arXiv:2601.03412v1 [math.DS] 6 Jan 2026

精细曲线图上的稳定平移长度近似

FEDERICA FANONI、SEBASTIAN HENSEL 和 FR´ED´ERIC LE ROUX

Abstract. 我们研究曲面同胚作用于精细非分离曲线图时的稳定平移长度，并将其与有限近似——即相对于有限不变集的映射类——作用于非分离曲线图时的稳定平移长度进行比较。我们证明，具有稠密周期点集的同胚的稳定平移长度，等于其有限近似的稳定平移长度的上确界；同时，稳定平移长度在类胞腔扩张下保持不变。由此我们推出，环面的同伦平凡同胚的稳定平移长度，等于其有限近似的稳定平移长度的上确界。我们证明该上确界并不总是最大值：通过证明作用于非分离曲线图的映射类的稳定平移长度是有理数，得到这一结论。

1. 引言

给定一个曲面 S，一个经典研究对象是其同胚群 Homeo(S)。近年来，人们从几何群论的视角研究这个群及其元素，考察 Homeo(S) 在 精细曲线图 $\mathcal{C}^\dagger(S)$ 上的作用（该图最早由 [BHW22] 引入）。这种观点已对理解该群的代数性质，以及将粗几何方面与同胚的动力学特征联系起来十分有用（例如，参见 [BHW22、BHM+22、GM24、GM23、Ein24、BHW24]）。

BHW [BHW22] 的一个关键工具是局部近似结果（下文的引理2.3 ），粗略地说，该结果表明，精细（非分离的）曲线图中的距离可以通过更为人熟知的图——带 puncture 曲面的（非分离）曲线图——来近似。本文关注同胚在精细非分离曲线图上作用时的稳定平移长度，并探讨这些长度能否通过相关映射类在带 puncture 曲面的非分离曲线图上作用时的稳定平移长度来近似。

下文中， S 是一个亏格至少为一的闭可定向曲面， $\mathcal{NC}^\dagger(S)$表示 S 的非分离精细曲线图（定义见第 2 节）。若 P 是 S的有限点集，$\mathcal{NC}(S \smallsetminus P)$表示曲面 $S \smallsetminus P$的非分离曲线图。对于曲面 f上的同胚 S，我们用 tl(f) 表示其在 $\mathcal{NC}^\dagger(S)$上的稳定平移长度。令 $\mathcal{P}(f)$为集合

$$\mathcal{P}(f) := \{P \subset S \mid f(P) = P, |P| < \infty\}.$$

对于 $P \in \mathcal{P}(f)$，我们用 $[f]_P$表示映射类 $[f|_{S \smallsetminus P} \in$MCG($S \smallsetminus P$)，用 tl($[f]_P$) 表示其在 $\mathcal{NC}(S \smallsetminus P)$上的稳定平移长度。我们称 $[f]_P$为 f的有限近似。
我们的第一个结果表明，如果一个同胚有许多周期点，那么它的稳定平移长度就是其有限近似的稳定平移长度的上确界。

Date：2026年1月8日。

定理 1.1 。设 S 是亏格至少为一的闭可定向曲面，且 $f \in \mathrm{Homeo}(S)$。如果周期点集 f 在 S中稠密，那么

$$\mathrm{tl}(f) = \sup_{P \in \mathcal{P}(f)} \mathrm{tl}([f]_P).$$

接下来我们证明，经由类胞映射半共轭的同胚具有相等的稳定平移长度：

定理 1.2. 设 S、S是亏格至少为一的闭可定向曲面，且 $f \in \mathrm{Homeo}(S)$ $\mathrm{Homeo}(S)$。假设 $q\colon S \to S$ 是 f 与 f之间的类胞半共轭。那么：

(1) $\mathrm{tl}(f) = \mathrm{tl}(f)$; *(2)* 对于任意 f-不变有限子集 $P \subset S$，以及任意满足$q(Q) = P$的 f-不变有限子集 $Q \subset S$，我们有

$$\mathrm{tl}([f]_Q) = \mathrm{tl}([\bar{f}]_{\bar{P}}).$$

作为这两个定理的推论，利用 Garc´ıa-Sassi 和 Tal [GT24], 的工作，我们可以证明，环面上同伦平凡同胚的稳定平移长度可由其有限近似的稳定平移长度逼近：

推论 1.3。 对于任意 $f \in \mathrm{Homeo}_0(T^2)$，我们有

$$\mathrm{tl}(f) = \sup_{P \in \mathcal{P}(f)} \mathrm{tl}([f]_P).$$

我们还知道，一般来说，推论中的上确界并不能取到：事实上，由于平移长度是连续的，存在具有无理渐近平移长度的环面上同伦平凡同胚，而以下结果表明，映射类的渐近平移长度总是有理数。

定理 1.4。 设 S 为一个亏格至少为一的曲面（不一定是闭曲面）。对于任意在 $\mathcal{NC}(S)$上双曲地作用的 $\varphi \in$ 映射类群(S)，存在 $m > 0$ 使得 φ^m 保持一条测地线不变。特别地， φ 的稳定平移长度是有理数。

通过 Bowditch 的工作，作用在曲线图上的映射类的稳定平移长度也是有理数 [Bow08], ；正如 Irmer 所证明的，作用在裤子图上的映射类也具有这一性质 [Irm15]。另一方面，注意到嵌入 $\mathcal{NC}(S) \hookrightarrow \mathcal{C}(S)$ 高度扭曲，因此我们无法利用 Bowditch 的结果来推导非分离曲线图上稳定平移长度的有理性。

最后，我们证明，对于一个相对于一个有限点集为伪阿诺索夫的同胚，其稳定平移长度与映射类相对于角-π 奇点的稳定平移长度相同：

命题 1.5。 设 $f \in \mathrm{Homeo}(S)$ 是相对于一个有限点集的伪阿诺索夫同胚。设 P_π 为角度-π 奇点的集合。则

$$\mathrm{tl}(f) = \mathrm{tl}([f]_{P_\pi}).$$

特别地，$\mathrm{tl}(f) \in \mathbb{Q}$。

因此，推论 1.3 中的上确界有时可以取到。

Acknowledgements

第一作者获得了法国国家研究署 MAGIC（ANR-23-TERC-0007）和 GALS（ANR-23-CE40-0001）项目的部分资助。前两位作者感谢 SPP 主会议（莱比锡，2025 年 3 月 31 日至 4 月 4 日），本研究的部分工作正是在会议期间完成的。

2. 预备知识

本文中，曲面均假定为连通、可定向且有限型，子曲面均为不可压缩、非周边且连通。除非另有说明，曲面均假定没有边界；一个显著的例外是给定曲面的子曲面。一个（子）曲面的复杂度 $\xi(S)$为 S $3g+n+b$，其中 g是 S的亏格， n是其 puncture 数量， b 是其边界分支数量。

假设曲线均为简单闭曲线。给定曲面 S 上的一条曲线 α ，我们用 $[\alpha]$ 表示其自由同伦类。除非另有说明，曲线还假设为本质的（即不围成至多含一个穿孔的圆盘）且非周边的（即不同伦于边界分支）。

若 $|\alpha\cap\beta| = \min\{|\alpha'\cap\beta'| \mid \alpha'\in[\alpha], \beta'\in[\beta]\}$.，则称两条曲线 α 和 β 处于最小位置

给定两个（不同的）曲线同伦类 a 和 b，由.....填充的 a 和 b子曲面，记为$\langle a,\ b\rangle$，是按如下方式得到的子曲面同伦类：选取处于最小位置的代表元 $\alpha\in a$ 和 $\beta\in b$ ，取其正则邻域 N ，并填入由 ∂N 的某个分支围成的每个至多含一个穿孔的圆盘。注意，若 $c,\ d$是 $\langle a,\ b\rangle$ 中的曲线，则 $\langle c,\ d\rangle\subset\langle a,\ b\rangle$ 在同伦意义下成立。

带边界曲面上的弧 是 $[0,1]$ 在某个嵌入下的像，该嵌入将区间的端点映到曲面的边界。假定弧是本质的，即不同伦于边界上的弧。

格罗莫夫双曲度量空间。 </style}若测地度量空间 是-双曲的，则其所有测地三角形都是 δ-薄的（即每条边都包含在另外两条边的 δ-邻域内）。给定这样的空间及一个等距变换 f，其稳定平移长度 $\mathrm{tl}(f)_X$定义为

$$\mathrm{tl}(f)_X := \lim_{n\to\infty}\frac{d(x,\ f^n(x))}{n},$$

其中 x是 X中的一点。众所周知，该极限存在且与点 x无关。若 $\mathrm{tl}(f)_X>0$，则称该等距变换为双曲的 。若 $\mathrm{tl}(f)_X=0$，则当轨道有界时，它是椭圆的 ；否则是抛物的 。

序列 $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}\subset X$ 是 K-拟测地线，如果对任意 $n,\ m\in\mathbb{Z}$ 都有

$$\frac{1}{K}|n-m|-K\le d(x_n,x_m)\le K|n-m|+K.$$

如果上述不等式在 $|n-m|<N$成立，则称其为 N-局部 K-拟测地线。

我们将使用关于 δ-双曲空间的两个众所周知的结果。第一个结果可以找到具有确定质量的拟轴（例如参见 [HL25，引理 3。6] 对于这一版本）：

引理 2.1。设 X 为一个 δ-双曲空间。

(1) 存在 $K=K(\delta)$ $L=L(\delta)$，使得：如果 f是 X 的一个等距变换，且 $\mathrm{tl}(f)_X\ge L$，并且 $x\in X$使 $d(x,f(x))$达到最小值，那么

$$\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} f^n([x,f(x)])$$

对于任意选择的测地线段 $[x,f(x)]$，它都是一个 K-拟测地线。

(2) 设 $K'>0$，且令 f 为 X 的等距变换。如果 $(f^n(x))n\in\mathbb{Z}$ 是一条 K'-拟测地线，那么对于每个 $n,\ k\ge1$

$$d(x,f^{nk}(x))\ge n(d(x,f^k(x))-2M),$$

其中 $M = M(K', \delta)$ 是 K'-拟测地线的莫尔斯常数。特别地，对于每个$k \geq 1$

$$\mathrm{tl}(f)_X \geq \frac{d(x, f^k(x))}{k} - \frac{2M}{k}.$$

第二个结果是一个众所周知的局部到整体性质（例如参见 [CDP90，第´1.4`定理，3]）：

引理 2.2。设 X 是一个 δ-双曲空间。对于每个 $K > 0$，都存在 $N = N(K)$ $K' = K'(K) > 0$，使得若 γ 是一个 N-局部 K-拟测地线，则 γ 是一个 K'-拟测地线。

（精细）曲线图。假设 S 是一个亏格至少为一的曲面。曲面的精细曲线图 $\mathcal{C}^\dagger(S)$ 是一个图，其顶点对应于曲线；当对应的曲线满足以下条件时，两个顶点之间有一条边：

- 不相交，若 S 的亏格至少为二，
- 若亏格为一，则至多相交一次。

曲线图 $\mathcal{C}(S)$是这样一个图：其顶点对应于曲线的同伦类，并且当相应类中存在满足下列条件的曲线时，两个顶点由一条边相连：

- 若 S 的亏格至少为二，则不相交，
- 若亏格为一，则至多相交一次。

以非分离曲线为顶点的 $\mathcal{C}^\dagger(S)$的子图是非分离精细曲线图$\mathcal{NC}^\dagger(S)$，而以非分离曲线的类为顶点的 $\mathcal{C}(S)$ 的子图是非分离曲线图 $\mathcal{NC}(S)$。注意，$\mathcal{C}^\dagger(S)$、$\mathcal{NC}^\dagger(S)$、$\mathcal{C}(S)$和 $\mathcal{NC}(S)$是 δ-双曲的，并且常数δ 的选取可以与曲面无关（参见 [BHW22、MM99、Aou13、Bow14、CRS14、HPW15]）。同胚群 Homeo(S)通过等距变换作用在 $\mathcal{C}^\dagger(S)$上，映射类群MCG(S)（即保向同胚在同伦意义下构成的群）通过等距变换作用在 $\mathcal{C}(S)$上。

回顾引言，对于曲面 S 的同胚 f，我们用 tl(f) 表示其在 $\mathcal{NC}^\dagger(S)$ 上的稳定平移长度。我们还用 $\mathcal{P}$(f) 表示集合

$$\mathcal{P}(f) := \{P \subset S \mid f(P) = P, |P| < \infty\}.$$

给定 $P \in \mathcal{P}(f)$，$[f]_P$ 表示映射类 $[f|_{S \smallsetminus P}] \in$MCG($S \smallsetminus P$)，而 tl($[f]_P$) 表示其在 $\mathcal{NC}(S \smallsetminus P)$ 上的稳定平移长度。

我们用 $d_S^\dagger$ 表示 $\mathcal{NC}^\dagger(S)$ 中的距离，用 $d_{S \smallsetminus P}$ 表示 $\mathcal{NC}(S \smallsetminus P)$ 中的距离。如果曲面 S 根据上下文是明确的，我们将分别简写为 $d^\dagger$ 和 d_P。

我们在此回顾局部近似结果 [BHW22，引理 3。4]（此处针对非分离精细曲线图表述），我们将在证明中使用该结果：

引理 2.3（[BHW22]）。设 α 和 β 是 S 上不同的横截的非分离曲线。假设它们在 $S \smallsetminus P$ 中处于最小位置，其中 $P \subset S$ 是一个与 α 和 β不相交的有限点集。则

$$d^\dagger(\alpha, \beta) = d_P([\alpha], [\beta]).$$

我们也将在此回顾子曲面投影的定义（另见 [MM00]）。设 $Z \neq S$ 是一个复杂度至少为 4 的子曲面。其弧与曲线图 $\mathcal{AC}(Z)$ 的顶点是 Z 中曲线与弧的同伦类（同伦变形将每个边界分支逐个作为集合固定），若两个顶点对应的类存在互不相交的代表元，则这两个顶点相邻。子曲面投影 π_Z 是映射 π_Z：$\mathcal{C}(S) \to \mathcal{P}(\mathcal{AC}(Z))$，定义如下：

- 若 $a \in \mathcal{C}(S)$ 可实现为与 Z 不相交，则 $\pi_Z(a) = \emptyset$;
- 如果 a 与 Z有本质交，则令 α 为一个与 Z的边界处于最小位置的代表元。于是， $\pi_Z(a)$是 $\alpha \cap Z$中所有（本质的）弧和曲线的同伦类集合。

~ ^ 如果 Z 是一个环带，我们则考察环形覆盖 Z 及其通过在无穷远处添加圆而得到的自然紧化 Z。定义 $\mathcal{AC}(Z)$为如下曲线图：其顶点是连接 Z的两个边界分支的弧，按逐点固定边界的同伦取商；如果存在内部不相交的代表弧，则两个顶点之间以一条边相连。随后，我们如下定义投影 π_Z： $\mathcal{C}(S) \to \mathcal{P}(\mathcal{AC}(Z))$:

- 如果 a 与 Z的核心曲线交数为零，则 $\pi_Z(a) = \emptyset$;
- 如果 a 与 Z 有本质交，则令 α 为一个与 $\mathbb{Z}$ 处于最小位置的代表元，并定义$\pi_Z(a)$为 α 的提升中连接 Z的两个边界分支的所有弧的同伦类集合。

类似地，我们可以定义层状 λ的子曲面投影：给定一个复杂度至少为四的子曲面 Z，我们可以将 λ 相对于 Z 置于最小位置；如果它与 Z相交，则将 $\pi_Z(\lambda)$定义为 $\lambda \cap Z$中所有曲线和弧的同伦类的集合，否则令 $\pi_Z(\lambda) = \emptyset$。如果 Z 是一个环带，我们也采用类似的处理方式。

注意，在所有情况下，如果 $\pi_Z(a) \neq \emptyset$（对于曲线或层状 a），投影中的弧和曲线两两不相交，因此投影的直径至多为一。
给定 $\mathcal{AC}(Z)$的两个非空子集 A 和 B， $d_Z(A, B)$表示 Z的弧与曲线图中A 与 B 之间的豪斯多夫距离。

Masur 和 Minsky 在 [MM00] 中证明了以下定理，称为 有界测地像定理：

定理 2.4 （有界测地像定理）。 设 S 是一个复杂度至少为三的曲面。那么存在一个仅依赖于 S 的常数 B，使得以下结论成立：对于每个Z（它要么是一个环带，要么复杂度至少为四），如果 $c_0, \ldots, c_n$ 是一条测地线，且对每个 i都有$\pi_Z(c_i) \neq \emptyset$，那么直径$\bigcup_{i=0}^{n} \pi_Z(c_i) \leq B$。

我们需要以下标准推论，它由定理 2.4、莫尔斯引理，以及子曲面投影沿其有定义的路径是利普希茨的这一事实推出：

推论 2.5 （有界拟测地像定理）。 设 S 是复杂度至少为三的曲面。对于每个 $K > 0$，存在一个常数 B，仅依赖于 S 和 K，使得以下结论成立：对于每个 Z（它是一个环带，或复杂度至少为四的子曲面），如果 c_0、……、c_n是一条 K–拟测地线路径，且对每个 i都有 $\pi_Z(c_i) \neq \emptyset$，那么 直径$\bigcup_{i=0}^{n} \pi_Z(c_i) \leq B$。

我们提醒读者， c_i 是一条拟测地线路径 （即曲线图中的一条拟测地线边路径）在此至关重要。

满足 Z使得 $\pi_Z(a) \neq \emptyset$对每个 $a \in \mathcal{NC}(S)$ 的子曲面称为 见证子曲面 对于 $\mathcal{NC}(S)$（见 [MS13],，其中这类曲面称为洞）。请注意，非分离曲线图的见证子曲面恰好是满亏格子曲面。

类胞集与映射。 我们需要点集拓扑中的几个定义和一个结论。曲面上的子集 K 若是一个嵌套闭圆盘族 D_i 的交，且对每个 i，都有 $D_{i+1} \subset \text{int}(D_i)$，则称其为类胞腔 。以下引理众所周知。由于我们未能找到相关出处，现附上证明概要。

引理 2.6。 平面上的子集 C 是类胞腔的，当且仅当它是紧致、连通的，且其补集连通。

证明。 紧致且连通空间的递减交集仍是紧致且连通的。此外，平面上闭圆盘的补集是连通的，而连通空间的递增并集也是连通的。由此得出直接方向的结论。设 C 是平面上的紧致连通子集，且其补集连通。根据标准分析论证，可以找到一个连续函数 $\Phi\colon \mathbb{R}^2 \to [0,+\infty)$，它恰好在 C 上为零，并且在 C 外光滑。设 (ε_i) 是 Φ 的一个递减正则值序列，且收敛于 0（由萨德定理保证）。对每个 i，令 D_i 为集合 $\Phi^{-1}([0,\varepsilon_i])$ 与其补集中所有有界连通分支的并集。每个 D_i 都是一个（光滑的）带边界曲面，且在平面中的补集连通，因此是一个圆盘。我们断言，所有 D_i 的交集等于 C。为证明非平凡的包含关系，取一点 x，它不属于 C。根据假设，存在一条从 x 到无穷远的路径 γ。当 i 足够大时，ϵ_i 小于 Φ 在 γ 上的下确界，因此 γ 与 D_i 的边界不相交；又因为 D_i 是一个圆盘，γ 也与 D_i 不相交。特别地，x 不属于 D_i。□

~设 S 为亏格至少为一的闭可定向曲面，且 $p\colon S \to S$ 为其万有覆盖。若紧子集 $C \subset S$ 是某个紧致连通集$\sim C$ 在 p 下的像，且该连通集与其在 p的所有自同构下的平移均不相交，则称其为 非本质的 。若紧致非本质集 C~ ~的补集也连通，则进一步称其为 填充的 。根据前一个引理，C 是类胞腔的，因此容易验证，紧致非本质填充集 C 也是类胞腔的。

连续映射 $q\colon X \to Y$若满足以下条件，则称其为曲面之间的 类胞腔：对每个 $y \in Y$，$q^{-1}(y)$ 都是类胞腔的。我们将使用以下事实，该事实证明见 [MR88]:

定理 2.7。 设 $q : X \to Y$ 是曲面之间的类胞映射。那么 q 是同胚映射的极限（在紧子集上一致收敛）。

3. Proving the comparison results

本节旨在证明比较结果：定理 1.1 和 1.2，以及推论 1.3。首先注意到，在定理 1.1 中，我们只需证明一个不等式，因为另一个显然成立：

注 3.1。 对于每个 $P \in \mathcal{P}(f)$，$\mathrm{tl}(f) \geq \mathrm{tl}([f]_P)$，因为投影 $\mathcal{NC}^\dagger(S) \to \mathcal{NC}(S \smallsetminus P)$是距离不增的。因此

$$\mathrm{tl}(f) \geq \sup_{P\in\mathcal{P}(S)} \mathrm{tl}([f]_P).$$

有了这条注记，我们来证明定理 1.1。

定理 *1.1*的证明。 根据注 3.1，只需证明

$$\mathrm{tl}(f) \leq \sup_{P\in\mathcal{P}(S)} \mathrm{tl}([f]_P);$$

我们将证明，对于每个 $\varepsilon > 0$，都存在 $P \in \mathcal{P}(f)$，使得 $\mathrm{tl}([f]_P) \geq \mathrm{tl}(f) - \varepsilon$。

若 $\mathrm{tl}(f) = 0$，结论显然成立。因此假设 $\mathrm{tl}(f) > 0$。不妨取一个幂，假设 $\mathrm{tl}(f) \geq L(\delta)$，其中 δ是 $\mathcal{NC}^\dagger(S)$ 的双曲性常数，而 $L(\delta)$ 由引理 2.1给出。

选取一条曲线 α，使 $d^\dagger(\alpha, f(\alpha))$ 最小。于是由引理 2.1，存在 $K = K(\delta)$，使得 $(f^n(\alpha))_{n\in\mathbb{Z}}$是条 K-拟测地线。令 $N = N(K+1)$ 和 $K' = K'(K+1)$ 由引理 2.2给出，并令 M 为 K'-拟测地线的莫尔斯常数。

固定 $\varepsilon > 0$；选择 $k \geq N$ 使得

- $\frac{2M+2}{k} < \frac{\varepsilon}{2}$, and
- $\frac{d^\dagger(\alpha, f^k(\alpha))}{k} \geq \mathrm{tl}(f) - \frac{\varepsilon}{2}$.

对于每个 $i=1,\dots,k$，令 α_i 为一条与 α 横截且与 $f^i(\alpha)$相距不超过 $\mathcal{C}^0$的曲线，使得

$$d^\dagger(\alpha_i, f^i(\alpha)) \le 2.$$

于是固定 $P\in\mathcal{P}(f)$，使得 α和 α_i 相对于 P 处于最小位置，其中 $i=1,\dots\dots,k$。P 的存在性源于这样的假设：f 的周期点在 S 中稠密。注意，对每个 i，都有 $d_P([f^i(\alpha)],[\alpha_i])\le 2$。

我们断言 $([f^n(\alpha)])_n\subset\mathcal{NC}(S\setminus P)$ 是一个 k-局部 $(K+4)$-拟测地线，因此根据引理 2.2，它是一个 K'-拟测地线。事实上，假设 $n,\ m\in\mathbb{Z}$ 满足 $|n-m|\le k$。不失一般性，假设 $n\le m$。于是，利用关于 α 的假设、α_i 的各项以及引理 2.3，我们得到：

$$\begin{aligned} d_P([f^n(\alpha)],[f^m(\alpha)]) &= d_P([\alpha],[f^{m-n}(\alpha)]) \ge d_P([\alpha],[\alpha_{m-n}])-2\\ &= d^\dagger(\alpha,\alpha_{m-n})-2 \ge d^\dagger(\alpha,f^{n-m}(\alpha))-4 \ge \frac{1}{K}(m-n)-K-4 \end{aligned}$$

and

$$d_P([f^n(\alpha)],[f^m(\alpha)]) \le d^\dagger(f^n(\alpha),f^{m-n}(\alpha)) \le K(m-n)+K.$$

根据引理 2.1，对于 $M=M(K',\ \delta)$，

$$\mathrm{tl}([f]_P) \ge \frac{d([\alpha],[f^k(\alpha)])}{k}-\frac{2M}{k} \ge \frac{d^\dagger(\alpha,f^k(\alpha))}{k}-\frac{2M+2}{k} \ge \mathrm{tl}(f)-\varepsilon.$$

□

为证明定理 1.2，我们需要以下结果：

引理 3.2。设 S 和 $\bar S$ 为曲面。假设 $q:\ S\to\bar S$ 是同胚序列 q_n在一致收敛意义下的极限。令 $\bar\alpha,\bar\beta\in\mathcal{NC}^\dagger(\bar S)$ 以及 $\alpha,\beta\in\mathcal{NC}^\dagger(S)$ 满足 $\alpha\cap q^{-1}(\bar\alpha)=\emptyset$且 $\beta\cap q^{-1}(\bar\beta)=\emptyset$。则

$$|d^\dagger_{\bar S}(\bar\alpha,\bar\beta)-d^\dagger_S(\alpha,\beta)|\le 2.$$

证明。选取充分小的正则邻域 $N(q(\alpha))$，使其为 $q(\alpha)$ 的正则邻域；并选取 $N(q(\beta))$，使其为 $q(\beta)$ 的正则邻域，从而

$$N(q(\alpha))\cap\bar\alpha=\emptyset$$

and

$$N(q(\beta))\cap\bar\beta=\emptyset.$$

于是，对于每个 n 充分大，$q_n(\alpha)\subset N(q(\alpha))$，且 $q_n(\beta)\subset N(q(\alpha))$，因此 $q_n(\alpha)\cap\bar\alpha=\emptyset$ 和$q_n(\beta)\cap\bar\beta=\emptyset$。这意味着 $|d^\dagger_{\bar S}(q_n(\alpha)\ q_n(\beta))-d^\dagger_{\bar S}(\bar\alpha,\ \bar\beta)|\le 2$。由于 q_n 是同胚，$d^\dagger_S(\alpha,\ \beta)=d^\dagger_{\bar S}(q_n(\alpha)\ q_n(\beta))$，所以

$$|d^\dagger_S(\alpha,\beta)-d^\dagger_{\bar S}(\bar\alpha,\bar\beta)|\le 2.$$

□

定理 *1.2* 的证明。(1) 取 $\bar\alpha\in\mathcal{NC}^\dagger(\bar S)$ 和 $\alpha\in\mathcal{NC}^\dagger(S)$，使得 $\alpha\cap q^{-1}(\bar\alpha)=\emptyset$。由定理 2.7，$q$ 是同胚的极限，因此我们可以将引理 3.2 应用于 $\bar\beta=\bar f^k(\bar\alpha)$ 和 $\beta=f^k(\alpha)$ 来推得，对于每个 k

$$|d^\dagger_S(\alpha,f^k(\alpha))-d^\dagger_{\bar S}(\bar\alpha,\bar f^k(\bar\alpha))|\le 2.$$

特别地，f 和 f 的稳定平移长度相同。

(2) 令 $\bar P,Q$ 如陈述所述。设 $Q^{\mathrm{sat}}:=q^{-1}(q(Q))=q^{-1}(\bar P)$。对于每个 $x\in Q$，我们都可以选取一个包含 $q^{-1}(q(x))$ 的开圆盘 D_x，使得这些圆盘的闭包两两不相交。给定 $S\setminus Q$ 上的一条本质曲线 α，我们可以将其同伦变形为一条与所有 D_x 不相交的曲线 α'。将 $[\alpha]\in\mathcal{NC}(S\setminus Q)$ 映射到同伦类 $[\alpha']\in\mathcal{NC}(S\setminus Q^{\mathrm{sat}})$ 的映射 φ，是两个图之间的等距变换，并且相对于 f 所诱导的作用是等变的。

接下来，定义一个等距变换 $\psi\colon \mathcal{NC}(S\smallsetminus Q^{\mathrm{sat}}) \to \mathcal{NC}(\bar{S}\smallsetminus P)$ 如下。由定理 2.7， q 是同胚 q_n 的极限。注意，对于 $S\smallsetminus Q^{\mathrm{sat}}$ 上的每条非分离曲线 α， $[q_n(\alpha)]\in\mathcal{NC}(\bar{S}\smallsetminus P)$ 最终会稳定为常数（因为 $q_n(\alpha)$ 是彼此正则邻域内的本质曲线）。因此，对于任意充分大的 n，我们定义 $\psi([\alpha]) = [q_n(\alpha)],$，此时同伦类已稳定。容易验证该映射定义良好且保持距离。为证明它是双射，只需注意其逆映射可按如下方式构造：给定 $[\beta]\in\mathcal{NC}(\bar{S}\smallsetminus\bar{P})$，在 $\bar{S}\setminus\bar{P}$ 中选取 β 的一个开正则邻域 $N(\beta)$。由于 $q^{-1}(N(\beta)) = \lim_{n\to\infty} q_n^{-1}(N(\beta))$，$q^{-1}(N(\beta))$ 是 $S\setminus Q^{\mathrm{sat}}$ 中的一个开环带，因此其中包含一条本质曲线 α，且在同伦意义下唯一。可以证明，将 $[\beta]$ 映射到类 $[\alpha]$ 的映射是 ψ 的逆映射。此外， ψ 相对于 f 和 $\bar{f}$ 所诱导的映射是等变的：事实上，对于任意 $[\alpha]\in\mathcal{NC}(S\smallsetminus Q^{\mathrm{sat}})$，对每个充分大的 n，都有 $\bar{f}_*\psi([f]_Q^{\mathrm{sat}}([\alpha])) = [q_n(f(\alpha))],$；并且对于每个充分大的 m， $[f]_{\bar{P}}(\psi([\alpha]) = [f(q_m(\alpha))]$。当 n 充分大时，存在一个正则邻域 $N(q_n(f(\alpha)))$，它包含 $q(f(\alpha)) = f(q(\alpha))$；若 m 充分大，则 $q_m(\alpha)$ 与 $q(\alpha)$ 足够接近，从而

$$N(q_n(f(\alpha)))\supset \bar{f}(q_n(\alpha)).$$

因此 $q_n(f(\alpha))$ 与 $f(q_n(\alpha))$ 同伦，即它们定义了同一个类。

这意味着

$$[\bar{f}]_{\bar{P}} = (\psi\circ\varphi)\circ[f]_Q\circ(\psi\circ\varphi)^{-1},$$

wh 存在一个等距变换 $\psi\circ\varphi$。特别地， $[f]_{\bar{P}}$ 和 $[f]_Q$ 具有相同的平移长度 . □

我们以本节 的结尾证明 $\mathrm{Homeo}_0(T^2$ 上稳定平移长度的近似结果).

推论的证明 *1.3*。 如果 f 不是双曲等距映射，结论显然成立。如果 f 是双曲的，那么根据 [BHM+22]，其旋转集有非空内部。因此，根据 [GT24]， f 可通过映射q 半共轭于 $g\in\mathrm{Homeo}_0(T^2)$，后者有稠密的周期点集。映射 q 是类胞腔映射，因为根据 [GT24，推论 5，7], 点的原像是非本质填充连续统，因此根据引理 2.6及其证明后的注释，它们是类胞腔的。因此，根据定理 1.2

$$\mathrm{tl}(f) = \mathrm{tl}(g)$$

以及根据定理1.1

$$\mathrm{tl}(g) = \sup_{P\in\mathcal{P}(g)} \mathrm{tl}([g]_P).$$

注意，对于每个 $x\in T^2$ 满足 g-周期的，原像 $q^{-1}(x)$ 都包含一个 f的周期点。事实上，适当取幂后，我们可以假设 x 是不动点。它的原像是一个在 f作用下不变的类胞腔连续统。应用 Cartwright-Littlewood 定理 [CL51]， $q^{-1}(x)$ 包含 f的一个不动点。

对于每个 $P\in\mathcal{P}(g)$，我们接着可以选取 $Q_P\in\mathcal{P}(f)$，使其包含于 $q^{-1}(P)$ 中，并且满足 $q(Q_P) = P$。由定理 1.2 可知，$\mathrm{tl}([f]_{Q_P}) = \mathrm{tl}([g]_P)$，因此：

$$\mathrm{tl}(f)\geq \sup_{Q\in\mathcal{P}(f)} \mathrm{tl}([f]_Q)\geq \sup_{P\in\mathcal{P}(g)} \mathrm{tl}([f]_{Q_P}) = \sup_{P\in\mathcal{P}(g)} \mathrm{tl}([g]_P) = \mathrm{tl}(g) = \mathrm{tl}(f).$$

□

4. Rationality of stable translation lengths on $\mathcal{NC}(S)$

The 本节的主要目标是证明定理 1.4。我们将从以下结果推导出它 :

定理 4.1。 设 S 是亏格至少为一的曲面，且 $\varphi\in$ 映射类群(S) 是一个伪阿诺索夫映射类。那么存在 $m>0$，使得 φ^m 在 $\mathcal{C}^{surv}(S)$ 上的作用具有一条不变测地线。

The 存活曲线图 $\mathcal{C}^{\mathrm{surv}}(S)$ 是 $\mathcal{C}(S)$ 的子图，其顶点对应于存活曲线的同伦类；也就是说，这些曲线不围成带 puncture 的圆盘。换句话说，存活曲线是在填入 S 的所有 puncture 后仍然本质的（“存活”）曲线。注意， $\mathcal{NC}(S) \subset \mathcal{C}^{\mathrm{surv}}(S)$，且当且仅当 S 的亏格为一时等号成立。此外，非分离曲线图与存活曲线图具有相同的见证子曲面。

为了从定理 1.4 推出定理 4.1 ，我们需要以下结果。

引理 4.2。 设 S 是一个亏格至少为一的曲面。那么，对于任意满亏格子曲面 Z ，嵌入 $\mathcal{NC}(Z) \hookrightarrow \mathcal{NC}(S)$ 和 $\mathcal{C}^{surv}(Z) \hookrightarrow \mathcal{C}^{surv}(S)$ 都是等距嵌入。

尽管这一结果专家们肯定早已知晓，但由于我们在文献中未能找到相关证明，因此补充证明如下。

证明。我们将 证明 $\mathcal{NC}(Z) \hookrightarrow \mathcal{NC}(S)$ 的情形。相同的证明也适用于 $\mathcal{C}^{\mathrm{surv}}(Z) \hookrightarrow \mathcal{C}^{\mathrm{surv}}(S)$.

设 a 和 b 属于 $\mathcal{NC}(Z)$，且 $c_0 = a$， c_1，……， $c_n = b$ 是 $\mathcal{NC}(S)$ 中连接它们的一条测地线。我们只需证明，在 $\mathcal{NC}(Z)$ 中存在一条连接 a 和 b 、长度为 n 的路径。为此，注意到由于 Z 是一个见证，其补分支只能是带 puncture 的圆盘， D_1，……， D_k。

固定一个子曲面 Z' ，它包含于 Z 的内部且与 Z 同位。令 P 为对所有分支 D_i 而言， D_i 中除一个 puncture 外的所有 puncture 的并集。令 $f\colon S \cup P \to \mathrm{int}(Z)$ 为一个在 Z' 上为恒等映射的同胚。选取 c_i 的代表元 γ_i ，使它们处于两两最小位置，从而 γ_0， $\gamma_n \subset Z'$。置 $\gamma_i' = f(\gamma_i)$。于是每个 γ_i' 都是 Z 中的非分离曲线，并且 $|\gamma_i' \cap \gamma_{i+1}'| = |\gamma_i \cap \gamma_{i+1}| \leq 1$，因此 γ_i' 的同伦类 c_i' 在 $\mathcal{NC}(Z)$ 中构成一条连接 a 和 b 的路径。□

现在我们来说明如何从定理 1.4 推出定理 4.1:

定理 1.4 的证明。设 $\varphi \in \mathrm{MCG}(S)$ 是 $\mathcal{NC}(S)$ 的一个双曲等距变换。根据 Nielsen–Thurston 分类以及 Masur 和 Minsky [MM99], 的工作，存在一个满亏格子曲面 Z ，它在 φ 作用下保持不变，且由 φ 在 Z 上诱导的映射类 ψ 是 Z的一个伪阿诺索夫映射类。根据定理 4.1，存在某个 $m > 0$ ，使得 ψ^m 在$\mathcal{C}^{\mathrm{surv}}(Z)$中有一条不变测地线 $\Gamma = (c_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ 。我们想证明，可以对它作修改，从而构造出 $\mathcal{NC}(Z)$中的一条 ψ^m-不变测地线。

如果 Z 的亏格为一，那么 $\mathcal{C}^{\mathrm{surv}}(Z) = \mathcal{NC}(Z)$，于是结论成立。现在设 Z 的亏格至少为二。我们可以假设 $m \geq 2$，从而对某个 $n \geq 2$，有 $\psi^m(c_0) = c_n$。如果 c_0 是分离曲线，那么 c_{-1} 和c_1 必定包含在 $S \smallsetminus c_0$ 的某个连通分支中（因为它们与 c_0 不相交，而且它们必须相交，因为二者的距离为二）。由于 c_0 是幸存的，在 $S \smallsetminus c_0$ 中有一个非分离曲线 c_0' ，它位于不包含 c_{-1} 和 c_1的那个连通分支中。对每个 $k \in \mathbb{Z}$，将 $\psi^{mk}(c_0)$替换为 $\psi^{mk}(c_0')$，并注意到我们仍然得到一条 ψ^m-不变测地线。对 c_1、……、 c_{n-1}重复这一过程；每当它们是分离曲线时，就将它们及其在 ψ^m 的幂作用下的迭代替换掉。所得测地线 Γ' 是 $\mathcal{NC}(Z)$ 中的一条 ψ^m- 不变测地线。根据引理 4.2， $\mathcal{NC}(Z)$ 等距嵌入到 $\mathcal{NC}(S)$ 中，因此 Γ' 是 $\mathcal{NC}(S)$ 中的一条 ψ^m-不变测地线，且由 Z中的曲线组成。因此，它是 $\mathcal{NC}(S)$中的一条 φ^m-不变测地线。□

在本节余下部分，我们的目标是证明定理 4.1。这将分两步完成：首先，我们证明具有良好局部有限性性质的特殊测地线的存在性。然后，我们采用 [Bow08] 中的相同策略，推导出对于任意伪阿诺索夫映射类，都存在一条被该映射类的某个幂保持不变的测地线。

注 4.3。 在本节余下部分中， d 表示存活曲线图中的距离；给定 S的一个子曲面 Z ， d_Z 表示 $\mathcal{AC}(Z)$中的距离。此外，我们会将 $\mathcal{C}^{\mathrm{surv}}(S)$中的某些曲线序列视为其他图（例如 $\mathcal{C}(S)$）中的路径。测地线和拟测地线这两个词始终指 $\mathcal{C}^{\mathrm{surv}}(S)$中的测地线和拟测地线；如果指的是其他图中的测地线或拟测地线，我们会明确说明

这一点。曲线图中的距离记为 $d_{\mathcal{C}}$。

设 λ 为填充层状，即其补分支中不含本质曲线的层状。若对于任意满足 $\pi_Z(c) \neq \emptyset$ 的子曲面 $Z \neq S$，都有 $d_Z(\pi_Z(c), \pi_Z(\lambda)) \leq C$，则称曲线 c 为 (λ, C)-型。若测地线 $\gamma = (c_i)_i$ 位于 $\mathcal{C}^{\mathrm{surv}}(S)$ 中，且对每个 i，c_i 都是 (λ, C)-型，则称其为 (λ, C)-型。

我们的目标将在下文的命题 4.7 中实现：证明给定一条曲线 a_0 以及一个具有吸引层状 λ^+的伪阿诺索夫映射类 φ，存在 $C > 0$，使得对于每个 $n \in \mathbb{N}$，在 $\varphi^{-n}(a_0)$ 与 $\varphi^n(a_0)$ 之间都有一条 (λ^+, C)-型测地线。

我们将用到以下事实：

引理 4.4. 设 φ 是一个伪阿诺索夫映射类，且 $a_0 \in \mathcal{C}^{surv}(S)$。存在常数 A、K 和 B，它们取决于 φ 和 a_0，使得：

(1) 对每个 $n \in \mathbb{Z}$ 及每个子曲面 Z，若 $\pi_Z(\varphi^n(a_0)) \neq \emptyset$，则

$$d_Z(\pi_Z(\varphi^n(a_0)), \pi_Z(\lambda^+)) \leq A;$$

(2) 任意连接 $\varphi^{-n}(a_0)$ 与 $\varphi^n(a_0)$ 的测地线都是曲线图中的一条 K-拟测地线。特别地，若 $(c_i)_i$ 是一条这样的测地线，且 Z 是一个子曲面，使得对 i_0 与 j_0 之间的每个 i，都有 $\pi_Z(c_i) \neq \emptyset$，

$$d_Z(\pi_Z(c_{i_0}), \pi_Z(c_{j_0})) \leq B.$$

证明。(1) 首先注意，存在一个序列 $m_i \to \infty$，使得$\varphi^{m_i}(a_0)$ 的测地线代表在豪斯多夫意义下收敛到一个包含 λ^+ 的层状（因为 λ^+ 是射影层状球面上 φ 的吸引不动点）。这意味着，对任意 Z，存在一个幂次 m，使得

$$d_Z(\pi_Z(\varphi^m(a_0)), \pi_Z(\lambda^+)) \leq 4.$$

因此，只需证明

$$d_Z(\pi_Z(\varphi^n(a_0)), \pi_Z(\varphi^m(a_0))) \leq A$$

对所有 n, m 都成立。这是一个众所周知的事实，为方便读者，我们略述证明。首先，将轨道 $\varphi^k(a_0)$ $k \in \mathbb{Z}$ 延伸为一条 φ–不变路径 ρ。由于该轨道是拟测地线，我们可以假设 ρ 是某个 $K > 0$ 的 K-拟测地线。

令 B 表示有界测地像定理（推论 2.5）中针对 K-拟测地线的常数。取足够大的 $n_0 > 0$，可知若 $d_Z(\pi_Z(\varphi^n(a_0)), \pi_Z(\varphi^m(a_0))) > A$，则存在一个指标 i，使得 $d_Z(\pi_Z(\varphi^i(a_0)), \pi_Z(\varphi^{i+n_0}(a_0))) > A - 2B$。具体而言，有界拟测地像定理允许我们舍弃位于 ∂Z 的 2–邻域之外的初始段和末尾段；路径在这些部分上的投影可能为空，但每段的代价是 B。

因此，只需在 $m = n + n_0$ 的情况下找到一个界。这直接源于以下事实：$\varphi^n(a_0)$ $\varphi^{n+n_0}(a_0)$ 之间的子曲面投影总是由这些曲线的交数所界，而该交数等于 $\varphi(a_0)$ $\varphi^{n_0}(a_0)$ 之间的交数，且与 Z 无关。

(2) 假设 $(c_i)_i$ 是存活曲线图中连接 $\varphi^{-n}(a_0)$ 与 $\varphi^n(a_0)$ 的一条测地线。注意，$(\varphi^j(a_0))_{j=-n}^{n}$ 是连接相同端点的一条 k_0-拟测地线，其中 k_0 仅取决于 φ 和 a_0，因为它在精细曲线图上作双曲平移。由莫尔斯引理可知，对每个 i，存在一个幂 $j(i)$，使得

$$d(c_i, \varphi^{j(i)}(a_0)) \leq M.$$

利用 c_i 是一条测地线这一点，我们得到

$$|k - l| = d(c_k, c_l) \leq d(\varphi^{j(k)}(a_0), \varphi^{j(l)}(a_0)) + 2M \leq k_0 |j(k) - j(l)| + k_0 + 2M.$$

现在，φ 也作为一个双曲元素作用于曲线图，因此 $(\varphi^j(a_0))_{j=-n}^{n}$ 是曲线图中的一条 k_1-拟测地线。由此可得

$$d_{\mathcal{C}}(c_k, c_l) \geq d_{\mathcal{C}}(\varphi^{j(k)}(a_0), \varphi^{j(l)}(a_0)) - 2M \geq \frac{1}{k_1}|j(k) - j(l)| - k_1 - 2M.$$

将这两者通过 $d(c_k、\ c_l) \geq d_{\mathcal{C}}(c_k、\ c_l)$ 结合起来，我们看到 c_i 是一个 $\mathcal{C}(S)$-拟测地线，其常数仅依赖于 $k_0、\ k_1、\ M$。

最后一句现在是有界拟测地像定理（推论 2.5）的直接推论。

□

构造特殊测地线的策略是，从 a_0 的迭代元之间的任意测地线出发，反复进行修改，直到找到具有所需性质的路径。我们将需要的基本过程是：将两条曲线 $a、\ b \in \mathcal{C}^{\mathrm{surv}}(S)$ 之间的测地线替换为一条由包含在由 a 和 b 填充的子曲面中的曲线组成的测地线：

引理 4.5。令 $a、\ b \in \mathcal{C}^{surv}(S)$。则存在一条连接它们的测地线，使得所有曲线都包含在 $\langle a、\ b\rangle$ 中。

证明。若 a 和 b 填充一个见证 Z，则由 $\mathcal{C}^{\mathrm{surv}}(Z)$ 等距嵌入于 $\mathcal{C}^{\mathrm{surv}}(S)$ 这一事实可得结论（引理 4.2）。否则，$\langle a, b\rangle$ 的补集中存在一条幸存曲线，因此 $d(a, b) \leq 2$。若距离为一，结论显然成立，故设距离为二。由于 $\langle a, b\rangle$ 的补集中存在一条幸存曲线，$\langle a, b\rangle$ 的边界分支不可能全都是带 puncture 的圆盘的边界，也就是说，不可能全都不幸存。因此，我们可以选取一个幸存的边界分支 c，而路径a, c, b是包含于 $\mathcal{C}^{\mathrm{surv}}(\langle a, b\rangle)$ 中的一条测地线。□

接下来，我们使用引理 4.5 证明存在相对于子曲面投影表现良好的测地线。

引理 4.6。设 $a、\ b \in \mathcal{C}^{surv}(S)$。则存在一条测地线 $c_0 = a、\ c_1、\ \ldots、\ c_m = b$，使得对每个$0 \leq i \leq j$、$c_i \subset \langle c_0、\ c_j\rangle$均成立。特别地，对于任意满足 $\pi_Z(c_1) \neq \emptyset$的子曲面 Z，要么 $\pi_Z(a) \neq \emptyset$，要么 $\pi_Z(c_j) \neq \emptyset$ 对所有 $j \geq 1$ 均成立。

证明。由引理 4.5，a和 b可以由一条测地线 $b_0, \ldots, b_m$ 连接起来，该测地线包含于 $\langle a$中，$b\rangle$。再次应用该引理，将 b_0 与 b_{m-1} 之间的测地线替换为一条包含于 $\langle b_0$中的测地线，$b_{m-1}\rangle$。继续依次替换越来越短的初始子线段。将 $c_0 = a、\ c_1、\ \ldots、\ c_m = b$称为最终测地线。根据构造，每个 c_j 都包含于 $\langle c_0$中，$c_{j+1}\rangle$因此

$$\langle c_0, c_1\rangle \subset \langle c_0, c_2\rangle \subset \cdots \subset \langle c_0, c_m\rangle$$

因此，对于每个 $0 < i \leq j$，c_i 都包含在 $\langle c_0、\ c_j\rangle$ 中。

现在令 Z 为一个子曲面，使得 $\pi_Z(c_1) \neq \emptyset$，并假设 $\pi_Z(c_0) = \emptyset$。由于对于每个 $j \geq 2$，都有 $c_1 \subset \langle c_0$，$c_j\rangle$，因此 c_j 在 Z 上必有非空投影。□

命题 4.7。固定 $a_0 \in \mathcal{C}^{surv}(S)$ 以及一个伪阿诺索夫映射类 φ，其吸引层状为λ^+。令 A 和 B 为引理 4.4中的常数，并设 $C := A + 2B$。那么，对于每个 n，在 (λ^+, C)之间存在一条类似于 $\varphi^{-n}(a_0)$ 和 $\varphi^n(a_0)$的测地线。

证明。我们从端点之间任意一条测地线出发，构造一个有限的测地线序列，其中每条测地线都是通过修改前一条得到的，使得最后一条是（λ^+，C）-型的。为此，我们将反复使用引理 4.6，见图 1。

从任意一条测地线 $c_0^{(0)} = \varphi^{-n}(a_0)$ $c_1^{(0)}, \dots, c_m^{(0)} = \varphi^n(a_0)$ 开始。对于每个介于 1 和 $m-1$ 之间的 i，令

$$c_0^{(i)} = \varphi^{-n}(a_0), c_1^{(i)}, \dots, c_m^{(i)} = \varphi^n(a_0)$$

是由.....得到的测地线

$$c_0^{(i-1)} = \varphi^{-n}(a_0), c_1^{(i-1)}, \dots, c_m^{(i-1)} = \varphi^n(a_0)$$

通过替换

$$c_{i-1}^{(i-1)} =, c_1^{(i-1)}, \dots, c_m^{(i-1)}$$

为引理给出的测地线4.6。请注意，根据构造：

- for every $j \le i$, $c_j^{(i)} = c_j^{(i-1)}$;
- for every i, $c_0^{(i)} = \varphi^{-n}(a_0)$ and $c_m^{(i)} = \varphi^n(a_0)$.

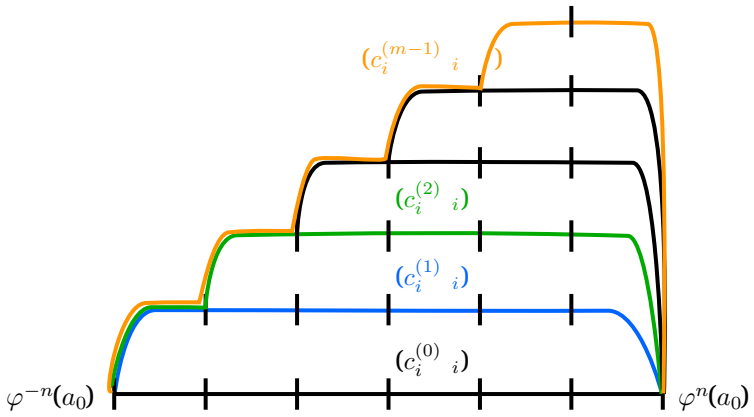

FIGURE 1. 该构造（λ^+, C）型测地线的示意图

我们断言，$(c_i)_i := (c_i^{(m-1)})_i$ 是（λ^+, C）型的。事实上，固定 i 并令 Z 为一个子曲面，使得 $\pi_Z(c_i) \neq \emptyset$。若对每个 $j \le i$， c_j 在其中的投影非空，根据引理 4.4 可得

$$d_Z(\pi_Z(c_i), \pi_Z(\lambda^+)) \le d_Z(\pi_Z(c_i), \pi_Z(\varphi^{-n}(a_0))) + d_Z(\pi_Z(\varphi^{-n}(a_0)), \pi_Z(\lambda^+)) \le B + A.$$

否则，令 $k \ge 1$ 为满足 $\pi_Z(c_{i-k}) = \emptyset$的最小整数。考察 c_{i-k+1}。由引理4.6应用于 $(c_j^{(i-k+1)})_{j=i-k}^m$可知， $\pi_Z(c_j^{(i-k+1)}) \neq \emptyset$ 对每个 $j \ge i-k+1$都成立，因此由引理4.4

$$d_Z(\pi_Z(c_{i-k+1}), \pi_Z(\varphi^n(a_0))) \le B.$$

由于 $\pi_Z(c_j) \neq \emptyset$ 对每个 $j = i-k+1, \dots i$，再次由引理4.4 可得

$$d_Z(\pi_Z(c_i), \pi_Z(c_{i-k+1})) \le B.$$

将这两个估计与引理4.4 结合，得到

$$d_Z(\pi_Z(c_i), \pi_Z(\lambda^+)) \le 2B + A.$$

□

用 $\mathcal{C}_{(\lambda^+,C)}(S)$ 表示 (λ^+, C)-类曲线的集合。对于 $a, b \in \mathcal{C}^{\text{surv}}(S)$，令 $\mathcal{G}_{(\lambda^+,C)}(a, b)$ 表示 a 与 b 之间的 (λ^+, C)-类测地线的集合。

我们有如下局部有限性结果：

引理 4.8. 对于每个 R，都存在一个仅取决于 R、S 和 C 的 N，使得对于每个 $c \in \mathcal{C}_{(\lambda^+,C)}(S)$，

$$\left|B_R(c) \cap \mathcal{C}_{(\lambda^+,C)}(S)\right| \leq N.$$

要证明这一结果，我们可以应用 [Wat16，定理 A]，，只需注意到$B_R(c)\cap\mathcal{C}_{(\lambda^+,C)}(S)$ 到任意子曲面的投影直径都被 $\max\{R, 2C\}$ 所界，因此根据 Watanabe 定理，$B_R(c)\cap\mathcal{C}_{(\lambda^+,C)}(S)$ 的大小被 $N_S(\max\{R, 2C\},$ 2) 所界。另一方面，我们可以利用曲面标记图的局部有限性，更直接地证明该引理，如下所述。

关键是下面这个结果，它可能是众所周知的。

引理 4.9。 存在一个 $D > 0$，其仅取决于曲面的拓扑，使得以下结论成立。设 a 是一条曲线，λ 是一个终止层状结构。那么存在一个完备清洁标记 μ（按照 *Masur-Minsky* 的定义），使得

> *(1)* a 是 μ中的一条基曲线，并且 *(2)* 对于每个与 α 不相交的子曲面 Y，我们有
>
> $$d_Y(\mu, \lambda) \leq D.$$

证明。 我们首先提出一个断言：存在一个数 D_0，使得下述结论成立。若 a是任意一条曲线，且 A 是基于 a 的多弧（即 $S - a$上的有限个两两不相交、适当嵌入的弧，且其中任意两条弧作为此类弧都不同位），那么存在一个标记 μ，其中 a 是一条基曲线，并且它与 A 中的每条弧至多相交 D_0 个点。该断言成立，因为在 $S - a$的映射类群作用下，多弧只有有限个等价类。

现在，对 A （$S - a$）$\cap\lambda$中不同同伦类的弧所成的集合应用该断言，即可推出引理。若 Y是任意一个与 α不相交的子曲面，那么根据构造，π_Y（μ）中的一条弧与π_Y（λ）中的一条弧至多相交 D_0 个点，由此可得引理对 $D = D_0 + 1$成立。□

我们现在一次性固定 D，并将具有引理所述性质的 μ 称为 λ*–extension of* a。

推论 4.10。 存在一个常数 $K > 0$，使得以下结论成立。设 a、a' 是两条（λ^+、C）*–like* 曲线，且 μ、μ' 分别是 a、a'的 λ^+*–extensions*。那么

$$d_{\mathcal{M}}(\mu, \mu') \leq K d_{\mathcal{C}}(a, a') + K.$$

证明。 这是标记的 Masur-Minsky 距离公式的直接推论——每个真子曲面投影项

$$d_Y(\mu, \mu') \leq 2\max\{C, D\}$$

对于 $Y \neq S$都一致有界。 □

引理 4.8 的证明。令 μ 为 c的 λ^+–extension。根据推论，若 $d \in B_R$（c）也是（λ^+、C）-like，且 η 是 d 的 λ^+-extension，那么标记图中 μ与 η 之间的距离至多为$R = K$（$R + 1$）。由于标记图是一致局部有限的，标记图中的任意 R–球至多包含 N（R）个元素。这表明（$3g - 3$）N（R）$= N$具有所需性质。□

第一个推论是，在 φ 的无穷远点之间存在（λ^+，C）型测地线。

引理 4.11。 在 λ^- 和 λ^+ 之间存在 （λ^+、C）型测地线。

证明与 [Bow08，引理 31], 相同；为完整起见，我们在此略述。

证明。考虑 $c_n = \varphi^n(a_0)$，其中 $n \in \mathbb{Z}$。对于任意 $R \geq 0$，以及任意充分大的 n，m，$\mathcal{G}_{(\lambda^+,C)}(c_{-m}, c_m)$ 和 $\mathcal{G}_{(\lambda^+,C)}(c_{-n}, c_n)$ 中的测地线在 $B_R(c_0)$ 中一致接近，因此根据有限性结果（引理 4.8），我们可以找到一列测地线，它们连接 a_0 的越来越大的正向和反向迭代，并在 $B_R(c_0)$ 中重合。利用对角线论证，我们找到一列在越来越大的球上重合的测地线，因此它们收敛到一条连接 λ^- 和 λ^+ 的测地线。由于具有 (λ^+, C)-like 的性质是局部性质，极限测地线在 (λ^+, C)-like 中。□

令 $\mathcal{G}_{(\lambda^+,C)}(\lambda^-, \lambda^+)$ 为 λ^- 与 λ^+之间的 (λ^+, C)-类测地线集合。记 $G_{(\lambda^+,C)}(\lambda^-, \lambda^+)$ 为包含在 $\mathcal{G}_{(\lambda^+,C)}(\lambda^-, \lambda^+)$ 中某条测地线内的所有曲线的集合。

引理4.12。我们有 $\varphi(G_{(\lambda^+,C)}(\lambda^-, \lambda^+)) = G_{(\lambda^+,C)}(\lambda^-, \lambda^+)$，且 φ 在 $G_{(\lambda^+,C)}(\lambda^-, \lambda^+)$上的限制只有有限多个轨道。

证明。 φ 对一条 (λ^+, C)-类曲线的像是一条 (λ^+, C)-类曲线，因此 $G_{(\lambda^+,C)}(\lambda^-, \lambda^+)$ 在 φ 作用下保持不变。任取一个基点 c_0，并令 $c_n = \varphi^n(c_0)$，其中 $n \in \mathbb{Z}$。序列 $(c_n)_n$ 是一条拟测地线；令 M 为相应的莫尔斯常数。根据莫尔斯引理，每个点 $x \in G_{(\lambda^+,C)}(\lambda^-, \lambda^+)$ 若位于一条 (λ^+, C)-类测地线上，则它到某个 c_n 的距离不超过 M，因此我们得到

$$d(x, \varphi(x)) \leq 2M + d(c_n, c_{n+1}) = 2M + d(c_0, \varphi(c_0)) := R.$$

现在令 Γ_0 为任意一条 (λ^+, C)-类测地线，并注意到 $G_{(\lambda^+,C)}(\lambda^-, \lambda^+)$ 包含在 2δ-邻域 Γ_0中。由此可知，点 $G_{(\lambda^+,C)}(\lambda^-, \lambda^+)$ 的每个轨道都会与 2δ-邻域内某个长度为 Γ_0 的子线段相交 $R + 4\delta$。由局部有限性（引理 4.8），取 $R = 2\delta$，该集合至多有 $(R + 4\delta)N$ 个元素。□

记 p_Γ 为到某条 (λ^+, C)-类测地线 Γ的最近点投影，并记 $<_\Gamma$ 为沿着 Γ 从λ^- 到 λ^+的顺序。下面的引理想必广为人知，而且证明定理 4.1实际上并不需要它；不过，它有助于阐明证明。

引理 4.13。假设 $\mathrm{tl}(\varphi) \geq 10\delta$。那么对于每个 $x \in G_{(\lambda^+,C)}(\lambda^-, \lambda^+)$，我们有

$$p_\Gamma(x) <_\Gamma p_\Gamma(\varphi(x)).$$

证明。 *</style}*对于某个，这个不等式显然成立，因为任意 的轨道都趋于 。如果某个满足反向不等式，那么沿着从 到 、位于 的邻域内的任意路径，我们都能找到两个相邻点，y'，使得 x' 满足所需的不等式，而 y' 满足反向不等式。但由于 $\varphi(x')$ $\varphi(y')$也相邻，这意味着 $d(x', \varphi(x')) < 10\delta$，这与我们关于平移长度的假设矛盾。□

现在，为了证明定理 4.1，可以使用与 [Bow08 的引理 3.4 和推论 3。5]相同的论证。这里我们给出另一种论证。

定理 *4.1* 的证明。设 $\varphi \in$ 映射类群(S) 是一个伪阿诺索夫映射类。引理 4.11 给出一条 (λ^+, C)-类测地线 $\Gamma = (c_i)_{i\in\mathbb{Z}}$，连接 λ^-，λ^+ 的 φ不动点。将 φ替换为它的某个幂后，我们可以假设 $\mathrm{tl}(\varphi) \geq 10\delta$，因此引理 4.13 适用。

首先注意到，存在某个 $m > 0$ 使得 $\Gamma \cap \varphi^{-m}(\Gamma)$ 是无限的。事实上，设 $M > 0$ 满足 $\varphi^{-1}\Gamma$、……、$\varphi^{-M}\Gamma$ 中没有任何一个与 Γ有无限多个公共点；当 M 很大时，我们将得到矛盾。注意到这些测地线两两相交于有限多个点。因此，当 i足够大时，球 $B_{2\delta}(c_i)$ 中没有任何一点属于这些测地线中的两条以上。另一方面，根据双曲性，这些测地线中的每一条都必须与该球相交，因此该球至少包含 M 个点。当 M 大于由局部有限性（引理 4.8）给出的球的基数 N 时，便得到矛盾。

因此，固定某个 m ，使得 $\Gamma \cap \varphi^{-m}(\Gamma)$ 是无限的。由于 Γ 只与 φ的有限多个轨道相交，集合 $\Gamma \cap \varphi^{-m}(\Gamma)$ 包含某个点 c的轨道中的无限多个点。将 φ 改为 φ^{-1}后，不妨假设这些点中有无限多个包含在 c的正半轨道中。记 $\gamma = [c\varphi^m(c)]$ 为连接 c 与 $\varphi^m(c)$ 的一条测地线段，并令 $\ell := d(c,\ \varphi^m(c))$。

断言：对于每个 $p > 0$，我们有 $d(c, \varphi^{pm}(c)) = p\ell$。

注意，若我们证明了该断言，则路径

$$\bigcup_{p\in\mathbb{Z}} \varphi^{pm}(\gamma)$$

是一条对 φ^m 不变的测地线，因此结论成立。

现在来证明该断言，并令 $p > 0$。根据假设，我们可以找到 c_1'、…、c_p'这些点，它们属于 c的正向轨道，且属于 Γ；它们在 φ^m 下的像也属于 Γ。经过抽取（并利用引理 4.13），我们还可以假设沿着 Γ 的顺序为

$$c,\ c_1',\ \varphi^m(c_1'),\ c_2', \varphi^m(c_2'),\ \dots,\ c_p',\ \varphi^m(c_p'),$$

因此存在整数 N_1、…、N_p，使得这些点依次由 c经过 φ^{N_1}、φ^m、φ^{N_2}、φ^m 等作用得到。换言之，我们有：

$$c,\ c_1' = \varphi^{N_1}(c),\ \varphi^m(c_1'),\ c_2' = \varphi^{m+N_2}(c_1'),\ \varphi^m(c_2'),\ \dots,\ c_p' = \varphi^{m+N_p}(c_{p-1}'),\ \varphi^m(c_p').$$

注意，由于 φ是等距变换，对于每个整数 n 以及 c的轨道上的每个点 x ，都有$d(x,\ \varphi^n x) = d(c,\ \varphi^n c)$。对于每个 i，记 $\ell_i = d(c,\ \varphi^{N_i}(c))$。因此，从 c到 $c' = \varphi^{(mp+\sum N_i)}(c)$ 的测地线 Γ中，子线段 Γ_0的长度为 $L = p\ell + \sum \ell_i$。现在，我们通过“剪切并粘贴”来重新排列 Γ_0 的子线段，从而构造一条端点相同的另一条路径：将长度为 m 的子线段放在所有其他子线段之前。具体来说，我们考虑路径

$$\Gamma_1 = [c\varphi^m(c)]\cup\cdots\cup[\varphi^{(p-1)m}(c)\varphi^{pm}(c)]\cup[\varphi^{pm}(c)\varphi^{pm+N_1}(c)]\cup\cdots\cup[\varphi^{pm+N_1+\cdots+N_{p-1}}(c)\varphi^{pm+N_1+\cdots+N_p}(c)]$$

（其中 $[xy]$ 通常表示一条连接 x 和 y的测地路径）。注意， Γ_1 与 Γ_0长度相同$L = p\ell + \sum \ell_i$ 且端点相同，因此它是一条测地路径。结论得证。□

本节最后证明命题1.5，即证明相对于一组点为伪阿诺索夫的同胚，其稳定平移长度与相对于角度-π奇点的映射类相同。

命题的证明 *1.5.* 设 $f \in \mathrm{Homeo}(S)$ 是相对于一个有限点集的伪阿诺索夫同胚。固定一条 s不包含任何奇点的稳定叶线段，并考察所有不经过奇点、两个端点都在 s 上且内部不与 s相交的不稳定叶线段。将 s 压缩为一个点，并注意到由此得到的环的集合生成曲面的基本群，因为非稳定叶状结构是充满的。特别地，其中一个环必定是非分离的。

于是，我们可以选取一条非分离曲线 α ，它由一条稳定线段 s 和一条不稳定线段u构成，且不经过任何奇点。设 p和 q 是 s 与 u的交点。 p 的一个足够小的邻域 U 可以被识别为带有垂直和水平叶状结构的一个开子集 $\mathbb{R}^2$ ，并假设 p 被识别为 $(0,\ 0)$。我们可以假设 $U\cap s$ 对应于正 x轴上的一条线段，而 $U\cap u$ 对应于正 y轴上的一条线段。给定 U中的p' ，我们可以考虑从 p' 出发并从 p' 向右延伸的稳定半叶，以及从 p' 出发并向上延伸的不稳定半叶。如果 p' 足够靠近 p，这两条半叶会分别与 s和u 足够接近地并行前进足够长的距离，从而在靠近 q 处相交于一点 q' 。此时，若考察 p' 与 q'之间的叶线段 s' 和 u' ，便得到一条与 α同伦、与其不相交且不经过任何奇点的曲线 α' 。

利用这一 构造，以及伪阿诺索夫同胚的周期点稠密性，u
p 至将 p 移动小段距离并取其某个幂后，我们可以假设 p 是不动点。

我们的目标是证明，对于任意 $n \geq 0$， $d^{\dagger}(f^n(\alpha)\ \alpha)$ 与其类在 $S \smallsetminus P_\pi$ 中的距离至多相差 1，其中 P_π 是 f 的角度为 π 的奇点集合。这意味着， f 在 $\mathcal{NC}^{\dagger}(S)$ 上作用的稳定平移长度，与 $[f]_{P_\pi}$ 在 $\mathcal{NC}(S \smallsetminus P_\pi)$ 上作用的稳定平移长度相同。

根据我们的假设， $f^n(\alpha) = f^n(u) \cup f^n(s)$，其中 $f^n(s)$ 从 p 出发并包含于 s，而 $f^n(u)$ 从 p 出发并包含 u。将 p 稍微移动一下，可以找到一条曲线 α_n，它也由稳定线段 s_n 和不稳定线段 u_n 组成，与 $f^n(\alpha)$ 不相交，且相对于 P_π 与之同伦。此外，我们可以假设 $s_n \cap u = \emptyset$。现在考察由 α 和 α_n 构成的任意一个双边形。它只能由一条稳定叶线段和一条不稳定叶线段构成。根据奇异度量的高斯–博内定理，这样的双边形内的总曲率为 2π 或 π，具体取决于图 2 中出现的情形，因此双边形必定包含一个角度为 π 的奇点。或者，也可以运用指标理论，注意到双边形中某个叶状结构的总指标为 1 或 $1/2$。因此，这两条曲线相对于 P_π 处于最小位置，我们可以利用引理 2.3 推出

$$d_{P_\pi}([f^n(\alpha)],[\alpha]) = d_{P_\pi}([\alpha_n],[\alpha]) = d^{\dagger}(\alpha_n,\alpha).$$

由于 $|d^{\dagger}(f^n(\alpha)\ \alpha) - d^{\dagger}(\alpha_n,\alpha)| \leq 1$，我们得到

$$|d^{\dagger}(f^n(\alpha),\alpha) - d_{P_\pi}([f^n(\alpha)],[\alpha])| \leq 1,$$

如所需。 □

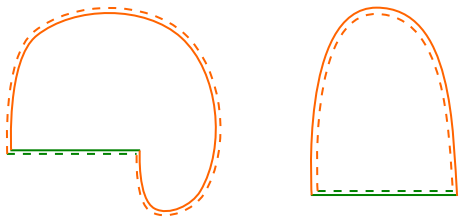

FIGURE 2. 由 $f^n(\alpha)$ 构造 α_n (虚线)

REFERENCES

[Aou13] Tarik Aougab. 曲线图的统一双曲性。 *Geom. Topol.*, 17(5):2855–2875, 2013. [BHM+22] Jonathan Bowden、Sebastian Hensel、Kathryn Mann、Emmanuel Militon 和 Richard Webb. 旋转集与曲线上的作用。 *Adv. Math.*, 408:第 108579 号论文，33 页，2022 年。[BHW22] Jonathan Bowden、Sebastian Wolfgang Hensel 和 Richard Webb. 曲面微分同胚群上的拟态射。 *J. Amer. Math. Soc.*, 35(1):211–231, 2022. [BHW24] Jonathan Bowden、Sebastian Hensel 和 Richard Webb. 探索精细曲线图的边界。*arXiv e-prints*, arXiv:2402.18948，2024 年 2 月。[Bow08] Brian H. Bowditch. 曲线复形中的紧测地线。 *Invent. Math.*, 171(2):281–300, 2008. [Bow14] Brian H. Bowditch. 曲线图的统一双曲性。 *Pacific J. Math.*, 269(2):269–280, 2014. [CDP90] M. Coornaert、T. Delzant 和 A. Papadopoulos. *Géométrie et théorie des groupes* 1441 *Lec-* , 第 卷。施 *ture Notes in Mathematics* 1990 普林格出版社，柏林，。格罗莫夫双曲群。 [格罗莫夫双曲群], 附有英文摘要。[CL51] M. L. Cartwright 和 J. E. Littlewood. 一些不动点定理。 *Ann. of Math. (2)*, 54:1–37, 1951。附录由 H. D. Ursell 撰写。[CRS14] Matt Clay、Kasra Rafi 和 Saul Schleimer. 通过手术序列证明曲线图的一致双曲性。*Algebr. Geom. Topol.*, 14(6):3325–3344, 2014. [Ein24] Nastaran Einabadi. 环面微分同胚在精细曲线图上的抛物作用与非适当作用及其广义旋转集。 *arXiv e-prints*, arXiv:2405.19123, 2024 年 5 月。[GM23] Pierre-Antoine Guih ´eneuf 和 Emmanuel Militon. 高亏格曲面的精细曲线图上的双曲等距变换。 *arXiv e-prints*, arXiv:2311.01087，2023 年 11 月。

[GM24] Pierre-Antoine Guih´eneuf 和 Emmanuel Militon. 环面精细曲线图上的抛物等距变换。
Proc. Lond. Math. Soc. (3), 129(2):第 e12625 号论文，27 页，2024 年。[GT24] Alejo Garc´ıa-Sassi 和 F´abio Armando Tal. 某些环面同胚的完全混沌保守模型。 *arXiv e-prints*, arXiv:2404.02341，2024 年 4 月。[HL25] Sebastian Hensel 和 Fr´ed´eric Le Roux. 环面同胚的精细曲线图中的旋转集与轴。 *arXiv e-prints*, arXiv:2509.26156，2025 年 9 月。[HPW15] Sebastian Hensel、Piotr Przytycki 和 Richard C. H. Webb. 弧图和曲线图中的 1-纤细三角形与一致双曲性。
J. Eur. Math. Soc. (JEMS), 17(4):755–762, 2015. [Irm15] Ingrid Irmer. 裤子图上的稳定长度为有理数。
New York J. Math., 21:1153–1168, 2015. [MM99] Howard A. Masur 和 Yair N. Minsky. 曲线复形的几何。I. 双曲性。
Invent. Math., 138 1 103( ): –149, 1999. [MM00] H. A. Masur 和 Y. N. Minsky. 曲线复形的几何。II. 层级结构。
Geom. Funct. , ( ): – . [
Anal. 10 4 902 974, 2000
MR88] W. J. R. Mitchell 和 D. Repov˘s. 类胞映射的拓扑。第 58 卷，第 265–300 页。1988。微分几何与拓扑学会议（撒丁岛，1988 年）。[MS13] Howard Masur 和 Saul Schleimer. 圆盘复形的几何。 *J. Amer. Math. Soc.*, 26 62, 2013 1 1( ): – .[
Wat16] Yohsuke Watanabe. 通过子曲面投影证明曲线图的一致局部有限性。
Groups Geom. , ( ): – .
Dyn. 10 4 1265 1286, 2016

Email address: federica.fanoni@u-pec.fr

CNRS, Univ Paris Est Creteil, Univ Gustave Eiffel, LAMA UMR8050, F-94010 Creteil, France

Email address: hensel@math.lmu.de

Mathematisches Institut der Universität München, Theresienstr. 39, 80333 München, Germany

Email address: frederic.le-roux@imj-prg.fr

IMJ-PRG, Sorbonne Université, 4 place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France