arXiv:2601.03406v1 [math.AG] 6 Jan 2026

关于扭曲 syzygy 丛及对偶 syzygy 丛的 Ulrich 性

HUGO TORRES-L´OPEZ 和 ALEXIS G. ZAMO RA

Abstract. 给定一个射影簇 X 及其上的非常丰沛线丛 $\mathcal{L}$，我们对哪些 X 和 $\mathcal{L}$ 使得扭曲 syzygy 丛与扭曲的对偶 syzygies 向量丛关于极化 $\mathcal{L}^a$ 具有 Ulrich 性进行分类。对于任意极化 H，我们也得到了一些部分结果。

1. Introduction

我们的出发点是一个复射影簇 $X \subseteq \mathbb{P}^n$，我们始终假设它是非退化、非奇异且不可约的。我们简称 $X \subseteq \mathbb{P}^n$ 为射影簇。

斜体字母（如 $\mathcal{L}$）表示射影簇 X上的一个可逆层，而 L 表示其对应的除子，即：$\mathcal{L} = \mathcal{O}_X(L)$。

我们将 $H^i(\mathcal{L})$ 或 $H^i(L)$ 写作 $H^i(X, \mathcal{L})$，对于维数$h^i(\mathcal{L})$也作类似处理。

如果 $\mathcal{L} := i^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$，则 $\mathcal{L}$ 是非常充足的，并且对于某个子空间$V \subseteq H^0(\mathcal{L})$，有 $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V)$，我们称该子空间为嵌入子空间。因此，如果 $\dim X = d$，则 $\deg X = L^d$。

我们有一个正合列：

$$0 \to M_{\mathcal{L},V} \to V \otimes \mathcal{O}_X \to \mathcal{L} \to 0, \tag{1}$$

以及其对偶：

$$0 \to \mathcal{L}^{-1} \to V \otimes \mathcal{O}_X \to M^\vee_{\mathcal{L},V} \to 0. \tag{2}$$

秩为n $M_{\mathcal{L},\ V}$ 的局部自由层称为关于 V的 $\mathcal{L}$ 的 syzygy 向量丛。

回顾 [2] 中的以下内容：

定义1.1. *$\mathcal{E}$ 在一个 $d-$维射影簇 X 上的局部自由层是 $H-$Ulrich 丛，当且仅当*

$$H^i(\mathcal{E}(-pH)) = 0, \quad \textit{for all } i \textit{ and } 1 \le p \le d.$$

在 [18], B. Ulrich 最初是在极大生成的 Cohen–Macaulay 模的背景下研究 Ulrich 丛的。他研究局部 Cohen–Macaulay 环成为 Gorenstein 环的条件。Eisenbud 和 Schreyer 通过 Beilinson 单子与相对分解表明，某些算术 Cohen–Macaulay 层具有完全线性分解（见 [10]）。这一观点建立了几何学与代数之间的桥梁

2020 *Mathematics Subject Classification.* 14J60, 14H60.*Key words and phrases.*
Ulrich´丛，上同调关系丛，射影簇。

即几何学（射影簇上的相干层）与代数（具有线性分解的极大 Cohen–Macaulay 模）之间的桥梁。

关于 Ulrich 丛几何性质的其他相关论文有 [3], [6]和 [8]。

关于 Ulrich 丛的精彩导论有 [2] 和 [7], ，甚至还有一本教科书 [9]。

本文的主要目标是证明以下结论：

定理 1.2。设 X 是一个射影簇， $\mathcal{L}$ 是一个非常丰沛线丛，且$V \subseteq H^0(\mathcal{L})$ 是一个嵌入子空间， $k \in \mathbb{Z}$，并且 $a \in \mathbb{N}$。

i) $M_{\mathcal{L},\ V}^{\vee} \otimes \mathcal{L}^{k+1}$ 是 $\mathcal{L}^a$*–Ulrich*，当且仅当以下两种情况之一成立：(1) $X = \mathbb{P}^1$， $L = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2)$， $V = H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2))$ 且 $a = k + 2$。(2) $X = \mathbb{P}^1$， $L = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$， $V = H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1))$ 且 $a = k + 3$.(3) $k = 0$， $a = 2$ 且 $X = \mathbb{P}^2$，也就是说，对于层 $T\mathbb{P}^2$ ，相对于$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2)$。ii) $M_{\mathcal{L}}^{k-1}{}_{,\ V} \otimes \mathcal{L}$ 是 $\mathcal{L}^a$*–Ulrich*，当且仅当 $a = k - 1$ 且 X 是一条正规有理曲线。

近年来，已有多位作者研究了与本文所研究的丛类似的丛的 Ulrich 性。在 [4], 中，作者证明，切丛为 Ulrich 的射影流形只有扭三次曲线和 Veronese 曲面。此外，他们证明余切丛永远不是 Ulrich。随后，在 [15], 中，作者分类了满足以下条件的光滑簇：对于某个 $k \in \mathbb{Z}.$ ，其扭切丛$TX(k)$ 是 Ulrich 丛。 在 [1] 和 [16], 中，作者刻画了具有 Ulrich 扭法丛或余法丛的光滑不可约簇。这些论文通常研究相对于给定嵌入的超平面截面的 Ulrich 性。例如，在 [16], 中，定理 1.2 在 $a = 1$ 的情形下得到了证明。

第 2 节汇集了后文将用到的一些关于叙述子和 Ulrich 丛的性质。第 3 节和第 4 节分别证明了 1.2 的 i) 和 ii) 项。最后，第 5 节给出了关于 syzygy 丛相对于任意极化的 Ulrich 性的一些部分结果。

2. Some properties of syzygies and Ulrich bundles

在射影空间 $\mathbb{P}^n$ 中，我们有 Euler 正合列：

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)^{\oplus n+1} \to T\mathbb{P}^n \to 0$$

其中 $T\mathbb{P}^n$ 是切层（例如参见 [13], Theorem II.8.13）。将其与 $\mathcal{O}_X(k)$ 扭曲，并限制到由子空间 $V \subseteq H^0(\mathcal{L})$ 嵌入的 $X \subseteq \mathbb{P}^n$ 上，结合正合列 (1)，我们得到如下同构：

$$M_{\mathcal{L},V}^{\vee} \otimes \mathcal{L}^{k+1} = M_{\mathcal{O}_X(1),\mathbb{P}^n}^{\vee} \otimes \mathcal{O}_X(k+1) \simeq T\mathbb{P}^n(k)|_X. \tag{3}$$

取对偶后，我们得到：

$$M_{\mathcal{L},V} \otimes \mathcal{L}^{k-1} = M_{\mathcal{O}_X(1),\mathbb{P}^n} \otimes \mathcal{O}_X(k-1) \simeq \Omega\mathbb{P}^n(k)|_X. \tag{4}$$

Ulrich´束有多种刻画方式，并具有若干有趣的几何性质。这里我们列出一些后文将用到的性质。

命题 2.1. 设 $\mathcal{E}$ 是一个 $H-$维射影簇 $X \subseteq \mathbb{P}^n$上的 *Ulrich* 丛。假设 $rank(\mathcal{E}) = r$ 且次数 $X = m$。则：

i) $H^i(\mathcal{E}(-j)) = 0$ 对所有 $j \in \mathbb{Z}$、$1 \le j \le d-1$ 和 $h^0(\mathcal{E}) = rm$ 均成立。ii) 若 $\mathcal{E}$ 是 *Ulrich*，则 $\mathcal{E}|_Y$ 对 $Y = X \cap H$ 也是 *Ulrich*。iii) $\mathcal{E}$ 是 $H-$半稳定的。

此外，由定义1.1可立即得出：

命题2.2。如果

$$0 \to \mathcal{F}_1 \to \mathcal{E} \to \mathcal{F}_2 \to 0$$

是 X 上的向量丛之间的正合列，且 $\mathcal{F}_i$、$i = 1$、2 均为 *Ulrich*，则 $\mathcal{E}$也是。

命题 2.1 的证明可见于 [2] 或 [9]。

3. Proof of Theorem 1.2, item i)

我们首先证明以下结果：

引理 3.1. 设 X 是一个射影簇，且 L, $V \subseteq H^0(\mathcal{L})$ 是一个嵌入子空间。若对于某个 $a \in \mathbb{N}$，$M^\vee_{\mathcal{L},V} \otimes \mathcal{L}^{k+1}$ 是 *Ulrich*，则

$$0 \le k+1 < a;$$

除非 $n = 1$, $k = -2$ 和 $a = 1$。特别地，除该情形外：

$$|(k+1-a)L| = \emptyset.$$

证明。假设我们不处于例外情形 $n = a = 1$ 和 $k = -2$。我们断言，$h^0(M^\vee_{\mathcal{L},V} \otimes \mathcal{L}^{k+1}) \neq 0$ 当且仅当 $k+1 \ge 0$.。注意，由于 $M^\vee_{\mathcal{L},V}$ 是整体生成的，$h^0(M^\vee_{\mathcal{L},V}) \neq 0$。因此，对于任意 $k+1 \ge 0$，我们有 $h^0(M^\vee_{\mathcal{L},V} \otimes \mathcal{L}^{k+1}) \neq 0$.

若 $k+1 < 0$，我们将证明分为 $\dim X = 1$ 和 $\dim X \ge 2$ 两种情况。若 X 是一条曲线，则次数：

$$\deg M^\vee_{\mathcal{L},V} \otimes \mathcal{L}^{k+1} = \deg \mathcal{L} + n(k+1)\deg \mathcal{L} = (n(k+1)+1)\deg \mathcal{L}$$

为负。由于 $M^\vee_{\mathcal{L},\ V} \otimes \mathcal{L}^{k+1}$ 是半稳定的（命题 2.1 iii)），且次数为负，因此可得 $h^0(M^\vee_{\mathcal{L},\ V} \otimes \mathcal{L}^{k+1}) = 0$.

若 $\dim X \ge 2$，且 $k \le -2$，由 Kodaira 消失定理（见 [12], 第 1.2 章）以及正合列：

$$0 \to \mathcal{L}^k \to V \otimes \mathcal{L}^{k+1} \to M^\vee_{\mathcal{L},V} \otimes \mathcal{L}^{k+1} \to 0, \tag{5}$$

我们有 $h^0(M^\vee_{\mathcal{L},\ V} \otimes \mathcal{L}^{k+1}) = 0$。

若 $M^\vee_{\mathcal{L},\ V} \otimes \mathcal{L}^{k+1}$ 是 $\mathcal{L}^a$-Ulrich，则 $h^0(M^\vee_{\mathcal{L},\ V} \otimes \mathcal{L}^{k+1-a}) = 0$，引理便由该断言得证。□

注 3.2. 请注意，由于 $X \to \mathbb{P}(V)$ 是一个嵌入，$n = 1$ 的含义仅为 $X = \mathbb{P}^1$。在特殊情形 $n = 1$, $k = -2$ 下，$M^\vee_{\mathcal{L},\ V} \otimes \mathcal{L}^{k+1}$ 的次数为 0，因此我们无法得到上同调消失。事实上，正如下一命题所述，这种情形会产生一个 *Ulrich* 丛。

我们依次针对曲线、曲面以及维数至少为 3 的代数簇证明定理 1.2 i)。

命题 3.3. 设 X 是一条射影曲线， L 是一个线丛， $V \subseteq H^0(\mathcal{L})$ 是一个嵌入子空间。那么， $M_{\mathcal{L},V}^\vee \otimes \mathcal{L}^{k+1}$ 是 $\mathcal{L}^a$-*Ulrich*，当且仅当以下条件之一成立：

i) $X = \mathbb{P}^1$, $\mathcal{L} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2)$, $V = H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2))$ *and* $a = k+2$, *thus* X *is a plane non-singular conic; or*

ii) $X = \mathbb{P}^1$, $\mathcal{L} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$, $V = H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1))$ *and* $a = k+3$.

证明。 我们有如下正合列

$$0 \to \mathcal{L}^{k-a} \to V \otimes \mathcal{L}^{k+1-a} \to M_{\mathcal{L},V}^\vee \otimes \mathcal{L}^{k+1-a} \to 0. \tag{6}$$

如果 $M_{\mathcal{L},\ V}^\vee \otimes \mathcal{L}^{k+1}$ 是 $\mathcal{L}^a$-Ulrich，那么对于任意 i，都有 $h^i(M_{\mathcal{L},\ V}^\vee \otimes \mathcal{L}^{k+1-a}) = 0$。因此，

$$\chi(\mathcal{L}^{k-a}) = (n+1)\chi(\mathcal{L}^{k+1-a}).$$

这等价于：

$$m(n(a-k-1)-1) = n(1-g), \tag{7}$$

其中 $m = \deg L$。注意， $g = 1$ 是不可能的，因为在这种情况下，(7) 的左边为零，因此 $n = 1$ 且 $a = k+2$，但 $n = 1$ 意味着 $X = \mathbb{P}^1$，这与 $g = 1$矛盾。

根据引理 3.1，(7) 的左边为正，因此可得 $g = 0$ 和

$$m = \frac{n}{n(a-k-1)-1}.$$

由引理 3.1 $a > k+1$，因此只有以下几种情况：

(1) $a = k+2$： 唯一解为 $n = 2, m = 2$. 因此， $\mathcal{L} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2)$ 和$V = H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2))$。由：

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2) \to \mathbb{C}^3 \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \to M_{\mathcal{L},V}^\vee \to 0,$$

可得 $M_{\mathcal{L},\ V}^\vee = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$。不难验证，在这些条件下， $M_{\mathcal{L},\ V} \otimes \mathcal{L}^{k+1}$ 是 $\mathcal{L}^{k+2}$–Ulrich。

(2) $a = k+3$： 唯一解为 $n = 1, m = 1$。因此， $\mathcal{L} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$、 $V = H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1))$，且 $X = \mathbb{P}^1$。在这种情况下， $M_{\mathcal{L},\ V}^\vee = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$，且 $M_{\mathcal{L},\ V}^\vee \otimes \mathcal{L}^{k+1}$是 $\mathcal{L}^{k+3}$–Ulrich。

(3) $a > k+3$： 这种情况不可能，因为我们得到：

$$m < \frac{n}{2n-1} \leq 1.$$

□

现在，我们讨论曲面的情形：

命题 3.4。 设 X 为一条曲面， $\mathcal{L}$ 为一个非常丰沛线丛， $V \subseteq H^0(\mathcal{L})$ 为一个嵌入子空间， $k \in \mathbb{Z}$，且 $a \in \mathbb{N}$。那么， $M_{\mathcal{L},\ V}^\vee \otimes \mathcal{L}^{k+1}$ 是 $\mathcal{L}^a$*–Ulrich* 当且仅当 $k = 0$、 $a = 2$ 和 $X = \mathbb{P}^2$，也就是说，对于层 $T\mathbb{P}^2$ ，相对于 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2)$（参见 [4]）。

证明。 如果 $M_{\mathcal{L},\ V}^\vee \otimes \mathcal{L}^{k+1}$ 是 $\mathcal{L}^a$–Ulrich，则有：

$$\chi(\mathcal{L}^{k-a}) = (n+1)\chi(\mathcal{L}^{k+1-a})$$
$$\chi(\mathcal{L}^{k-2a}) = (n+1)\chi(\mathcal{L}^{k+1-2a}).$$

将这两个方程相减并利用黎曼–罗赫定理，我们得到：

$$g_H - 1 = -a^2L^2 + (k+1-a)L^2 + \frac{aL^2}{n},$$

满足 $H = aL$。根据引理 3.1，我们有 $k+1 < a$。因此，等式右边为负，由此得出 $g_H = 0$。

因此，

$$1 = (a - (k+1) - \frac{1}{n})aL^2.$$

考虑到 $2 \leq n$、$0 \leq k+1 < a$ 和 $L^2 = 1$ 当且仅当 $n = 2$ 成立，或者等价地说，当且仅当 $X = \mathbb{P}^2$ 成立，很容易推得唯一可能的解是 $k = 0$、$a = 2$ 和 $n = 2$。

由同构 (3)，我们有 $M^\vee_{\mathcal{L},\,V} \otimes \mathcal{L} \simeq T\mathbb{P}^2$。利用 Euler 正合列：

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)^{\oplus 3} \to T\mathbb{P}^2 \to 0$$

我们很容易验证，事实上，$T\mathbb{P}^2$ 是 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}$(2)–Ulrich。 □

现在，我们可以证明：

命题 3.5. 设 X 是维数至少为 3 的射影簇，$\mathcal{L}$ 是非常丰沛线丛，且 $V \subseteq H^0(\mathcal{L})$ 是一个嵌入子空间。那么，对于任意 $k \in \mathbb{Z}$，以及 $a \in \mathbb{N}$, $M^\vee_{\mathcal{L},\,V} \otimes \mathcal{L}^{k+1}$ 都不是 $\mathcal{L}^a$–*Ulrich*。

证明. $a = 1$ 的情形已在 [16]中讨论。为求完整起见，我们在此给出另一种论证。由引理 3.1，若 $a = 1$，唯一的可能是 $k = -1$。正合序列 (12) 变为：

$$0 \to \mathcal{L}^{-1} \to V \otimes \mathcal{O}_X \to M^\vee_{\mathcal{L},V} \to 0.$$

因此，由 Kodaira 消失定理，$h^0(M^\vee) = n+1$；另一方面，若 $M^\vee$是$\mathcal{L}$–Ulrich，则 $h^0(M^\vee) =$deg X.rank $M^\vee =$deg $X.n$。这就导出矛盾 deg$X = \binom{n+1}{n}$。

因此，我们假设 $a > 1$，并对 $d = \dim X$ 使用归纳法。回顾同构 (3)。归纳假设意味着，给定满足 $\dim X = d \geq 3$ 的 $X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$，我们假设对于任意射影簇

$$Z \hookrightarrow \mathbb{P}^m$$

满足 $\dim Z = d-1$，唯一可能的

$$T\mathbb{P}^m(k)|_Z \simeq M^\vee_{\mathcal{O}_Z(1),\mathbb{P}^m} \otimes \mathcal{O}_Z(k+1)$$

作为 $\mathcal{O}_Z(a)$–Ulrich 的情形是 $a = 2$、$k = 0$ 和 $m = d-1$，即 $Z = \mathbb{P}^{d-1}$。

事实上，我们只在以下情形中使用归纳假设：设 $F \subset \mathbb{P}^n$ 是次数为 a 的超曲面，使得 $Y := X \cap F$ 不可约且非奇异（由 Bertini′ 定理可知这样的 F 存在）。若 $T\mathbb{P}^n(k)|_X$ 是 Ulrich，则根据命题 2.1(ii)，$T\mathbb{P}^n(k)|_Y$ 也是。我们断言，由于 $a > 1$，$Y \subseteq \mathbb{P}^n$ 是非退化的。事实上，若 $Y = F \cap X =: F_X$ 且 $Y \subset H'_X$ 对某个超平面 H' 成立，则作为除子 $F_X \leq H'_X$。因此，我们得到 $aH_X \sim F_X \leq H_X$，这与 $a > 1$ 矛盾。

因此：

$$(T\mathbb{P}^n(k)|_X)|_Y = T\mathbb{P}^n(k)|_Y;$$

但由归纳法可得， $Y = \mathbb{P}^{d-1}$，这是不可能的。 □

4. Proof of Theorem 1.2 ii)

本节中，我们完成定理 1.2 的证明。总体上，我们按照上一节的思路，先对曲线证明该结果，再对曲面证明，最后推广到高维代数簇。

起点如下：

引理 4.1. 设 $\mathcal{L}$ 是射影簇 X 上的一个非常丰沛线丛，且 $V \subseteq H^0(\mathcal{L})$ 是一个嵌入子空间。那么， $h^0(M_{\mathcal{L},V} \otimes \mathcal{L}^k) \neq 0$ 当且仅当 $k \geq 1$。特别地，如果 $M_{\mathcal{L},V} \otimes \mathcal{L}^{k-1}$ 是 *Ulrich*，则：

$$0 < k - 1 \leq a.$$

证明。这个引理的证明相当技术性；若要了解完整细节，读者可参阅 [5], 第 1, [11], 章和 [14], 第 5 章。如果 $k \leq 0$，那么 $h^0(M_{\mathcal{L},V} \otimes \mathcal{L}^k) = 0$，因为 $h^0(M_{\mathcal{L},V}) = 0$。事实上，正合列：

$$0 \to M_{\mathcal{L},V} \to V \otimes \mathcal{O}_X \to \mathcal{L} \to 0, \tag{8}$$

诱导出一个包含关系 $H^0(V) \hookrightarrow H^0(\mathcal{L})$。

因此，要证明引理，只需证明 $h^0(M_{\mathcal{L},\ V} \otimes \mathcal{L}) \neq 0$。由 (8) 的对偶正合列可知， $h^0(M^\vee_{\mathcal{L},\ V}) \geq n+1$且 $rank(M^\vee_{\mathcal{L},\ V}) = n$。

利用 $n-1$ $M^\vee_{\mathcal{L},\ V}$ 的截面，我们可以构造一个正合列：

$$0 \to \mathcal{O}_X^{n-1} \xrightarrow{ev} M^\vee_{\mathcal{L},V} \to \widetilde{\mathcal{F}} \to 0,$$

其中， ev 是求值映射， $\mathcal{F}$ 的奇点集的余维为二。此外，$\det \mathcal{F} = \det M^\vee_{\mathcal{L},\ V} = \mathcal{L}$。

令 $\tau(F)$ 为 $\mathcal{F}$ 的挠子层。由于 $\mathrm{Supp}\ \tau(F) \subset \mathrm{Sing}(\mathcal{F})$，因此 $\mathrm{Supp}\ \tau(F)$ 的余维至少为二，从而 $\det(\tau(F)) = \mathcal{O}_X$。我们有一个正合列：

$$0 \to \tau(\widetilde{\mathcal{F}}) \to \widetilde{\mathcal{F}} \to \mathcal{F} \to 0,$$

其中 $\mathcal{F}$无挠，且 $\det \mathcal{F} = \det\ \mathcal{F} = \mathcal{L}$。

因此有一个图表

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_X^{n-1} & \longrightarrow & M^\vee_{\mathcal{L},V} & \longrightarrow & \widetilde{\mathcal{F}} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle id} & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{G} & \longrightarrow & M^\vee_{\mathcal{L},V} & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & & & \downarrow & & \\
 & & & & & & 0 & &
\end{array}$$

存在。由此，我们得到正合列：

$$0 \to \mathcal{F}^\vee \to M_{\mathcal{L},V} \to \mathcal{G}^\vee. \tag{9}$$

现在， $\mathcal{F}^\vee$ 是反身的，且秩为一，因此可逆；并且由于 $\mathcal{F}$ 无挠：

$$\det \mathcal{F} = \mathcal{L} = (\mathcal{F}^\vee)^\vee.$$

因此， $\mathcal{L} = (\mathcal{F}^\vee)^{-1}$，或 $\mathcal{F}^\vee = \mathcal{L}^{-1}$。由正合列 (9) 可知 $M_{\mathcal{L},V} \otimes \mathcal{L}$ 有一个截面。

最后一个结论源于以下事实：如果 $M_{\mathcal{L},V} \otimes \mathcal{L}^{k-1}$ 是 $\mathcal{L}^a$–Ulrich，那么 $h^0(M_{\mathcal{L},V} \otimes \mathcal{L}^{k-1}) \neq 0$ 且 $h^0(M_{\mathcal{L},V} \otimes \mathcal{L}^{k-1-a}) = 0$。□

命题 4.2。设 X 是亏格为 g 的射影曲线， L 是一个丰沛线丛，且 $V \subseteq H^0(\mathcal{L})$ 是一个嵌入子空间。那么，当且仅当 $a = k-1$ 且 X 是正规有理曲线时，$M_{\mathcal{L},V} \otimes \mathcal{L}^{k-1}$ 是 $\mathcal{L}^a$-*Ulrich*。

证明。 我们有正合列

$$0 \to M_{\mathcal{L},V} \otimes \mathcal{L}^{k-1-a} \to V \otimes \mathcal{L}^{k-1-a} \to \mathcal{L}^{k-a} \to 0 \tag{10}$$

我们考虑以下三种情况：

(a) $k-1 = a$：由正合列 (10)，$M_{\mathcal{L},V} \otimes \mathcal{L}^{k-1}$ 是 $\mathcal{L}^a$-Ulrich，当且仅当它满足以下性质：

- $V = H^0(\mathcal{L})$
- $h^1(\mathcal{L}) = (n+1)g$.

因此，由黎曼–罗赫定理可得 $X = \mathbb{P}^1$, $\mathcal{L} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)$ 和 $V = H^0(X, \mathcal{L})$。在这种情况下 $M_{\mathcal{L},V} = \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)$。因此，$M_{\mathcal{L},V} \otimes \mathcal{L}^{k-1} = \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a-1)$， 它是 $\mathcal{L}^a$-Ulrich。

(b) $k = a$：由正合列 (10)，我们得到 $H^1(M_{\mathcal{L},V} \otimes \mathcal{L}^{k-1-a}) \neq 0$.因此，$M_{\mathcal{L},V} \otimes \mathcal{L}^{k-1}$ 不是 $\mathcal{L}^a$-Ulrich。

(c) $k < a$：由正合列 (10)，$M_{\mathcal{L},V} \otimes \mathcal{L}^{k-1}$ 是 $\mathcal{L}^a$-Ulrich，当且仅当

$$(n+1)\chi(\mathcal{L}^{k-1-a}) = \chi(\mathcal{L}^{k-a}),$$

根据黎曼–罗赫定理，这等价于

$$m\left(n(a+1-k)+1\right) = n(1-g),$$

为 $m = \deg L$。由于根据假设左边为正，因此可得 $X = \mathbb{P}^1$ 并且

$$m = \frac{n}{n(a+1-k)+1}.$$

这不可能，因为 m 是一个自然数。

□

最后，我们有：

命题 4.3. 设 $X \subseteq \mathbb{P}^n$ 是一个维数为 $d \geq 2$ 的射影簇， $\mathcal{L}$ 是一个非常丰沛线丛，而 $V \subseteq H^0(\mathcal{L})$ 是一个嵌入子空间。那么，对于每个 $k \in \mathbb{Z}$和 $a \in \mathbb{N}$，层 $M_{\mathcal{L},V} \otimes \mathcal{L}^{k-1}$ 都不是 *Ulrich*。

证明。 我们有如下正合列：

$$0 \to M_{\mathcal{L},V} \otimes \mathcal{L}^{k-1} \to V \otimes \mathcal{L}^{k-1} \to \mathcal{L}^k \to 0. \tag{11}$$

情形 $a = 1$ 已在 [16] 中讨论过。这里我们再次给出一种不同的论证。

若 $a = 1$，则由引理 4.1 $k = 2$ 得。在这种情况下，(11) 给出：

$$0 \to M_{\mathcal{L},V} \otimes \mathcal{L} \to V \otimes \mathcal{L} \to \mathcal{L}^2 \to 0.$$

对 $\mathcal{L}^{-2}$ 作扭曲，得到：

$$0 \to H^0(\mathcal{O}_X) \to H^1(M_{\mathcal{L},V} \otimes \mathcal{L} \otimes \mathcal{L}^{-2}).$$

因此， $H^1(M_{\mathcal{L},\,V} \otimes \mathcal{L} \otimes \mathcal{L}^{-2}) \neq 0$ 以及 $M_{\mathcal{L},\,V} \otimes \mathcal{L}$ 都不是 $\mathcal{L}$–Ulrich。

因此，接下来假设 $a > 1$。

首先假设 $\dim X = 2$。由正合列 (11) 可知

$$(n+1)h^2(\mathcal{L}^{k-1-2a}) = h^2(\mathcal{L}^{k-2a}),$$

或者，根据对偶性，

$$(n+1)h^0(\mathcal{L}^{2a+1-k}(K_X)) = h^0(\mathcal{L}^{2a-k}(K_X)).$$

但是，由于 $k \leq 2a$, $h^0(\mathcal{L}^{2a-k}(K_X)) \leq h^0(\mathcal{L}^{2a+1-k}(K_X))$. 因此，

$$|(2a+1-k)L + K_X| = \emptyset.$$

另一方面 $((2a+1-k)L)^2 \geq (a+2)^2 L^2 \geq 9$，我们现在可以应用 Reider´ 定理（参见 [11], 第 9, [17] 章），该定理在本例中保证 $\forall p \in X$，存在一个包含 p 的非零有效除子 E，使得$E.(2a+1-k)L$ 等于 0 或 1。前一种情况不可能，因为L 是丰沛的；后一种情况也不可能，因为 $2a+1-k > 1$。因此，该定理对曲面成立。

如果 $\dim X \geq 3$，我们再次对 $d = \dim X$ 使用归纳法。回忆一下，如果$X \subseteq \mathbb{P}(V)$ 是非退化的，那么 $M_{\mathcal{L},\,V} \otimes \mathcal{L}^{k-1} \simeq$ 余切丛$\mathbb{P}^n(k)|_X$。因此，我们的归纳假设是：如果 $Z \subseteq \mathbb{P}^m$ 非退化且 $\dim Z = d-1$，那么余切丛$\mathbb{P}^m(k)|_Z$ 不是 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(a)$–Ulrich。

设 $Y := X \cap F$ 且 $F \in \mathbb{P}H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(a))$ 为一般情形。若 $\Omega\mathbb{P}^n(k)|_X$ 是 $\mathcal{O}_X(a)$–Ulrich，则 $\Omega\mathbb{P}^n(k)|_Y$ 是 $\mathcal{O}_Y(a)$–Ulrich。由于 $a > 1$, $Y \subseteq \mathbb{P}^n$ 是非退化的（见 3.5 的证明），这与归纳假设矛盾。□

注4.4。 命题 *4.3* 证明中的归纳步骤也可以如下论证：若 $a > 1$，则 $H^0(\mathcal{L}(-a)) = H^1(\mathcal{L}(-a)) = 0$，因此 $H^0(\mathcal{L}) \simeq H^0(\mathcal{L}|_Y)$。观察图表：

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & M_{\mathcal{L},V} & \longrightarrow & V \otimes \mathcal{O}_X & \longrightarrow & \mathcal{L} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & M_{\mathcal{L}|_Y,V} & \longrightarrow & V \otimes \mathcal{O}_Y & \longrightarrow & \mathcal{L}|_Y & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

由于竖直箭头由限制映射决定，我们很容易推出 $(M_{\mathcal{L},\,V})|_Y \simeq M_{\mathcal{L}|_Y,\,V}$。因此，可以直接利用 *syzygy* 丛进行归纳。对偶化后，类似的论证也适用于命题 *3.5* 的证明。

5. Ulrichness with respect to an arbitrary polarization

迄今为止，我们研究了关于$\mathcal{L}^a$的扭曲的 syzygies 向量丛的 Ulrich 性。自然会想到，关于任意极化的 Ulrich 性又如何呢？一些先前证明的结果可以推广到 H 任意非常 ample 除子时的 H-Ulrich 性。例如：

引理 5.1. 设 X 是维数至少为 2 的射影簇， L, H 为非常 *ample* 除子，且 $V \subseteq H^0(L)$ 是一个嵌入子空间。若 $M^\vee_{\mathcal{L},V} \otimes \mathcal{L}^{k+1}$ 是 H*–Ulrich*，则$k \geq -1$ 且：

$$|(k+1)L - H| = \emptyset.$$

证明。 对于任意 $k \in \mathbb{Z}$, 我们有正合列

$$0 \to \mathcal{L}^k \to V \otimes \mathcal{L}^{k+1} \to M^\vee_{\mathcal{L},V} \otimes \mathcal{L}^{k+1} \to 0. \tag{12}$$

如果 $k \leq -2$，由 Kodaira 消失定理以及正合序列 (12)，我们有 $h^0(M^\vee_{\mathcal{L},V} \otimes \mathcal{L}^{k+1}) = 0$。因此，若 $k \leq -2$，那么 $M^\vee_{\mathcal{L},V} \otimes \mathcal{L}^{k+1}$不是$H$-Ulrich。

如果 $k \geq 0$，根据关于 Ulrich 性的假设，我们有：

$$h^0(\mathcal{L}^{k+1}(-H)) \geq (h^0(\mathcal{L}^k(-H)) = (n+1)h^0(\mathcal{L}^{k+1}(-H)).$$

因此，我们必须有 $h^0(\mathcal{L}^{k+1}(-H)) = 0$。 □

现在，我们将讨论范围限制在曲面的情形。本节余下部分沿用之前的记号：$\mathcal{L}$ 是一个非常丰沛线丛， $V \subseteq H^0(\mathcal{L})$是一个维数为 $n+1$ 的嵌入子空间。可以采用与命题 3.4 证明中类似的论证。

命题 5.2。沿用之前的记号，设 X 是一个射影曲面，且 H 是一个非常 *ample* 除子。

i) 若 $M^\vee_{\mathcal{L},V} \otimes \mathcal{L}^{k+1}$ 是 H*–Ulrich*，则

$$H.K_X = 2(k+1)L.H - 3H^2 + 2\frac{L.H}{n},$$

或等价地：

$$g_H - 1 = (k+1)L.H - H^2 + \frac{L.H}{n}.$$

ii) 若 $M_{\mathcal{L},V} \otimes \mathcal{L}^{k-1}$ 是 H*–Ulrich*，则

$$H.K_X = 2(k-1)L.H - 3H^2 - 2\frac{L.H}{n},$$

或等价地

$$g_H - 1 = (k-1)L.H - H^2 - \frac{L.H}{n}.$$

证明。 **i)** 由于 $M^\vee_{\mathcal{L},V} \otimes \mathcal{L}^{k+1}$ 是 Ulrich，我们有：

$$H^i(M^\vee_{\mathcal{L},V} \otimes \mathcal{L}^{k+1}(-H)) = H^i(M^\vee_{\mathcal{L},V} \otimes \mathcal{L}^{k+1}(-2H)) = 0$$

对每个 $i \geq 0$。

因此，由正合列 (6) 可得：

$$h^i(\mathcal{L}^k(-H)) = (n+1)h^i(\mathcal{L}^{k+1}(-H))$$

and

$$h^i(\mathcal{L}^k(-2H)) = (n+1)h^i(\mathcal{L}^{k+1}(-2H))$$

对于 $i = 0,\ 1,\ 2$。

结合关于 H 和 $2H$ 的前述关系，我们得到：

$$\chi(\mathcal{L}^k(-H)) - \chi(\mathcal{L}^k(-2H)) = (n+1)(\chi(\mathcal{L}^{k+1}(-H)) - \chi(\mathcal{L}^{k+1}(-2H))).$$

结论由对曲面应用黎曼-罗赫定理即可得到。

ii) 与第 i) 部分完全类似。 □

推论 5.3。对于任意 $k \in \mathbb{Z}$、$M^\vee_{\mathcal{L},\ V} \otimes \mathcal{L}^{k+1}$ 和 $M_{\mathcal{L},\ V} \otimes \mathcal{L}^{k-1}$ 不可能同时是 $H-$*Ulrich*。

证明。否则，根据命题 5.2，我们必须有：

$$(k+1)L.H - H^2 + \frac{L.H}{n} = (k-1)L.H - H^2 - \frac{L.H}{n},$$

or

$$2(1+\frac{1}{n})L.H = 0.$$

□

现在我们回顾对偶 Ulrich 的概念。给定射影簇 X 上的一个 $\mathcal{E}$ 局部自由层，其维数为 d，则它关于非常 ample 除子 H 的对偶 Ulrich 是层 $\mathcal{E}^\vee((d+1)H + K_X)$。如果 $\mathcal{E}$ 是 $H-$Ulrich，那么它关于 H 的 Ulrich 对偶也是如此。

这可以用来构造一些扭曲的 syzygies 向量丛的例子，它们关于不同的极化并非 Ulrich。

推论 5.4. 若 $\mathcal{L}$ 满足：

$$\mathcal{L}^{2k} = \mathcal{O}_X(3H + K_X),$$

则 $M^\vee_{\mathcal{L},\ V} \otimes \mathcal{L}^{k+1}$ 不是 $H-$*Ulrich*。

证明。在这些条件下，$M^\vee_{\mathcal{L},\ V} \otimes \mathcal{L}^{k+1}$ 关于 H 的 Ulrich 对偶与 $M_{\mathcal{L},\ V} \otimes \mathcal{L}^{k-1}$ 重合，由推论 5.3 □ 即得结论。

以下例子讨论 $X = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 的情形。若 C_1、C_2 是两条纤维的生成元，我们将与除子 $aC_1 + bC_2$ 相关联的线丛记作 $\mathcal{O}(a,\ b)$。

例 5.5. 若 $\mathcal{L} = \mathcal{O}(1,\ 4),\ H$ 为类$(2,\ 6)$的除子，则 $M^\vee_{\mathcal{L},V} \otimes \mathcal{L}^3$ 不是$H-$*Ulrich*。这由推论 *5.4* 得出。

例 5.6. 考虑 $\mathcal{L} = \mathcal{O}(1,1)$，设 H 是一个非常 *ample* 除子，例如其类为$(a, b),\ a, b > 0$。设 $V = H^0(\mathcal{L})$。那么，对于任意 H, $\mathcal{E} := M_{\mathcal{L},V} \otimes \mathcal{L}^{k-1}$ 都不是$H-$*Ulrich*。

事实上，假设 $\mathcal{E}$ 是 $H-$*Ulrich*。利用 $\mathcal{L}^2 = 2,\ \mathcal{L}.K_X = -4,\ \mathcal{L}.H = a+b,$ $H.K_X = -2(a+b)$ 和 $H^2 = 2ab,$ [9] 中的命题 *5.1.1* 给出的 *Chern* ´类条件可改写为：

$$9ab = (3k-1)(a+b), \tag{13}$$

$$6ab = (3k+1)(k-1). \tag{14}$$

此外，我们还有以下条件：

$$\chi(\mathcal{L}^k) = (n+1)\chi(\mathcal{L}^{k-1}) = 4\chi(\mathcal{L}^{k-1});$$

其结果为：

$$(3k-1)(a+b) = 3ab + 3k^2 - 2k - 4,$$

这与关系式 *(13)* 和 *(14)* 不相容。

References

[1] Antonelli, V.; Casnati, G.; Lopez, A. F.; Raychaudhury, Debaditya. 关于具有 Ulrich 扭曲余法丛的代数簇. 美国数学会会刊 152 (2024), no. 11, 4645–4658.

[2] Beauville, A. 乌尔里希丛简介。欧洲数学杂志 4 (2018), no. 1, 26–36.[3] Beauville, A. 行列式超曲面。载于：第 48 卷。谨以此卷献给 William Fulton，以庆祝他 60 岁生日。2000, pp. 39–64.[4] Benedetti, V.; Montero, P.; Prieto-Monta˜nez, Y.; Troncoso, S. 切丛为 Ulrich 丛的射影流形。代数杂志 630 (2023), 248–273.[5] Brinzanescu, V. 紧复曲面上的全纯向量丛。施普林格出版社 LNM 1624, (1996)[6] Casanellas, M. and Hartshorne, R. 三次曲面上的 ACM 丛。J. Eur. Math. Soc. 13 (2011) 709–731.[7] Coskum, E. Ulrich 丛综述。Aryasomayajula, Anilatmaja (编) 等，《解析与代数几何》。根据 2015 年于印度海得拉巴举行的国际会议报告整理而成的论文选集。新德里：印度斯坦图书机构, 85-106 (2017).[8] Coskun, I.; Costa, L.; Huizenga, J.; Mir´o-Roig, R. and Woolf, M. 旗簇上的乌尔里希舒尔丛。代数杂志 474, 49-96 (2017).[9] Costa, L; Mir´o-Roig R.M. and Pons-Llopis, J. 乌尔里希丛：从交换代数到代数几何。柏林、波士顿：德古意特出版社，2021.[10] Eisenbud, D., Schreyer, F.-O.,Weyman, J.: 通过外 syzygy 得到结式和肖形式。美国数学会杂志 16(3), 537–579 (2003).[11] Friedman, R. 代数曲面与全纯向量丛。施普林格出版社，Universitext (1998)[12] Grifftihs, P. and Harris, J. 代数几何原理。威立父子出版公司，(1978)[13] Hartshorne, R. 代数几何。施普林格出版社研究生数学教材 52, (第八次校正版印刷，1997)[14] Kobayashi, S. 复向量丛微分几何。岩波书店与普林斯顿大学出版社，(1987).[15] Lopez, A. F.; Raychaudhury, D. 关于具有 Ulrich 扭曲切丛的代数簇。纯粹与应用数学年刊 (4) 203 (2024), no. 3, 1159–1193.

[16] L´opez, A.F. 关于具有 Ulrich 扭曲正规丛的代数簇。Albano, Alberto (编) 等, 《代数几何四十年的展望》。第 2 卷。纪念 Alberto Collino。Cham：Birkh¨auser。数学进展 352, 1-12 (2025)

[17] Reider I. 秩为 2 的向量丛与代数曲面上的线性系。Ann. Math. 127, 309-316, (1988)

[18] Ulrich, B.：Gorenstein 环与具有大量生成元的模。Math. Z. 188(1), 23–32 (1984)

Secihti-U. A. Matemáticas, U. Autónoma de Zacatecas
Calzada Solidaridad entronque Paseo a la Bufa,C.P. 98000,
Zacatecas, Zac. México.*Email address*: hugo@cimat.mx

U. A. Matemáticas, U. Autónoma de Zacatecas
Calzada Solidaridad entronque Paseo a la Bufa,
C.P. 98000, Zacatecas, Zac. México.*Email address*:
alexiszamora@uaz.edu.mx