个位置 $\hat{}k$，在该位置之后，不会出现大于 $p_{\max}$ 的优先级。我们证明 $p_{\max}$ 是偶数。我们通过反证法进行证明，假设 $p_{\max}$ 是奇数（因此 $p_{\max} < d$）。那么，沿着 ρ，变量 unlucky 必须无限次等于 $\top$，因为条件 2(b)i 无限次成立（在位置 $\hat{}k$ 之后，也就是说，当 $k_{p_{\max}} > k$ 时）。条件 1 在位置 k 之后不再成立，条件 4 无限次成立。在位置 k 之后，条件 4b 不成立，否则优先级 $d > p_{\max}\hat{}$ 将会出现。因此，在位置 k 之后，条件 4a 始终成立，于是 ρ 的后缀是必然-几乎必然获胜策略 $\sigma_{sub}(\tau')$ 的一个结果，因此 $p_{\max}$ 是偶数而非奇数，这就构成了矛盾。因此， $p_{\max}$ 是偶数，且对于目标 Parity(Ω_1)， σ_1 是必然获胜的。

其次，我们证明 σ_1 对目标 Parity(Ω_2) 几乎必然获胜。注意，在从某个时刻起不幸事件始终发生的情况下，策略 σ_1 的对局路径与 σ_{AS} 一致，因此得益于奇偶目标的前缀独立性，奇偶目标 Parity(Ω_2) 以概率 1 成立。为完成证明，我们证明从某个时刻起不幸事件 $= \bot$ 始终发生的概率为 1。根据 N_i 的选取（见引理 2），对于玩家2的所有策略，不幸事件 $= \bot$ 在第 i 轮之后始终发生的概率至少为 $\prod_{j\geq i}(1-2^{-j})$；当 $i \to \infty$ 时，该概率趋近于 1 （例如，见引理 12]的证明）。

现在我们证明逆命题。考虑一个博弈$\mathcal{G}$，其中所有顶点对于奇偶目标 Parity(Ω_1) 和 Parity(Ω_2) 均为玩家1的必然且几乎必然获胜顶点。首先，由于必然获胜蕴含几乎必然获胜，第一个条件成立。其次，玩家1的必然且几乎必然获胜策略可以在 $\lceil\mathcal{G}\rceil_B$ 中采用，并且对局路径要么始终留在 B 中，要么最终停留在获胜顶点 v_{sink}。在这两种情况下，玩家1对于这些奇偶目标都是必然且几乎必然获胜的，这表明第二个条件成立。◀

必然-几乎必然破坏区域 $V \setminus W$ 通常可能无法诱导出一个子博弈，因为概率顶点可能会“泄漏”到获胜区域中。引理 4 刻画了在该区域诱导出子博弈时的破坏区域，这足以证明我们算法的正确性。

如果玩家2在从一个博弈 $\mathcal{G}$ 中移除到 d的正吸引集（针对玩家2）后得到的、具有奇数最大 Ω_1-优先级 d 的博弈中（从每个初始顶点出发）拥有破坏策略，那么他在原博弈 $\mathcal{G}$ 中同样拥有破坏策略（另见图 5）。将子博弈中的破坏策略与一个（正）吸引策略进行标准组合，即可得到原博弈中的破坏策略，正如引理 4 的证明所示。

►**引理 4**。 设 G 是一个随机博弈，其必然-几乎必然奇偶目标由优先级函数 Ω_1,Ω_2，诱导，并且 G 中最大的 Ω_1-优先级 d 为奇数。令 A =正概率吸引集$_2^{\mathcal{G}}(V(\Omega_1, d))$，并令 $B = V \setminus A$。

玩家1 在 G 中针对奇偶性目标 奇偶性(Ω_1)和 奇偶性(Ω_2) 的必然-几乎必然获胜区域为空，当且仅当玩家1在 $G^{\upharpoonright B}$ 中针对相同目标的必然-几乎必然获胜区域为空。

证明。 我们首先证明，若$\mathcal{G}^{\upharpoonright B}$中玩家1的必然且几乎必然获胜区域为空，则$\mathcal{G}$中该区域也为空。根据前提，对于$\mathcal{G}^{\upharpoonright B}$ 中玩家1的任意策略 σ_1 以及$\mathcal{G}^{\upharpoonright B}$中的任意顶点 v，都存在一个玩家2的策略 σ_2，使得 Out$(v, \sigma_1, \sigma_2) \cap$ 奇偶性$^c(\Omega_1) \neq \varnothing$ 或者 $\Pr_v^{\sigma_1\,\sigma_2}$(奇偶性$^c(\Omega_2)) > 0$。我们称 σ_2 其为破坏 策略

针对 σ_1，省略初始顶点，因为从所有顶点出发都可以使用相同的策略 σ_2 （有时在上下文明确 σ_1 时，简称为破坏策略）。

给定博弈 $\mathcal{G}$ 中玩家1的任意策略 σ_1，我们按如下方式为玩家2构造一个破坏策略 σ_2，适用于所有历史 $\tau \in V^*V_2$:

- 若 Last(τ) $\in V(\Omega 1, d)$，则任意定义 $\sigma_2(\tau)$；否则，若 Last(τ) $\in A$ 属于正吸引集，则 σ_2 (τ) $= \sigma_{Attr}(\tau)$，其中 σ_{Attr} 是针对 $V(\Omega 1, d)$ 的正吸引策略（属于玩家2）；否则 Last(τ) $\in B$；令 ρ 为 τ 的最长（可能为空）前缀，使得 Last(ρ) $\notin B$，并令 $v_0 \in B$ 满足 ρv_0 是 τ 的前缀；考虑相对于 ρ 的玩家1策略 σ_ρ，其定义为：对于所有 $\tau' \in \{v_0\}B^*(B \cap V_1)$，$\sigma_\rho(\tau') = \sigma_1(\rho\tau')$，且初始顶点为 v_0；该策略是 $\mathcal{G}_{\upharpoonright B}$ 中的策略。定义 $\sigma_2(\tau)$ 为玩家2针对 σ_ρ 的某个破坏策略在历史 τ' 处所采取的行动，其中 $\rho\tau' = \tau$。

我们证明，σ_2 是针对 σ_1 的破坏策略。考虑结果路径集合 Out(v, σ_1, σ_2)，并分两种可能的情况：

- 如果存在一条结果路径，无限次访问正吸引集 A，那么它也会无限次访问最大的奇数 Ω_1-优先级 d，从而违反第一个奇偶目标 Parity(Ω_1)；否则，存在一条结果路径的前缀 τ，使得在所有以 τ 为前缀的结果路径中，其 τ 之后的后缀都不会访问 A；因此，历史 τ 以正概率出现。根据 σ_2 的构造，τ 之后的对局路径是玩家2在 $\mathcal{G}_{\upharpoonright B}$ 中的某个破坏策略所产生的结果路径，该策略确保：要么存在一条结果路径违反第一个奇偶目标 Parity(Ω_1)，要么违反第二个奇偶目标 Parity(Ω_2) 的概率为正。根据奇偶目标的前缀无关性，从 $\mathcal{G}$ 中的初始顶点出发，同样成立。

在这两种情况下，策略 σ_2 都是针对 σ_1 的破坏策略，由此完成证明的第一部分。

为了证明引理中的条件是必要的，回顾一下，B 是玩家2的陷阱，因此玩家1在 $\mathcal{G}_{\upharpoonright B}$ 中的策略也是 $\mathcal{G}$ 中的策略，而且 $\mathcal{G}$ 中定义的破坏策略可以立即限制为 $\mathcal{G}_{\upharpoonright B}$ 中的破坏策略。◀

5 算法

我们提出一种用于必然-几乎必然综合问题的算法，该算法通过类似于 Zielonka 算法 [29] 的递归过程计算玩家1的获胜区域。基本情形是博弈为空或仅包含汇点 v_{sink}。此时有两种可能：

- 如果 V 中最大的 Ω_1-优先级 d 是偶数，第一步是计算奇偶目标合取 Parity(Ω_1) $\cap$ Parity(Ω_2) 的几乎必然获胜区域 W_{AS}。该区域是玩家2的一个陷阱，也是必然-几乎必然获胜区域的一个上近似。这可以通过将奇偶目标的合取表示为一个规模呈指数级增长的博弈图上的单个奇偶目标（定理 1），再使用标准算法求解几乎必然奇偶博弈 [11, 12] 来完成。在由 $V = W_{AS}$ 诱导的子博弈 $\mathcal{G}_{\upharpoonright W_{AS}}$ 中，计算玩家 1 到优先级为 d 的顶点的必然吸引子 A，然后（递归地）求解子博弈闭包 $[\mathcal{G}]_{V \setminus A}$。如果子博弈闭包中的所有顶点对玩家1而言都是获胜的（第9行），那么根据引理3的刻画，$\mathcal{G}$ 中的所有顶点对玩家1而言也都是获胜的。否则，子博弈闭包中存在某个顶点集合 $B \subseteq V \setminus A$，对玩家1而言并非获胜；根据子博弈闭包的关键性质，这些

算法 1 求解($\mathcal{G}$)以计算奇偶目标的必然-几乎必然获胜区域

输入： 由 $\mathcal{G} = (V_1, V_2, E)$ 和 (Ω_1, Ω_2) 给出的随机二维奇偶博弈
输出： 奇偶目标的必然-几乎必然获胜区域 W_1，以及失败区域 W_2
奇偶性(Ω_1) 和奇偶性(Ω_2)。

1: **如果** $V = \varnothing$ 或 $V = \{v_{\text{sink}}\}$ **则返回** V
2: d =最大$_{v \in V} \Omega_1(v)$
3: **如果** d为偶数 **则**
4: G =$G_{\restriction W_{AS}}$ ▷ W_{AS} 是 $Parity(\Omega_1) \cap$ 奇偶性(Ω_2) 的几乎必然获胜区域。
5: $V = W_{AS}$
6: $Z = \{v \in V \mid \Omega_1(v) = d\}$ ▷ Z 可能为空。
7: $A =$ 必然吸引集$_1(Z)$
8: $W_1, W_2' =$ 求解($\lceil \mathcal{G} \rceil_{V \setminus A}$)
9: **如果**$_2$ $W' = \varnothing$ **则**
10: **返回** $W_1 = V, W_2 = \varnothing$
11: **else**
12: $B =$ 正概率吸引集$_2(W_2')$
13: $W_1', W_2'' =$ 求解($\mathcal{G}_{\restriction V \setminus B}$)
14: **返回** $W_1 = W_1''$， $W_2 = W_2' \cup B$
15: **否则**
16: $Z = \{v \in V \mid \Omega_1(v) = d\}$ ▷ Z 是非空的。
17: $A =$ 正概率吸引集$_2(Z)$
18: $W_1, W_2' = solve(\mathcal{G}_{\restriction V \setminus A})$
19: **如果**$_1$ $W' = \varnothing$ **则**
20: **返回** $W_1 = \varnothing$， $W_2 = V$
21: **else**
22: $B =$ 必然吸引集$_1(W_1')$
23: W_1'， $W_2'' =$ 求解($\lceil \mathcal{G} \rceil_{V \setminus B}$)
24: **返回** $W_1 = B \cup W_1' \mid \{v_{\text{sink}}\}$ $W_2 = W_2''$

顶点在 $\mathcal{G}$ 中对玩家1而言也并非获胜。移除玩家2到 B 的正吸引集后，剩下的就是（递归地）求解子博弈 $\mathcal{G}^{V \setminus B}$ （第13行）。

如果 V 中最大的 Ω_1-优先级 d 是奇数，算法将以类似方式继续，计算玩家2对优先级为 d 的顶点的正吸引集 A，然后根据引理 4 中的刻画求解子博弈 $\mathcal{G}^{V \setminus A}$（递归进行）；如果没有顶点属于玩家1的获胜区域（第 20 行），则采用陷阱和子博弈闭包的关键性质（第 24 行）。

我们通过对博弈的规模进行归纳法来证明算法 1 的正确性。博弈的规模定义为除汇点之外的顶点数量 $|V \setminus \{v_{\text{sink}}\}|$ 。考虑随机博弈$\mathcal{G} = \langle V, E, \delta \rangle$，在没有除 v_{sink}之外的其他顶点的基本情形下，获胜区域为 V （算法 1 的第 1 行）。

现在，令除 v_{sink} 之外的顶点数量为 $n+1$ ($n \geq 0$)，并假设算法 1 能计算所有规模至多为 n的博弈中的胜利区域。令 d 为分配给 V中某个顶点的最高 Ω_1-优先级。

首先，考虑 d 为偶数的情况。该算法会移除对于奇偶目标的合取 Parity(Ω_1) ∩ Parity(Ω_2) 而言并非几乎必然获胜的顶点，因为这些顶点不可能必然且几乎必然获胜。然后令 $V = W_{AS}$ （第 5 行），令 $Z \subseteq V$ 为所有优先级为 d 的顶点的集合，并令 $A =$ SureAttr$_1(Z)$。由于 $Z \neq \varnothing$ 和 $Z \subseteq A$，集合 $V \setminus A$ 的顶点数（不包括汇点）严格少于 V，根据归纳假设，我们

16 算法与策略构造：必然—几乎必然随机奇偶博弈

得到 W_1'（第 8 行）是子博弈闭包 $\lceil\mathcal{G}\rceil_{V\setminus A}$ 中玩家1的获胜区域（而 $W_2' = V\setminus W_1'$ 则是玩家2的获胜区域）。现在我们考虑以下两种情况。
1. 若 $W_2' = \varnothing$，那么根据引理3的刻画，$W_1 = V$，即玩家1从$\mathcal{G}$中的每个顶点出发都能获胜。**2.** 若 $W_2' \neq \varnothing$，那么令 $B = \mathrm{PosAttr}_2(W_2')$ 位于$\mathcal{G}$中；由于 $v_{\mathsf{sink}} \notin W_2'$，我们可以应用归纳假设，得出 W_1'' 是子博弈$\mathcal{G}_{V\setminus B}$ 中玩家1的获胜区域（第13行）。由于 $V\setminus B$ 是玩家2的一个陷阱，陷阱的关键性质（见第2.2节）保证算法返回的 W_1''在博弈$\mathcal{G}$中对玩家1也同样是获胜区域。

现在考虑 d 为奇数的情况。因此，集合 $Z \subseteq V$（所有优先级为 d 的顶点）非空，令 $A = \mathrm{PosAttr}_2(Z) \neq \varnothing$。根据归纳假设，集合 W_1'（第18行）是子博弈$\mathcal{G}_{V\setminus A}$中玩家1的获胜区域。现在考虑以下两种情况。

1. 如果 $W_1' = \varnothing$，那么根据引理 4 的刻画，$W_1 = \varnothing$，也就是说，玩家1从博弈 G 中的任何位置都无法获胜。2. 如果 $W'_1 \neq \varnothing$，那么令 $B = \mathrm{SureAttr}_1(W_1')$ 为博弈 G 中的集合。我们可以应用归纳假设，得出 W_1'' 是子博弈闭包 $\lceil\mathsf{G}\rceil_{V\setminus B}$（第 23 行）中玩家1的获胜区域。为了证明 $B \cup W''1$ 是博弈 G 中玩家1的获胜区域，注意到 W_1' 是子博弈 $\mathsf{G}_{V\setminus A}$ 中玩家2的一个陷阱，而 B 是博弈 G 中玩家2的一个陷阱。考虑按如下方式定义的玩家1策略：（1）在 W_1' 中，采用子博弈 $\mathsf{G}_{V\setminus A}$）中的必然且几乎必然获胜策略（该策略存在，并且在博弈 G 中同样是必然且几乎必然获胜策略）；（2）在 $B\setminus W_1'$ 中，采用（必然）吸引策略，以到达 $W''1$；（3）在 W_1'' 中，采用子博弈 $\mathsf{G}_{V\setminus A}$）中的必然且几乎必然获胜策略（该策略在博弈 G 中定义良好）。显然，该策略从 B 出发是必然且几乎必然获胜的；我们将证明它从 W_1'' 出发也同样如此。为了证明第一个奇偶目标上的必然获胜，考虑从 W_1'' 出发的该策略的一条结果路径：要么结果路径始终留在 W_1'' 中，因此根据（3）满足奇偶条件；要么结果路径最终离开 W_1''，从而到达 B，并从那里沿着某条根据（1）和（2）满足奇偶条件的路径继续前进。前缀无关性保证从 W_1'' 出发的结果路径也满足奇偶条件。为了证明第二个奇偶目标上的几乎必然获胜，论证类似：考虑对局路径最终留在 W_1'' 中，或离开 $W''1$ 的条件概率，并证明这两种情况下奇偶目标都几乎必然得到满足。

算法 1 的结构与求解奇偶博弈的 Zielonka 算法相似 [29], ，因此复杂度分析也类似。主要区别在于，我们还需要求解带有多个几乎必然奇偶条件之合取的随机博弈（第 4 行）。根据第 3 节中的构造，记 $\mathrm{ASPG}(N,\ d)$ 为求解具有 N 个顶点且最大优先级为 d 的几乎必然奇偶博弈的时间复杂度，则该问题可以在 $\mathrm{ASPG}(N,\ d_1\cdot d_2)$ 时间内求解，其中$N = n\cdot\sqrt{\min(d_1^{d_2},\ d_2^{d_1})}$，且 n 是博弈中的顶点数。

设 $T_n^{d_1}$ 为算法 1 在一个具有 n 个顶点、最大 Ω_1-优先级为 d_1 的博弈上的运行时间。运行时间也取决于最大 Ω_2-优先级 d_2，但我们将此参数隐去，因为它在递归调用过程中不会变化。

分析的关键在于注意到，在递归调用 $\lceil\mathcal{G}\rceil_{V\setminus A}$（第 8 行和第 18 行）中，博弈 $\lceil\mathcal{G}\rceil_{V\setminus A}$ 里的最大 Ω_1-优先级至多为 $d_1 - 1$；而在递归调用 $\mathrm{solve}(\lceil\mathcal{G}\rceil_{V\setminus B})$（第 13 行和第 23 行）中，博弈 $\lceil\mathcal{G}\rceil_{V\setminus B}$ 的顶点数至多为 $n-1$。因此，对于给定的最大 Ω_1-优先级 d_1，递归调用次数至多为 n 。

表 1 特殊情形的内存需求（0 表示无记忆）和复杂度界。新结果以蓝色显示。

AS, ⟶ S ↓	**Büchi**	**coBüchi**	**奇偶性**^{f}	**奇偶性**
Büchi	有限，多项式时间	∞ [5]，多项式时间	∞，P	∞，非确定性多项式时间 ∩coNP
coBüchi	0，P	0，P	0，P	0，非确定性多项式时间 ∩coNP
奇偶性^{f}	有限，P	∞，P	∞，P	∞，非确定性多项式时间 ∩coNP
奇偶性	有限，非确定性多项式时间 ∩coNP	∞，非确定性多项式时间 ∩coNP	∞，非确定性多项式时间 ∩coNP	∞，coNP-完全 [13]

除了递归调用和求解几乎必然奇偶博弈之外，其他计算都可以在多项式时间内完成（例如计算吸引子），因此其运行时间有 ASPG(N, d) 的上界。因此我们得到条件 $T_n^{d_1} \leq n \cdot (T_{n-1}^{d_1} + \text{ASPG}(N, d_1 \cdot d_2))$，由此得出（粗略的）上界 $T_n^{d_1} \in O(n^{d_1} \cdot \text{ASPG}(N, d_1 \cdot d_2))$。

6 特殊情形

我们从算法 1 推导出若干适用于必然-几乎必然综合问题若干子类的结果，从而对该问题给出更精细、更完整的认识。结果列于表 1，其中各行（分别为各列）表示 Büchi、coBüchi、固定优先级数量的奇偶性（Parity^{f}）以及奇偶条件下的必然（分别为几乎必然）满足情况。对于每个单元格，我们给出：(1) 根据无记忆、有限记忆和无限记忆策略的分类，必然且几乎必然获胜所需的最小策略类别；(2) 求解决策问题的复杂度。所有结果都是紧的，尤其是复杂度界：要么上下界相匹配（完全性结果），要么上界与该问题某个特殊情形的上界相同，而该情形尚无匹配的下界已知，例如具有（单个）奇偶目标的博弈（其复杂度界为非确定性多项式时间 $\cap$ coNP）。

表 1 中的新结果以蓝色显示。其他结果要么已在先前的研究中得出，要么可由新结果直接推出。

已知，必然且几乎必然获胜的一般综合问题是 coNP-完全的 [13]，而且即使在马尔可夫决策过程中，合取必然 Büchi 与几乎必然 coBüchi 也需要无限记忆 [5]。根据算法 1 的运行时间分析可立即得出，当 d_1 和 d_2 都为常数时，该问题属于多项式时间 d_1。表 1 中其余结果将在下文证明。

6.1 其中一个奇偶目标的优先级数固定

我们证明，当两个奇偶目标之一的优先级数量固定为 d 时，必然-几乎必然综合问题可以在非确定性多项式时间内求解。形式上，该问题的一个实例现在是一个随机博弈 $\mathcal{G}$ 以及两个优先级函数 $\Omega_1 \colon V \to \mathbb{N}$ 和 $\Omega_2 \colon V \to \{0, \ldots, d\}$，或反之，即 $\Omega_1 \colon V \to \{0, \ldots, d\}$ 和 $\Omega_2 \colon V \to \mathbb{N}$。一种 NP算法会猜测玩家1的获胜区域 W_1，以及算法 1 在对 $[\mathcal{G}]_{W_1}$ 执行时会计算出的若干集合，并将它们作为见证，然后验证猜测是否正确。在所有顶点都获胜的博弈上执行算法 1 似乎毫无用处（毕竟我们已经知道所有顶点都会获胜），但这对于定义并证明某些集合存在至关重要；这些集合会在算法 1 的中间计算中用到，并用于构造我们的 NP算法中的证书。

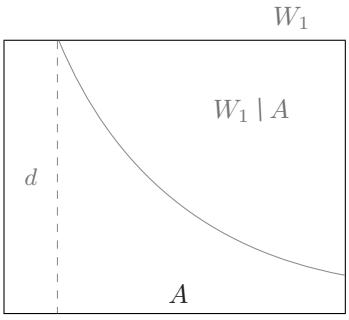

图6 获胜区域 W_1 的证书分解，其中最大优先级为偶数。

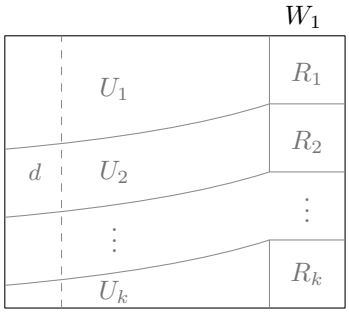

图7 获胜区域 W_1 的证书分解，其中最大优先级为奇数。

现在，我们对如何为猜测得到的（获胜）区域 W_1 定义正确性证书作一些直观说明。对于具有最大 Ω_1-优先级d的 W_1，其证书以具有最大 Ω_1-优先级至多为 $d-1$ 的 W_1 子集的证书为基础，采用归纳方式定义（遵循算法 1 的递归结构）。形式化证明表明，这些归纳证书可以在多项式时间内验证。首先，区域 W_1 必须是玩家2的一个陷阱（可在 $O(E)$ 内检查，并确保子博弈 $\lceil \mathcal{G} \rceil_{W_1}$ 定义良好）。

1. 若最大 Ω_1-优先级 d in W_1 为偶数（见图6），则证书由以下部分组成：(1) 证书，证明区域 W_1 对合取 Parity(Ω_1) ∩Parity(Ω_2) 的奇偶目标几乎必然获胜（根据第 3 节末尾的说明，此类证书存在，且可在多项式时间内验证）；(2)（归纳地）证书，证明区域 $W_1 \setminus A$ 必然且几乎必然获胜，其中 $A = \text{SureAttr}_1(\{v \in W_1 \mid \Omega_1(v) = d\})$（另见算法 1 第 6、7 行）。根据引理3给出的刻画，$W_1 \setminus A$ 的归纳证书存在。

2. 如果最大的 Ω_1-优先级 d 在 W_1 中是奇数（见图7），则证书由以下部分组成：(1) 将 W_1 划分为 $k \le |W_1|$ 个块 $U_1, \dots, U_k$；(2) 非空集合 $R_1, \dots, R_k$，使得$R_i \subseteq U_i \setminus \{v \in W_1 \mid \Omega_1(v) = d\}$ 是 $\lceil \mathrm{G} \rceil_{W_1 \setminus (U_1 \cup \cdots \cup U_{i-1})}$ 中玩家2的一个陷阱，且其中不包含任何 Ω_1-优先级为 d 的顶点，并且对于所有 $1 \le i \le k$，$U_i = \text{SureAttr}_1(R_i)$（定义于子博弈$\lceil \mathrm{G} \rceil_{W_1 \setminus (U_1 \cup \cdots \cup U_{i-1})}$ 中）；以及 (3)（归纳地）k 证书，证明每个区域 $R_i (i = 1, \dots, k)$ 在博弈 $\lceil \mathrm{G} \rceil_{W_1 \setminus (U_1 \cup \cdots \cup U_{i-1})}$ 中都是必然且几乎必然获胜的。这里，该证书对应于算法 1 在子博弈$\lceil \mathrm{G} \rceil_{W_1}$ 中计算出的集合，具体如下：集合 R_1 是 W_1' 的值（算法 1 第 18 行），集合 U_1 是 B 的值（算法 1 第 22 行的 else 子句），而集合 R_i 和 U_i（对于$i = 2, \dots, k$）则以类似方式在第 $(i-1)$ 次递归调用中（算法 1 第 23 行）得到。注意，集合 U_1 定义良好，因为当整个状态空间 $V = W_1 \neq \varnothing$ 对玩家1而言是必然且几乎必然获胜时，第 20 行的 then 子句永远不会执行；这是因为如果 W_1' 为空，那么根据引理 4 给出的刻画，W_1 也必为空。

▶**定理5**。当两个奇偶目标中的一个具有固定数量的 d 优先级时，必然-几乎必然综合问题可在非确定性多项式时间内求解。

证明。我们为必然-几乎必然综合问题定义一种 NP算法，其时间复杂度为 $C(n, d_1, d_2) \in O((d_1+1) \cdot (n^2 + \text{AS2P}(n, d_1, d_2)))$，其中 $n = |V|$ 是状态空间的大小，d_i 是最大的 Ω_i优先级，而 AS2P(n, d_1, d_2) 是求解

第 3 节）中所述的、使用非确定性算法求解合取的奇偶目标的几乎必然综合问题的（多项式）时间复杂度。

我们的算法及其证明通过对 Ω_1-优先级的数量进行归纳法来建立。给定一个博弈 $\mathcal{G}$、优先级函数 Ω_1, Ω_2, 和初始顶点 v_0，算法猜测一个包含 v_0 的集合W_1，并验证 W_1 是玩家2的一个陷阱，这可以在 $O(n^2)$ 时间内完成。从现在起，我们只考虑子博弈 $\mathcal{G}_{\restriction W_1}$，算法将验证其中所有顶点都是必然且几乎必然获胜。

基本情形是最大 Ω_1-优先级 d_1 为 0。此时必然奇偶目标显然得到满足，算法需要检查玩家1对于第二个奇偶目标是否几乎必然获胜，这可以在至多 AS2P(n, 0, d_2) 的（非确定性）时间复杂度内完成。因此，基本情形的时间复杂度为$C(n, 0, d_2) \in O(n^2 +$ AS2P(n, 0, d_2))。

归纳情形是：Ω_1 中最大的优先级为 W_1 d_1，并且我们假设，对于 Ω_1 中最大优先级为 $d_1 - 1$ 的所有博弈，复杂度界都成立。

如果 d_1 为偶数，那么根据引理3的刻画，算法可以猜测并验证一个证书，证明区域 W_1 是玩家2的陷阱，并且对于奇偶目标的合取 Parity(Ω_1) ∩Parity(Ω_2) 几乎必然获胜；同时证明区域 $W_1 \setminus A$（其中 $A = \text{SureAttr}_1(\{v \in W_1 \mid \Omega_1(v) = d\})$ 是必然且几乎必然获胜的。必然吸引子可以在二次时间内计算得到，因此验证至多可以在 $O(n^2 + \text{AS2P}(n, d_1, d_2) + C(n, d_1 - 1, d_2))$ 时间内完成；利用归纳假设，这一时间为 $O((d_1 + 1) \cdot (n^2 + \text{AS2P}(n, d_1, d_2)))$。

若 d_1 为奇数，则算法猜测将 W_1 划分为非空集合 U_1、……、U_k（因此 $k \leq |W_1|$），以及非空集合 R_1、……、R_k，使得 $R_i \subseteq U_i \setminus \{v \in W_1 \mid \Omega_1(v) = d_1\}$ 是博弈 $G_{\restriction W_1 \setminus (U_1 \cup \cdots \cup U_{i-1})}$ 中玩家2的一个陷阱，并且对所有 $1 \leq i \leq k$，都有 $U_i = \text{SureAttr}_1(R_i)$（其中必然吸引子是在子博弈 $G_{\restriction W_1 \setminus (U_1 \cup \cdots \cup U_{i-1})}$ 中定义的）。检验其是否为划分、陷阱或必然吸引子，都可以在二次时间内完成。此外，算法还会检验每个区域 R_i ($i = 1$、……、k) 是否在博弈 $G_{\restriction W_1 \setminus (U_1 \cup \cdots \cup U_{i-1})}$ 中必然且几乎必然获胜；根据归纳假设，这一过程可在至多 $C(n_i, d_1 - 1, d_2) \in O(d_1 \cdot (n_i^2 + \text{AS2P}(n_i, d_1, d_2)))$ 的（非确定性）时间复杂度内完成，其中 $n_i = |R_i|$ 是陷阱的大小。在这种情况下所需的总时间至多为 $O\left(\sum_{i=1}^{k} n_i^2 + C(n_i, d_1 - 1, d_2)\right) \in O\left(\left(\sum_{i=1}^{k} n_i\right)^2 + C(\sum_{i=1}^{k} n_i, d_1 - 1, d_2)\right)$，由于 $\sum_{i=1}^{k} n_i \leq n$，该时间属于 $O(n^2 + C(n, d_1 - 1, d_2))$，因此也属于 $O((d_1 + 1) \cdot (n^2 + \text{AS2P}(n, d_1, d_2)))$]，正如所声称的那样。

通过考察算法 1 在子博弈 $G_{\restriction W_1}$上的执行过程，可以证明集合 $U_1, \ldots, U_k$ 和 $R_1, \ldots, R_k$ 的存在。注意，第 15 行的 else 分支会被执行，因为博弈 $G_{\restriction W_1}$ 中最大的 Ω_1-优先级是 d_1，这是奇数。第 18 行递归调用的结果定义了集合 $R_1 = W_1'$，该集合非空，否则根据引理 4 的刻画，$W_1 = \varnothing$。因此，第 21 行的 else 分支会被执行，并定义集合 $U_1 = B$（第 22 行）。对于第 23 行的递归调用，我们也可作类似论证，依次定义 $R_2, R_3, \ldots$ 以及 $U_2, U_3, \ldots$，直到作为第 23 行递归调用输入的博弈 $\lceil G \rceil_{V \setminus B}$ 中最大的 Ω_1- 优先级小于 d_1。此时必有 $W_1'' = V \setminus B$，且该集合在玩家1的必然吸引子下封闭（因为 W_1中的所有顶点都是必然且几乎必然获胜），若该集合非空，我们就定义 $R_k = U_k = W_1''$。由此可知，集合 $U_1, \ldots, U_k$ 和 $R_1, \ldots, R_k$ 存在，并具有上述性质（特别是 R_i 是相应子博弈中的一个陷阱）。◀

现在，我们分析奇偶目标相关特殊情形下获胜策略所需的内存量。

6.2 必然 coBüchi 与几乎必然奇偶博弈无需内存

对于必然 coBüchi 与几乎必然奇偶目标的合取，玩家1使用无记忆策略即已足够。为说明这一点，考虑算法 1 在最大 Ω_1-优先级 d 为奇数的情形下的正确性证明（这正是 co Büchi目标的情形）。该证明在获胜区域中构造了一个必然-几乎必然获胜策略，该策略定义在三个子区域 W'_1、 $B\setminus W'_1$、 W''_1 上。在 W'_1 中，最大 Ω_1-优先级为 0，因此必然奇偶目标得以平凡满足。因此，第二个奇偶目标的一个几乎必然获胜策略就足够了，因而可以选择无记忆策略 [12]。在区域 $B\setminus W'_1$ 中，使用必然吸引策略，而该策略是无记忆的。最后，在 W''_1 中，我们可以通过对顶点数量进行归纳（在空博弈中，无记忆策略显然足够）来证明玩家1使用无记忆策略即已足够。

▶**定理6**。 无记忆策略足以实现必然 *coBüchi* 与几乎必然奇偶目标的合取。

6.3 必然奇偶目标与几乎必然 Büchi 目标需要有限记忆

对于必然奇偶目标与几乎必然 Büchi 目标的合取，我们证明玩家1只需有限记忆，即记忆大小为 $O(n\cdot d_1)$，其中 n 是博弈中的顶点数， d_1 是最大的 Ω_1-优先级。证明采用关于 d_1的归纳法。 $d_1=0$ 的情形可化为仅有几乎必然奇偶目标（必然奇偶目标显然成立）；而 $d_1=1$ 的情形对应于必然 coBüchi 与几乎必然奇偶（Büchi）目标的合取。在这两种情形下，无记忆策略都足够，因此记忆为 $O(1)$（后一种情形见第6.2节）。

我们对 $d_1\geq 2$ 进行归纳。首先，若 d_1 是偶数，则按如下方式构造一个必然且几乎必然获胜策略。根据引理3的刻画，获胜区域 W_1 对奇偶目标和 Büchi 目标而言都必须是几乎必然获胜区域，并且可分解为顶点 $_1$ 的 Ω-优先级为 d_1 的必然吸引子 A ，以及其补集 $B=W_1\setminus A$；后者诱导出必然且几乎必然获胜的子博弈闭包 $\lceil G\rceil_B$。根据归纳假设，在 $\lceil G\rceil_B$ 中存在一个内存为 $O(n\cdot(d_1-1))$ 的必然且几乎必然获胜策略。在 W_1 中，必然且几乎必然获胜策略的非正式定义如下：只要当前顶点位于 B，就按照 $\lceil G\rceil_B$ 中的必然且几乎必然获胜策略行动。每当当前顶点位于 A 时，就采用必然吸引策略，直到到达一个 Ω-优先级为 d_1 的顶点，然后采用一个针对 Büchi 目标的（无记忆）几乎必然获胜策略，持续 $n=|W_1|$ 轮。该策略的内存为 $n+O(n\cdot(d_1-1))$，因此是 $O(n\cdot d_1)$，下面论证该策略必然且几乎必然获胜。为证明第一个奇偶目标必然得到满足，考虑该策略的任意结果：它要么无限次访问 A ，且也无限次访问 Ω-优先级为 d_1 的顶点；要么最终一直停留在 $B=W_1\setminus A$ 中，从而遵循 $\lceil G\rceil_B$ 中的必然且几乎必然获胜策略。两种情况下，结果都满足第一个奇偶目标。为证明 Büchi 目标几乎必然得到满足，注意：(1) 以无限次访问 A 为条件，在每次访问 A 后，访问某个 Büchi 顶点的概率都有一个下界，该下界至少为 ν^n，其中 ν 是博弈中最小的非零概率，因此以概率1无限次访问某个 Büchi 顶点；(2) 以有限次访问 A 为条件，对局路径最终会一直停留在 B 中，而在那里 Büchi 目标以概率1得到满足。因此，两种情况下，Büchi 目标都几乎必然得到满足。

其次，若 d_1 为奇数，则算法 1 正确性证明中的策略构造给出了一个内存为 $\sum_{i=1}^{k}O(n_i\cdot(d_1-1))$ 的必然且几乎必然获胜策略，其中 $\sum_{i=1}^{k}n_i=n$，因此内存为 $O(n\cdot d_1)$ 已足够。

▶ **定理 7.** 对于必然奇偶目标与几乎必然 *Büchi* 目标的组合，有限内存 $O(n \cdot d_1)$ 策略已足够，其中 n 是顶点数， d_1 是必然奇偶目标中的最大优先级。

参考文献

1 S. Almagor、O. Kupferman 和 Y. Velner。硬布尔约束下的期望成本最小化及其在定量综合中的应用。载于 CONCUR：并发理论会议论文集，LIPIcs 第 59 卷，第 9:1–9:15 页。Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum für Informatik，2016年。2 C. Baier 和 J.-P. Katoen。《模型检测原理》。麻省理工学院，2008年。3 R. Berthon、S. Guha 和 J.-F. Raskin。马尔可夫决策过程中的概率目标与非概率目标混合。载于 LICS：计算机科学中的逻辑会议论文集，第 195–208 页。ACM，2020年。4 R. Berthon、J.-P. Katoen 和 T. Winkler。具有必然奇偶目标和多重可达性目标的马尔可夫决策过程。载于 RP：可达性问题会议论文集，LNCS 15050，第 203–220 页。施普林格，2024年。5 R. Berthon、M. Randour 和 J.-F. Raskin。马尔可夫决策过程中奇偶目标的阈值约束与保证。载于 ICALP：自动机、语言与编程国际研讨会论文集，LIPIcs 第 80 卷，第 121:1–121:15 页。Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum für Informatik，2017年。6 U. Boker。这些自动机类型有何缘由？载于 LPAR-22：第 22 届程序设计、人工智能与推理逻辑国际会议论文集，计算领域 EPiC 系列第 57 卷，第 143–163 页。EasyChair，2018年。7 V. Bruyère、E. Filiot、M. Randour 和 J.-F. Raskin。以保证满足预期：定量博弈中的超越最坏情况综合。《信息与计算》，254：259–295，2017年。8 C. S. Calude、S. Jain、B. Khoussainov、W. Li 和 F. Stephan。准多项式时间内判定奇偶博弈。载于 STOC：计算理论研讨会论文集，第 252–263 页。ACM，2017年。9 K. Chatterjee 和 L. Doyen。具有广义均值收益目标的完全信息随机博弈。载于 LICS：计算机科学中的逻辑会议论文集，第 247–256 页。IEEE计算机学会出版社，2016年。10 K. Chatterjee、T. A. Henzinger 和 N. Piterman。广义奇偶博弈。载于 FOSSACS：软件科学与计算结构基础会议论文集，LNCS 4423，第 153–167 页。施普林格，2007 年。11 K. Chatterjee 、 M. Jurdzinski 和 T. A. Henzinger。简单随机奇偶博弈。载于 CSL：计算机科学逻辑会议论文集，LNCS 2803，第 100–113 页。施普林格，2003年。12 K. Chatterjee、M. Jurdzinski 和 T. A. Henzinger。定量随机奇偶博弈。载于 SODA：离散算法研讨会论文集，第 121–130 页。SIAM，2004年。13 K. Chatterjee 和 N. Piterman。随机奇偶博弈中定性获胜的组合。载于 CONCUR：并发理论会议论文集，LIPIcs 第 140 卷，第 6:1–6:17 页。Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum für Informatik，2019年。14 T. Chen、V. Forejt、M. Z. Kwiatkowska、A. Simaitis 和 C. Wiltsche。关于具有多目标的随机博弈。载于 MFCS：计算机科学的数学基础会议论文集，LNCS 8087，第 266–277 页。施普林格，2013年。15 T. Colcombet 和 D. Niwinski。关于边标记博弈的位置决定性。《理论计算机科学》，352(1-3)：190–196，2006年。16 R. Durrett。《概率论：理论与例题》。剑桥大学出版社，2010年。17 E. A. Emerson 和 C. S. Jutla。树自动机、μ演算与决定性（扩展摘要）。载于 FOCS：计算机科学基础会议论文集，第 368–377 页。IEEE计算机学会，1991年。18 J. Filar 和 K. Vrieze。《竞争性马尔可夫决策过程》。施普林格，1997年。

22 确定性与几乎必然随机奇偶博弈的算法与策略构造

19 E. Grädel、W. Thomas 和 T. Wilke（编）。《自动机、逻辑与无限博弈：当前研究指南》，LNCS 2500。施普林格，2002年。20 M. Guo 和 M. M. Zavlanos。时序任务与软约束下的概率运动规划。《IEEE 自动化控制汇刊》，63(12)：4051–4066，2018年。21 M. Jurdzinski。判定奇偶博弈的胜者属于 UP ∩ coUP。《信息处理快报》，68(3)：119–124，1998年。22 M. Jurdzinski 和 R. Lazic。用于求解奇偶博弈的简洁进度度量。载于 LICS：计算机科学逻辑研讨会论文集，第 1–9 页。IEEE计算机学会，2017年。23 K. Lehtinen。以模态 μ 视角看准多项式时间内求解奇偶博弈。载于 A. Dawar 和 E. Grädel（编）的 LICS：计算机科学逻辑研讨会论文集，第 639–648 页。ACM，2018年。24 N. Piterman。从非确定性 Büchi 和 Streett 自动机到确定性奇偶自动机。《逻辑方法与计算机科学》，3(3)，2007年。25 D. M. Roijers、P. Vamplew、S. Whiteson 和 R. Dazeley。多目标序贯决策综述。《人工智能研究杂志》，48：67–113，2013年。26 S. Safra。具有强公平接受条件的 ω自动机的指数级确定化（扩展摘要）。载于 STOC：计算理论研讨会论文集，第 275–282 页。ACM，1992年。27 W. Thomas。语言、自动机与逻辑。载于《形式语言手册》第 3 卷《超越词语》第 7 章，第 389–455 页。施普林格，1997年。28 Y. Velner、K. Chatterjee、L. Doyen、T. A. Henzinger、A. Rabinovich 和 J.-F. Raskin。多重均值收益博弈与多能量博弈的复杂度。《信息与计算》，241：177–196，2015年。29 W. Zielonka。有限着色图上的无限博弈及其在无限树上的自动机中的应用。《理论计算机科学》，200(1-2)：135–183，1998年。