arXiv:2601.03409v1 [physics.atom-ph] 6 Jan 2026

在桌面磁阱中可视化 Mathieu 型动力学：线圈驱动参数振荡器

William Ho,* Anna Klales,† Daniel Davis,‡ Jieping Fan,§ Robert Hart,¶ Ali Kurmus,** 和 Louis Deslauriers††哈佛大学物理系，马萨诸塞州剑桥市 *02138*（日期：2026年1月8日）

我们展示了一种桌面实验，利用一对正弦驱动的反亥姆霍兹线圈和一块悬挂的永磁体，实现动态稳定与赝势俘获。振荡场产生快速微运动，并叠加在较慢的慢振荡之上；微运动振幅随位移增大，并在转折点附近达到峰值。这一行为揭示了一种赝势机制：微运动振幅的空间梯度驱动慢运动。时间平均效应产生时间平均的谐波（赝势）回复力，将磁体约束在线圈之间。以 12–18 赫兹驱动时，系统处于小q_{eff}区间，两个时间尺度明显分离，肉眼即可直接观察。本文附带的视频追踪对运动进行了量化，并揭示了随着驱动频率降低而出现的稳定性边界（在我们的装置中约为 6–7 赫兹）。根据 12–18 赫兹范围内的轨迹，我们从测得的时间尺度分离 $\omega_{\mathrm{sec}}/\Omega$中提取出有效 Mathieu 参数$q_{\mathrm{eff}} \approx 0.16$ 。装置采用价格低廉且容易购得的零件；我们还提供简明的材料清单、分析代码、场梯度校准数据和演示视频。

I. 引言

一个在静态条件下不稳定的系统，在受到振荡驱动时可能变得稳定，这种现象称为动态稳定。从卡皮查倒立摆、射频保罗阱和稳定的里德堡态，到带电双黑洞附近的天体物理旋转鞍点，许多物理领域都体现了这一原理 [1–5]。旋转鞍点是一种广泛使用的课堂演示，用来展示动态稳定：钢球可以被约束在绕中心点旋转的鞍形面上 [6–10]。它通过刚性旋转实现约束，且其轨迹可以解析求解；然而，滚动和接触摩擦会掩盖快速的微运动，而这种微运动正是产生有效恢复力的原因，也是参数稳定运动的关键特征。

相比之下，许多参数稳定系统是通过固定方向上的曲率振荡（“拍动”调制）驱动的，而非通过刚性旋转 [9]。在射频保罗阱中，这由一个在聚焦与散焦之间交替的正弦四极场实现。由此得到的运动方程具有周期系数（Mathieu 形式；$y''(\tau) + [a - 2q\cos(2\tau)]y(\tau) = 0$，其中$a$和$q$表征静态曲率与振荡曲率），对此，Floquet 方法是标准的分析手段 [2, 3, 11]。在本文所关注的小q区域内，运动可分为两个清晰可见的时间尺度：缓慢的世俗振荡，以及与驱动频率相同、相位锁定的快速微运动；微运动的振幅随距中心的距离增大而增大 [12]。

在这一桌面演示中，我们展示了使用一对正弦驱动的反亥姆霍兹线圈实现 Mathieu 型动力学稳定性，以及一个悬挂的环形磁铁。将磁体悬挂在一根细长且质量很小的细绳上，可以消除其与任何导向表面的接触摩擦，同时仅引入由摆频[13]设定的微弱正静态曲率（$a > 0$）。选择合适的驱动频率，使两种时间尺度都能被人眼观察到后，轨迹会呈现出微运动：在世俗运动转折点附近最大，在阱中心附近最小。我们观察到，随着驱动频率降低，系统会出现稳定性边界；此外，还根据 12–18 赫兹的运行结果提取出有效 Mathieu 参数q_{eff}。我们还提供了运动视频、关键组件清单、分析代码，以及磁场梯度随电流变化的标定结果。

* williamho@college.harvard.edu
† aklales@g.harvard.edu
‡ ddavis@fas.harvard.edu
§ jieping.fang@gmail.com
¶ roberthart56@gmail.com
** akurmus@uw.edu
†† louis@physics.harvard.edu

II. 背景理论

A. 反亥姆霍兹线圈对的轴上磁场

两个半径为R、间距为d的同轴线圈中通以大小相等、方向相反的电流（反亥姆霍兹构型；图1），所产生的沿共同对称轴（x轴）的磁场为 [14]

$$B_x(x) = \frac{\mu_0 I R^2}{2}\left[\frac{1}{\left(R^2 + \left(x - \frac{d}{2}\right)^2\right)^{3/2}} - \frac{1}{\left(R^2 + \left(x + \frac{d}{2}\right)^2\right)^{3/2}}\right]. \tag{1}$$

该表达式关于中点为奇函数，$B_x(-x) = -B_x(x)$，因此它在$x = 0$ 处的泰勒级数只包含奇次幂，

$$B_x(x) = Gx + Cx^3 + O(x^5). \tag{2}$$

首项系数为

$$G = \left.\frac{dB_x}{dx}\right|_{x=0} = \frac{3\mu_0 I R^2 d}{2\left(R^2 + \frac{d^2}{4}\right)^{5/2}}, \tag{3}$$

由此得到阱中心附近熟悉的线性近似（$|x| \ll R,\ d$）。保留下一个非零项可得

$$C = \frac{1}{6}\left.\frac{d^3 B_x}{dx^3}\right|_{x=0} = \frac{5\mu_0 I R^2 d\left(d^2 - 3R^2\right)}{4\left(R^2 + \frac{d^2}{4}\right)^{9/2}}. \tag{4}$$

下文中，令 I 表示式 (1)–(4) 中的峰值驱动电流 I_0。

对于频率为 Ω的正弦驱动电流，

$$I(t) = I_0 \cos(\Omega t), \tag{5}$$

轴上磁场因子化为 $B_x(x,t) = \cos(\Omega t) B_x(x; I_0)$。利用式 (2) 中的中点展开，我们写为

$$B_x(x,t) = \cos(\Omega t)\left(Gx + Cx^3 + O(x^5)\right), \tag{6}$$

因此，轴上梯度是x的偶函数，

$$\frac{\partial B_x}{\partial x}(x,t) = \cos(\Omega t)\left(G + 3Cx^2 + O(x^4)\right), \tag{7}$$

且在 $x = 0$处通常不为零。

B. 运动方程与微运动包络

将悬挂磁体近似为偶极矩为 μ、且偶极矩方向与线圈轴对齐的偶极子，轴向力为

$$F_x = \mu \frac{\partial B_x}{\partial x}. \tag{8}$$

计入悬挂产生的弱静态恢复曲率（k_p）和线性阻尼（γ）后，轴向运动方程为

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + k_p x = \mu \frac{\partial B_x}{\partial x}(x,t). \tag{9}$$

利用方程 (7) 并保留最低阶偶次项，在中点附近可得

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + k_p x = \cos(\Omega t)\left(F_c + \alpha x^2 + O(x^4)\right), \tag{10}$$

其中 $F_c \equiv \mu G$，且 $\alpha \equiv 3\mu C$ [11, 15]。

在高频 régimen（$\omega_{\rm sec} \ll \Omega$）下，将运动写为 $x(t) = X(t) + \xi(t)$，其中 $X(t)$ 缓慢变化（慢运动），而 $\xi(t)$ 是以驱动频率 [16] 进行的快速振荡。将 $X(t)$ 视为在几个驱动周期内近似恒定，并保留最低阶快速响应，方程 (10) 给出

$$\xi(t) \simeq -\frac{F_c + \alpha X^2}{m\Omega^2}\cos(\Omega t), \tag{11}$$

因此，微运动包络振幅为

$$A_{\rm mm}(X) \simeq \frac{F_c + \alpha X^2}{m\Omega^2} \equiv A_{\rm floor} + \beta X^2, \tag{12}$$

with

$$A_{\rm floor} \equiv \frac{F_c}{m\Omega^2}, \qquad \beta \equiv \frac{\alpha}{m\Omega^2}. \tag{13}$$

方程 (12) 预测，微运动在中心（$A_{\rm floor}$）处最小，但通常不为零；离开中点后会对称地增大（主导项为 $\propto X^2$）。一个有用的一致性检验是比值

$$\frac{A_{\rm mm}(X)}{A_{\rm floor}} \approx \frac{\partial_x B_x|_{x=X}}{\partial_x B_x|_{x=0}} \approx 1 + \frac{\alpha}{F_c}X^2 = 1 + \frac{3C}{G}X^2, \tag{14}$$

这明确表明，远离中心时微运动的增长由无量纲组合（$3C/G$）X^2 控制，而不是分别由 C 或 G 控制。

C. 赝势回复力

式 (10) 右侧的快速振荡驱动力，其振幅为

$$F_0(x) = F_c + \alpha x^2 + O(x^4), \tag{15}$$

由此产生标准的时间平均赝势

$$U_{\rm pond}(x) = \frac{F_0^2(x)}{4m\Omega^2}, \tag{16}$$

通过对快速驱动周期取平均得到（见附录 A）。在 $x = 0$ 附近展开可得

$$U_{\rm pond}(x) \simeq {\rm const} + \frac{F_c \alpha}{2m\Omega^2}x^2 + O(x^4), \tag{17}$$

因此，尽管微运动包络并非线性，主导的赝势回复力仍与位移呈线性关系。相应的有效弹簧常数和慢频率为

$$k_{\rm eff} = \frac{F_c \alpha}{m\Omega^2}, \qquad \omega_{\rm sec}^2 \simeq \frac{k_p}{m} + \frac{F_c \alpha}{m^2\Omega^2}. \tag{18}$$

D. 高频 régime 下的慢运动–微运动分离

我们用无量纲量来表征慢运动与微运动之间的分离程度

$$q_{\rm eff} \equiv 2\sqrt{2}\,\frac{\omega_{\rm sec}}{\Omega}, \tag{19}$$

因此，$q_{\rm eff} \ll 1$ 对应于 $\omega_{\rm sec} \ll \Omega$。此定义旨在与射频保罗阱中使用的传统 Mathieu$q$ 参数相一致；对于（$a \simeq 0$），慢频率在小$q/2\sqrt{2}\Omega$ 区域满足 $\omega_{\rm sec} \approx$。我们采用$q_{\rm eff}$ 作为一种便捷方式，用以表示这种力学类比中的相同时间尺度分离，并便于与旋转鞍形势类比装置进行比较 [9]。

在反亥姆霍兹几何中，轴上磁场关于中点呈奇对称，而轴上梯度呈偶对称；因此，微运动在中心处最小但通常不为零，并随位移对称地增大，如公式（12）所示。这种随位置变化的微运动是上述赝势恢复机制的物理起源。

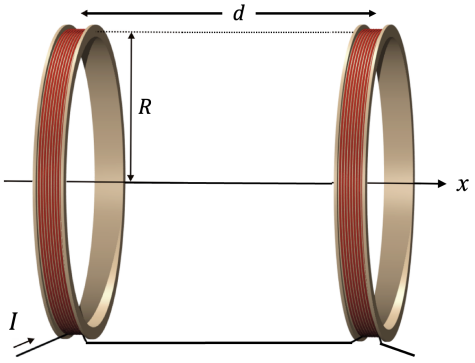

图 1：用于在中心零场点周围产生线性轴向梯度磁场的反亥姆霍兹线圈对的几何结构。两个半径为R的线圈相距d，并通以大小相等、方向相反的电流。尽管完整磁场呈四极型，但在这个一维演示中，只有其时变梯度的轴向分量与此相关。

III. 实验装置

图 2 展示了本演示所用的装置。第 II 节中使用的线圈几何参数（半径R 和间距d）定义于图 1。两个反亥姆霍兹线圈（外径 6.8 cm ×内径 2.3 cm × 2厚 0.4 cm）同轴安装，中心间距为d = 12cm，并由函数发生器和功率放大器串联驱动（输出阻抗0.82 Ω，最大电压 6.8 V）。典型工作条件下，驱动频率为 12–18 赫兹，电流为 0.6–0.8 A。驱动达到最大值时，线圈表面的磁场约为 80 G，其轴向分量提供了用于囚禁的振荡梯度。

被俘获的物体是一块甜甜圈形状的钕铁硼环形磁铁（外径 2.5 cm × 1、内径 1.3 cm × 0、厚 0.25 cm，重 24.1 g），由一根长 1.73 m 的聚酯线悬挂。线的一端用普通结系在天花板上，另一端则在磁铁上方约 10 cm 处用卡车司机结系住，便于调节高度。悬挂消除了接触摩擦，同时只引入微弱的静态恢复曲率，其特征由小振幅自由振荡周期 $T_p = 5.7\text{s}$ ($\omega_p = 2\pi/T_p = 1.10\,\text{rad s}^{-1}$) 表示。该周期长于 L =1.73 m 对应的几何摆长对应值，我们认为这是由于磁铁与附近铁磁性线圈部件之间存在微弱的静磁耦合。因此，我们用测得的 ω_p 来定义无量纲静态曲率参数 $a \equiv 4\omega_p^2/\Omega^2$。一根直径 0.75 cm 的玻璃杆水平穿过环形磁铁，仅用于使磁轴与线圈轴对准；运行时，磁铁与杆保持不接触。

为确保结果可复现，我们使用霍尔探头校准中心处的轴向场梯度，$\partial B_x/\partial x|_{x=0}$。我们测量了中点处的轴向磁场（$B_x(0) \approx 0$），以及线圈内侧面附近（在 $x \simeq d/2 - t/2$ 处，其中 $t = 2.4\,\text{cm}$ 为线圈厚度）的轴向磁场，并根据比值$[B_x(x) - B_x(0)]/x$估算中点梯度。我们得到 $\partial B_x/\partial x|_{x=0} \approx (0.24\ \text{T m}^{-1}\text{A}^{-1})\, I$，即使使用不同的线圈结构，其他人也能据此匹配有效中点梯度（从而匹配微运动下限）。在典型条件下，$a = 4\omega_p^2/\Omega^2 \sim 10^{-3}$，测得的慢频率意味着 $q_{\text{eff}} \ll 1$ （见第 V.B 节）。

课堂演示中，我们选择能让世俗运动与微运动的时间尺度在视觉上明显区分的驱动频率（12–18 赫兹），同时也展示较低频率下动态不稳定性的起始现象（对于我们的装置，通常约为 6–7 Hz）。运动由正对运动平面的数码相机以 120 帧每秒的速度记录。像素—米标定可使用已知的杆直径，或放置在运动平面内的尺子。位置通过开源 Tracker 程序或同等的 Python 脚本提取；本文随附数据和分析代码。

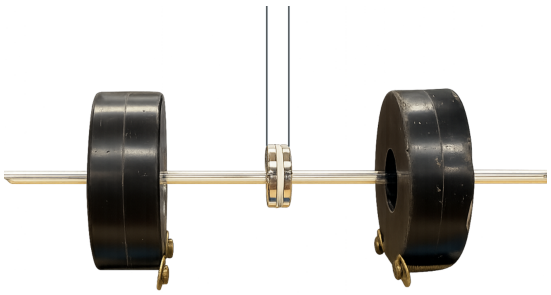

图 2：实验装置照片。一个环形钕铁硼磁铁通过一根长线悬挂在一对同轴反亥姆霍兹线圈之间。两线圈中的电流大小相等、方向相反，在中心产生一个场零点，并在中心附近形成近似线性的轴向场梯度。

IV. 演示步骤

给线圈通电之前，确保线圈轴、磁体的摆动方向和磁体端面彼此对齐。若环形磁铁悬空平衡且不与玻璃杆接触，并留有 1–2 mm 的间隙，则说明装置设置正确。

A. 捕获磁体

演示开始时，向学生展示装置及其静态配置。将磁体从中心偏移约 1 cm，以说明摆产生的回复力较弱，以及在未驱动的反亥姆霍兹场中缺乏约束。请学生预测振荡磁场梯度可能如何稳定运动。接下来，施加频率低于预期稳定性阈值的正弦电流。磁体会撞击杆或线圈表面，展示出不稳定性。逐渐提高驱动频率或

降低驱动振幅，直到磁体被约束在线圈之间。鼓励学生讨论频率和振幅如何影响稳定性。

B. 探索稳定性与运动

固定磁体后，改变驱动频率和振幅，观察慢运动与微运动的时间尺度如何变化。提高驱动频率通常会增大约束裕度，但会减小慢振荡振幅。相反，当频率降至约 6Hz 以下时，约束会丧失。两种时间尺度——快速微运动叠加在较慢的慢运动之上——用肉眼即可清晰观察到。

C. 记录与分析

为进行定量分析，我们使用高速摄像机记录运动。逐帧追踪磁体的位置，即可得到其位置随时间的变化，$x(t)$。为分离慢运动和快速运动，我们通过对$x(t)$进行平滑，得到慢运动曲线$x_{\mathrm{sec}}(t)$；所用的 Savitzky–Golay滤波器 [17], 实际上相当于一个截止频率远低于驱动频率的低通滤波器。随后，我们将轨迹分成若干短时间窗口，每个窗口涵盖数个驱动周期，并在每个窗口中减去局部慢运动值，使残差的平均值为零。该窗口中的微运动振幅A_{mm} 取自残差的大小（详见第 V.B 节）。

如图 4 所示，绘制A_{mm} 与 $|x_{\mathrm{sec}}|$的关系，可以看出中心附近存在有限的微运动下限，且微运动随位移均匀增大。在我们的工作范围内，数据与中点模型$A_{\mathrm{mm}}(X) \simeq A_{\mathrm{floor}} + \beta X^2$[公式（12）], 吻合良好，该模型量化了中心的“静谧程度”（A_{floor}）以及微运动朝转折点增大的幅度（β）。教师可以展示视频和相应的图表，帮助学生将观察到的双时间尺度动力学与其背后的赝势恢复机制联系起来。

V. 结果

A. 微运动和慢运动清晰可见

图 3 展示了一个具有代表性的 12 Hz 轨迹。低通曲线（蓝色）表示慢运动$x_{\mathrm{sec}}(t)$，阴影带则表示围绕久期轨迹的瞬时微运动振幅$A_{\mathrm{mm}}(t)$。两个时间尺度清晰分离：微运动在阱中心附近最小，在世俗运动转折点处最大。这一现象在 12–18 Hz 的工作范围内始终存在。

B. 量化时间尺度分离：q_{eff}

我们通过慢运动与微运动之间的时间尺度分离来量化工作状态。具体而言，

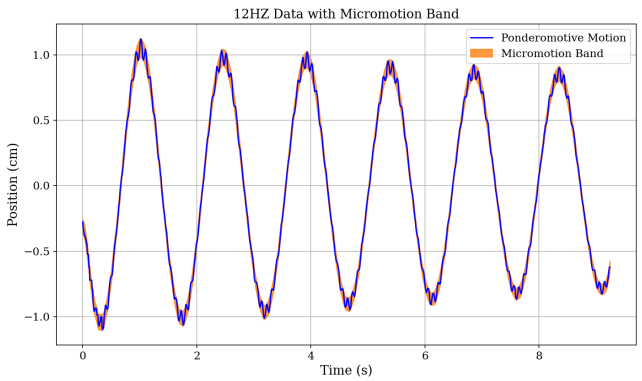

图 3：12 Hz 实验中的位置随时间变化。蓝色曲线为测得的轨迹；橙色带表示围绕慢运动 $x_{\mathrm{sec}}(t)$ 的微运动包络振幅 $A_{\mathrm{mm}}(t)$。微运动在慢运动转折点处达到最大值，而在中心附近最小，这正是小-q_{eff}区域中赝势俘获的典型特征。

我们提取慢频率 ω_{sec} 并报告

$$q_{\mathrm{eff}} = 2\sqrt{2}\,\frac{\omega_{\mathrm{sec}}}{\Omega} \tag{20}$$

（见第 II 节）。我们通过两种方式估计 ω_{sec}：

方法*1*：频率比。我们计算每一个完整久期周期内的驱动周期数 N，得到

$$\frac{\omega_{\mathrm{sec}}}{\Omega} \approx \frac{1}{N}, \qquad q_{\mathrm{eff}} \approx \frac{2\sqrt{2}}{N}. \tag{21}$$

这是一种便于演示的提取 q_{eff} 的方法。对于 12 Hz 实验，我们观测到 $N \approx 18$，从而得到 $q_{\mathrm{eff}} \approx 0.16$。

方法*2*：慢运动拟合。我们将低通滤波后的慢运动轨迹拟合为阻尼正弦波，$x_{\mathrm{sec}}(t) \approx X_0 e^{-t/\tau}\cos(\omega_{\mathrm{sec}} t + \phi)$，并提取 ω_{sec}。对于 12 Hz 实验，拟合得到 $T_{\mathrm{sec}} = 1.46$ s（因此 $\omega_{\mathrm{sec}}/2\pi = 0.68$Hz），对应于 $q_{\mathrm{eff}} \approx 0.16$。这与周期计数估计在不确定度范围内一致。

微运动包络与久期位移。为了量化微运动包络，我们将轨迹划分为跨越数个驱动周期的短时间窗，减去局部久期值，使残差的均值为零，并取残差的大小作为该时间窗的A_{mm} 。图4绘出了12 Hz 实验中A_{mm}随 $|x_{\mathrm{sec}}|$ 的变化。数据表明，中心附近存在有限的微运动极小值，且随着位移增大，微运动平缓上升，直至转折点。在我们的工作范围内，该曲线可用$A_{\mathrm{mm}}(X) = A_{\mathrm{floor}} + \beta X^2$[公式（12）], 很好地描述，据此我们提取$A_{\mathrm{floor}}$ 和 β。

小 a 检验。如第 III 节所述，$a \equiv 4\omega_p^2/\Omega^2$量化了悬挂装置产生的微弱静态恢复曲率。使用$T_p = 5.7$ s（$\omega_p = 2\pi/T_p$）可得，12 Hz 时$a \approx 8.6 \times 10^{-4}$，18 Hz 时为 3.8×10^{-4}。这些值都 $\ll 1$，因此静态曲率对高频赝势约束仅起到微小的修正作用。

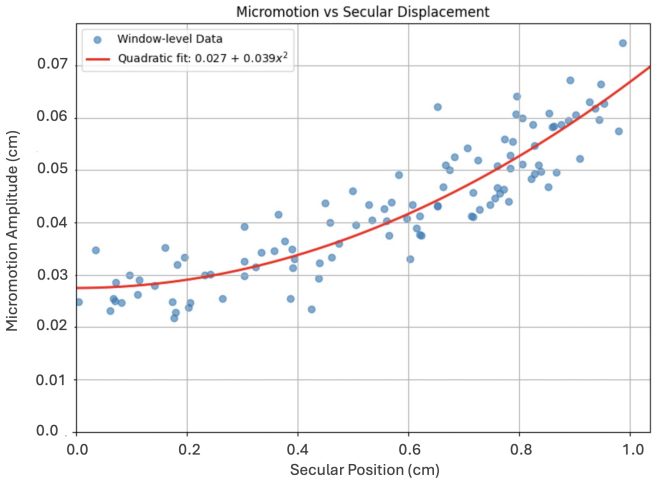

图 4：12 Hz 驱动下，微运动包络振幅A_{mm} 随久期位移 $|x_{\mathrm{sec}}|$ 的变化。每个数据点对应一个包含两个驱动周期的短时间窗口。实线是对中点模型$A_{\mathrm{mm}}(X) = A_{\mathrm{floor}} + \beta X^2$ [公式（12）],的拟合，该模型描述了中心附近有限的微运动下限，以及随位移朝转折点移动而呈偶对称的增大趋势。

C. 稳定性边缘的定性特征

这种定性不稳定性与预期相符：降低驱动频率会增大$q_{\mathrm{eff}} \propto \omega_{\mathrm{sec}}/\Omega$，最终破坏实现稳健赝势约束所需的时间尺度分离；本文不试图对这一边界进行精确测定。

VI. 稳健性与系统误差

• **对准**。 轴向和垂直失准会引入不必要的横向运动，并使久期周期的周期计数估算产生偏差。我们通过垫片调整线圈支架，并调节悬挂，直到中心附近的面外运动降至最低。

• **相机采样与标定**。 使用 120 帧每秒可在 12–18 Hz 范围内解析驱动频率，每个驱动周期包含~7–10 帧。报告的时间尺度分离量以$q\mathrm{eff} = 2\sqrt{2}\,\omega\mathrm{sec}/\Omega$量化，是无量纲的，且不受绝对像素—米尺度的影响。（只有在以物理单位报告Amm 和$x$sec 时才需要绝对标定。）

•**久期运动与包络估计**。 通过使用 Savitzky–Golay 滤波器（30 帧窗口、低阶多项式）对$x(t)$进行平滑，提取久期轨迹$x\mathrm{sec}(t)$。在覆盖数个驱动周期的短时间窗口内，减去局部久期值，使残差的均值为零，从而计算微运动振幅Amm；该窗口内残差的大小即定义为Amm。

• **线圈运动与阻尼**。空气阻力和内部损耗悬挂中的损耗会使世俗振幅缓慢衰减。反亥姆霍兹线圈上的反作用力也可能驱动线圈支架以驱动频率发生小幅振荡。加固支撑结构可减轻这一影响。这种运动可能会使测得的微运动频带变宽，并提高微运动基线水平，但在我们的不确定度范围内，不会改变提取出的 ω_{sec} （因此也不会改变q_{eff}）。

• **较小的正值**a。 悬挂产生的静态曲率很小：$a \equiv 4\omega_p^2/\Omega^2 \sim 10^{-3}$ 约为 12–18Hz。与赝势贡献相比，它对 ωsec 仅产生微小修正，不会改变双时间尺度动力学的定性特征。

VII. 应用与教育价值

四极离子阱（射频保罗阱）在现代物理学中发挥着核心作用，是光学原子钟和囚禁离子量子计算机等技术的基础 [18, 19]。然而，其约束背后的有质动力机制通常借助旋转鞍点演示来介绍：钢制滚珠在机械旋转表面上保持稳定 [9]。尽管这类演示生动地展现了动态稳定性，但也会引入一些复杂因素，掩盖其背后的双时间尺度物理：驱动是旋转的，而非时变梯度；钢球滚动时既平移又自转；摩擦还可能掩盖慢变回复力如何从快速驱动运动中的空间梯度产生 [8]。莱顿弗罗斯特效应悬浮的液氮（LN2）旋转鞍形势类比装置可减少滚动和摩擦，使轨迹更接近理想点粒子动力学 [20], ，不过它们仍属于旋转鞍形势类比装置。

相比之下，本文展示的反亥姆霍兹演示实现了一维交变磁场梯度，可直接产生清晰可见的、处于驱动频率的微运动，并叠加在较慢的慢振荡之上。悬挂环形磁铁不会滚动，接触摩擦可以忽略不计，且运动被限制在单一轴线上，因此与旋转鞍形势类比装置相比，微运动和慢运动呈现得更清晰，也更容易解读。

这套装置足够简单，适用于高年级本科实验课程。学生可以组装并校准装置，记录 12–18 赫兹范围内的轨迹，并使用所提供的代码，通过独立方法提取慢频率 ω_{sec} 和无量纲时间尺度分离参数 $q_{\mathrm{eff}} = 2\sqrt{2}\,\bar{\omega}_{\mathrm{sec}}/\Omega$。在课堂上，可以通过简短演示突出关键特征，例如微运动在中心附近最小、在转折点处最大，或者在我们的装置中，降低驱动频率可能导致约 6–7 赫兹时失去约束。因此，这项演示可用于经典力学、电磁学或现代物理／原子、分子与光学物理课程中的互动讲座、指导式实验活动或学生主导项目。

VIII. 结论

我们展示了一种紧凑的射频保罗阱力学类比装置，可直观呈现有质动力机制。

不同于通过几何旋转和滚动运动展示动态稳定性的旋转鞍点演示，反亥姆霍兹拍动陷阱实现了一维时变场梯度，接触摩擦可以忽略不计，且轨迹清晰易懂。

在高频 régimen 下，运动分解为慢振荡和以驱动频率快速变化的微运动。与中点附近的反亥姆霍兹对称性一致，微运动在中心处最小，并向世俗运动转折点方向增大；测得的包络线可由中点模型很好地描述$A_{\mathrm{mm}}(X) \simeq A_{\mathrm{floor}} + \beta X^2$。尽管存在这种非线性包络，高频平均在中心附近的最低阶近似下仍会产生谐振赝势，从而解释了正弦式的慢运动。

利用视频追踪和简单的数据分析，我们提取出慢频率 ω_{sec}，并通过无量纲的时间尺度分离参数 $q_{\mathrm{eff}} = 2\sqrt{2}\,\omega_{\mathrm{sec}}/\Omega$ 对运行 régimen 进行量化。我们还观察到，在本装置中将驱动频率降低至 6–7 赫兹附近时，约束会丧失。结合本文附带的材料清单、场梯度校准和分析流程，这些结果使该演示适用于课堂和实验室，并为学生清晰、直观地展示射频保罗阱中的赝势约束。

致谢

我们感谢 Laurel Barnett 和 Aidan Carey 提供的宝贵讨论。我们衷心感谢哈佛大学文理学院的支持。我们使用了 ChatGPT 来润色本文。

作者声明

作者没有需要披露的利益冲突。

附录

A. 赝势的平均化推导

考虑质量为 m 的粒子所满足的一维运动方程，其受到一个振幅缓慢变化、快速振荡的驱动力作用：

$$m\ddot{x} = F_{\mathrm{slow}}(x) + F_0(x)\cos(\Omega t), \tag{A1}$$

其中，$F_{\mathrm{slow}}(x)$表示任意较弱、缓慢变化的力（例如静态悬挂曲率），而$F_0(x)$随位置缓慢变化，但随时间快速振荡。

我们将总运动分解为慢速和快速分量，$x(t) = X(t) + \xi(t)$，其中 $X(t)$ 是慢坐标，而$\xi(t)$ 是微运动 [16]。在 X 附近展开并保留首阶项，得到

$$m\ddot{X} + m\ddot{\xi} \simeq F_{\mathrm{slow}}(X) + F_0(X)\cos(\Omega t) + \xi\,\frac{dF_0}{dX}\cos(\Omega t), \tag{A2}$$

其中我们忽略了 ξ 中的高阶项，以及涉及F_{slow}导数的任何项；这些项在高频 régime 下都很小。

快速运动主要由振荡驱动决定，其在最低阶近似下满足：

$$m\ddot{\xi} \simeq F_0(X)\cos(\Omega t), \tag{A3}$$

其解为：

$$\xi(t) \simeq -\frac{F_0(X)}{m\Omega^2}\cos(\Omega t). \tag{A4}$$

将方程 (A4) 代回完整方程，并对一个驱动周期取平均（因此 $\langle\cos(\Omega t)\rangle = 0$ 和 $\langle\cos^2(\Omega t)\rangle = \frac{1}{2}$），得到慢变方程：

$$m\ddot{X} = F_{\mathrm{slow}}(X) - \frac{1}{4m\Omega^2}\frac{d}{dX}\left[F_0^2(X)\right]. \tag{A5}$$

这定义了一个有效（有质动力）势能：

$$U_{\mathrm{pond}}(X) = \frac{F_0^2(X)}{4m\Omega^2}, \tag{A6}$$

因此，平均力可写为 $m\ddot{X} = F_{\mathrm{slow}}(X) - dU_{\mathrm{pond}}/dX$。

方程 (A6) 还表明，微运动的周期平均动能

$$\langle T_{\mathrm{mm}}\rangle = \left\langle \tfrac{1}{2}m\dot{\xi}^2 \right\rangle = \frac{F_0^2(X)}{4m\Omega^2}, \tag{A7}$$

表现为一种有效势能，其空间梯度产生慢变回复力，从而导致观测到的慢运动。

a. 在反亥姆霍兹中点展开中的应用。在本研究中，振荡驱动振幅在中点附近（正文第 II 节）具有如下形式：$F_0(X) = F_c + \alpha X^2 + O(X^4)$，因此

$$U_{\mathrm{pond}}(X) = \frac{(F_c + \alpha X^2)^2}{4m\Omega^2} \simeq \mathrm{const} + \frac{F_c\alpha}{2m\Omega^2}X^2 + O(X^4). \tag{A8}$$

因此，尽管微运动包络并非关于X的线性函数，但所得时间平均势在$X = 0$附近的主导阶为谐振子形式，这与轨迹中观测到的近似正弦慢运动一致。

B. 材料与成本

表 I 总结了一维有质动力演示所需的主要组件，包括供应商、估算成本和相关说明。由于浮动排版，表格可能会在后文出现，但它属于本小节的内容。

C. 校准后的场梯度—电流数据

电流为 0.7 A 时，我们在一个线圈上测得 80 G 的磁场。我们假设中心附近的磁场近似呈线性变化，并据此估算场梯度，得到 $0.17\,\mathrm{T\,m^{-1}}$。

表 I：演示装置的材料及大致费用。

Item	Name	供应商和型号	价格（美元）	备注
1	反亥姆霍兹线圈	—	—	一对安装在稳固轨道上的平行同轴线圈
2	环形磁铁	K&J Magnets：1 x 1/2 x 1/8 英寸钕稀土环形磁铁	3.19	—
3	细绳	细聚酯线	2.50	每 100 码的价格；0.002 克/厘米
4	Rod	玻璃杆	8.00	每12英寸的价格；外径0.3英寸
5	信号发生器	Pasco Scientific PI-9587C 数字函数发生器-放大器	250.00	在Ebay上转售
6	电线	鳄鱼夹导线	1.00	—

[1] P. L. Kapitza，悬挂点振动时摆的动态稳定性，Soviet Physics JETP **21**，588–598（1951）。[2] W. Paul，带电和中性粒子的电磁阱，Reviews of Modern Physics **62**，531（1990）。[3] D. Leibfried、R. Blatt、C. Monroe 和 D. Wineland，单个受限离子的量子动力学，Reviews of Modern Physics **75**，281（2003）。[4] I. Bialynicki-Birula、M. Kalinski 和 J. H. Eberly，天体力学中的拉格朗日平衡点及强驱动里德伯电子的不扩散波包，Physical Review Letters **73**，1777（1994）。[5] A. Kurmus、M. Zajaˇcek、G. Kestin 和 L. Deslauriers，通过动态稳定性实现双黑洞中的非轨道粒子捕获，Classical and Quantum Gravity **42**，115017（2025）。[6] W. Rueckner *et al.*，旋转鞍形保罗阱，American Journal of Physics **63**，186（1995）。[7] O. N. Kirillov 和 M. Levi，作为傅科摆的旋转鞍形阱，American Journal of Physics **84**，26（2016）。[8] W. Fan、L. Du、S. Wang 和 H. Zhou，通过模拟四极离子囚禁来约束刚性球，American Journal of Physics **85**，821（2017）。[9] R. I. Thompson、T. J. Harmon 和 M. G. Ball，旋转鞍形阱：射频电四极离子囚禁的力学类比？，Canadian Journal of Physics **80**，1433（2002）。[10] S. K. Löfgren、R. M. Fragoso、J. Weidow 和 J. Enger，机械保罗阱：介绍离子囚禁概念，The Physics Teacher **61**，762（2023）。[11] W. Magnus 和 S. Winkler，《希尔方程》（Interscience Publishers，1966）。[12] D. J. Wineland、C. Monroe、W. M. Itano、D. Leibfried、B. E. King 和 D. M. Meekhof，相干囚禁原子离子的量子态操控，《美国国家标准与技术研究院研究杂志》**103**, 259 (1998). [13] A. Carey, L. Barnett, R. Hart, A. Klales, A. Kurmus, and L. Deslauriers, 非对称旋转鞍形势：作为射频保罗阱的力学类比，arXiv 预印本 arXiv:2504.04095 (2025). [14] H. Youk，中性原子四极磁阱的数值研究：反亥姆霍兹线圈与 U 形芯片，《加拿大本科生物理学杂志》**3**, 13 (2005). [15] A. H. Nayfeh and D. T. Mook,《非线性振荡》（约翰·威立父子出版公司，1979）. [16] H. G. Dehmelt，储存离子的射频光谱学 I：储存，《原子与分子物理学进展》**3**, 53 (1968). [17] A. Savitzky and M. J. E. Golay，采用简化最小二乘法对数据进行平滑和微分，《分析化学》**36**, 1627 (1964). [18] A. D. Ludlow, M. M. Boyd, J. Ye, E. Peik, and P. O. Schmidt，光学原子钟，Reviews of Modern Physics **87**, 637 (2015). [19] C. D. Bruzewicz, J. Chiaverini, R. McConnell, and J. M. Sage，囚禁离子量子计算：进展与挑战，《应用物理评论》**6**, 021314 (2019). [20] L. Barnett, A. Carey, R. Hart, D. Davis, A. Klales, and L. Deslauriers，在保罗阱中展示动态稳定性：利用液氮液滴探索旋转鞍形势，arXiv 预印本 arXiv:2505.04035 (2025).