arXiv:2601.03404v1 [math.DS] 6 Jan 2026

复势与全纯微分方程

GABRIEL RONDON[1] 和PAULO RICARDO DA SILVA[2]

Abstract. 复势是一个全纯函数 $\Omega\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ，其实部和虚部分别生成一对正交叶状结构，表示 $\dot{z} = \overline{\Omega'(z)}$的等势线和流线。在本文中，我们将势的概念推广到更广泛的一类动力系统，即形式为 $\dot{z} = f(z)$、其中 $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 全纯的系统。由此得到的势会诱导一个整直映射，为平面多项式向量场相图的拓扑分类提供自然框架。复势的存在是解决若干基本问题的有力工具，例如确定分段光滑系统中极限环数量的上界，以及脐点周围曲率线的局部构型等。

1. 引言

复分析与平面微分方程定性理论之间的相互作用，已被证明是丰富的洞见之源，将函数的解析性质与相图的几何结构联系起来。

我们回顾一下，全纯函数 f 是定义在区域$V \subseteq \mathbb{C}$上的复值函数，其中 $u = \Re(f)$ 和 $v = \Im(f)$ 连续，一阶偏导数在 V 上存在，并满足柯西-黎曼方程

$$u_x = v_y, \qquad u_y = -v_x, \qquad \forall z = x + iy \in V.$$

Looman–Menchoff 定理指出，这些条件足以保证 f 的解析性。如果 f在穿孔圆盘 $D(z_0,\ R) \setminus \{z_0\}$ 上全纯，但在 z_0 处不可微，我们就称 z_0 是 f 的奇点；在这种情况下， f 有 Laurent 展开

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_k}{(z - z_0)^k} + \sum_{k=0}^{\infty} A_k (z - z_0)^k. \tag{1}$$

当平面向量场与全纯函数 $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 对应时，会呈现出若干显著特征：不存在极限环，实系数多项式系统具有可逆性，以及不存在中心–焦点问题，等等。这些事实已在先前的研究 [1, 4, 8] 中得到充分讨论。

本文中，我们研究平面向量场 $f = (u,\ v)$，将其视为单连通域 $D \subseteq \mathbb{C}$内单一复变量 $f = u + iv$ 的函数。 $\dot{z} = f(z)$的一条轨迹是曲线 $z(t) = x(t) + iy(t)$， $t \in \mathbb{R}$，它满足微分系统

$$\dot{x} = u(x, y), \quad \dot{y} = v(x, y). \tag{2}$$

我们假设 f 是全纯函数，或者 f 是一个反全纯函数，也就是说， f 是全纯的。

2010 *Mathematics Subject Classification.* 32A10、34C20、34A34、34A36、34C05。
Key words and phrases. 分段全纯系统、反全纯系统、极限环、复势、第一积分。

当把向量场视为复变量的函数时，通常可以对其进行显式积分，进而确定其相图。在流体动力学中正是如此，其中轨线称为流线。作为示例，考虑反全纯系统 $\dot{z} = z^2$。相应的实系统为

$$x' = x^2 - y^2, \qquad y' = -2xy,$$

该系统是非线性的，无法立即求解。然而，轨线满足精确方程 $2xy\,dx + (x^2 - y^2)\,dy = 0$，这是 $\psi(x, y) = x^2y - \frac{y^3}{3}$ 的微分。因此，流线恰好是 ψ 的等值曲线，如图1所示。这个例子已经暗示了第一积分的存在，而这一特征将通过复势的概念得到系统阐释。

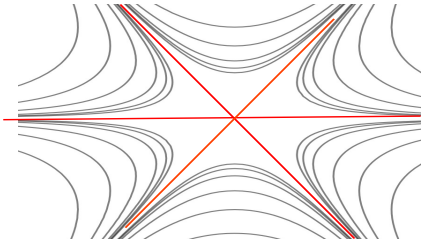

FIGURE 1. $f(z) = z^2$ 的流线。

给定定义在某个开集上的全纯系统 $\dot{z} = f(z)$，其奇点附近的局部相图在共形共轭意义下完全分类。如 [1, 4]所示，在正则点附近，该系统共轭于 $\dot{z} = 1$；在单零点附近，共轭于 $\dot{z} = z$；在 n 阶多重零点附近，共轭于 $\dot{z} = z^n/(1 + \lambda z^{n-1})$（其中 $\lambda = \mathrm{Res}(1/f, z_0)$）；在 n 阶极点附近，则共轭于 $\dot{z} = 1/z^n$。这一分类凸显了全纯性所施加的严格标准形结构。

全纯系统 $\dot{z} = f(z)$ 和反全纯系统 $\dot{z} = \overline{f(z)}$（其中 f 全纯）都具有很强的可积性。对于全纯系统，轨线由等值曲线 $\Im \int \frac{1}{f(z)}dz =$ 常数隐式给出，这为轨道提供了明确的描述，但不一定对应实值第一积分。对于反全纯系统，定理 2.1 表明它们同时是梯度系统和哈密顿系统：若 $\Omega(z) = \int f(z)\,dz$，则 $\psi(x, y) = \Im\Omega(x + iy)$ 是一个真正的第一积分。上面的例子对应于 $\Omega(z) = z^3/3$，其虚部恰好是 $\psi(x, y) = x^2y - y^3/3$。

这些可积性与流体动力学中的经典概念复势 密切相关。给定一个全纯函数 $\Omega = \phi + i\psi$，速度场 $\overline{\dot{z}} = \Omega'(z)$ 描述了理想不可压无旋流，其中 ψ 充当流函数。Ω 的实部和虚部分别定义了正交族、等势线和流线，它们与 $\nabla\phi$ 的积分曲线以及第一积分为 ψ的哈密顿场的积分曲线重合。

在这项工作中，我们系统地利用了这种联系。对于一般的全纯系统$\dot{z} = f(z)$，我们考虑广义势 $\Omega(z) = \int \frac{1}{f(z)}\,dz$ （定义在经过适当割开的区域上），其等值曲线 $\Im\Omega =$为常数时描绘了相图。对于反全纯系统，势 $\Omega(z) = \int \overline{f(z)}dz$ 直接给出一个第一积分。这一统一框架不仅解释了这两类系统的可积性，也揭示了实际推论，例如

多项式反全纯系统中轨线的代数性质（定理 2.3），以及能够使动力学平凡化的整流坐标的存在。

分段光滑情形以一种可控的方式打破了这种刚性。通过在切换线两侧分别采用不同的全纯系统或反全纯系统，可以得到一个不连续向量场，并且该向量场在每个光滑部分上都保留了显式的轨道描述或第一积分。这些结构之间的不匹配可能产生孤立的周期解。此前已有研究探讨了分段全纯系统中的这一现象 [5, 6, 7],，并建立了极限环数量的界限。在本研究中，我们将这一分析扩展到更一般的分段系统，包括全纯部分与反全纯部分的混合情形，并说明复势如何对决定极限环存在性及数量的穿越条件进行精确的解析控制。

本文着重研究与全纯系统的可积性和整体分类相关的问题，以及其在分段光滑动力学和微分几何中的应用。本文的主要贡献如下：

(1) 复势概念的推广。 我们为一般全纯系统 $\dot{z} = f(z)$（第 2 节）引入复势的概念。我们证明反全纯系统同时是梯度 系统和哈密顿 系统（定理 2.1），并证明多项式势给出了一类所有轨线均为代数曲线的系统（定理 2.3）。我们还为全纯向量场的标准形给出了显式的势（定理 2.4）。**(2) 环流、净流量与复时间**。 我们展示如何利用势分析环流与净流量（第 3.1 小节），以及研究具有复时间的系统之流，即 $\frac{dz}{dT} = f(z)$、 $T \in \mathbb{C}$ （第 3.2 小节）。在此背景下，势的实部和虚部分别作为实时间流与虚时间流的第一积分。**(3) 三次多项式系统的整体分类**。 我们对 Poincar´é 圆盘上三次首一中心多项式系统的整体相图进行分类（定理 4.1）。势用于定义一个整直坐标系，使动力学化为平凡形式，并揭示其分解为典范区域（中心型、萼片型和 α–ω 区域）。

(4) 特殊类别分段光滑系统的极限环界。 复势框架为各种分段光滑构型中的极限环给出了紧的界。对于跨越切换线、混合反全纯部分和全纯部分的系统，我们证明：当全纯部分的平衡点位于切换线上时，分段线性系统至多有一个极限环（定理 5.1）；当该平衡点为任意位置时，至多有三个极限环（定理 5.2）。

对于两侧均为反全纯的分段系统，我们得到一个完整的层级：分段线性系统不存在极限环，分段二次系统至多有一个极限环，分段三次系统至多有三个极限环（定理 5.3）。这些界是紧的，表明多项式的次数直接控制着极限环的最大数量。证明关键依赖于复势在每个光滑片段上提供的第一积分。

(5) 与微分几何的联系。 我们证明，常平均曲率（CMC）浸入的孤立脐点附近主曲率线的局部行为，可以由单项式全纯函数 $Q(z) = z^n$ （第 6 节）确定。 $\dot{z} = z^n$ 的相图精确描述了主丛叶的构型，并将脐点指标与指数 n 联系起来。

本文按照上述贡献组织如下。第 2–3 节阐述复势理论及其基本应用。第 4 节运用这一框架对三次多项式系统进行分类。第 5 节采用势方法推导分段光滑系统中极限环的界。最后，第 6 节介绍其在常平均曲率曲面主曲率线上的几何应用。

2. Complex Potential

复势 $\Omega(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$ 是定义在单连通域 $D \subseteq \mathbb{C}$上的全纯函数。与 Ω 相关的复速度场 是向量场$f(z) = \Omega'(z)$。

柯西-黎曼方程的一个直接推论是下面这个定理。

定理 2.1。 与势 $\Omega = \phi + i\psi$ 相关的复速度场同时是梯度向量场和哈密顿向量场。更具体地说，$\Omega' = \nabla\phi$ 且 ψ 是第一积分。

证明。 考虑复势 Ω 以及与之相关的复速度场 f。因此，$\Omega' = f = \tilde{u} + i\tilde{v}$是全纯函数，且 $\Omega' = f = \tilde{u} + i(-\tilde{v})$。 利用 f 的柯西-黎曼方程，我们有 $\tilde{u}_y = (-\tilde{v})_x$ ，因此可知 $f = \tilde{u} - i\tilde{v}$ 是梯度向量场。此外

$$\tilde{u} + i\tilde{v} = \overline{f} = \Omega' = \phi_x + i\psi_x = \phi_x - i\phi_y$$

因此 $\tilde{u} = \phi_x$, $-\tilde{v} = \phi_y$. 于是 $f = \nabla\phi$。最后，利用 Ω 的柯西–黎曼方程，我们还可得出 $\tilde{u} = \psi_y$, $-\tilde{v} = -\psi_x$ ，因此 f 是一个以 ψ为第一积分的哈密顿向量场。□

全纯函数的一个基本性质是，其实部和虚部的等值线构成正交曲线族（例如参见 [2]）：

命题 2.1. 设$\Omega = \phi + i\psi$ 是单连通域 D中的复势。若$z_0 \in D$ 且 $\Omega'(z_0) \neq 0$，则 $\psi(x, y) = \psi(z_0)$ 与 $\phi(x, y) = \phi(z_0)$ 在 z_0处横截相交。

推论 2.1. 设$\Omega = \phi + i\psi$和 $f = \Omega'$分别是全纯势及其对应的复速度场。则 ψ 是 $z' = f(z)$ 的第一积分，而 ϕ 是$z' = if(z)$的第一积分。

证明。 系统 $z' = f(z)$ 的可积性已在定理 2.1 中得到验证。系统 $z' = if(z)$ 的可积性可由以下事实立即推出：场$if(z)$是场 $f(z)$旋转 90 度所得，并且 ϕ与ψ 的等值曲线彼此正交。□

设 $f = u + iv$ 是定义在 $\mathbb{C}$. 的单连通域中的速度场的复表示

(a) 若 f满足 $\mathrm{rot}(f) = (0, 0, v_x - u_y) = (0, 0, 0)$，则称其为无旋。特别地，该条件意味着 f 是梯度向量场。(b) 若 f满足 $\mathrm{div}(f) = u_x + u_y = 0$.(c) 若 f 无旋且不可压缩，则称 f 为理想。

定理 2.2。 f 是理想流体速度场的复表示，当且仅当 f 是全纯的。

证明。这是柯西-黎曼方程的直接推论

$$f = u + iv \quad \text{ideal} \Leftrightarrow v_x = u_y, \quad u_x = -v_y \Leftrightarrow \overline{f} = u - iv \quad \text{satisfies CR.}$$

□

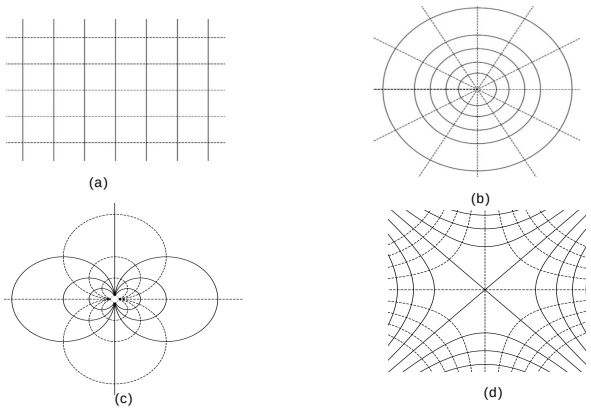

FIGURE 2. 等势线与流线：(a) $f(z) = 1$，(b) $f(z) = z$，(c) $f(z) = z^2$ 和 (d) $f(z) = \dfrac{1}{z}$。

任意全纯函数 $\Omega = \phi + i\psi$ 都可以解释为理想流体二维流动的复势。曲线 $\phi = constant$ 称为等势曲线，曲线 $\psi = constant$ 称为流线。复速度为 $f = \Omega'$，也就是说，Ω 是 f. 的原函数。图2展示了若干基本复势对应的等势线和流线：(a) $f(z) = 1$，(b) $f(z) = z$，(c) $f(z) = z^2$，以及 (d) $f(z) = \dfrac{1}{z}$。

一个不那么简单的例子是 $f(z) = \dfrac{z^2}{1+z}$，其等势线和流线如图3所示。

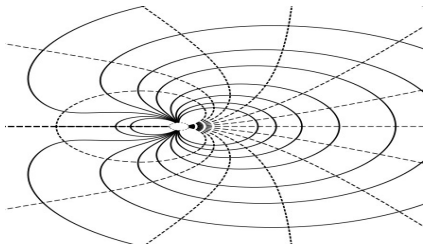

FIGURE 3. $f(z) = \dfrac{z^2}{1+z}$ 的等势线与流线。

例1. 设 k 和 A 为非零实常数。

(a) 向量场 $f(z) = \dfrac{k}{2\pi}\dfrac{z-z_0}{|z-z_0|^2}$ 是理想流体速度场的复表示。事实上，$f(z) = -\dfrac{k}{2\pi}\dfrac{1}{z-z_0}$ 在 $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ 中全纯。*(b)* 向量场 $f(z) = kz$ 也表示理想流体流，因为 $f(z) = kz$ 在 $\mathbb{C}$ 中全纯。*(c)* 对于复势 $\Omega(z) = \dfrac{k}{2}z^2$，有 $f(z) = \Omega'(z) = kz$。令 $z = x + iy$，则流线由 $xy =$ 常数给出。

(d) 若$\Omega(z) = Az$，则 $f(z) = \overline{\Omega'(z)} = A$，且流线为 $y =$ 常数。

定义 2.1. 我们称 f 为反全纯的，当且仅当 f 为全纯的。

换言之， f 是理想流体速度场的复表示，当且仅当 f 是反全纯的。

定理 2.3. 以下关于多项式势和速度场的陈述成立。

(a) 若 f 是某个 $z_0 \in \mathbb{C}$ 邻域内的反全纯多项式映射，则它的所有轨线都是代数的。
(b) 若 Ω 是多项式函数，则 $f = \Omega'$ 的所有轨线都是代数的。

证明。 事实上，存在 $k \in \mathbb{N}$ 使得 $f(z) = \sum_0^k a_n(z - z_0)^n$，因此 $\Omega = \int f dz$ 是多项式势，从而 f 的轨线都是代数的。为证明 (b)，只需注意到 $\psi = \Im(\Omega)$ 是一个第一多项式积分。□

命题 2.2。 设 f 是定义在开子集 $U \subseteq \mathbb{C}$ 中的全纯映射。那么， f 的流线与 $\frac{1}{f}$ 的流线在 $U \setminus \{z$ 中相同： $f(z) = 0\}$.

证明。 这立即由以下事实得出：速度场相差一个正函数 $f = |f|^2 \frac{1}{f}$. = □的倍数

现在我们对原函数的存在性作一些说明。若区域 $U \subseteq \mathbb{C}$ 中的任意一点 $z_0 \in U$ 都满足：对于每个 $z \in U$，连接 z_0 与 z 的直线段都完全包含在 U 中，则称区域 $U \subseteq \mathbb{C}$ 关于点 $z_0 \in U$ 是星形的。例如，割平面 $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ 关于正实轴上的任意一点都是星形的。全纯函数的一个基本性质f是：如果 U 是星形的，那么 f 在 U 中存在一个原函数。

命题 2.3。 设 f 是定义在挖心圆盘 $D = D(0, R) \setminus \{0\}$ 上的全纯函数，其中，或者0 是 f 在 D中的唯一零点，或者0 是 f 的孤立奇点，且 f 在 D中没有零点。设 L 是一条从0出发的射线。那么， f和 $1/f$ 在 $U = D \setminus L$中均有原函数。

证明。 集合 $U = D \setminus L$ 相对于 L另一侧的任意一点都是星形的；又因为 $1/f$ 在 U上全纯，所以结论成立。□

定义 2.2。 设 f 是如命题 *2.3* 中所述的全纯映射。我们称$\Omega = \int \frac{1}{f} dz$为 f 在 U.中的势。

请注意，上述定义是自然的。事实上，由于 f 和 $\frac{1}{f}$ 具有相同的流线，且 $\frac{1}{f}$ 是与势 $\Omega(z)$ 相关联的速度场， $= \int \frac{1}{f} dz = \int \frac{1}{f} dz$.

定理 2.4。 标准形速度场的复势如下表所示。

$f(z)$	Fig.	$\Omega(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$
$z^n, \quad n \in \mathbb{Z}$	(2)	$\phi(x, y) = \dfrac{(x^2+y^2)^{\frac{1-n}{2}} \cos\left((1-n) \arctan \frac{y}{x}\right)}{1-n}$ $\psi(x, y) = \dfrac{(x^2+y^2)^{\frac{1-n}{2}} \sin\left((1-n) \text{ 反正切 } \frac{y}{x}\right)}{1-n}$
$\dfrac{z^n}{1+z^{n-1}}$	(3)	$\phi(x, y) = \dfrac{1}{2}\log(x^2+y^2) + \dfrac{(x^2+y^2)^{\frac{1-n}{2}} \cos\left((1-n) \text{ 反正切 } \frac{y}{x}\right)}{1-n}$ $\psi(x, y) = \dfrac{(x^2+y^2)^{\frac{1-n}{2}} \sin\left((1-n) \text{ 反正切 } \frac{y}{x}\right)}{1-n} + \text{反正切 } \dfrac{y}{x}$

证明。 这些表达式可通过直接计算 $\Omega(z) = \int \frac{1}{f}\, dz$ 并分离实部和虚部得出。 □

总之，给定在单连通区域中定义的全纯函数 $\Omega = \phi + i\psi$，其虚部 $\psi = c$的等值曲线是向量场 $g = \Omega'$的积分曲线；在 $\Omega'(z) \neq 0$ 的区域内，它们也是场 $f = \frac{1}{\Omega'}$ 的积分曲线。

3. Circulation, Net Flow and Complex Time

当 $1/f$ 存在原函数时，复势可对系统 $z' = f(z)$ 的动力学作局部描述。在这种情况下，原函数的虚部起到流函数的作用，其等值集给出流的轨线。然而，这种描述在很大程度上取决于单值原函数的存在，因此在多连通域或存在奇点时可能失效。

环流和净流量为这一框架提供了自然的扩展。通过沿闭曲线对共轭场 f 进行线积分，这些量能够捕捉局部势无法反映的流的整体特征。

3.1. 环流与净流量。 只要 $1/f$ 存在原函数，复势就能局部描述系统 $z' = f(z)$ 的动力学。在这种情况下，原函数的虚部起到流函数的作用，其等值集即为流的轨线。然而，这种描述在很大程度上取决于单值原函数的存在，因此在多连通域或存在奇点时可能失效。

环流与净流量为这一框架提供了自然的扩展。通过沿闭曲线对共轭场f 进行线积分，这些量能够捕捉局部势无法体现的流的整体特征。

环流 指的是这样一个问题：流沿曲线C周围流动的趋势有多强。净流量 是由 C围成的区域内流体的流入率与流出率之差。直观而言，如果流绕 C 曲线逆时针旋转，环流为正。如果流进入 C 所围成的区域，环流为零，净流量为负；如果流离开C 所围成的区域，环流为零，净流量为正（例如源）。

让我们严谨地定义这些概念。 $f = u+iv$的环流定义为 $\int_C fTds =\int_C udx + vdy.$净流量定义为$\int_C fNds = \int_C udy - vdx.$我们可以将这两个公式合并为一个表达式

$$\int_C \overline{f}dz = [\text{circulation}] + i.[\text{net flow}].$$

例 2。 请看以下示例。

(a) 取 C 为曲线 $|z| = 1$。 $f(z) = (z-1)^2$ 产生负环流和零净流量，因为它不穿过 C。事实上， $\int_C fdz = -4\pi$.*(b)* 取 $f(z) = (1+i)z$，并令 C 由逆时针曲线 $|z| = 1$ 给出。我们有 $\int_C fdz = 2\pi + 2\pi i$.*(c)* 取 $f(z) = \cos z$，并令 C 由顶点为 1、i、-1、$-i$ 的逆时针正方形给出。根据柯西定理，我们有 $\int_C fdz = \int_C \cos zdz = 0$。 (*d*) 取 $f(z) = \frac{k}{z-z_0}$，并令 C 由围绕 z_0 的逆时针曲线给出。记 $k = a-bi$，并使用柯西积分公式 $\int_C fdz = 2\pi b + 2\pi ai.$

例3。 我们可以使用环流和净流量来分析线性系统的流。令a， $b \in \mathbb{R}$ 为常数，并令 $f(z) = (a+ib)z$ 为线性速度场。令 C_ε 为由 $C_\varepsilon(t) = \varepsilon e^{it}$ 参数化的曲线，其中 $\varepsilon > 0$ 和 $t \in [0, 2\pi]$。因此，我们有

$$\int_{C_\varepsilon} \overline{f} dz = \int_{C_\varepsilon} (a-bi)\overline{z} dz = \varepsilon(b+ai).$$

因此，我们得出结论， a 的符号决定原点处的平衡点是吸引的（$a < 0$）还是排斥的（$a > 0$）。此外， b 的符号决定旋转方向。如果 $b > 0$ ，旋转方向为逆时针；如果 $b < 0$ ，旋转方向为顺时针。

3.2. 复时间全纯微分方程。记 $z = x + iy$,$f = u + iv$, $T = t + is$，并考虑微分方程

$$z'(T) = f(z(T)).$$

假设 f 在开子集 $U \subseteq \mathbb{C}$ 上全纯，且 $z(T)$是一个全纯解，也定义在开子集 $V \subseteq \mathbb{C}$上。根据柯西-黎曼方程，我们必须有

$$x_t = y_s, \quad x_s = -y_t.$$

由于 $z' = u + iv = x_t + iy_t = y_s - x_s i$ ，该方程对应于两个系统

$$\Re : x_t = u, \quad y_t = v; \quad \Im : x_s = -v, \quad y_s = u. \tag{3}$$

从几何上看，这两个系统描述了沿着与复势 Ω 相关的两个正交曲线族的流：系统 $\Re$沿流线（$\psi =$ 为常数）流动，而系统 $\Im$ 沿等势线（$\phi =$ 为常数）流动。这解释了为什么在图2中，这些曲线族分别对应于实时间和纯虚时间下的轨线。

命题3.1。 设$\Omega = \phi + i\psi$ 是 $f = u + iv$的复势，定义在单连通域 D中。那么 ψ 是系统(3)-$\Re$的第一积分， ϕ 是系统(3)-$\Im$的第一积分。

证明。 由$\Omega = \int \frac{1}{f} dz$ 这一事实可直接得出，因此

$$\Omega' = \phi_x + i\psi_x = \frac{u}{u^2+v^2} - i\frac{v}{u^2+v^2} = \psi_y - i\phi_y$$

因此

$$\Re : \begin{cases} x_t = (u^2+v^2)\psi_y \\ y_t = -(u^2+v^2)\psi_x \end{cases}, \quad \Im : \begin{cases} x_s = -(u^2+v^2)\phi_y \\ y_s = (u^2+v^2)\phi_x \end{cases}.$$

由于 ψ 和 ϕ 分别是系统 $\Re/(u^2+v^2)$和 $\Im/(u^2+v^2)$的第一积分，因此它们也分别是(3)-$\Re$ 和(3)-$\Im$的第一积分。□

推论3.1。 设$\Omega = \phi + i\psi$ 是 $f = u + iv$的复势，定义在单连通域 D中。那么 ψ 是 $z' = f$ 的第一积分， ϕ 是 $z' = if$.的第一积分

证明。 这直接由以下事实得出：

$$f = (u, v) = (u^2+v^2)(\psi_y, -\psi_x)$$

and

$$if = (-v, u) = (u^2+v^2)(-\phi_y, \phi_x).$$

□

上述命题也可以使用分离变量法来证明。

$$\frac{dz}{dT} = f \implies \int \frac{dz}{f} = \int dT \implies \phi + i\psi = t + si + a + bi,$$

其中 a, b 为实常数。对最后一个关系关于 t 求导，得到

$$(\phi_x, \phi_y)(x_t, y_t) + i(\psi_x, \psi_y)(x_t, y_t) = 1$$

因此

$$(\psi_x, \psi_y)(x_t, y_t) = 0.$$

这意味着 $\psi(x, y)$ 是系统 (3)-$\Re$ 的第一积分。类似地，对等式两边关于 s 求导，我们得出 $\phi(x, y)$ 是 (3)-$\Im$ 的第一积分。

例4。考虑满足初始条件$z(0) = x_0 + iy_0 = z_0.$ 的微分方程 $z' = 1$ 。我们有 $u = 1$, $v = 0$ 且 $\Re$: $x_t = 1$, $y_t = 0$; $\Im$: $x_s = 0$, $y_s = 1$。因此 $x = t + c(s)$ $y = d(s)$，其中 $x(0) = x_0 = c(0)$ $y(0) = y_0 = d(0)$。我们有 $d' = y_s = 1$，$c' = x_s = -y_t = 0$，进而 $c = x_0$, $d = s + y_0.$。我们得出 $x = x_0 + t$, $y = y_0 + s$,

$$z = (x_0 + t) + i(y_0 + s) = (t + si) + (x_0 + iy_0) = T + z_0.$$

这种常值流的相图如图2(a)所示。

当然，如果我们使用分离变量法，也会得到相同的结果

$$\frac{dz}{dT} = 1 \implies z = T + K, \quad z_0 = z(0) = K \implies z = T + z_0.$$

例5. 考虑满足初始条件$z(0) = x_0 + iy_0 = z_0.$ 的微分方程 $z' = z$ 。我们有 $u = x, v = y$ 以及 $\Re$: $x_t = x$, $y_t = y$; $\Im$: $x_s = -y$, $y_s = x$.因此 $x = c(s)e^t$, $y = d(s)e^t$，其中 $x(0) = x_0 = c(0)$ $y(0, 0) = y_0 = d(0)$。按照上一个例子中的方法，我们很容易得到 $z = z_0 e^T$. 当然，如果我们使用分离变量法，也会得到相同的结果

$$\frac{dz}{dT} = z \implies z = Ke^T, \quad z_0 = z(0) = K \implies z = z_0 e^T.$$

这种线性流的相图如图2(b)所示。

例6. 考虑满足初始条件$z(0) = x_0 + iy_0 = z_0.$ 的微分方程 $z' = z^2$ 。我们有 $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$ 以及 $\Re$: $x_t = x^2 - y^2$, $y_t = 2xy$;$\Im$: $x_s = -2xy$, $y_s = x^2 - y^2$. 在这种情况下，使用分离变量法可得 $z = \frac{-1}{T - \frac{-1}{z_0}}$.这个二次流的相图同时展示了实时间轨线（与$x$轴相切）和纯虚时间轨线（与 y轴相切），如图2(c)所示。

例7. 考虑满足初始条件$z(0) = x_0 + iy_0 = z_0.$ 的微分方程 $z' = -\frac{1}{z}$ 。在这种情况下，使用分离变量法可得 $\frac{z^2}{2}(\frac{T^2}{2} = T + \frac{z_0^2}{2}.)$。这种倒数流的相图如图2(d)所示。

这四个基本示例展示了复时间下全纯流的几何结构。对于更复杂的非线性情形，例如 $z' = \frac{z^2}{1+z}$，实时间流与虚时间流之间的关系遵循相同的原理，但其几何结构更为丰富，如图3所示。

4. Monic and Centered Cubic Polynomial Differential Equation

本节开篇先回顾一下：若一个多项式 $p(z) = A_n z^n + \cdots + A_0$, $A_k = a_k + ib_k$ 满足 $A_n = 1$ 且 $A_{n-1} = 0$，则称其为首一且中心化的。

任何次数大于或等于二的多项式，都可以通过仿射变量变换 $z \to \alpha z + \beta$ 化为首一中心多项式，其中 $\alpha \neq 0$。这一过程减少了参数数量，并简化了分类。系数 A_{n-1} 为零意味着多项式零点之和为零，这符合 Vi`ete 定理。从几何角度看，这意味着根的重心位于原点。

首一中心多项式集合在旋转 $z \to e^{i\theta} z$下封闭，这些旋转保持首项不变，并使 $A_{n-1} = 0$ 保持不变。此外，我们可以对无穷远极点进行规范化，并据此为分离曲线编定指标。系数 A_n 决定轨线趋近无穷远的速率。另一方面，当项 A_{n-1} 为零时，就能确保我们可以毫无歧义地为分离曲线编定指标。

我们将对次数为 3 的首一中心多项式系统可能出现的相图进行分类。

在 Poincar´e 圆盘上，首一三次多项式系统的相图由有限个典范区域刻画。这类区域分为三种:

(1) **中心型区域：** 平面有限部分的相图围绕一个中心组织。(2) **花瓣型区域：** 该区域包含唯一的有限平衡点，且区域内每条有限轨道的 α-极限集和 ω-极限集均为该点。(3) α–ω **区域：** 该区域包含两个平衡点，且每条有限轨道的 α-极限为其中一个点， ω-极限为另一个点。

定理 4.1. 给定一个次数为3的首一中心三次多项式系统，其在 *Poincar´e* 圆盘上的全局相图可分解为2、3或4 个典范区域。此外，只可能存在1 个或3 个中心型区域、1 个或 2 α–ω –型区域，以及2 个或4 个花瓣型区域。可能的构型如下:

(1) 三个中心型区域；*(2)* 一个中心型区域和一个 α–ω 区域；*(3)* 一个中心型区域和两个萼片型区域；*(4)* 四个萼片型区域；*(5)* 两个萼片型区域和一个 α–ω 区域；*(6)* 两个 α–ω 区域。

4.1. 定理 4.1的证明。 第一步是确定无穷远处的动力学。考虑 $\dot{z} = z^3 + A_1 z + A_0 = u + i\,v$，其中

$$u = p_3 + \big(a_1 p_1 - b_1 q_1\big) + a_0, \qquad v = q_3 + \big(b_1 p_1 + a_1 q_1\big) + b_0,$$

以及 $p_k = \Re(x + iy)^k$ 和 $q_k = \Im(x + iy)^k$。

所得平面系统为

$$\dot{x} = x^3 - 3xy^2 + \ldots, \qquad \dot{y} = 3x^2 y - y^3 + \ldots$$

为研究无穷远平衡点，我们使用庞加莱紧化。图表 U_1 中的庞加莱紧化表达式为

$$\dot{s} = w^3 \left(-s\, u\left(\frac{1}{w}, \frac{s}{w}\right) + v\left(\frac{s}{w}\right)\right), \qquad \dot{w} = -w^4 u\left(\frac{1}{w}, \frac{s}{w}\right).$$

U_2 中的表达式为

$$\dot{s} = w^3 \left(u\left(\frac{s}{w}, \frac{1}{w}\right) - s\, v\left(\frac{s}{w}, \frac{1}{w}\right)\right), \qquad \dot{w} = -w^4 v\left(\frac{s}{w}, \frac{1}{w}\right).$$

注意，在这些图表中，无穷远处的点 (s, w) 的坐标为 $(s,0)$。因此，对于图表 U_1，我们必须研究以下系统

$$\dot{s} = 2s(s^2 + 1), \qquad \dot{w} = 0.$$

注意， $s = 0$ 是上述系统的一个鞍点。对于其他图表，按照相同的步骤，我们也能找到一个鞍点。我们用 e_0、 e_1、 e_2 和 e_3 表示无穷远处的四个点。

确定相图的下一步是对平衡点进行分类。根据欧拉–雅可比公式，如果 z_1、 z_2 和 z_3 是 $p(z)$ 的简单零点，则有

$$\frac{1}{p'(z_1)} + \frac{1}{p'(z_2)} + \frac{1}{p'(z_3)} = 0.$$

由该公式可知，如果 $z' = p(z)$ 的两个平衡点是中心，那么第三个也必定是中心。类似地，如果两个平衡点是结点型，那么第三个也将是结点。另一个推论是，如果其中一个平衡点不是中心型，那么必然存在两个具有独立稳定性的平衡点。总之，三次多项式系统的平衡点可能具有以下配置：(a) 3个中心，(b) 3个节点，(c) 1个三重点，(d) 3个焦点，(e) 1个中心和1个双重点，(f) 1个结点和1个双重点，(g) 1个焦点和1个双重点，(h) 1个中心和2个焦点，(i) 1个结点和2个焦点，以及(j) 1个中心、1个结点和1个焦点。

下文中，我们用 S_{ij} 表示连接平衡点 e_i 和 e_j的分界线。此外，为了直观呈现相图，我们使用整流坐标。更具体地说，若 $\Phi(z)$ 是$\frac{1}{p(z)}$的原函数，则坐标变换 $w = \Phi(z)$ 满足$\dot{w} = \Phi'(z) \cdot \dot{z} = \frac{1}{p(z)} \cdot p(z) = 1$。

在下图中，左图表示庞加莱圆盘上的相图，右图则通过坐标变换 $w = \Phi(z)$展示其整直化，此时流变为水平直线。有限轨道对应于 w平面中的水平直线，其两端分别表示它们的 α 极限和 ω极限。特别地，根据具体构型，一条轨道可能在负时间从无穷远处出发，并在正时间经由分界线 S_{ij}返回无穷远处，也可能连接有限平衡点。

4.1.1. （*a*）*3*个中心。在 Poincar´e 圆盘中，相图由三个区域组成。其中一个区域由分离曲线 S_{10} 和弧段（e_0， e_1） $\subset S^1$围成，另一个区域由两条分离曲线 S_{10} 和 S_{32}围成，第三个区域由分离曲线 S_{32}和弧段（e_2， e_3） $\subset S^1$围成。呈现这一构型的多项式系统示例为 $\dot{z} = z^3 - iz$. 在此情况下，我们有三个中心型区域。相图见图4。

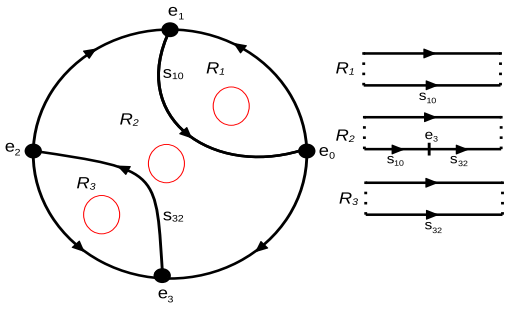

FIGURE 4. 左侧为 $\dot{z} = z^3 - iz$ 的庞加莱´圆盘中的相图；右侧为通过坐标变换 $w = \Phi(z)$ 对相图进行的整直化。

4.1.2. （*b*）*3*个结点。在 Poincar´e 圆盘中，相图由两个区域组成。其中一个区域由分离曲线 S_1 和 S_3 以及弧段（e_0，e_1）和（e_0，e_3）围成；另一个区域则是其补集。呈现这一构型的多项式系统示例为 $\dot{z} = z^3 - z$. 在此情况下，我们有两个 α–ω 区域。相图见图5。

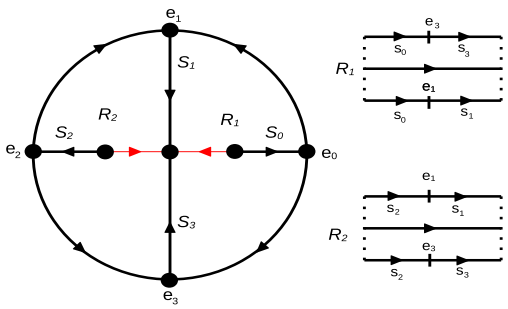

FIGURE 5. 左侧为 $\dot{z} = z^3 - z$ 的庞加莱´圆盘中的相图；右侧为通过坐标变换 $w = \Phi(z)$ 对相图进行的整直化。

4.1.3. (c) 1个三重点。</style}庞加莱圆盘中的相图由四个区域组成（每个象限都是一个区域）。呈现此配置的多项式系统示例如下：$\dot{z} = z^3$. 在这种情况下，我们有四个萼片型区域。相图如图6所示。

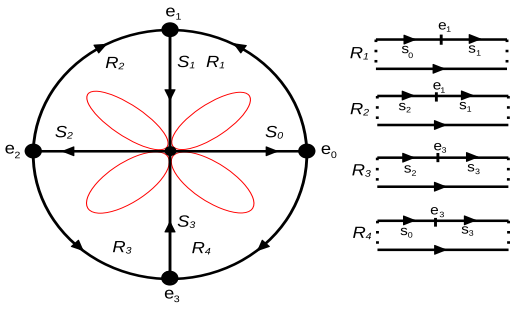

FIGURE 6. 左侧为 $\dot{z} = z^3$ 的庞加莱圆盘中的相图；右侧为通过坐标变换 $w = \Phi(z)$ 对相图进行的整直化。

4.1.4. (d) 1个吸引焦点和2个排斥焦点。</style}庞加莱圆盘中的相图由两个区域组成。这两个区域的公共边界是分离曲线S_1 和 S_3的并集。呈现此配置的多项式系统示例如下： $\dot{z} = z^3 +(4 + 6i)z + (4 - 12i)$。在这种情况下，我们有两个 α–ω 区域。相图如图7所示。

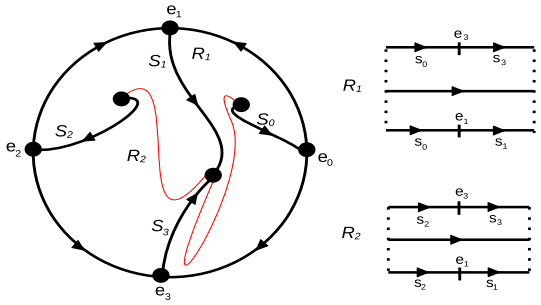

FIGURE 7. 左侧为 $\dot{z} = z^3 +(4 +6i)z+(4-12i)$ 的庞加莱圆盘中的相图；右侧为通过坐标变换 $w = \Phi(z)$ 对相图进行的整直化。

4.1.5. *(e) 1*个中心和*1*个双重点。 在庞加莱圆盘中，相图由三个区域组成。其中一个区域由分离曲线 S_1、 S_0 以及弧（e_0、 e_1）围成，另一个区域由分离曲线 S_{23} 以及弧（e_2、 e_3）围成，第三个区域则是其余部分。呈现这一构型的多项式系统示例为 $\dot{z} = z^3 - 3iz + \sqrt{2}(-1+i)$。在这种情况下，我们有一个中心型区域和两个鬃片型区域。相图示意于图8中。

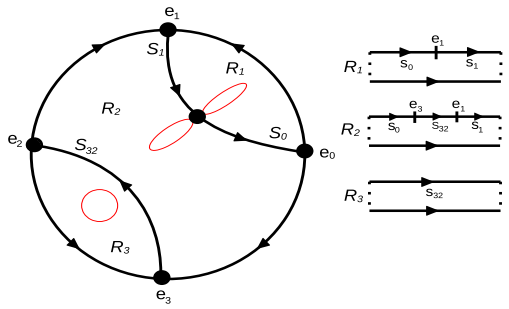

FIGURE 8. 左图为 $\dot{z} = z^3 - 3iz + \sqrt{2}(-1+i)$ 在庞加莱圆盘中的相图；右图为通过坐标变换 $w = \Phi(z)$ 对相图进行的整直化。

4.1.6. *(f) 1*个排斥结点和*1*个双重点。 在庞加莱圆盘中，相图由三个区域组成。其中一个区域由分离曲线 S_1、 S_0 以及弧（e_0、 e_1）围成，另一个区域由分离曲线 S_3、 S_0 以及弧和弧（e_0、 e_3）围成，第三个区域则是其余部分。呈现这一构型的多项式系统示例为 $\dot{z} = z^3 - 3z + 2$。在这种情况下，我们有两个萼片型区域和一个 α–ω区域。相图示意于图9中。

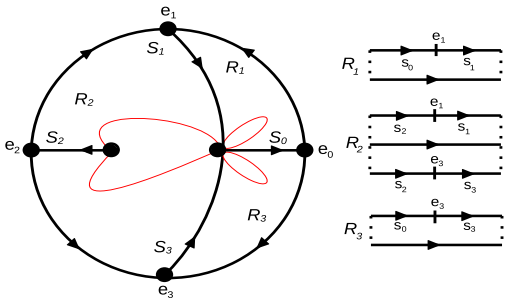

FIGURE 9. 左图为 $\dot{z} = z^3 - 3z + 2$ 在庞加莱圆盘中的相图；右图为通过坐标变换 $w = \Phi(z)$ 对相图进行的整直化。

4.1.7. *(g) 1*个吸引焦点和*1*个双重点。庞加莱圆盘中的相图由三个区域组成。一个区域由分离曲线 S_1、 S_0 以及弧（e_0， e_1）围成；另一个区域由分离曲线 S_1、 S_2 以及弧（e_2， e_1）围成；第三个区域则是其余部分。一个呈现此构型的多项式系统示例为$\dot{z} = z^3 + (9 - 12i)$ $z - 22 - 4i$。在这种情况下，我们有两个萼片型区域和一个 α–ω 区域。相图示意图见图10。

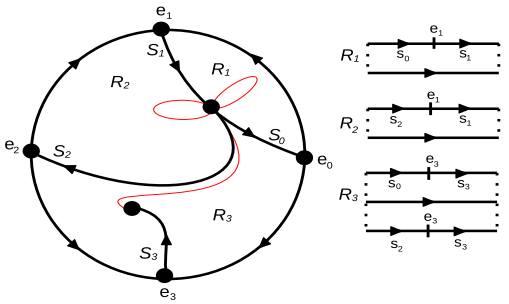

FIGURE 10. 左图为 $\dot{z} = z^3 + (9 - 12i)z - 22 - 4i$ 在庞加莱´圆盘中的相图；右图为通过坐标变换 $w = \Phi(z)$ 对相图进行的整直化。

4.1.8. *(h) 1*个中心、*1*个吸引焦点和*1*个排斥焦点。庞加莱圆盘中的相图由两个区域组成。其中一个区域由分离曲线 S_{10} 和弧（e_0， e_1）围成。另一个区域是圆盘中该区域的补集。一个呈现此构型的多项式系统示例为 $\dot{z} = z^3 + 3iz + (5 - 5i)$。在这种情况下，我们有一个中心型区域和一个 α–ω 区域。相图示意图见图11。

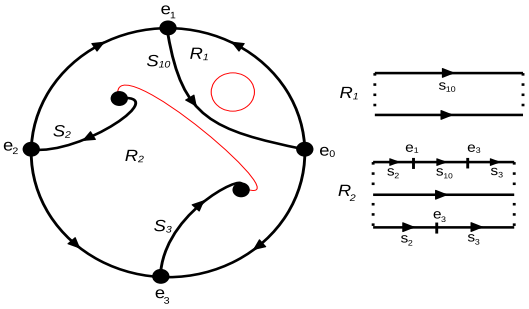

FIGURE 11. 左图为 $\dot{z} = z^3 + 3iz + (5 - 5i)$ 在庞加莱´圆盘中的相图；右图为通过坐标变换 $w = \Phi(z)$ 对相图进行的整直化。

4.1.9. *(i) 2*个吸引焦点和*1*个排斥结点。在 Poincar´e 圆盘中，相图由两个区域组成。一个区域由分离曲线 S_2、 S_0 以及弧（e_0， e_2）围成，另一个区域则是其补集。展示这一构型的多项式系统示例为 $\dot{z} = z^3 + \frac{z}{4} - \frac{5}{4}$。在这种情况下，我们有两个 α–ω 区域。相图绘于图12。

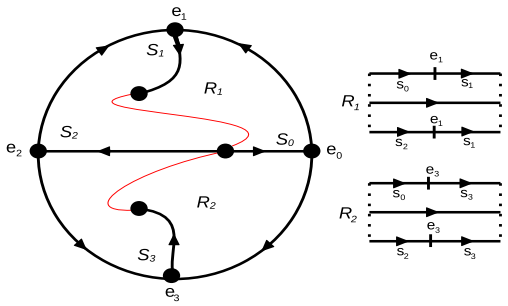

FIGURE 12. 左侧为 $\dot{z} = z^3 + \frac{z}{4} - \frac{5}{4}$ 在庞加莱´圆盘中的相图；右侧为通过坐标变换 $w = \Phi(z)$ 对相图进行的整直化。

4.1.10. *(j) 1*个中心、*1*个吸引焦点和*1*个排斥结点。在 Poincar´e 圆盘中，相图由两个区域组成。一个区域由分界线 S_{12} 和弧（e_2，e_1）围成，另一个区域则是其补集。展示这一构型的多项式系统示例为 $\dot{z} = z^3 + (-343/7500 + 1152/625i)z + (-1542592/1687500 - 1433619/1687500i)$。在这种情况下，我们有一个中心型区域和一个 α–ω 区域。相图绘于图13。

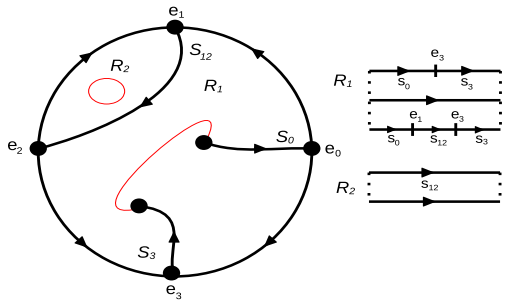

FIGURE 13. 左侧为 $\dot{z} = z^3 + (-343/7500 + 1152/625i)z + (-1542592/1687500 - 1433619/1687500i)$ 在庞加莱´圆盘中的相图；右侧为通过坐标变换 $w = \Phi(z)$ 对相图进行的整直化。

4.2. **伯努利方程**。考虑具有常系数的伯努利方程

$$z' + \alpha z = \beta z^n, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus 0, \quad n = 2, 3, \ldots.$$

和之前一样，$z = x + iy$，$T = t + is$，且初始条件为 $z(0) = z_0$。我们进行通常的变量变换 $w = z^{1-n}$，从而得到的方程为

$$w' + \alpha(1-n)w = (1-n)\beta, \quad w(0) = w_0 = z_0^{1-n}$$

其解由下式给出

$$w = \frac{\beta}{\alpha}\left(1 + (w_0 - 1)e^{-(1-n)\alpha T}\right).$$

在初始变量中，我们得到

$$z = \frac{\beta}{\alpha}\left(1 + (z_0^{1-n} - 1)e^{-(1-n)\alpha T}\right)^{\frac{1}{1-n}}.$$

命题 4.1。伯努利方程 $z' + \alpha z = \beta z^n$ 的实系统 (3)-$\Re$，其中$n = 2, 3, \ldots\ldots$，有 n 个平衡点 0，$z_1, \ldots\ldots, z_{n-1}$，其中 $z_k^{n-1} = \dfrac{\alpha}{\beta}$。此外，我们有

- 若 $\Re\alpha > 0$（分别为 < 0）且 $\Im\alpha = 0$，则 0 是吸引（分别为排斥）结点，而z_k、$k = 1$、……、$n-1$ 是排斥（分别为吸引）结点。
- 若 $\Re\alpha > 0$（分别为 < 0）且 $\Im\alpha \neq 0$，则 0 是吸引（分别为排斥）焦点，而z_k、$k = 1$、……、$n-1$ 是排斥（分别为吸引）焦点。
- 若 $\Re\alpha = 0$ 且 $\Im\alpha \neq 0$，则 0 是一个中心，z_k、$k = 2$、……、$n-1$ 也都是中心。

证明。平衡点是 $f(z) = -\alpha z + \beta z^n = 0$ 的解，即 $z = 0$ 和单位根 $z^{n-1} = \dfrac{\alpha}{\beta}$。由于 $f'(0) = -\alpha$ 且 $f'(z_k) = -\alpha + n\beta\dfrac{\alpha}{\beta} = (\overline{n} - 1)\alpha$，平衡点的分类仅取决于 α 的实部和虚部。□

现在考虑 $\beta = 1$ 的特殊情形，即伯努利系统是首一且中心化的。

命题 4.2。考虑伯努利方程

$$z' = z^n - \alpha z,$$

其中 $\alpha = a + bi$，且 a、$b \in \mathbb{R}$。该系统在庞加莱圆盘上的全局相图描述如下：

(a) 存在 n 个有限平衡点，其中一个是原点，其余 $n-1$ 个位于半径为 $|\alpha|^{\frac{1}{n-1}}$ 的圆上。若 $a > 0$，则原点是吸引子，其余平衡点是排斥子。若 $a < 0$，则原点是排斥子，其余平衡点是吸引子。若 $a = 0$，则所有有限平衡点都是中心。

(b) 存在$2(n-1)$个无穷远平衡点，记为 $e_0, e_1, \ldots, e_{2n-3}$，其角位置由下式给出

$$e_k = \frac{k\pi}{n-1}, \qquad k = 0, \ldots, 2n-3.$$

这些平衡点均为鞍型。

(c) 若 $a \neq 0$，则全局相图由 $n-1$ 个典范区域组成。当 $a > 0$ 时，每个区域均为 $\alpha\omega$–型，其中 α–极限位于平衡点 $z_1, \ldots, z_{n-1}$ 之一，而 ω–极限位于原点。当 $a < 0$ 时，情况相反：α–极限为原点，而 ω–极限位于平衡点 $z_1, \ldots, z_{n-1}$之一。每个区域的边界由连接有限平衡点与无穷远平衡点的分离曲线构成。若 $a = 0$，则全局相图由 n 个典范区域组成，它们均为中心型，边界由连接无穷远平衡点的分离曲线构成。

证明。(a) 的证明已在前一个命题中给出。对于 (b)，我们首先记

$$z^n - \alpha z = u(x, y) + i\, v(x, y), \qquad z = x + iy, \quad \alpha = a + bi.$$

等价地，

$$u(x, y) = \Re\big((x + iy)^n\big) - (ax - by), \qquad v(x, y) = \Im\big((x + iy)^n\big) - (ay + bx).$$

为研究无穷远平衡点，我们采用庞加莱紧化。图表 U_1 和 U_2 中的庞加莱紧化表达式为

$$(U_1)\quad s' = w^n\left(-su\left(\frac{1}{w},\frac{s}{w}\right)+v\left(\frac{1}{w},\frac{s}{w}\right)\right),\quad w' = -w^{n+1}u\left(\frac{1}{w},\frac{s}{w}\right)$$

and

$$(U_2)\quad s' = w^n\left(-sv\left(\frac{s}{w},\frac{1}{w}\right)+u\left(\frac{s}{w},\frac{1}{w}\right)\right),\quad w' = -w^{n+1}v\left(\frac{s}{w},\frac{1}{w}\right).$$

在图表 (U_1) 中进行计算（变量替换为 $x=\frac{1}{w}, y=\frac{s}{w}$，使得$z=\frac{1+is}{w}$），写作

$$(1+is)^n = A_n(s)+i\,B_n(s).$$

Then

$$u\big(\tfrac{1}{w},\tfrac{s}{w}\big)=\frac{A_n(s)}{w^n}-\frac{a-bs}{w},\qquad v\big(\tfrac{1}{w},\tfrac{s}{w}\big)=\frac{B_n(s)}{w^n}-\frac{as+b}{w}.$$

and

$$s' = -sA_n(s)+B_n(s)-b(s^2+1)w^{n-1},\qquad w' = -wA_n(s)+w^n\big(a-bs\big).$$

特别地，在边界 $w=0$ 上，我们得到

$$s' = -sA_n(s)+B_n(s),\qquad w' = 0.$$

作为参考，多项式 A_n，B_n 为

$$A_n(s)=\sum_{m=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2m}(-1)^m s^{2m}=1+\ldots,\quad B_n(s)=\sum_{m=0}^{\lfloor (n-1)/2\rfloor}\binom{n}{2m+1}(-1)^m s^{2m+1}=ns+\ldots.$$

该系统的平衡点为

$$p_k=\tan\left(\frac{k\pi}{n-1}\right).$$

若 n 为偶数，则有 $(n-1)$ 个平衡点；若 n 为奇数，则有 $(n-2)$ 个平衡点。通过在图表 (U_2) 中进行类似分析，我们得到 $n-2$ 个平衡点，由 $q_k=\cot\left(\frac{k\pi}{n-1}\right)$ 给出。结合图表 (U_1) 和 (U_2) 中的信息，我们得到 $2(n-1)$ 个无穷远平衡点，记为 e_0，e_1，……，e_{2n-3}，其中

$$e_k=\frac{k\pi}{n-1}, k=0,\ldots,2n-3.$$

要验证这些平衡点属于鞍型，只需计算雅可比矩阵的行列式，并检查其是否为负。在点 p_k 处，我们有

$$\det = -(n-1)\,(1+p_k^2)^{\,n-1},$$

这满足所需条件。此外，我们还可以验证，s' 在区间 $(p_k,\ p_{k+1})$ 内的符号交替变化：当 k 为偶数时为正，当 k 为奇数时为负。

关于典范区域的论述，源于我们对有限平衡点和无穷远平衡点所做的初步分析。以 $n=3$ 的情形为例，并取 $\alpha=1$以简化计算。在这种情形下，有限部分有三个平衡点（0、1 和 -1），无穷远处有四个平衡点。点 e_0 和 e_2 在角方向上排斥、在径向上吸引，而点 e_1和 e_3 在角方向上吸引、在径向上排斥。因此，分离曲线 S_1 和 S_3 的 ω极限必定是原点，即唯一的吸引平衡点。另一方面，分离曲线 S_0 和 S_2 的 α极限必定是某个排斥平衡点。唯一可能的构形如图14所示。图14和图15展示了 $n=3$的可能相图，其中第一幅对应于

情形 Re(α) > 0 ，第二幅对应于情形 Re(α) $= 0$。类似地，图16和图17展示了 $n = 4$的可能相图，其中第一幅对应于情形 Re(α) > 0 ，第二幅对应于情形 Re(α) $= 0$。□

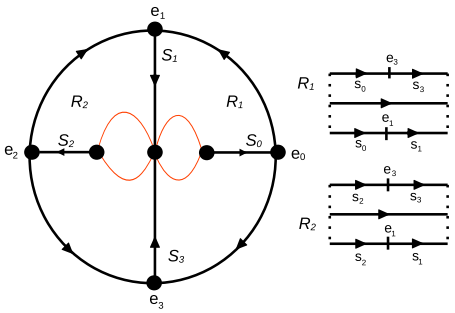

FIGURE 14. $\dot{z} = z^3 - z$ 的相图（左）及其通过 $w = \Phi(z)$ 得到的整直化图（右）。

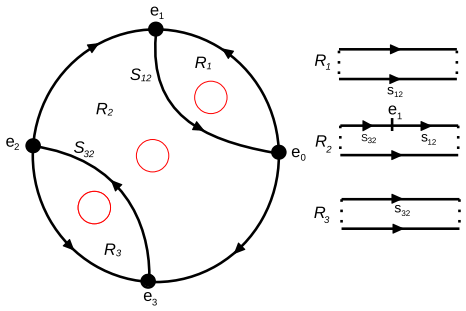

FIGURE 15. $\dot{z} = z^3 - iz$ 的相图（左）及其通过 $w = \Phi(z)$ 得到的整直化图（右）。

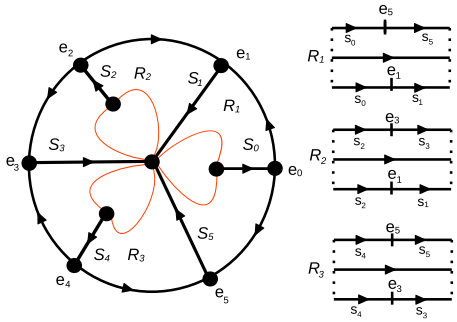

FIGURE 16. $\dot{z} = z^4 - z$ 的相图（左）及其通过 $w = \Phi(z)$ 得到的整直化图（右）。

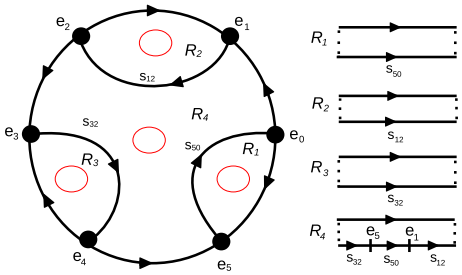

FIGURE 17. $\dot{z} = z^4 + iz$ 的相图（左）及其通过 $w = \Phi(z)$ 得到的整直化图（右）。

5. Bounds for limit cycles in a special class of piecewise smooth systems

全纯平面向量场相对于调和势是哈密顿系统，因此不可能存在极限环。当我们考虑分段全纯系统（PWHS）时，这一根本障碍便不复存在：切换流形上的全局解析性丧失，为孤立周期轨道的出现创造了条件。近期研究系统地探索了这一可能性，建立了分段多项式全纯系统中极限环数量的下界 [5, 7], ，给出了其存在性、稳定性和唯一性的条件，甚至展示了具有多达三个极限环的显式分段线性实例，相较于先前最多只能产生一个极限环的构造，这是显著的进展。

PWHS 的分析因其底层复结构而大为简化。全纯函数对应的标准形具有极坐标表示，其对称性与某些射线的不变性相结合，有助于显式构造首次返回映射。此外，对于形如 $\dot{z} = p(z)$、其中 p 为多项式的反全纯向量场，积分可得到多项式复势 $\Omega = \int p(z)dz$，其虚部构成一个多项式第一积分。这种代数性质使得不连续线两侧闭轨的匹配条件易于处理：问题因此化为求两个显式对称多项式的公共零点。

在本节中，我们将切换线固定为实轴

$$\Sigma = \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) = 0\},$$

并采用 Filippov 约定来定义 Σ 上的流（见 [3]）。

我们利用这一框架研究两个族，在这两个族中，多项式第一积分给出了特别紧的上界：

(1) 混合反全纯–全纯系统，其中一个半平面由一次多项式的共轭所支配，另一个则由线性全纯向量场所支配。平衡点的位置（位于切换线上或线外）会显著影响极限环的最大数量。

(2)分段反全纯多项式系统，其中两个半平面均由同一次数多项式的共轭所支配，因此都具有多项式第一积分。上界直接取决于多项式的次数。

本文的结果通过这一统一的代数方法给出上界，从而补充了前述文献，并界定了这些分段全纯模型可能具有的动力学复杂性。

5.1. **混合反全纯–全纯系统**。形如 $\dot{z} = p(z)$ 的系统，其中 $p(z)$ 是次数为 n的多项式，尤其值得研究。事实上，根据定理 2.3，其所有轨线都是代数的，因为 $\Omega = \int p(z)\,dz$ 是一个多项式势。因此，我们有 $\psi(x, y) = \Im(\Omega)$ 是一个多项式第一积分。

定理 5.1。考虑由下式定义的分段平面动力系统

$$z' = \begin{cases} \overline{p^+(z)}, & \text{if } \Im(z) > 0, \\ p^-(z), & \text{if } \Im(z) < 0, \end{cases}$$

其中 $z \in \mathbb{C}$，且

$$p^+(z) = (a_1 + ia_2)z + (b_1 + ib_2), \quad p^-(z) = (a + ib)(z - x_0),$$

and $a_1, a_2, b_1, b_2, a, b, x_0 \in \mathbb{R}$, $a_2 \neq 0$, $b \neq 0$。则，该系统至多有一个极限环 $le.$

此外，该上界是紧的。如果这样的极限环存在且 $a \neq 0$，那么它是双曲的，其稳定性完全由 a 的符号决定：当 $a < 0$ 时它是稳定的，当 $a > 0$时它是不稳定的。

证明。进行平移 $w = z - x_0$；由于 $x_0 \in \mathbb{R}$，这是一种实水平平移。随后$\Im(w) = \Im(z)$，因此切换线仍为实轴。

在新变量中，系统变为

$$w' = \begin{cases} \overline{p^+(w + x_0)}, & \text{if } \Im(w) > 0, \\ (a + ib)w, & \text{if } \Im(w) < 0. \end{cases}$$

下半平面系统为 $\dot{w} = (a + ib)w$。上半平面系统可写为

$$\dot{w} = \overline{(a_1 + ia_2)w + (\tilde{b}_1 + i\tilde{b}_2)},$$

wher ˜ ˜e $b_1 = a_1x_0 + b_1$, $b_2 = a_2x_0 + b_2$. 对于上半平面，定义复势 l

$$\Omega^+(w) = \frac{A^+w^2}{2} + B^+w, \quad A^+ = a_1 + ia_2, \quad B^+ = \tilde{b}_1 + i\tilde{b}_2.$$

其虚部

$$\psi^+(x, y) = \Im\Omega^+(w) = \tilde{b}_2x + \tilde{b}_1y + \frac{a_2}{2}x^2 + a_1xy - \frac{a_2}{2}y^2, \quad w = x + iy,$$

是该流的第一积分。因此，任何在（x_1,0）和（x_2,0）处穿过实轴的轨迹都满足 ψ^+（x_1,0） $= \psi^+$（x_2,0），由此得到

$$(x_1 - x_2)\left(\tilde{b}_2 + \frac{a_2}{2}(x_1 + x_2)\right) = 0.$$

由于 $x_1 \neq x_2$ 对于非平凡穿越成立，我们得到

$$x_2 = -x_1 - \frac{2\tilde{b}_2}{a_2}. \tag{4}$$

在下半平面中，令 $w = re^{i\theta}$，系统变为 $\dot{r} = ar$， $\dot{\theta} = b$，并具有第一积分 H^-（r， θ） $= b\ln r - a\theta$.

设 x_1 和 x_2 是闭轨与实轴的交点。由于当 $x > 0$时$r = |x|$ 和 $\theta = 0$，当 $x < 0$时 $\theta = \pi$，由 H^-守恒可得

$$b\ln\left|\frac{x_2}{x_1}\right| = a(\theta_2 - \theta_1).$$

如果 x_1 和 x_2 同号，那么 $\theta_1 = \theta_2$ 和 $|x_1| = |x_2|$，这意味着 $x_1 = x_2$，与极限环的存在相矛盾。

如果 x_1 和 x_2 异号，不妨设 $x_1 > 0$， $x_2 < 0$，因此 $\theta_1 = 0$， $\theta_2 = \pi$，且 $\ln(-x_2/x_1) = a\pi/b$.

结合式（4），我们得到 $x_1 = 2\tilde{b}_2/a_2\left(e^{a\pi/b} - 1\right)$， 它唯一确定了交点。因此，该系统至多有一个极限环。由于平移 $w = z - c$是一个微分同胚，原系统也有相同结论。这个上界是紧的，如例8所示。

现在，假设极限环存在，并令 Π: $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ 为定义在正实轴上的庞加莱回归映射。该映射分解为 $\Pi = F_L \circ F_U$，其中 F_U对应于穿过上半平面的转移， F_L 对应于穿过下半平面的转移。

令 $x_1^* > 0$ 和 $x_2^* < 0$ 表示极限环与实轴的交点，使得 $x_2^* = F_U(x_1^*)$ $x_1^* = \Pi(x_1^*)$。由 (4) 得， $F_U(x_1) = -x_1 - \frac{2b_2}{a_2}$且 $F_U'(x_1^*) = -1$. —

在下半平面中，显式流为 $r(t) = r_0e^{at}$， $\theta(t) = \theta_0 + bt$。从 ($x_2^*$,0) 出发，取 $x_2^* < 0$，则有 $r(0) = -x_2^*$ 和 $\theta(0) = \pi$。轨迹在首个正时间 $T = \pi/|b|$返回正实轴。

在时间 T,

$$F_L(x_2^*) = (-x_2^*)e^{a\pi/|b|}, \qquad F_L'(x_2^*) = -e^{a\pi/|b|}.$$

因此，庞加莱映射在不动点 x_1^* 处的导数为

$$\Pi'(x_1^*) = F_L'(x_2^*)\,F_U'(x_1^*) = e^{a\pi/|b|}.$$

由于 $|\Pi'(x_1^*)| \neq 1$ 对于 $a \neq 0$，该极限环是双曲的。此外，当 $a < 0$时它是稳定的，而当 $a > 0$时它是不稳定的。□

前述结果（定理 5.1）讨论的是下部系统的平衡点位于切换线上的情形，即 $z_0 = x_0 \in \mathbb{R}$。这一限制使下部流关于实中心呈旋转对称，从而得到特别简单的第一积分，并能完整刻画该极限环。

相比之下，下一个定理讨论一般情形，其中下部向量场的平衡点 $z_0 = x_0 + iy_0$是复平面上的任意一点。现在， z_0 不再受限于切换线上，可以位于下半平面中的任意位置（甚至可以位于上半平面中，尽管 $\Im(z) < 0$ 中的动力学仍由 $p^-(z)$控制）。这种几何自由度打破了下部流的旋转对称性，使两个半平面之间的匹配条件变得更加复杂。因此，极限环数量的上界增大了；稳定性分析虽然仍然可行，但复杂得多。

T下一个定理给出了这一一般构型的最优上界。

定理 5.2。 考虑由以下条件定义的分段平面动力系统：

$$z' = \begin{cases} \overline{p^+(z)}, & \text{if } \Im(z) > 0, \\ p^-(z), & \text{if } \Im(z) < 0, \end{cases}$$

其中 $z = x + iy \in \mathbb{C}$，且

$$p^+(z) = (a_1 + ia_2)z + (b_1 + ib_2), \quad p^-(z) = (a + ib)(z - z_0),$$

并且 $a_1, a_2, b_1, b_2, a, b \in \mathbb{R}$, $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$, $a_2 \neq 0$, $b \neq 0$。那么，该系统至多有三个极限环。

证明。 我们分别讨论情形 $y_0 = 0$ 和 $y_0 \neq 0$。

情形 1： $y_0 = 0$ **（实中心）**。 于是 $z_0 = x_0$ 为实数，下半平面系统为$\dot{z} = (a + ib)(z - x_0)$。定理 5.1 已分析过这种情形，并证明至多存在一个极限环。

情形 2： $y_0 \neq 0$ **（复中心）**。 极限环必须与实轴交于两个不同的点 $z_1 = x_1$ 和 $z_2 = x_2$，且 $x_1 \neq x_2$。

上半平面。 上半平面系统是哈密顿系统，其哈密顿量为

$$\psi^+(x, y) = \Im\Big(\frac{(a_1 + ia_2)z^2}{2} + (b_1 + ib_2)z\Big) = b_2 x + b_1 y + \frac{a_2}{2}x^2 + a_1 xy - \frac{a_2}{2}y^2.$$

沿上部弧段 ψ^+ 守恒，故有

$$\psi^+(x_1, 0) = \psi^+(x_2, 0) \Longrightarrow b_2 + \frac{a_2}{2}(x_1 + x_2) = 0,$$

因此

$$x_2 = -x_1 - \frac{2b_2}{a_2}. \tag{5}$$

定义 $L(x) = -x - 2b_2/a_2$，那么 $x_2 = L(x_1)$。

下半平面。 写出 $w = z - z_0 = re^{i\theta}$。该系统变为 $\dot{r} = ar, \quad \dot{\theta} = b$，它具有第一积分

$$H(r, \theta) = b \ln r - a\theta. \tag{6}$$

在实轴上， $w_j = x_j - x_0 - iy_0\,(j = 1, 2)$。因此

$$r_j = \sqrt{(x_j - x_0)^2 + y_0^2}, \qquad \theta_j = \arg(x_j - x_0 - iy_0).$$

为以连续方式处理辐角，我们采用双参数反正切 atan2$(y,\ x)$，其定义为

$$\operatorname{atan2}(y,x)=\begin{cases}\arctan(y/x) & \text{if } x>0,\\ \arctan(y/x)+\pi & \text{if } x<0,\ y\ge 0,\\ \arctan(y/x)-\pi & \text{if } x<0,\ y<0,\\ \pi/2 & \text{if } x=0,\ y>0,\\ -\pi/2 & \text{if } x=0,\ y<0,\end{cases}$$

它返回 $(-\pi,\pi]$ 中的角度。令

$$\Theta(x)=\operatorname{atan2}(-y_0,\,x-x_0).$$

对于固定的 $y_0\neq 0$，Θ 是一个 C^∞ 函数，并满足

$$\Theta'(x)=\frac{y_0}{(x-x_0)^2+y_0^2}. \tag{7}$$

沿下弧的 H 守恒关系给出 $b\ln(r_2/r_1)=a(\theta_2-\theta_1),$，即

$$b\ln\frac{\sqrt{(x_2-x_0)^2+y_0^2}}{\sqrt{(x_1-x_0)^2+y_0^2}}=a\big[\Theta(x_2)-\Theta(x_1)\big]. \tag{8}$$

引入 $R(x)=\sqrt{(x-x_0)^2+y_0^2}$。利用 (5)，方程 (8) 变为

$$b\ln\frac{R(L(x))}{R(x)}=a\big[\Theta(L(x))-\Theta(x)\big]. \tag{9}$$

定义

$$F(x)=b\ln\frac{R(L(x))}{R(x)}-a\big[\Theta(L(x))-\Theta(x)\big].$$

的导数 F。由（7），$L'(x)=-1$、$R(x)R'(x)=x-x_0$ 以及 $R(L(x))R'(L(x))=L(x)-x_0$，我们得到

$$\begin{aligned}F'(x)&=b\left[\frac{L(x)-x_0}{R(L(x))^2}L'(x)-\frac{x-x_0}{R(x)^2}\right]-a[\Theta'(L(x))L'(x)-\Theta'(x)]\\&=-b\left[\frac{L(x)-x_0}{R(L(x))^2}+\frac{x-x_0}{R(x)^2}\right]+ay_0\left[\frac{1}{R(L(x))^2}+\frac{1}{R(x)^2}\right].\end{aligned} \tag{10}$$

设 $u=x-x_0$、$v=L(x)-x_0=-u-C$、$C=2x_0+\frac{2b_2}{a_2}$。将（10）乘以 $D(x)=(u^2+y_0^2)(v^2+y_0^2)$，得到

$$F'(x)D(x)=(2ay_0-bC)u^2+(2ay_0C-bC^2)u+(ay_0C^2+2ay_0^3+bCy_0^2). \tag{11}$$

方程（11）表明，方程 $F'(x)=0$ 等价于关于 u 的二次多项式，因此至多有两个实解。设 m 为 F 的不同实零点数。若 $m\ge 4$，则根据罗尔定理，F' 至少有三个不同的实零点，这与 F' 至多有两个实零点的事实相矛盾。因此，$m\le 3$。

F 的每个实零点都对应一个对称点对 $(x_1,x_2=L(x_1))$，它满足闭轨的匹配条件，因此对应于系统的一个极限环。因此，该系统至多具有三个极限环。

综合这两种情况（$y_0=0$ 和 $y_0\neq 0$），我们得出结论：该分段系统至多有三个极限环。□

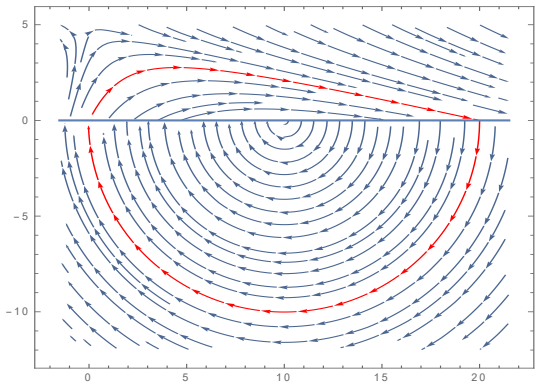

FIGURE 18. 分段全纯系统的相图，其中上半平面由一个反全纯多项式支配。

例8. 例如，我们考虑如下形式的分段全纯系统

$$\dot{z} = \overline{p(z)}, \quad \text{if} \quad \Im(z) > 0; \qquad \dot{z} = -i(z-\beta) \quad \text{if} \quad \Im(z) < 0$$

其中 $p(z) = (a+bi)(z-ci)$ a，b，c，$\beta \in \mathbb{R}$，$c > 0$. 根据上文的讨论，$\Omega = \frac{(a+bi)(z-ci)^2}{2}$，是系统在 $\{\Im z > 0\}$ 上的复势。因此，一个（多项式）第一积分为 $\psi(x, y) = \Im\Omega = -acx + bcy + axy + \frac{b}{2}(x^2 - y^2) - \frac{bc^2}{2}$. 由于第一积分只确定到一个加法常数，我们也可以等价地取 $\psi(x, y) = -acx + bcy + axy + \frac{b}{2}(x^2 - y^2)$. 注意，$z_0 = ci$ 是 $\dot{z} = p(z)$ 的一个平衡点。这个平衡点是一个鞍点。事实上，将系统写成实平面坐标形式，我们得到

$$x' = ax - by + bc, \quad y' = -bx - ay + ac,$$

其特征多项式为 $\lambda^2 - a^2 - b^2 = 0$. 因此，存在两个符号相反的特征值。不变方向是两条直线 $y = kx + c$，其中 $k = \frac{a \pm \sqrt{a^2+b^2}}{b}$. 举例来说，考虑 $b = 1$、$a = 2$、$c = 5$ 和 $\beta = 10$。此时我们有 $\psi(x, y) = -10x + 5y + 2xy + \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}$. 等值集 0 与 x 轴相交于两点：(0，0) 和 (20，0)。在下半平面中，相图呈中心型。由于该中心恰好是连接 $x = 0$ 和 $x = 20$ 的线段的中点，因此存在一条轨道位于 $y < 0$ 中并连接这两点。由此，我们得到分段光滑系统的一个极限环，它经过等值集 $\psi = 0$，见图18。

5.2. 反全纯多项式系统。 现在我们将关注一类一般系统，其中上半平面和下半平面均由次数相同的任意反全纯多项式控制。我们的目标是理解这些函数的次数如何影响该系统可能呈现的极限环数量。

现在我们考虑以下分段反全纯多项式系统

$$\begin{cases} \dot{z} = \overline{p^+(z)}, & \Im(z) > 0, \\ \dot{z} = \overline{p^-(z)}, & \Im(z) < 0, \end{cases} \tag{12}$$

其中 $z = x + iy$ 和 $p^{\pm}$ 是复多项式。

现在，我们给出一个一般性结果，根据多项式的次数对极限环的数量进行上界估计。

定理 5.3。 对于由(12)给出的分段反全纯多项式系统，极限环数量满足以下上界:

(1) 若 $p^+(z)$ 和 $p^-(z)$ 是一次多项式，则该系统没有极限环。*(2)* 若 $p^+(z)$ 和 $p^-(z)$ 是二次多项式，则该系统至多有一个极限环。*(3)* 若 $p^+(z)$ 和 $p^-(z)$ 是三次多项式，则该系统至多有三个极限环。

这一结果的证明通过一系列命题展开，每个命题都处理一个特定的次数情形。

命题 5.1。 考虑由 (12) 给出的分段反全纯多项式系统。若$p^\pm$ 是一次反全纯函数，则由 (12) 描述的系统没有极限环。

证明。 假设 $p^\pm(z) = A^\pm z + B^\pm = u^\pm + iv^\pm$，其中 $A^\pm = a_1^\pm + ia_2^\pm$，$B^\pm = b_1^\pm + ib_2^\pm \in \mathbb{C}$.现在，我们知道

$$\Omega^\pm(z) = \frac{A^\pm z^2}{2} + B^\pm z$$

分别是系统在 $\{\Im(z) > 0\}$ 和 $\{\Im(z) < 0\}$ 上的复势。因此，一个第一积分为

$$\psi^\pm(x,y) = \Im\Omega^\pm(z) = b_2^\pm x + b_1^\pm y + \frac{a_2^\pm}{2}x^2 + a_1^\pm xy - \frac{a_2^\pm y^2}{2},$$

并注意到 $\partial\psi^\pm/\partial y = u^\pm$ 和 $\partial\psi^\pm/\partial x = v^\pm$，因此 $\dot{x} = u^\pm, \dot{y} = -v^\pm$ 是哈密顿系统。现在，定义

$$c^\pm(x_1,x_2) = \frac{\psi^\pm(x_1,0) - \psi^\pm(x_2,0)}{x_1 - x_2} = \frac{2b_2^\pm + a_2^\pm(x_1+x_2)}{2},$$

对于 $x_1 \neq x_2.$，回顾在 $(x_1,\ x_2)-$ 平面中，$c^\pm(x_1,\ x_2) = 0$ 隐式定义了 $\Sigma^\pm$ 中的半返映射。已知 $c^\pm(x_1,\ x_2) = 0$ 得到表达式 $x_1 = \frac{-2b_2^\pm - a_2^\pm x_2}{a_2^\pm}$，我们观察到这表示一组平行直线。因此，由 $c^+(x_1,\ x_2) = c^-(x_1,\ x_2) = 0$ 定义的系统，对于变量 x_1 和 x_2，可能无解，也可能有无穷多个解。在这两种情况下，分段反全纯多项式系统都不可能存在极限环。

□

命题 5.2。 考虑由(12)给出的分段反全纯多项式系统。若$p^\pm$ 是二次反全纯函数，则(12)所描述的系统至多有一个极限环。

证明。 设 $p^\pm(z) = A^\pm z^2 + B^\pm z + C^\pm = u^\pm + iv^\pm$ $A^\pm = a_1^\pm + ia_2^\pm$ $B^\pm = (\ )$，其中，，现在，我们知道 $b_1^\pm + ib_2^\pm$ $C^\pm = c_1^\pm + ic_2^\pm \in \mathbb{C}.$

$$\Omega^\pm(z) = \frac{A^\pm z^3}{3} + \frac{B^\pm z^2}{2} + C^\pm z$$

分别是系统在 $\{\Im(z) > 0\}$ 和 $\{\Im(z) < 0\}$上的复势。因此，一个第一积分为

$$\psi^\pm(x,y) = \Im\Omega^\pm(z) = c_2^\pm x + \frac{b_2^\pm x^2}{2} + \frac{a_2^\pm x^3}{3} + c_1^\pm y + b_1^\pm xy + a_1^\pm x^2 y - \frac{b_2^\pm y^2}{2} - a_2^\pm xy^2 - \frac{a_1^\pm y^3}{3},$$

并注意到 $\partial\psi^\pm/\partial y = u^\pm$ 和 $\partial\psi^\pm/\partial x = v^\pm$，因此 $\dot{x} = u^\pm, \dot{y} = -v^\pm$ 是哈密顿系统。现在，定义

$$c^\pm(x_1,x_2) = \frac{\psi^\pm(x_1,0) - \psi^\pm(x_2,0)}{x_1 - x_2} = c_2^\pm + \frac{b_2^\pm}{2}(x_1+x_2) + \frac{a_2^\pm}{3}(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2),$$

对于 $x_1 \neq x_2$. 回想一下，多项式 $c(x_1, x_2)$ 是对称的，因此 (x_1^0, x_2^0) 是$c^{\pm}(x_1, x_2) = 0$的一个解，当且仅当 (x_2^0, x_1^0) 也是一个解。因此，这两个解都对应同一个势极限环。此外，我们知道，如果 (x_1^0, x_2^0) 满足 $c^+(x_1^0, x_2^0) = c^-(x_1^0, x_2^0) = 0$，那么 x_1^0 必定是关于变量 x_2，由 c^- 和 c^+ 构成的结式多项式 $R(x_1)$ 的根。类似地， x_2^0 必定是关于 x_1，由c^- 和 c^+ 构成的结式多项式 $S(x_2)$ 的根。此外，很容易看出 $R(x_1) = S(x_1)$。因此，

$$\begin{aligned} R(x_1) = \frac{1}{1296}\Big(& -108a_2^+b_2^-b_2^+c_2^- + 108a_2^-(b_2^+)^2c_2^- + 144(a_2^+)^2(c_2^-)^2 + 108a_2^+(b_2^-)^2c_2^+ \\ & - 108a_2^-b_2^-b_2^+c_2^+ - 288a_2^-a_2^+c_2^-c_2^+ + 144(a_2^-)^2(c_2^+)^2 + 72(a_2^+)^2b_2^-c_2^-x_1 \\ & - 72a_2^-a_2^+b_2^+c_2^-x_1 - 72a_2^-a_2^+b_2^-c_2^+x_1 + 72(a_2^-)^2b_2^+c_2^+x_1 + 36(a_2^+)^2(b_2^-)^2x_1^2 \\ & - 72a_2^-a_2^+b_2^-b_2^+x_1^2 + 36(a_2^-)^2(b_2^+)^2x_1^2\Big). \end{aligned}$$

因此，我们得出结论： $R(x_1)$ 至多有 2 个实根。由于对称性，我们可以得出结论：分段反全纯多项式系统 (12) 至多有一个极限环。

□

命题 5.3. 考虑由 (12) 给出的分段反全纯多项式系统。若$p^{\pm}$ 为三次反全纯函数，则由 (12) 描述的系统至多有三个极限环。

证明。 假设 $p^{\pm}(z) = A^{\pm}z^3 + B^{\pm}z^2 + C^{\pm}z + D^{\pm} = u^{\pm} + iv^{\pm}$ $A^{\pm} = a_1^{\pm} + ia_2^{\pm}$ $B^{\pm} = (\,)$,其中 ,,现在，我们知道 $b_1^{\pm} + ib_2^{\pm}$ $C^{\pm} = c_1^{\pm} + ic_2^{\pm} \in \mathbb{C}$.

$$\Omega^{\pm}(z) = \frac{A^{\pm}z^4}{4} + \frac{B^{\pm}z^3}{3} + \frac{C^{\pm}z^2}{2} + D^{\pm}z$$

分别是系统在 $\{\Im(z) > 0\}$ 和 $\{\Im(z) < 0\}$ 上的复势。因此，一个第一积分为

$$\begin{aligned} \psi^{\pm}(x, y) = \Im\Omega^{\pm}(z) = d_2x + \frac{c_2^{\pm}x^2}{2} + \frac{b_2^{\pm}x^3}{3} + \frac{a_2^{\pm}x^4}{4} + d_1^{\pm}y + c_1^{\pm}xy + b_1^{\pm}x^2y + a_1^{\pm}x^3y \\ - \frac{c_2^{\pm}y^2}{2} - b_2^{\pm}xy^2 - \frac{3}{2}a_2^{\pm}x^2y^2 - \frac{b_1^{\pm}y^3}{3} - a_1^{\pm}xy^3 + \frac{a_2^{\pm}y^4}{4} \end{aligned}$$

并注意到 $\partial\psi^{\pm}/\partial y = u^{\pm}$ 和 $\partial\psi^{\pm}/\partial x = v^{\pm}$，因此 $\dot{x} = u^{\pm}, \dot{y} = -v^{\pm}$ 是哈密顿系统。现在，定义

$$c^{\pm}(x_1, x_2) = d_2^{\pm} + \frac{c_2^{\pm}}{2}(x_1 + x_2) + \frac{b_2^{\pm}}{3}(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) + \frac{a_2^{\pm}}{4}(x_1^3 + x_1^2x_2 + x_1x_2^2 + x_2^3),$$

对于 $x_1 \neq x_2$. ，回顾一下，多项式 $c(x_1, x_2)$ 是对称的，因此 (x_1^0, x_2^0) 是 $c^{\pm}(x_1, x_2) = 0$ 的一个解，当且仅当 (x_2^0, x_1^0) 也是一个解。因此，这两个解对应同一个势极限环。此外，我们知道，如果 (x_1^0, x_2^0) 满足 $c^+(x_1^0, x_2^0) = c^-(x_1^0, x_2^0) = 0$，那么 x_1^0 必须是关于变量 x_2 的 c^- 和 c^+ 的结式多项式 $R(x_1)$ 的一个根。类似地， x_2^0 必须是关于 x_1 的 c^- 和 c^+ 的结式多项式 $S(x_2)$ 的一个根。此外，很容易看出 $R(x_1) = S(x_1)$。因此，

$$R(x_1) = \frac{1}{2985984}\sum_{i=0}^{6}\beta_i x^i,$$

其中 $\beta_i \in \mathbb{R}$，对所有 $i \in \{1, \ldots, 6\}$ 均成立。系数 β_i 的显式表达式过于冗长，因此这里省略。由此可得， $R(x_1)$ 至多有 6 个实根。由于

对称性，我们可以得出，分段反全纯多项式系统 (12) 至多有三个极限环。□

现在，我们用一个具体的分段反全纯多项式系统示例来说明命题 5.2。

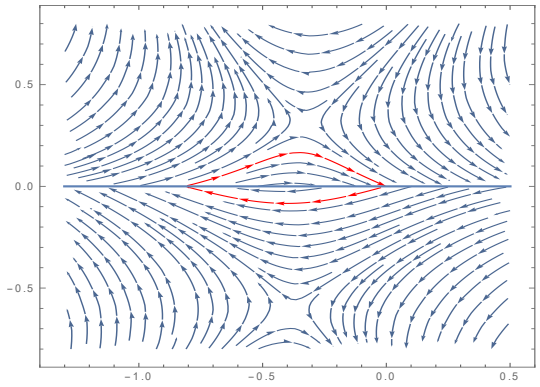

FIGURE 19. 例 9 中所述分段反全纯多项式系统的相图。图中展示了通过解析方法得到的唯一极限环。

E例 9. 考虑分段反全纯多项式系统(5.3)，其定义为 y

$$p^-(z) = (-3+i)-(1-i)z+\left(-4+\frac{i(-1+\sqrt{33})}{-19+3\sqrt{33}}\right)z^2, \qquad p^+(z) = \frac{1}{2}\Big((2+i)+(4+3i)z+(6+i)z^2\Big).$$

该系统的复势在 $\{\Im(z) > 0\}$ 和 $\{\Im(z) < 0\}$ 上分别为

$$\Omega^+(z) = \frac{1}{2}(2+i)z + \frac{1}{4}(4+3i)z^2 + \frac{1}{6}(6+i)z^3,$$
$$\Omega^-(z) = (-3+i)\,z - \left(\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\right)z^2 + \frac{1}{3}\left(-4+\frac{i(-1+\sqrt{33})}{-19+3\sqrt{33}}\right)z^3.$$

因此，我们可以显式计算每个半平面内对应的第一积分。这些函数为

$$\varphi^+(x,y) = \frac{x^3}{6} + y - \frac{3y^2}{4} - y^3 + \frac{3}{4}x^2(1+4y) - \frac{1}{2}x(-1-4y+y^2),$$
$$\varphi^-(x,y) = x + \frac{(-1+\sqrt{33})x^3}{-57+9\sqrt{33}} + x^2\left(\frac{1}{2}-4y\right) - xy - \frac{(-1+\sqrt{33})xy^2}{-19+3\sqrt{33}} + \frac{1}{6}y(-18-3y+8y^2).$$

这些第一积分使我们能够分析相图并验证极限环的存在性。在这个特定示例中，我们有

$$c^+(x_1,x_2) = \frac{1}{12}\left(6+2x_1^2+9x_2+2x_2^2+x_1(9+2x_2)\right),$$
$$c^-(x_1,x_2) = 1 + \frac{x_1+x_2}{2} + \frac{(-1+\sqrt{33})(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)}{-57+9\sqrt{33}}.$$

关于 x_2 计算 $c^+(x_1,x_2)$ 和 $c^-(x_1,x_2)$ 的结果式，我们得到

$$R(x_1)=\frac{20736x_1-2304\sqrt{33}\,x_1+9216x_1^2}{5184(-19+3\sqrt{33})^2}.$$

该多项式的实根为 $x_1=0$, $x_1=\frac{1}{4}$ （$-9+\sqrt{33}$）。因此，该系统存在唯一的极限环，见图 *19*。

6. Application: principal lines on immersed surfaces with constant mean curvature

由调和函数的等值曲线定义的叶状结构，其研究与微分几何中曲面的经典理论有着自然的联系。特别是，具有常平均曲率的浸入曲面（常平均曲率曲面）的主曲率线提供了丰富的几何背景，其中复势自然地出现。

设 $M\subset\mathbb{R}^3$ 是由映射 $\alpha:U\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$浸入的光滑定向曲面。在每一点 $p\in M$处，算子 $S\colon T_pM\to T_pM$由 $S(v)=-D_vN$定义，其中 N是高斯映射。 S 的特征值是主曲率 k_1, k_2，相应的特征方向在曲面上定义了两个正交线场。这些线场的积分曲线称为主曲率线。

浸入的平均曲率定义为

$$H=\frac{k_1+k_2}{2}.$$

点 $p\in M$ 称为脐点，若 $k_1(p)=k_2(p)$。在脐点处，所有方向都是主方向。在脐点之外，主线场是光滑的，并构成 M的两族正交叶状结构。

若曲面的局部参数化 $\alpha(u,v)$的第一基本形式具有如下形式，则称其采用等温坐标

$$I=E(u,v)(du^2+dv^2).$$

引入复坐标 $z=u+iv$。第二基本形式为

$$II=\Re\big(Q(z)dz^2\big)+H\,I.$$

设 $p\in M$ 是浸入 $\alpha:U\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$的一个脐点。在脐点之外，主曲率方向在 M上定义了两个彼此正交且光滑的线场。若 p是一个孤立脐点，则 p 的指标 定义为主方向线场绕 p 的绕数。等价地，若 $\theta(s)$表示沿着 p周围一条小闭曲线上的主方向角的连续取值，则 p的指标为

$$\mathrm{Ind}(p)=\frac{1}{2\pi}\big(\theta(1)-\theta(0)\big).$$

由此可知，孤立脐点的指标总是负半整数，也就是说，对于某个 $n\in\mathbb{N}$，$\mathrm{Ind}(p)=-\frac{n}{2}$。

一项基本结果表明， $Q(z)$ 的实部和虚部的等值集所描述的叶状结构，在脐点之外与主曲率线重合。

定理 6.1. 设 $p\in M$ 是光滑浸入 $\alpha:U\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$的一个孤立脐点，且该浸入具有常平均曲率 H。则在p附近存在局部等温坐标 (u,v)，其中 $z=u+iv$，使得相应的全纯函数 Q 具有如下形式

$$Q(z)=z^n,$$

其中 $n \geq 1$为某个整数。此外，脐点指标与 n 的关系为

$$\mathrm{Ind}(p) = -\tfrac{n}{2}.$$

关于该定理的证明，参见 [9]。

因此，CMC浸入的孤立脐点周围主曲率线的局部行为
浸 入完全由单项式全纯函数 Q决定。

7. Acknowledgements

Gabriel Rond´on 部分获得 FAPESP 项目 2024/15612-6 的资助。Paulo R. da Silva 部分获得 ANR-23-CE40-0028、FAPESP 项目 2023/02959-5、FAPESP 项目 2024/15612-6 以及 CNPq 项目 302154/2022-1 的资助。

References

[1] Brickman, L. 和 Thomas, E. S.（ 1977 *J. Differential Equations*）。解析 **25** 3 310 324
流的保角等价，（），–。[2] Conway, J. B.（1978）。 *Functions of One Complex Variable I*，第2版，Springer，纽约。[3] Filippov, A. F.（1988）。 *Differential equations with discontinuous righthand sides*，《数学及其应用（苏联系列）》，第18卷，Kluwer Academic Publishers，多德雷赫特。俄文译本。[4] Garijo, A.、Gasull, A. 和 Jarque, X.（2007）。方程 $z' = f(z)$ 的局部与整体相图，*Discrete Contin. Dyn. Syst.* **17**(2)，309–329。[5] Gasull, A.、Rond´on, G. 和 Silva, P. R.（2024）。关于分段多项式全纯系统的极限环数量， *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* **23**(3)，1302–1332。[6] Gasull, A.、Rond´on, G. 和 Silva, P. R.（2025）。分段全纯系统极限环的同时分岔，
J. Dyn. Differ. Equations（在线出版）。[7] Gouveia, L. F. S.、Rond´ 2022 *J. Differential* on, G. 和 *Equations* **332** 440 472
Silva, P. R.（）。分段全纯系统， ，–。[8] Gouveia, L. F. S.、Silva, P. R. 和 Rond´on, G.（2023）。全纯系统的全局相图与局部可积性， *Qual. Theory Dyn. Syst.* **22**，文章编号 35。[9] Guti´errez, C. 和 Sotomayor, J.（1982）。浸入 $\mathbb{R}^3$ 的曲面上脐点的结构稳定性，
Lecture Notes in Math. **1007** 195 215 ，
Springer，柏林，–。[10] Huzak, R.、Marde˘si´c, P. 和 Resman, M.（2023）。正则化分段光滑多项式系统的极限环数量无界， *J. Math. Anal. Appl.* **528**(1)，127–145。[11] Huan, S.-M. 和 Yang, X.-S.（2012）。关于一般平面分段线性系统中的极限环数量， *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. A* **32**(6)，2147–2164。[12] Li, C.、Chen, F. 和 Chen, J.（2021）。允许存在非正则切换边界的分段多项式系统中的极限环， *Physica D* **422**，132903。[13] Llibre, J.、Novaes, D. D. 和 Teixeira, M. A.（2015）。非光滑动力系统中极限环的产生， *Bull. Sci. Math.* **139**(3)，229–244。[14] Stewart, J.、Clegg, D. 和 Watson, S.（2020）。 *Multivariable Calculus*，第9版，Cengage Learning，波士顿。

[1] Departamento de Matemática Instituto de Ciências Exatas (ICEx) Universidade Federal de , , Minas Gerais (UFMG) Av. Pres. Antônio Carlos 6627 Cidade Universitária - Pampulha 31270-901 , „ , ,Belo Horizonte, MG, Brazil

[2] Departamento de Matemática, Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, UNESP, UnivEstadual Paulista, Rua C. Colombo, 2265, CEP 15054–000 São José do Rio Preto, São Paulo, Brazil*Email address*: grondon@ufmg.br*Email address*: paulo.r.silva@unesp.br