arXiv:2601.03384v1 [math.PR] 6 Jan 2026

CONJUGA 幂零群上的共轭不变随机游走

XIANGYING HUANG

Abstract. 我们根据有限幂零群上共轭不变随机游走在其阿贝尔化上的投影游走的混合时间，建立了这类随机游走混合时间的界。该比较框架表明，在若干值得关注的自然情形下，幂零群上的混合行为由其在阿贝尔化上的投影游走的混合行为所决定，从而将混合问题化简为阿贝尔情形下一个更简单的问题。作为应用，这些界证明了两个单位上三角矩阵群上的共轭不变游走具有截断现象；这两个例子此前分别由 Arias-Castro、Diaconis 和 Stanley（2004）以及 Nestoridi（2019）研究过。

1. Introduction

我们考虑有限群 G 上的连续时间随机游走 $X = (X_t)_{t\geq 0}$ 。在每个跳跃时刻，随机游走通过将当前位置右乘一个独立的群元素来更新状态，该元素从 G 上的概率分布 μ 中抽取；我们将此分布称为该随机游走的跳跃分布。如果该随机游走的跳跃分布满足以下条件，则称其为共轭不变 。

$$\mu(z^{-1}xz) = \mu(x) \qquad \text{for all } x, z \in G.$$

共轭不变随机游走已在多种有限群情形中得到研究。在阿贝尔情形，这一性质自然成立，因此阿贝尔群是最简单的例子。一个经典的非阿贝尔例子是对称群 $G = \mathcal{S}_n$ 上的随机换位游走：每次跳跃都由均匀随机选取两个不同标签并交换它们构成；等价地说，就是右乘一个均匀随机选取的换位，因此其跳跃分布支撑在换位的共轭类上。Diaconis 和 Shahshahani [11] 首先运用表示论证明了该链存在截断现象。随后，Berestycki、Schramm 和 Zeitouni [5] 从概率论视角开展研究，Berestycki 和 S¸eng¨ul [6]，又将其拓展，为 $\mathcal{S}_n$ 上的共轭不变游走提供了普遍理解。

对于幂零群上的共轭不变游走，早期研究进展同样依赖表示论工具。一个自然且得到广泛研究的例子是群 $\mathbb{U}_n(p)$，它由 n 维的 $\mathbb{Z}_p := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 上单位上三角矩阵构成。该群的特征标理论以错综复杂著称，长期以来一直是分析此类游走的一大障碍。Andr´e、Carter 和 Yan 引入的超类理论（例如参见 [2, 3, 1, 24, 25]），为基于超类和超特征标的代数群提供了一个易于处理的表示论框架；超类和超特征标是共轭类和不可约特征标的较粗略类比。该框架非常适用于共轭不变随机游走，Arias-Castro、Diaconis 和 Stanley [4] 运用它分析了一种共轭不变随机游走，其跳跃分布为

$$\mu(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2(n-1)p^{n-2}}, & \text{if } x \in \cup_{i=1}^{n-1} C_i(\pm 1), \\ 0, & \text{otherwise}, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $E_{i,i+1}$ 表示在 $(i, i+1)$ 位置为 1、其余位置均为 0 的 $n \times n$ 矩阵，而 $C_i(\pm 1) = \{x(I \pm E_{i,i+1})x^{-1} : x \in \mathbb{U}_n(p)\}$ 表示 $I \pm E_{i,i+1}$ 的共轭类。该随机游走

北卡罗来纳大学教堂山分校统计与运筹学系，教堂山，北卡罗来纳州 27599，美国；电子邮件：zoehuang@unc.edu。

已证明其混合时间为 $\Theta(p^2 n\log\, n)$ 量级。后来，Nestoridi [18] 分析了一个跳跃分布类似的随机游走

$$\nu(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{4(n-1)p^{n-2}}, & \text{if } x\in\cup_{i=1}^{n-1}(C_i(\pm 1)\cup C_i(\pm\sqrt{a})),\\ 0, & \text{otherwise,}\end{cases} \tag{1.2}$$

其中 $a=\lfloor\sqrt{p}\rfloor+\mathbb{1}\{\lfloor\sqrt{p}\rfloor\text{为偶数}\}$ 且 $C_i(\pm a)=\{x(I\pm aE_{i,i+1})x^{-1}:\ x\in\mathbb{U}_n(p)\}$，并证明了混合时间的上界 $O(pn\log\, n)$。

尽管在 [4, 18] 中使用了复杂的表示论工具来界定混合时间，但支配两种随机游走收敛的机制似乎要简单得多：它们的行为与各自的投影游走相似

$$X_t^{\mathrm{ab}}:=[G,G]X_t\quad\text{with } G=\mathbb{U}_n(p),$$

到阿贝尔化 $G_{\mathrm{ab}}:=G/[G,G]$ 上。（由于 $[G,G]$ 是 G中的正规子群，我们在全文中不加区分地将左陪集和右陪集视为相同。）这个商群自然同构于矩阵的第一超对角线，进而同构于 $\mathbb{Z}_p^{n-1}$，因此投影游走等价于定义在$\mathbb{Z}_p^{n-1}$上的乘积链，其中每个坐标独立演化。利用这一观察，可以轻松重新得到 [4, 18]中确立的混合时间界。此外，我们将在推论 1.2 中看到，同一机制会使两种随机游走都出现截断现象。

更一般地，人们会问，有限幂零群 G 上的任意共轭不变随机游走，其混合和截断现象是否可以通过它在阿贝尔化G_{ab}上的投影过程来理解。定理 1.1通过建立该随机游走在 G 上的混合时间与其投影到 G_{ab}上的混合时间之间的定量比较，回答了这一问题。

设 P 为有限幂零群 G上随机游走的转移矩阵，并定义相应的连续时间转移核为 $P_t(x,\ y):=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}P^k(x,\ y)\,e^{-t}$对 $x,\ y\in G$ 以及$t\in\mathbb{R}_+$成立。由随机游走的（右）不变性，不失一般性，我们可以假设它从单位元 id 出发。记 π 为 G上的均匀测度，它也是平稳分布。下文中，我们均假设该随机游走是不可约的。

总变差混合时间定义为

$$t_{\mathrm{mix}}^{\mathrm{TV}}(G,\varepsilon):=\inf\{t\ge 0:\ \|P_t(\mathrm{id},\cdot)-\pi\|_{\mathrm{TV}}\le\varepsilon\},\qquad \varepsilon\in(0,1). \tag{1.3}$$

其中，$\|P_t(\mathrm{id}\ \cdot)-\pi\|_{\mathrm{TV}}:=\frac{1}{2}\sum_{x\in G}\left|P_t(\mathrm{id}\ x)-\pi(x)\right|$ 表示全变差距离。我们还定义 ℓ^2-混合时间为

$$t_{\mathrm{mix}}^{\ell^2}(G,\varepsilon):=\inf\left\{t\ge 0:\ \left\|\frac{P_t(\mathrm{id},\cdot)}{\pi(\cdot)}-1\right\|_{2,\pi}\le\varepsilon\right\},\qquad \varepsilon>0, \tag{1.4}$$

其中$\|f\|_{2,\pi}:=\left(\sum_{x\in G}\pi(x)\ f^2(x)\right)^{1/2}$。对于 G_{ab} 上的投影游走 $X^{\mathrm{ab}}=[G,G]X$，相应的混合时间记为 $t_{\mathrm{mix}}^{\mathrm{TV}}(G_{\mathrm{ab}},\varepsilon)$ 和 t^{ℓ^2} 混合$(G_{\mathrm{ab}},\varepsilon)$。

对于任意具有跳跃分布 μ 的共轭不变随机游走 $X=(X_t)_{t\ge 0}$，其支撑集 μ 是 G 的若干互不相交共轭类的并。因此，存在一个集合 $S=\{s_a:\ a\in[k]\}\subseteq G$，其中恰好包含每个与 $\mathrm{supp}(\mu)$ 相交的共轭类的一个代表元，使得

$$\mathrm{supp}(\mu)=\bigsqcup_{a\in[k]}\mathrm{Cl}(s_a), \tag{1.5}$$

其中 $\mathrm{Cl}(s)=\{x^{-1}sx:\ x\in G\}$ 表示 s的共轭类。集合 S 在这些共轭类的代表元的选择上唯一。随机游走的不可约性假设等价于 S 生成 G 这一条件。

我们得到幂零群 G 上共轭不变随机游走的如下比较结果；值得注意的是，无需对 μ作可逆性假设。

定理 1.1。考虑有限幂零群G 上的速率为1 的共轭不变随机游走，其跳跃分布为 μ ，并具有如下相关集合 $S=\{s_a:\ a\in[k]\}$ ，如(1.5)所示，且其平稳分布为均匀分布。令 $\mu_*:=$最小值$_{a\in[k]}\,\mu(\mathrm{Cl}(s_a))$。那么，对每个 $\varepsilon\in(0,1)$，均有

$$t_{\mathrm{mix}}^{\mathrm{TV}}(G_{\mathrm{ab}},\varepsilon)\le t_{\mathrm{mix}}^{\mathrm{TV}}(G,\varepsilon)\le \max\{t_{\mathrm{mix}}^{\ell^2}(G_{\mathrm{ab}},\varepsilon/2),\mu_*^{-1}(\log k+2\log(4/\varepsilon))\}. \tag{1.6}$$

在投影游走的全变差和 ℓ^2 混合时间 X^{ab} 仅相差低阶误差的情况下，定理 1.1 立即推出截断现象的发生。更准确地说，若马尔可夫链序列（$X^{(n)}$）$_{n\ge1}$ 定义在 $\Omega^{(n)}$ 上，则称其在时间 t_n 处表现出截断现象，窗口大小为$w_n=o$（t_n），当且仅当

$$\lim_{c\to\infty}\liminf_{n\to\infty} d_{\mathrm{TV}}^{(n)}(t_n-cw_n)=1\quad\text{and}\quad\lim_{c\to\infty}\limsup_{n\to\infty} d_{\mathrm{TV}}^{(n)}(t_n+cw_n)=0,$$

其中，$d^{(n)}{}_{\mathrm{TV}}(t):=\max_{x\in\Omega^{(n)}}\|\mathbb{P}_x(X_t^{(n)}=\cdot)-\pi^{(n)}(\cdot)\|_{\mathrm{TV}}$ 表示其到平稳分布 $\pi^{(n)}$的全变差距离。

为简化记号，以下省略上标（n），其含义将由上下文明确。

A作为定理 1.1 的推论，我们得到随机游走（1.1）和（1.2 的截断现象).

推论 1.2。设$(\mathbb{U}_n(p))^{n\ge1}$ 为一列由单位上三角 $n\times n$矩阵构成的群，其元素定义在$\mathbb{Z}_p$上，其中 $p=p_n$ 为可依赖于 n 的整数，并满足 $p\ge6$。考虑相应的连续时间、速率为1的随机游走。

(a) 由跳跃分布 μ 驱动的随机游走在（1.1）中表现出截断现象，其发生时间为

$$\frac{(n-1)\log(n-1)}{2\big(1-\cos(2\pi/p)\big)}.$$

(b) 由跳跃分布 ν 驱动的随机游走在（1.2）中表现出截断现象，其发生时间为

$$\frac{(n-1)\log(n-1)}{(1-\cos(2\pi/p))+(1-\cos(2\pi\lfloor\sqrt{a}\rfloor/p))},$$

其中 $a=\lfloor\sqrt{p}\rfloor+\mathbb{1}\{\lfloor\sqrt{p}\rfloor$ 是偶数$\}$。

2. Related work

2.1. 阿贝尔化是主导混合机制。单位上三角矩阵群上的随机游走的混合行为已得到广泛研究，因为这类群构成了幂零群的典型类别。这一研究领域反复探讨的一个主题是，$\mathbb{U}_n$（p）上的随机游走（其中 p 是一个整数）的混合行为，通常由其在阿贝尔化上的投影所主导，该投影对应于超对角线元素。本节中，除非另有说明，我们讨论简单随机游走，其跳跃分布在其支撑集上均匀分布；我们也将该支撑集称为随机游走的生成集。

Nestoridi 和 Sly [19], 给出了一个具体实例：他们研究了由初等行变换 $S=\{I\pm E_{i,i+1}$生成的 $\mathbb{U}_n(p)$ 上的简单随机游走：$i\le n-1\}$，其中 $E_{i,\ i+1}$表示一个矩阵，其（$i,\ i+1$）项为 1，其余项均为 0。他们的分析将混合时间的上界确定为 $O(p^2n\log\ n+n^2p^{o(1)})$，其中第一项源自阿贝尔化：投影到阿贝尔化上的随机游走是 $\mathbb{Z}_p^{n-1}$ 上的简单随机游走，其混合时间为 $O(p^2n\log\ n)$。Hermon 和 Olesker-Taylor [16], 的工作中也体现了这一视角：他们研究了由独立同分布的均匀群元素构成生成集的 $\mathbb{U}_n(p)$ 的随机 Cayley 图。在这一设定下，并在满足温和的正则性假设时，他们证明：对于生成集的选择，以高概率会出现截断现象；同时，他们还得到了混合时间的精确渐近式，再次与投影到阿贝尔化上的随机游走的相应结果一致。Diaconis 和 Hough [8]则侧重于另一方向，为 $\mathbb{U}_n(p)$上的

满足某些技术假设的对称跳跃分布的随机游走建立了一般框架。他们的结果给出了混合现象的精确、逐坐标描述，特别表明，第 k 条对角线上的坐标需要大约 $p^{2/k}$ 步才能混合。从这个意义上说，阿贝尔化上的混合（即 $k = 1$）比更高阶对角线上的混合发挥着更为突出的作用。

更广泛地说，Diaconis 和 Saloff-Coste 的一系列重要研究 [7, 10, 9]通过泛函不等式和几何思想，发展了研究幂零群 上混合的方法。特别是，对于大小有界的生成集，他们证明，达到均匀性需要且只需要直径平方步数，并且在这种情况下不会出现截断现象。然而，随着生成集大小的增长，这些界会显著变松，因此不能直接应用于维数 n 发散时的矩阵群随机游走。

作者此前与 Hermon 的工作 [14], 研究了生成集不断增大时一般幂零群的情形。设 G 为有限幂零群， $r = r(G)$为其秩， $L = L(G)$为其幂零类，定义见 (3.1)。研究表明，如果生成集的大小至多为$\log 8Lr^L \log\log |G|$，那么除低阶项外，混合时间由投影到阿贝尔化后的动力学决定。对于幂零群上的共轭不变游走（例如 (1.1)），生成集通常大得多，因而不属于这一情形；尽管如此，我们将在本文中看到，阿贝尔化仍发挥着主导作用。事实上，阿贝尔化占主导这一现象似乎是幂零群上随机游走的典型特征。当生成集由独立同分布的均匀元素构成，且幂零群满足温和的结构性假设时， [14] 证明该随机游走会出现截断现象（以高概率），其精确混合时间渐近式由投影到阿贝尔化后的动力学决定。

2.2. **截断现象的熵判据**。 Salez及其合作者近期一系列卓越的突破 [21, 22, 20] 在概念层面深入揭示了截断现象，并为非负曲率马尔可夫链建立了充分的截断现象判据，而无需精确确定混合时间。

对于一列$(X^{(n)})_{n\geq 1}$ 具有非负 *carré ´ du champ* 曲率 （详细介绍见 [20]）且转移核 $P_{(n)}$ 对称（即，当且仅当 $P^{(n)}(y, x) > 0$时， $P^{(n)}(x, y) > 0$）的马尔可夫链，文献 [20]建立了以下截断现象的充分判据:

$$\frac{t^{(n)}_{\text{mix}}}{t^{(n)}_{\text{MLS}} \log\log d^{(n)}} \to \infty \quad \text{as } n \to \infty. \tag{2.1}$$

此处 $t_{\text{mix}} = t^{(n)}\,\text{mix} := t^{(n)}\,\text{mix}(1/4)$ 表示总变差混合时间，而 $d = d^{(n)} := \max^{x\sim y} {P^{(n)}}^{-1}(x,y)$ 表示转移核 $P^{(n)}$ 的稀疏参数，而 $t_{\text{MLS}} = t^{(n)}\,\text{MLS}$ 表示修正对数 Sobolev 常数的倒数。正如第 2 节 [20], 所讨论的，这一判据适用于广泛的情形，并且可以对许多经典例子加以验证，包括群上的若干共轭不变随机游走。已知此类随机游走具有非负的 carr´e du champ 曲率；参见 [15]定理 2。第 2.1 节 [20] 中给出的例子进一步表明，条件 (2.1) 相当尖锐，其含义是 t_{mix} 与 $t_{\text{MLS}} \log\log d$ 的阶通常至多相差对数因子。

有趣的是，我们的结果给出了一个例子，即 $\mathbb{U}_n(p)$ 上的游走 (1.1)：尽管条件 (2.1) 不成立，仍然会出现截断现象。假设 $p = p_n$ 在 $n \to \infty$时发散。众所周知（例如参见 [23]中的 (3.15)），对于可逆马尔可夫链

$$t_{\text{MLS}} \geq \frac{t_{\text{rel}}}{2} \geq \frac{t^{\text{ab}}_{\text{rel}}}{2} \asymp p^2 n,$$

其中， t_{rel} 表示该随机游走的弛豫时间， $t^{\text{ab}}_{\text{rel}}$ 表示其在阿贝尔化上的投影的弛豫时间。此外，该随机游走的稀疏参数为 $d = 2(n-1)p^{n-2}$，这意味着 $\log\log d \asymp$

$\max\{\log n,\ \log\log p\}$。另一方面，根据推论 1.2，我们有 $t_{\mathrm{mix}} \asymp p^2 n \log n$。因此，尽管存在截断现象，条件 (2.1) 仍不成立。

相比之下，投影到阿贝尔化上的投影游走是在 $\mathbb{Z}_p^{n-1}$ 上的乘积游走，其稀疏参数为 $2(n-1)$；该游走满足判据 (2.1)，并出现截断现象。这种差异可归因于原链的稀疏参数显著更大，即 $2(n-1)p^{n-2}$；在这种情形下，该参数并非判定是否出现截断现象的精确指标。这个例子最重要的启示是，在幂零群上的共轭不变游走中，充分条件 (2.1) 可能可以改进，使其仅依赖于阿贝尔化。

3. 预备知识

我们首先引入全文将用到的记号。群 G 的下中心列递归定义如下：

$$G_1 := G, \qquad \text{and} \qquad G_{k+1} := [G_k, G] = \langle [x,y] : x \in G_k,\ y \in G \rangle \quad \text{for } k \geq 1,$$

其中 $[x,y] = x^{-1}y^{-1}xy$。若群 G 的下中心列在有限步后终止，即

$$G = G_1 \trianglerighteq G_2 \trianglerighteq \cdots \trianglerighteq G_L \trianglerighteq G_{L+1} = \{\mathrm{id}\} \tag{3.1}$$

对于某个 $L = L(G)$，称其为 G 的 **幂零类**。在这种情况下，$\{G_\ell / G_{\ell+1}\}_{\ell \in [L]}$ 中的每个商群都是阿贝尔群。特别地，令 $G_{\mathrm{ab}} := G/[G,G]$ 表示 G 的 **阿贝尔化**。在下文中，我们始终假设 G 是一个有限幂零群。

以下命题汇集了换位子和幂零群的若干标准性质。证明可见于许多参考文献，例如 [12]，此处略去。命题 3.1 的 (i) 部分是一个相当著名的结果，它基于三子群引理通过归纳论证得出；而 (iii) 部分则可通过直接计算得到，计算中使用了恒等式 $[x,zy] = [x,z][x,y][z,[y,x]]^{-1}$，其中 x，y，$z \in G$。

命题 3.1。设 G 是一个有限幂零群。那么：

(i) 幂零群 G 的下中心列是强中心列，即对于所有 i、$j \geq 1$，$[G_i, G_j]$ 是 G_{i+j} 的子群。

(ii) 集合 $S \subseteq G$ 生成 G，当且仅当其投影 $G_2 S := \{G_2 s :\ s \in S\}$ 生成阿贝尔化 G_{ab}。

(iii) 对于 $\ell \geq 2$，由 $\phi(g,\ h) := G_{\ell+1}[g,h]$ 给出的映射 $\phi :\ G \times G_{\ell-1} \to G_\ell / G_{\ell+1}$ 是反对称且双线性的。具体而言，对于所有 x、$y \in G$ 以及 z、$w \in G_{\ell-1}$，以下结论成立：

$$\begin{aligned}
G_{\ell+1}[x,z] &= G_{\ell+1}[z,x]^{-1}, \\
G_{\ell+1}[x,zw] &= G_{\ell+1}[x,z]\, G_{\ell+1}[x,w], \\
G_{\ell+1}[xy,z] &= G_{\ell+1}[x,z]\, G_{\ell+1}[y,z], \\
G_{\ell+1}[x^i, z^j] &= G_{\ell+1}[x,z]^{ij} \quad \textit{for all } i,j \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

设 $N(t)$ 是均值为 t 的泊松随机变量，并设 $S = \{s_a :\ a \in [k]\}$ 是跳跃分布 μ 的代表集（见 (1.5)），其中跳跃分布对应于 $X = (X_t)_{t \geq 0}$。对于 G 上一组独立同分布的均匀元素 $\{U_i\}_{i \geq 1}$，显然有 $U_i^{-1} s\, U_i \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \text{均匀分布}(\mathrm{Cl}(s))$。因此，$X$ 的跳跃可写为 $\{U_i^{-1} s_{\sigma_i} U_i\}_{i \geq 1}$，其中 $\{\sigma_i\}_{i \geq 1}$ 是独立同分布的，且

$$\mathbb{P}(\sigma_i = a) = \mu\big(\mathrm{Cl}(s_a)\big), \qquad a \in [k],$$

其中 μ 在不同共轭类上的分布不必相同。因此，X_t 可表示为

$$X_t = \prod_{i=1}^{N(t)} \big(U_i^{-1} s_{\sigma_i} U_i\big). \tag{3.2}$$

受 [14], 所用方法的启发，我们通过商列 $\{G_\ell/G_{\ell+1}\}_{\ell\in[L]}$所导出的分解来分析 X_t。为此，方便起见，我们将独立同分布均匀随机变量 $\{U_i\}_{i\geq 1}$也表示为同一商结构下的形式。对于每个 $\ell\in[L]$，令 $R_\ell\subseteq G_\ell$ 为商群 $G_\ell/G_{\ell+1}$的一组代表元，也就是说， $|R_\ell|=|G_\ell/G_{\ell+1}|$ 和 $G_\ell/G_{\ell+1}=\{G_{\ell+1}g : g\in R_\ell\}$.

引理 3.2 （推论 6.4，见 [13]）。 设 $\{U^{(\ell)}\}_{\ell\in[L]}$是具有 $U^{(\ell)}\sim$均匀分布(R_ℓ)的独立随机变量。那么有 $G_{\ell+1}U^{(\ell)}\sim$均匀分布$(G_\ell/G_{\ell+1})$。此外，乘积 $U:=\prod_{\ell=1}^{L}U^{(\ell)}$在 G上均匀分布。

I此外，我们汇集了一些基本的群论事实，供后文使用。

引理 3.3。 ***(i)*** 对固定的 $s\in G$ 以及具有 $U\sim$均匀分布$(R_{\ell-1})$ 且满足 $\ell\geq 2$ 的 $G_{\ell+1}[s,U]$，其在子群 $\{G_{\ell+1}[s,u]: u\in R_{\ell-1}\}$ 上均匀分布，其中 $G_\ell/G_{\ell+1}$。 ***(ii)*** 设 Q 是一个有限阿贝尔群（采用加法记号），且 $H_1,\dots,H_r$ 是 Q 的子群。若 $\{V_i\}_{1\leq i\leq r}$ 相互独立，且对每个 i，都具有 $V_i\sim$均匀分布(H_i)，则

$$\sum_{i=1}^{r}V_i\sim \mathrm{Unif}(H)\qquad where\ H:=\{h_1+\cdots+h_r : h_i\in H_i\}.$$

证明。固定 $s\in G$，注意映射 $\phi_s: G_{\ell-1}/G_\ell\to G_\ell/G_{\ell+1}$ 定义为

$$\phi_s(G_\ell x):=G_{\ell+1}[s,x],\qquad x\in G_{\ell-1},$$

是良定义的群同态，其像为 $\mathrm{Im}(\phi_s)=\{G_{\ell+1}[s,u]: u\in G_{\ell-1}\}=\{G_{\ell+1}[s,u]: u\in R_{\ell-1}\}$. 。由引理 3.2 可知， $G_\ell U\sim$ 在 $G_{\ell-1}/G_\ell$ 上均匀分布，因为 $U\sim$ 在 $R_{\ell-1}$ 上均匀分布。对于任意元素 $G_{\ell+1}[s,y]\in\{G_{\ell+1}[s,u]: u\in R_{\ell-1}\}$，我们计算得

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\phi_s(G_\ell U)=G_{\ell+1}[s,y])&=\mathbb{P}(G_{\ell+1}[s,Uy^{-1}]=G_{\ell+1})=\mathbb{P}(\phi_s(G_\ell(Uy^{-1}))=G_{\ell+1})\\&=\mathbb{P}(\phi_s(G_\ell U)=G_{\ell+1})=\frac{|\mathrm{Ker}(\phi_s)|}{|G_{\ell-1}/G_\ell|},\end{aligned}$$

它不依赖于 y。因此， $\phi_s(G_\ell U)=G_{\ell+1}[s,U]$在 $\{G_{\ell+1}[s,u]: u\in R_{\ell-1}\}$ 上均匀分布。

注意到 $\varphi: H_1\times\cdots\times H_r\to Q$ 是群同态，且 $\varphi(h_1,\dots,h_r):=h_1+\cdots+h_r$，即可通过类似论证证明 (ii)。因此，对于任意 $x\in H$,

$$\mathbb{P}(\varphi(V_1,\dots,V_r)=x)=\frac{|\varphi^{-1}(x)|}{|H_1|\cdots|H_r|}=\frac{|\ker(\varphi)|}{|H_1|\cdots|H_r|}.$$

由于 $\varphi(V_1,\dots,V_r)$ 以相同的概率取 H 中的值，因此它在 H 上均匀分布。 □

3.1. 随机游走的商群分解。由柯西–施瓦茨不等式的标准应用可得

$$4\,\|\mathbb{P}(X_t=\cdot)-\pi\|_{\mathrm{TV}}^2\leq|G|\,\mathbb{P}(X_t=X_t')-1,$$

其中， $X'=(X_t')_{t\geq 0}$ 是随机游走 $X=(X_t)_{t\geq 0}$ 的一个独立副本。这自然引导我们研究乘积 $X_t(X_t')^{-1}$。

令 $N'=N'(t)$ 表示 X' 在时间 t 之前的跳跃次数，并对 X' 类似于 (3.2) 中的 $\{\sigma_i\}_{i\geq1}$ 和 $\{U_i\}_{i\geq1}$ 定义序列 $\{\sigma_i'\}_{i\geq1}$和 $\{U_i'\}_{i\geq1}$。为简化记号，在上下文明确时，我们省略对 t 的依赖。于是可以写成

$$X(X')^{-1}=\prod_{i=1}^{N}\big(U_i^{-1}s_{\sigma_i}U_i\big)\left(\prod_{j=1}^{N'}\big((U_j')^{-1}s_{\sigma_j'}U_j'\big)\right)^{-1}=:\prod_{i=1}^{N+N'}\big(U_i^{-1}s_{\sigma_i}^{\eta_i}U_i\big),\tag{3.3}$$

其中，在第二个等式中，我们仅通过重新标记统一记号，并在其他情况下定义 $\eta_i=1$ for $1\leq i\leq N$ and $\eta_i=-1$ 。

按照引理 3.2 中的分解，我们如下构造均匀元素 $\{U_i\}_{i\geq 1}$。对于每个 $\ell\in[L]$ 和 $i\geq 1$，抽取 $\{U_{i,\ell}\}_{i\geq 1}$ i。i. .d均匀分布(R_ℓ)，并定义

$$U_i := \prod_{\ell=1}^{L} U_{i,\ell}, \qquad \text{for } i\geq 1.$$

令 $\{U_i'\}_{i\geq 1}$ 以类似方式由独立集合 $\{U_{i,\ell}'\}_{i\geq 1,\ \ell\in[L]}$ 构造。

现在我们引入若干个 σ-域，供后续分析使用。令 $t\geq 0$ 固定，并在以下定义中省略对 t 的依赖。

~**定义 3.4.** *(i)* 令 $\mathcal{H}$ 为由 N、N' 和序列 $\{\sigma_i\}_{i\in[N]}$、$\{\sigma_i'\}_{i\in[N']}$ 生成的 σ-域；~ 换言之，$\mathcal{H}$ 包含有关序列 X 和 X' 的所有信息，但不包括变量 $\{U_i\}_{i\in[N]}$、$\{U_i'\}_{i\in[N']}$ 的身份信息。

(ii) 对每个 $\ell\in[L]$，令

$$\mathcal{F}_\ell := \sigma\big(\{U_{i,j}, U_{i,j}' : i\geq 1,\ 1\leq j\leq \ell\}\big),$$

并令 $\mathcal{F}_0$ 表示平凡的 σ-域。

作为证明的最后准备，我们阐明所关注事件的可测性。对于每个 $\ell\in[L+1]$，定义

$$\mathcal{E}_\ell := \{X(X')^{-1}\in G_\ell\} \tag{3.4}$$

~并特别注意到，$\mathcal{E}_{L+1}=\{X=X'\}$。令 $\mathcal{H}$ 和 $\{\mathcal{F}_i\}_{0\leq i\leq L}$ 表示定义 3.4 中引入的 σ-域。

引理 3.5。对于 $2\leq \ell\leq L+1$，定义

$$\varphi^{(\ell-2)} := \prod_{i=1}^{N+N'} s_{\sigma_i}^{\eta_i}\Big[s_{\sigma_i}^{\eta_i}, \prod_{j\leq \ell-2} U_{i,j}\Big]. \tag{3.5}$$

于是有 $\mathcal{E}_\ell=\{\varphi^{(\ell-2)}\in G_\ell\}$，因此，对于每个 $2\leq \ell\leq L+1$，事件 $\mathcal{E}_\ell$ 是关于 $\sigma(\mathcal{F}_{\ell-2}, \mathcal{H})$ 可测的。

证明。 由于 $G_\ell\trianglelefteq G$，我们可以将 (3.3) 重写为

$$G_\ell X(X')^{-1} = \prod_{i=1}^{N+N'} G_\ell\big(U_i^{-1}s_{\sigma_i}^{\eta_i}U_i\big) = \prod_{i=1}^{N+N'} G_\ell\big(s_{\sigma_i}^{\eta_i}[s_{\sigma_i}^{\eta_i}, U_i]\big), \tag{3.6}$$

其中第二个等式对任意 u，$s\in G$ 使用了基本恒等式 $u^{-1}su=s[s,u]$。

对于任意 $x\in G$ 和任意 $j\geq \ell-1$，由于 $U_{i,\ j}\in G_j$ 我们有 $[x,U_{i,j}]\in G_{j+1}\subseteq G_\ell$. 按引理 3.2 中的方式写作 $U_i=\prod_{j=1}^{L}U_{i,\ j}$，并将其分解为

$$U_i = A_iB_i, \qquad \text{where} \qquad A_i := \prod_{j\leq \ell-2} U_{i,j} \quad \text{and} \quad B_i := \prod_{j\geq \ell-1} U_{i,j}.$$

由于 G_ℓ 是正规子群，我们有 $[x,B_i]\in G_\ell$。对所有 x，a，$b\in G$应用交换子恒等式 $[x,ab]=[x,b]$ ($b^{-1}[x,a]b$)，得到

$$G_\ell[s_{\sigma_i}^{\eta_i}, U_i] = G_\ell[s_{\sigma_i}^{\eta_i}, A_iB_i] = G_\ell\big([s_{\sigma_i}^{\eta_i}, B_i](B_i^{-1}[s_{\sigma_i}^{\eta_i}, A_i]B_i)\big) = G_\ell[s_{\sigma_i}^{\eta_i}, A_i],$$

其中最后一个等式再次由 $G_\ell\trianglelefteq G$ 得出。将其代入 (3.6) 可得

$$G_\ell X(X')^{-1} = \prod_{i=1}^{N+N'} G_\ell\Big(s_{\sigma_i}^{\eta_i}\,[s_{\sigma_i}^{\eta_i}, A_i]\Big)$$

$$= G_\ell \left(\prod_{i=1}^{N+N'} s_{\sigma_i}^{\eta_i} \left[s_{\sigma_i}^{\eta_i}, \prod_{j \le \ell-2} U_{i,j} \right] \right) = G_\ell \varphi^{(\ell-2)}. \tag{3.7}$$

这就证明了 $\mathcal{E}_\ell = \{\varphi^{(\ell-2)} \in G_\ell\}$. 最后，我们注意到 $\varphi^{(\ell-2)}$ 关于 $\sim\sigma(\mathcal{F}_{\ell-2}, \mathcal{H})$ 可测，因此 $\mathcal{E}_\ell$ 关于同一个 σ-域可测。

□

4. Proof of main results

4.1. 定理 1.1 的证明。

证明。 第一个不等式 $t_{\text{mix}}^{\text{TV}}(G_{\text{ab}}, \varepsilon) \le t_{\text{mix}}^{\text{TV}}(G, \varepsilon)$ 直接来自全变差距离在投影下不增这一事实。接下来我们证明第二个不等式。

令 $X = (X_t)_{t \ge 0}$ 表示速率为 1 的随机游走，并令 $S = \{s_a : a \in [k]\} \subseteq G$ 表示与跳跃分布 μ 相关联的集合，如（1.5）中所定义；平稳测度的均匀性意味着 S 生成 G。对于每个 $a \in [k]$, 令 $N_a = N_a(t)$表示共轭类 $\mathsf{Cl}(s_a) = \{x^{-1} s_a x : x \in G\}$ 中的元素在时间 t之前于随机游走 X 中出现的次数；该次数服从参数为 $\mu\big(\mathsf{Cl}(s_a)\big)$ 的泊松分布。

定义事件 $\mathcal{A} = \mathcal{A}(t) := \{\{G_2 s_a : a \in [k], \ N_a(t) > 0\}$ 生成 $G\}$。根据三角不等式,

$$\|\mathbb{P}(X_t = \cdot) - \pi\|_{\text{TV}} \le \|\mathbb{P}(X_t = \cdot | \mathcal{A}) - \pi\|_{\text{TV}} + \mathbb{P}(\mathcal{A}^c). \tag{4.1}$$

令 $X' = (X'_t)_{t \ge 0}$ 为 X的一个独立副本，并令 $(N'_a)_{a \in [k]}$ 和事件 $\mathcal{A}'$ 以类似方式针对X' 定义。根据柯西–施瓦茨不等式，我们得到

$$4 \|\mathbb{P}(X_t = \cdot | \mathcal{A}) - \pi\|_{\text{TV}}^2 \le |G| \cdot \mathbb{P}\big(X_t = X'_t | \mathcal{A} \cap \mathcal{A}'\big) - 1. \tag{4.2}$$

为简化记号，从现在起我们省略时间指标 t 。回忆 (3.4)，对于 $\ell \in [L+1]$，有$\mathcal{E}_\ell = \{X(X')^{-1} \in G_\ell\}$ 。因此，接下来只需给出以下量的上界

$$D(t) := |G| \cdot \mathbb{P}\big(X(X')^{-1} = \text{id} | \mathcal{A} \cap \mathcal{A}'\big) - 1 = |G| \cdot \mathbb{P}(\mathcal{E}_{L+1} | \mathcal{A} \cap \mathcal{A}') - 1. \tag{4.3}$$

我们首先按照引理 3.5 的方法，针对每个 $\ell \in [L]$简化 $G_{\ell+1} X(X')^{-1}$ 。回忆一下，集合 $\{U_i\}_{i \ge 1}$ 中的每个均匀元素 U_i 都通过分解 $U_i = \prod_{\ell=1}^{L} U_{i,\ \ell}$ 定义，其中 $U_{i,\ \ell}$ i。i. $\sim$ .d均匀分布(R_ℓ)。类似于 (3.7) 中的论证可得

$$G_{\ell+1} X(X')^{-1} = \prod_{i=1}^{N+N'} G_{\ell+1} \left(s_{\sigma_i}^{\eta_i} [s_{\sigma_i}^{\eta_i}, \prod_{j \le \ell-1} U_{i,j}] \right).$$

由于 $U_{i,\ell-1} \in R_{\ell-1} \subseteq G_{\ell-1}$，我们有 $[s_{\sigma_i}^{\eta_i}, U_{i,\ell-1}] \in G_\ell$。不难看出， $G_{\ell+1}[s_{\sigma_i}^{\eta_i}, U_{i,\ell-1}]$与 $G/G_{\ell+1}$ 中的任意元素都可交换（因为它们的换位子位于 $G_{\ell+1}$ 中）。因此，利用 $G_{\ell+1} \trianglelefteq G$，上式可进一步简化为

$$\begin{aligned} G_{\ell+1} X(X')^{-1} &= \prod_{i=1}^{N+N'} G_{\ell+1} \left(s_{\sigma_i}^{\eta_i} [s_{\sigma_i}^{\eta_i}, \prod_{j \le \ell-2} U_{i,j}] [s_{\sigma_i}^{\eta_i}, U_{i,\ell-1}] \right) \\ &= G_{\ell+1} \varphi^{(\ell-2)} \cdot G_{\ell+1} \left(\prod_{i=1}^{N+N'} [s_{\sigma_i}^{\eta_i}, U_{i,\ell-1}] \right) =: G_{\ell+1} \varphi^{(\ell-2)} \cdot G_{\ell+1} f^{(\ell-1)}, \end{aligned} \tag{4.4}$$

其中 $\varphi^{(\ell-2)} = \prod_{i=1}^{N+N'} s_{\sigma_i}^{\eta_i} [s_{\sigma_i}^{\eta_i}, \prod_{j \le \ell-2} U_{i,j}]$ 如（3.5）所示，并定义 $f^{(\ell-1)} := \prod_{i=1}^{N+N'} [s_{\sigma_i}^{\eta_i}, U_{i,\ell-1}] \in G_\ell$.

~注意，事件 $\mathcal{A}$和 $\mathcal{A}'$ 均关于定义 3.4 中的 σ-域 $\mathcal{H}$ 可测。由引理 3.5 可知，事件 $\mathcal{E}_\ell = \{\varphi^{(\ell-2)} \in G_\ell\}$ 关于 $\sigma(\widetilde{\mathcal{H}}, \mathcal{F}_{\ell-2})$ 可测。因此，由（4.4）可得

$$\begin{aligned}\mathbb{1}\{\mathcal{E}_\ell \cap \mathcal{A} \cap \mathcal{A}'\} \cdot \mathbb{P}(\mathcal{E}_{\ell+1}|\mathcal{F}_{\ell-2}, \widetilde{\mathcal{H}}) &= \mathbb{1}\{\mathcal{E}_\ell \cap \mathcal{A} \cap \mathcal{A}'\} \cdot \mathbb{P}(G_{\ell+1}\varphi^{(\ell-2)} \cdot G_{\ell+1}f^{(\ell-1)} = G_{\ell+1}|\mathcal{F}_{\ell-2}, \widetilde{\mathcal{H}}) \\ &= \mathbb{1}\{\mathcal{E}_\ell \cap \mathcal{A} \cap \mathcal{A}'\} \cdot \mathbb{P}(G_{\ell+1}f^{(\ell-1)} = (G_{\ell+1}\varphi^{(\ell-2)})^{-1}|\mathcal{F}_{\ell-2}, \widetilde{\mathcal{H}}) \\ &\le \mathbb{1}\{\mathcal{E}_\ell \cap \mathcal{A} \cap \mathcal{A}'\} \cdot \max_{x \in G_\ell} \mathbb{P}(G_{\ell+1}f^{(\ell-1)} = G_{\ell+1}x|\mathcal{F}_{\ell-2}, \widetilde{\mathcal{H}}). \end{aligned} \tag{4.5}$$

为了分析 $G_{\ell+1}f^{(\ell-1)}$的分布，我们首先利用 $G_\ell/G_{\ell+1}$ 是阿贝尔群这一事实来改写 e

$$G_{\ell+1}f^{(\ell-1)} = \sum_{i=1}^{N+N'} G_{\ell+1}\big[s_{\sigma_i}^{\eta_i}, U_{i,\ell-1}\big]. \tag{4.6}$$

根据命题 3.1(iii)，我们可以通过重写 $\{\eta_i\}_{i\ge1}$ 来去掉随机符号

$$G_{\ell+1}\big[s_{\sigma_i}^{\eta_i}, U_{i,\ell-1}\big] = G_{\ell+1}\big[s_{\sigma_i}, U_{i,\ell-1}^{\eta_i}\big] = G_{\ell+1}\big[s_{\sigma_i}, U'_{i,\ell-1}\big],$$

其中，$U'_{i,\ \ell-1}$表示陪集$G_\ell U_{i,\ \ell-1}^{\eta_i}$在 $R_{\ell-1}$中的唯一代表元，它在 $R_{\ell-1}$上仍服从均匀分布。按 σ_i的取值对 (4.6) 中的项分组，我们可以再次将 (4.6) 改写为

$$G_{\ell+1}f^{(\ell-1)} = \sum_{a=1}^{k} \sum_{j=1}^{N_a+N'_a} G_{\ell+1}\big[s_a, U_{j,\ell-1}^{(a)}\big], \tag{4.7}$$

其中，集合 $\{U_{j,\ell-1}^{(a)}\}_{j\ge1,\ a\in[k]}$ 由 $R_{\ell-1}$中的独立同分布的均匀元素构成。

根据引理 3.3(i)，每个随机变量 $G_{\ell+1}[s_a, U_{j,\ell-1}^{(a)}]$ 都是子群 $\{G_{\ell+1}[s_a, u] : u \in R_{\ell-1}\}$. 上的独立同分布均匀元素。因此，我们有

$$\sum_{j=1}^{N_a+N'_a} G_{\ell+1}\big[s_a, U_{j,\ell-1}^{(a)}\big] \sim \mathrm{Unif}(H_{a,\ell}) \quad \text{where } H_{a,\ell} := \begin{cases} \{G_{\ell+1}[s_a, u] : u \in R_{\ell-1}\}, & \text{if } N_a + N'_a \ge 1, \\ \{G_{\ell+1}\}, & \text{if } N_a + N'_a = 0. \end{cases}$$

应用引理 3.3(ii)，我们得出，作为子群 $\{H_{a,\ell}\}_{a\in[k]}$ 上相互独立的均匀元素之和， $G_{\ell+1}f^{(\ell-1)}$ 在

$$H_\ell := \sum_{a\in[k]} H_{a,\ell} = \{h_1 + \cdots + h_k : h_a \in H_{a,\ell}\}.$$

~最后，在事件 $\mathcal{A}\cap\mathcal{A}'$ 上，我们有 $H_\ell = G_\ell/G_{\ell+1}$。因此，给定 $\sigma(\mathcal{F}_{\ell-2},\ \mathcal{H})$，$G_{\ell+1}f^{(\ell-1)}$ 在 $G_\ell/G_{\ell+1}$ 上均匀分布。由此根据 (4.5) 可得，

$$\mathbb{P}(\mathcal{E}_{\ell+1} \cap \mathcal{A} \cap \mathcal{A}') = \mathbb{1}\{\mathcal{E}_\ell \cap \mathcal{A} \cap \mathcal{A}'\}\mathbb{P}(\mathcal{E}_{\ell+1} \mid \mathcal{F}_{\ell-2}, \widetilde{\mathcal{H}}) \le \mathbb{1}\{\mathcal{E}_\ell \cap \mathcal{A} \cap \mathcal{A}'\}\,|G_\ell/G_{\ell+1}|^{-1}.$$

~对两边关于 $\sigma(\mathcal{F}_{\ell-2},\ \mathcal{H})$ 取期望，得到

$$\mathbb{P}(\mathcal{E}_{\ell+1} \cap \mathcal{A} \cap \mathcal{A}') \le |G_\ell/G_{\ell+1}|^{-1}\,\mathbb{P}(\mathcal{E}_\ell \cap \mathcal{A} \cap \mathcal{A}'), \qquad 2 \le \ell \le L.$$

对该界进行 ℓ 次迭代可得 $\mathbb{P}(\mathcal{E}_{L+1} \cap \mathcal{A} \cap \mathcal{A}') \le |G_2|^{-1}\mathbb{P}(\mathcal{E}_2 \cap \mathcal{A} \cap \mathcal{A}')$，因此

$$\begin{aligned} D(t) = |G| \cdot \mathbb{P}(\mathcal{E}_{L+1}|\mathcal{A} \cap \mathcal{A}') - 1 &\le |G_{\mathrm{ab}}| \cdot \mathbb{P}(\mathcal{E}_2|\mathcal{A} \cap \mathcal{A}') - 1 \le \frac{|G_{\mathrm{ab}}| \cdot \mathbb{P}(\mathcal{E}_2)}{\mathbb{P}(\mathcal{A} \cap \mathcal{A}')} - 1 \\ &= \frac{(d_{\ell^2}^{\mathrm{ab}}(t))^2 + \mathbb{P}((\mathcal{A} \cap \mathcal{A}')^c)}{\mathbb{P}(\mathcal{A} \cap \mathcal{A}')} \\ &\le (1 + 2\mathbb{P}((\mathcal{A} \cap \mathcal{A}')^c)) \left((d_{\ell^2}^{\mathrm{ab}}(t))^2 + \mathbb{P}((\mathcal{A} \cap \mathcal{A}')^c)\right) \end{aligned} \tag{4.8}$$

其中 $(d_{\ell^2}^{\mathrm{ab}}(t))^2 = |G_{\mathrm{ab}}| \cdot \mathbb{P}(\mathcal{E}_2) - 1$ 等于投影随机游走X^{ab} 在阿贝尔化 G_{ab}上的 ℓ^2-平稳分布距离，最后一行则由关于 $0 \le u \le 1/2$ 的初等不等式 $(1-u)^{-1} \le 1+2u$ 推出（假设 $\mathbb{P}((\mathcal{A}\cap\mathcal{A}')^c) \le 1/2$）。

设 $t = \max\{t^{\ell^2}_{\text{混合}}(G_{\mathrm{ab}}, \varepsilon/2)\ \mu_*^{-1}(\log k + 2\log(4/\varepsilon))\}$。由于 $\{N_a : a \in [k]\}$ 是速率为 $\mu(\mathrm{Cl}(s_a))$的独立泊松随机变量，利用简单的并集界可得

$$\mathbb{P}(\mathcal{A}^c) \le \sum_{i=1}^{k} e^{-\mu(\mathrm{Cl}(s_a))t} \le k e^{-\mu_* t} \le (\varepsilon/4)^2$$

因此 $\mathbb{P}((\mathcal{A}\cap\mathcal{A}')^c) \le \varepsilon^2/8$. 结合 (4.1)、(4.2) 和 (4.8) 可得

$$\|\mathbb{P}(X_t = \cdot) - \pi\|_{\mathrm{TV}} \le \frac{1}{2}\sqrt{D(t)} + \mathbb{P}(\mathcal{A}^c) \le \frac{1}{2}\sqrt{(1+\varepsilon^2/4)((\varepsilon/2)^2+\varepsilon^2/8)} + \varepsilon^2/16 \le \varepsilon$$

对任意 $\varepsilon \in (0,\ 1)$。因此我们已证明

$$t_{\mathrm{mix}}^{\mathrm{TV}}(G,\varepsilon) \le \max\{t_{\mathrm{mix}}^{\ell^2}(G_{\mathrm{ab}},\varepsilon/2), \mu_*^{-1}(\log k + 2\log(4/\varepsilon))\},$$

证毕。 □

4.2. **示例**(1.1)**和**(1.2)**中的截断现象**。

推论 *1.2* 的证明。我们将应用定理 1.1，证明混合时间的匹配上界和下界（误差为低阶项）。在 (a) 和 (b) 两部分中，投影游走都是定义在 $\mathbb{Z}_p^{n-1}$ 上的乘积链，各坐标独立演化。由于两部分的分析完全类似，我们着重证明 (a)，并仅简述 (b) 的论证。

在 (a) 部分，投影游走 X^{ab} 是 $G_{\mathrm{ab}} \cong \mathbb{Z}_p^{n-1}$ 上的简单随机游走，其中每个坐标都以速率 $1/(n-1)$ 独立地进行简单随机游走。因此，我们可以表示为

$$X_t^{\mathrm{ab}} = \bigotimes_{i=1}^{n-1} Z_{i,s},$$

其中 $\{Z_{i,\cdot}\}_{i=1}^{n-1}$是 $\mathbb{Z}_p$ 和 $s = t/(n-1$ 上相互独立的速率为 1 的简单随机游走).

为得到混合时间的下界，我们考虑 $\mathbb{Z}_p$ 上的离散时间简单随机游走，其转移矩阵的特征值为 $\{\cos(2\pi j/p)\}_{j=0}^{p-1}$；例如，参见 [17] 的第 12.3 节。特别地，谱隙为 $\gamma = 1-\cos(2\pi/p)$。将 X^{ab} 视为 $\mathbb{Z}_p^{n-1}$ 上速率为 1 的乘积链，并对其应用 [17] 的定理 20.7，可立即得出，对于任意 $\varepsilon \in (0,1)$,

$$t_{\mathrm{mix}}^{\mathrm{TV}}(G, 1-\varepsilon) \ge t_{\mathrm{mix}}^{\mathrm{TV}}(G_{\mathrm{ab}}, 1-\varepsilon) \ge \frac{n-1}{2\gamma}\left(\log(n-1) - \log(8\log(1/\varepsilon))\right). \tag{4.9}$$

接下来我们对 $t_{\mathrm{mix}}^{\mathrm{TV}}(G,\ \varepsilon)$ 进行上界估计。令 $d_{\ell^2}^{\mathrm{ab}}(t)$ 表示 X^{ab} 到平稳分布的 ℓ^2-距离，并令 $d^{(i)}(s)$ 表示 $Z_{i,\ s}$ 到平稳分布的 ℓ^2-距离，其中我们设 $s = t/(n-1)$。由坐标间的独立性，我们很容易看出

$$\begin{aligned} d_{\ell^2}^{\mathrm{ab}}(t)^2 + 1 = p^{n-1}\mathbb{P}(X_t = X_t') = \prod_{i=1}^{n-1} p\mathbb{P}(Z_{i,s} = Z_{i,s}') = \prod_{i=1}^{n-1}\left((d^{(i)}(s))^2 + 1\right) \\ \le \exp\left(\sum_{i=1}^{n-1}(d^{(i)}(s))^2\right) = \exp\left((n-1)\sum_{j=1}^{p-1} e^{-2(1-\cos(2\pi j/p))s}\right), \end{aligned} \tag{4.10}$$

其中，最后一个等式是通过对 $\mathbb{Z}_p$上的随机游走的傅里叶表示展开$(d^{(i)}(s))^2$ 得到的经典恒等式。

如果 $p = p_n$ 在 n 上有一个常数 M作为一致上界，那么我们有

$$(d_{\ell^2}^{\mathrm{ab}}(t))^2 \le \exp\Big((n-1)pe^{-(1-\cos(2\pi/p))2s}\Big) - 1 \le e^{\varepsilon/4} - 1 \le \varepsilon/2$$

当 $t \ge (n-1)\log(n-1)+(n-1)\log(8M/\varepsilon)\,2(1-\cos(2\pi/p))$ 时。注意，在这种情况下 $\mu_* = 1/(n-1)$，因此定理 1.1 表明

$$\begin{aligned} t_{\mathrm{mix}}^{\mathrm{TV}}(G,\varepsilon) &\le \max\{t_{\mathrm{mix}}^{\ell^2}(G_{\mathrm{ab}},\varepsilon/2), (n-1)\log(n-1) + 2(n-1)\log(4/\varepsilon)\} \\ &\le \frac{(n-1)\log(n-1)}{2(1-\cos(2\pi/p))} + (n-1)C_{\varepsilon,M} \end{aligned}$$

对于某个常数 $C_{\varepsilon,M} > 0$，该常数取决于 ε, M。结合 (4.9)，这就完成了在 $p = p_n$ 一致有上界的情况下截断现象的证明。

现在设 $p = p_n$ 随 $n \to \infty$ 发散。对于任意小的 $\delta > 0$，当 $x > 0$ 足够小时，有 $1 - \cos x \ge (1-\delta)x^2/2$。令 $J = \{1, \dots, \lfloor\sqrt{p}\rfloor\} \cup \{p - \lfloor\sqrt{p}\rfloor, \dots, p-1\}$。那么对于任意 $j \in J$，我们有 $\widetilde{j} := \min\{j, p-j\} \le \lfloor\sqrt{p}\rfloor$，并且

$$1 - \cos(2\pi j/p) = 1 - \cos(2\pi\widetilde{j}/p) \ge (1-\delta)\frac{2\pi^2\widetilde{j}^2}{p^2} \ge (1-\delta)\frac{2\pi^2\widetilde{j}}{p^2}.$$

因此，

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{p-1} e^{-2(1-\cos(2\pi j/p))s} &\le \sum_{j\in J} e^{-2(1-\cos(2\pi j/p))s} + \sum_{j\in[p-1]\setminus J} e^{-2(1-\cos(2\pi j/p))s} \\ &\le 2\sum_{m=1}^{\lfloor\sqrt{p}\rfloor} e^{-4(1-\delta)\pi^2 ms/p^2} + p\, e^{-2(1-\cos(2\pi\lfloor\sqrt{p}\rfloor/p))s} \\ &\le 4e^{-4(1-\delta)\pi^2 s/p^2} + p\, e^{-2\pi^2 s/p}, \end{aligned}$$

其中最后一行由几何级数 $\sum_{m=1}^{\infty} e^{-4(1-\delta)\pi^2 ms/p^2} \le 2e^{-4(1-\delta)\pi^2 s/p^2}$ when$e^{-4(1-\delta)\pi^2 s/p^2} \le 1/2$ 得出。注意，当 $t \ge (1+2\delta)p^2(n-1)\log(n-1)\,4\pi^2$ and $s = t/(n-1)$ 时，该条件成立。

令 $\delta \in (0, 1/4)$ 任意小。将上述界代入 (4.10)，得到

$$\begin{aligned} d_{\ell^2}^{\mathrm{ab}}(t)^2 &\le \exp\Big((n-1)\Big(4e^{-4(1-\delta)\pi^2 s/p^2} + pe^{-2\pi^2 s/p}\Big)\Big) - 1 \\ &\le \exp\Big(4(n-1)^{-\delta/2} + p(n-1)^{1-(1+2\delta)p/2}\Big) - 1 \\ &\le 8(n-1)^{-\delta/2} + 2p(n-1)^{1-(1+2\delta)p/2} = o_n(1), \end{aligned}$$

其中最后一步用到指数为 $o_n(1)$，且当 u 足够小时，不等式 $e^u - 1 \le 2u$ 成立。因此，对于任意 $\varepsilon \in (0,1)$ 和任意 $\delta \in (0, 1/4)$，我们有

$$t_{\mathrm{mix}}^{\mathrm{TV}}(G,\varepsilon) \le \max\{t_{\mathrm{mix}}^{\ell^2}(G_{\mathrm{ab}},\varepsilon/2), (n-1)\log(n-1)+2(n-1)\log(4/\varepsilon)\} \le \frac{(1+2\delta)p^2(n-1)\log(n-1)}{4\pi^2}$$

当 n 足够大时。结合 (4.9)，这表明该随机游走在时间处呈现截断现象

$$\frac{p^2(n-1)\log(n-1)}{4\pi^2},$$

当 $p = p_n \to \infty$ 时，它渐近等价于 $(n-1)\log(n-1)\,2(1-\cos(2\pi/p))$。

注意到在 $\mathbb{Z}_p$ 上、跳跃为 $\{\pm 1, \pm b\}$ 的简单随机游走的特征值为 $\{\frac{\cos(2\pi j/p)+\cos(2\pi bj/p)}{2}\}_{j=0}^{p-1}$，其中 $b = \lfloor\sqrt{a}\rfloor$，即可类似地证明 (b) 部分。

□

References

[1] Carlos Andr
´ *Proceedings of the American* e. 幺三角群的基本特征标（任意素数情形）。 , ( ): – . [2] Carlos AM Andr
´ *Journal of Algebra* 176 3 959 1000, e. 幺三角群余伴随轨道的基本和。 , ( ): – .[3] Carlos AM Andr´e. 幺三角群的正则特征标。 *Journal of Algebra*, 201(1):1–52, 1998. [4] Ery Arias-Castro、Persi Diaconis 和 Richard Stanley. 上三角矩阵上的超类随机游走。 *Journal of algebra* 278 2 739 765, 2004 , ( ): – . [5] Nathana¨el Berestycki、Oded Schramm 和 Ofer Zeitouni. 随机 k-循环与并合—碎裂链的混合时间。 *Annals of Probability*, 39(5):1815–1843, 2011. [6] Nath¨el Berestycki 和 Batı S¸eng¨ul. 置换群上共轭不变随机游走的截断现象。 *Probability Theory and Related Fields*, 173(3):1197–1241, 2019. [7] P. Diaconis 和 L. Saloff-Coste. 有限群的中等增长与随机游走。 *Geom. Funct. Anal.*, 4 1 1( ): –36, 1994.[8] Persi Diaconis 和 Robert Hough. 幺幂矩阵群上的随机游走。 *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 54 3 587 625, 2021 ( ): – . [9] Persi Diaconis 和 Laurent Saloff-Coste. 有限马尔可夫链的纳什不等式。 *Journal of Theoretical Probability* 9 2 459 510, 1996 , ( ): – . [10] Persi Diaconis 和 Laurent Saloff-Coste. 哈纳克不等式在幂零商群上随机游走中的应用。载于 *Journal of Fourier Analysis and Applications Special Issue*，第 189–207 页。CRC出版社，2020。[11] Persi Diaconis 和 Mehrdad Shahshahani. 用随机对换生成随机置换。*Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete*, 57(2):159–179, 1981. [12] David S. Dummit 和 Richard M. Foote. *Abstract algebra*. 约翰·威立父子公司，新泽西州霍博肯，第三版，2004。[13] J Hermon 和 S Olesker-Taylor. 阿贝尔群上几乎所有随机游走的截断现象（ 2021 *arXiv preprint* ）。 , . [14] Jonathan Hermon 和 Xiangying Huang. 幂零群随机 Cayley 图的截断现象。 *arXiv:2102.02809* 2021 *arXiv preprint* *arXiv:2403.12355* 2024 , . [15] Jonathan Hermon、Xiangying Huang、Francesco Pedrotti 和 Justin Salez. 离散群上的信息集中。 *arXiv preprint arXiv:2409.16869*, 2024. [16] Jonathan Hermon 和 Sam Olesker-Taylor. 上三角矩阵上随机游走的截断现象。 *arXiv:1911.02974* 2019 *arXiv preprint* , . [17] David A. Levin 和 Yuval Peres. *Markov chains and mixing times*. 美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2017。第二版，初版为 [MR2466937], Elizabeth L. Wilmer 作出贡献；“向过去耦合”一章由 James G. Propp 和 David B. Wilson 撰写。[18] Evita Nestoridi. 上三角矩阵上随机游走的超特征标理论与比较论证。 *Journal of Algebra*, 521:97–113, 2019. [19] Evita Nestoridi 和 Allan Sly. $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ *Probability Theory and Related Fields* 187 3 571 601, 2023 上的上三角矩阵随机游走。, ( ): – . [20] Francesco Pedrotti 和 Justin Salez. 非负曲率链的一种新截断判据。 *arXiv:2501.13079* 2025 *arXiv preprint* , . [21] Justin Salez. 非负曲率马尔可夫链的截断现象。 *Journal of the European Mathematical Society*, 2023.[22] Justin Salez. 非负曲率扩散的截断现象。 *arXiv preprint arXiv:2501.01304*, 2025. [23] Justin Salez. 马尔可夫链的现代面向：熵、曲率与截断现象，2025。[24] Ning Yan. *Representation theory of the finite unipotent linear groups*. 博士论文，宾夕法尼亚大学，2001.[25] Ning Yan. 用簇方法表示有限幺幂线性群。 *arXiv:1004.2674* 2010 *arXiv preprint* , .