arXiv:2601.03437v1 [math.CO] 6 Jan 2026

量子 k-Bruhat序

Laura Colmenarejo* 和 Nicholas Mayers**

*北卡罗来纳州立大学数学系，北卡罗来纳州罗利，邮编 27605**肯尼索州立大学数学系，佐治亚州肯尼索，邮编 30144

2026年1月8日

摘要

本文拓展了对量子 k-Bruhat序的研究。Benedetti、Bergeron、Colmenarejo、Saliola 和 Sottile 在关于量子 Murnaghan-Nakayama 规则的工作中开启了这项研究。具体而言，我们将量子 k-Bruhat序区间中的极大链对应于对换序列，并研究一个与之自然关联的自由幺半群 $\mathcal{F}_n^{\mathbf{q}}$，它在 S_n的 q-扩张上有作用，记作 $S_n[\mathbf{q}],$ ，用于编码量子 k-Bruhat序的链结构。除大量结构性结果外，我们的主要贡献是识别出 $\mathcal{F}_n^{\mathbf{q}}$ 的元素作为作用于$S_n[\mathbf{q}]$上的算子时所满足的一大类等价关系。事实上，我们猜想所列的等价关系已完整无遗。作为量子 Monk 规则的推论，全面理解这类等价关系有助于深入了解量子舒伯特多项式的乘法结构。

关键词： 舒伯特多项式、量子舒伯特多项式、 k-Bruhat序、量子 k- Bruhat序、偏序集、幺半群

1 引言

舒伯特 [1, 3, 6, 8, 17, 21, 25, 26] 与量子舒伯特多项式 [9, 14, 15, 18] 是以置换为指标的两个多项式族，其乘法结构备受关注。从经典情形出发，在几何上，舒伯特多项式是旗簇 [17]上同调中 Schubert 类的多项式代表。由于这种关系，已知舒伯特多项式的结构常数是非负整数，且对应着具有几何意义的数值。具体而言，它们计数舒伯特簇适当三重交集中的旗。虽然在某些特殊情形下已找到这类结构常数的组合公式 [5, 17, 20, 23, 24], 但寻找一般组合公式仍是一个长期未解的问题。转向量子情形，通过 [7, 9, 10, 11, 12, 13, 16, 22],的研究，人们定义了具有类似性质且同样值得关注的问题的量子版本舒伯特多项式。在几何上，量子舒伯特多项式是旗簇小量子上同调中 Schubert 类的多项式代表。与经典舒伯特多项式的情形一样，这种关系使得量子舒伯特多项式的结构常数成为具有几何意义的非负整数。特别是，在量子情形下，结构常数是三点 Gromov 不变量 [9]。此外，与经典情形一样，尽管已有一些结果 [2], 为量子舒伯特多项式的结构常数寻找一般组合解释

仍是一个开放问题。事实上，量子情形下的解将立即给出经典情形下的解。本文沿袭 Bergeron 和 Sottile 的工作 [4,5] （经典情形下）以及 Benedetti、Bergeron、Colmenarejo、Saliola 和 Sottile 的工作 [2] （量子情形下），研究量子 k-Bruhat序，其链结构编码了量子舒伯特多项式结构常数的相关信息。

为理解本工作的经典动机，我们简要概述 Bergeron 和 Sottile 的贡献 [4, 5]；详见第3 节。在经典情形下，Monk 法则确定了舒伯特多项式的乘法结构。给定一个置换 u，令 $\mathfrak{S}_u$表示相应的舒伯特多项式，令 $\ell(u)$表示 u的长度，并令s_{ij} 表示交换 i和 j的置换。

定理 1.1 (Monk 法则 [19])。对于 $u \in S_n$ 和 $1 \leq k < n$,

$$\mathfrak{S}_u \cdot \mathfrak{S}_{s_{k,k+1}} = \sum_{\substack{1 \leq i \leq k < j \leq n \\ l(us_{ij}) = l(u)+1}} \mathfrak{S}_{us_{ij}}.$$

利用 Monk 法则的索引集，可以在 S_n 上定义 k-Bruhat序，这是一个偏序集，其区间结构编码了有关舒伯特多项式结构常数的信息。特别地，回顾一下：当 $v = (v_1, \ldots\ldots, v_n) \in S_n$ 具有唯一的 k 使得 $v_k > v_{k+1}$时，舒伯特多项式 $\mathfrak{S}_v$ 是一个 Schur 多项式。于是，令 c_{uv}^w 表示 $\mathfrak{S}_u \cdot \mathfrak{S}_v$ 中 $\mathfrak{S}_w$ 的系数，Monk 公式的迭代形式启发了如下形式的组合解释

$$c_{uv}^w = \left| \left\{ \begin{array}{c} \text{maximal chains in } [u,w]_k \text{ satisfying} \\ \textit{some condition} \text{ imposed by } v \end{array} \right\} \right|,$$

其中 $[u,w]_k$ 表示 k-Bruhat序中的一个区间（参见 [4, 式 (1.1.3)]）。

在一系列文章中， [4, 5], Bergeron 和 Sottile 研究了 k-Bruhat序。首先，在 [4], 中，他们提出了一种简洁的方法来比较 k-Bruhat序中的元素，并用它将 k-Bruhat序与所谓的 Grassmannian Bruhat序联系起来；后者包含了 k-Bruhat序的所有区间，每个区间都是从一个唯一的最小元素开始的区间。随后，在一篇后续文章 [5], 中，他们刻画了一个幺半群 $\mathcal{M}_n$ ，该幺半群编码了 k-Bruhat序和 S_n上的 Grassmannian Bruhat序中区间的链结构。为描述幺半群 $\mathcal{M}_n$, 令 $\lessdot_k$表示 k-Bruhat序中的覆盖关系，并令 $\mathcal{F}_n$ 表示元素 $\mathbf{v}_{ab}$ 对$1 \leq a < b \leq n$的集合。定义 $\mathcal{F}_n$ 与 $\mathbf{0}$ 在 $S_n \cup \{0\}$ 的置换上的作用如下：对于 $u \in S_n$,

$$\mathbf{0} \bullet_k u = \mathbf{v_{ab}} \bullet_k 0 = 0$$

and

$$\mathbf{v}_{ab} \bullet_k w = \begin{cases} s_{ab}w, & \text{if } w \lessdot_k s_{ab}w \\ 0, & \textit{otherwise.} \end{cases}$$

幺半群 $\mathcal{M}_n$ 因此是 $\mathcal{F}_n \cup \{\mathbf{0}\}$ 关于等价关系 $\equiv$ 的商，其中，当且仅当对所有 $w \in S_n$ 和所有 $k \in [n-1]$，都有 $\mathbf{v} \equiv \mathbf{u}$ ，当且仅当 $\mathbf{v} \bullet_k w = \mathbf{u} \bullet_k w$ 。在确定定义 $\mathcal{M}_n$ [5] 的完整等价关系列表后，他们利用这些结果证明了舒伯特多项式结构常数的若干公式和关系。

现在转向量子启发，最初的叙述仍遵循相同的脉络：量子 Monk 规则决定量子舒伯特多项式的乘法结构。给定一个置换 u，令 $\mathfrak{S}_u^q$ 表示相应的量子 Schubert 多项式，令 $*$表示量子乘积。

定理 1.2 (量子 Monk 规则 [9])。 对于 $u \in S_n$ 和 $1 \leq k < n$,

$$\mathfrak{S}_u^{\mathbf{q}} * \mathfrak{S}_{s_{k,k+1}}^{\mathbf{q}} = \sum_{\substack{1\leq i\leq k<j\leq n \\ \ell(us_{ij})=l(u)+1}} \mathfrak{S}_{us_{i,j}}^{\mathbf{q}} + \sum_{\substack{1\leq i\leq k<j\leq n \\ \ell(us_{i,j})+2(j-i)=\ell(u)+1}} \mathbf{q_{ij}}\mathfrak{S}_{us_{i,j}}^{\mathbf{q}},$$

其中 $\mathbf{q^{ij}} = q_i \cdots q_{j-1}$。

与经典情形一样，人们利用量子 Monk 规则定义一种偏序集结构，称为“量子 k-Bruhat 序”，其底集为

$$S_n[\mathbf{q}] = \{q_1^{\alpha_1} \cdots q_{n-1}^{\alpha_{n-1}} w \mid w \in S_n \text{ and } (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{n-1}\}.$$

与经典情形相反，目前对量子 k-Bruhat 序的了解要少得多。在 [2], 中，作者引入了量子 k-Bruhat 序，并开始研究一族算子，这些算子在 $S_n[\mathbf{q}]$ 上的作用类似于 $\mathcal{F}_n \cup \{\mathbf{0}\}$ 及其在 S_n上的作用。具体而言，令 $\lessdot_k^{\mathbf{q}}$ 表示量子 k-Bruhat 序中的覆盖关系，令 $\mathcal{F}_n^{\mathbf{q}}$ 表示元素$\mathbf{v}_{ab}$（其中 $a \neq b \in [n]$）构成的集合，他们定义了 $\mathcal{F}_n^{\mathbf{q}}$与$\mathbf{0}$ 在 $S_n[\mathbf{q}] \cup \{0\}$ 上的作用如下：对于 $w \in S_n$和 $k \in [n-1]$，令 $\mathbf{v}_{ab} \bullet_k 0 = \mathbf{0} \bullet_k w = 0$,

$$\mathbf{v}_{ab} \bullet_k u = \begin{cases} s_{ab}u, & \text{if } a < b \text{ and } u \lessdot_k^{\mathbf{q}} s_{ab}u \\ \mathbf{q_{ij}} s_{ab}u, & \text{if } a > b \text{ and } u \lessdot_k^{\mathbf{q}} \mathbf{q_{ij}} s_{ab}u \ (u(i) = a, u(j) = b) \\ 0, & otherwise, \end{cases}$$

并将其 q-乘性地扩展到 $S_n[\mathbf{q}]$的其余部分。现在，在研究 $\mathcal{F}_n^{\mathbf{q}} \cup \{\mathbf{0}\}$ 及其在 $S_n[\mathbf{q}]$, 上的作用时， [2] 的作者研究了一种比其经典类比中的等价关系更弱的等价关系（见注4.6）。利用他们的结果，他们进而建立了量子 Murnaghan-Nakayama 规则，以组合方式描述量子 Schubert 多项式与量子幂和相乘时产生的结构常数。

本文关注 $\equiv$ 中研究的等价关系的一种量子类比 [5], ，它将刻画量子 k-Bruhat序中区间的链结构。具体而言，将 $\equiv$扩展为 $\mathcal{F}_n^{\mathbf{q}} \cup \{\mathbf{0}\}$ 上的等价关系，定义为$\mathbf{v} \equiv \mathbf{u}$ 当且仅当$\mathbf{v} \bullet_k w = \mathbf{u} \bullet_k w$ 对所有 $w \in S_n[\mathbf{q}]$以及所有 $k \in [n-1]$均成立。本文要解决的主要问题如下。

Probl题目 1.3. 刻画 $\mathbf{u} \equiv \mathbf{v}$和 $\mathbf{u} \equiv \mathbf{0}$ 的等价关系集合，其中 $\mathbf{u}$、$\mathbf{v} \in \mathcal{F}_n^{\mathbf{q}}$。

关于这个问题，我们确定了与 $\mathcal{F}_n^{\mathbf{q}}$ 中至多含四个元素的复合相关的所有等价关系。此外，我们还找出了两族等价关系，它们由 $\mathcal{F}_n^{\mathbf{q}}$ 中任意多个元素的复合构成。我们猜想，事实上，找到的这些等价关系构成了一个完备的集合。

本文其余部分的结构如下。在第 2 节中，我们介绍置换和偏序集理论所需的基本概念。在第 3 节中，我们总结 Bergeron 和 Sottile 对经典框架所开展的研究，包括 k-Bruhat序和 Grassmannian Bruhat序的性质，以及他们对相关幺半群 $\mathcal{M}_n$ 的研究。随后，在第 4 – 7 节中，我们介绍对量子 k-Bruhat序的研究。具体而言，从第 4 节开始，我们引入量子 k-Bruhat序、集合 $\mathcal{F}_n^{\mathbf{q}}$及其在 $S_n[\mathbf{q}]$, 上的作用，以及本文重点研究的主要问题。接着，在第 5 节中，我们引入并研究 $\mathcal{F}_n^{\mathbf{q}}$ 中元素的复合所涉及的保持等价性的变换，这些变换在下文中发挥着关键作用。

接下来。在最后的第 6 节和第 7节中，我们确定 $\mathcal{F}_n^{\mathfrak{q}}$ 中元素的复合所满足的定义性等价关系，其中第 6 节刻画涉及 2 至 4 个元素的复合的等价关系，第 7 节则聚焦于涉及任意数量元素复合的等价关系。如上文所述，我们猜想，后面这两节中发现的等价关系构成了定义 $\mathcal{M}_n$ 的量子类比所需的完整集合。

2 预备知识

在本节 中，我们介绍排列理论和偏序集理论中的必要概念 s.

令 $[n] := \{1, 2, \ldots, n\}$ for $n \in \mathbb{Z}_{>0}$。回顾一下，对称群 S_n 由所有双射$w : [n] \to [n]$组成，这些双射称为置换，群运算定义为函数复合。我们用 e 表示 S_n中的单位元。接下来，我们通常用单行记法 $w = (w(1)\ w(2) \ldots, w(n)) \in [n]^n$表示置换 $w \in S_n$。在例子中，我们也写作 $w = w(1)w(2)\ldots w(n)$，其中数字不加括号和逗号。我们用记号 $w_1, w_2, \ldots, w_k$ 表示排列序列 $w_i \in S_n$。

对于 $i, j \in [n]$ 且满足 $i < j$的情形，我们令 $s_{i,j} = s_{ij} \in S_n$ 表示满足 $s_{ij}(i) = j$,$s_{ij}(j) = i$，并且对 $k \neq i, j$有 $s_{ij}(k) = k$ 的置换；这类置换称为对换。对于$k \in [n-1]$，我们将 $s_{k,k+1} \in S_n$ 简记为 s_k。给定置换 $w = (w_1, \ldots, w_n) \in S_n$，定义其支撑为非不动点的集合，$\mathrm{supp}(w) := \{i \in [n] \mid w(i) \neq i\}$，并定义其长度为逆序的数量，$\ell(w) := |\{(i, j) \mid 1 \leq i < j \leq n,\ w(i) > w(j)\}|$。

如引言中所述，本文将研究 S_n 中的某些偏序集。简要回顾一下，偏序集（partial ordered set）$(\mathcal{P}, \preceq_{\mathcal{P}})$由集合 $\mathcal{P}$及其上的偏序关系 $\preceq_{\mathcal{P}}$ 组成，即一种自反、反对称且传递的二元关系。若存在保序双射 $f : \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$，且其逆映射 f^{-1} 也保序，则称偏序集 $(\mathcal{P}, \preceq_P)$ 与 $(\mathcal{Q}, \preceq_Q)$ 同构。在不会引起混淆时，我们将偏序集 $(\mathcal{P}, \preceq_{\mathcal{P}})$ 简记为 $\mathcal{P}$，并将 $\preceq_{\mathcal{P}}$简记为 $\preceq$。

给定偏序集 $(\mathcal{P}, \preceq)$ 以及 $x, y \in \mathcal{P}$，若 $x \preceq y$且 $x \neq y$，则记作 $x \prec y$。当 $x \prec y$且不存在满足 $x \prec z \prec y$的 $z \in \mathcal{P}$ 时，我们称 $x \prec y$ 为覆盖关系，并记作$x \prec\!\!\cdot\, y$。注意，由传递性可知，$\mathcal{P}$ 的关系完全由其覆盖关系集合确定；也就是说，我们可以通过指定集合 $\mathcal{P}$ 以及与 $\preceq$相关联的覆盖关系集合来定义 $\mathcal{P}$。覆盖关系可用于定义 $\mathcal{P}$ 的可视化表示，称为哈斯图——其顶点对应于$\mathcal{P}$的元素，边对应于覆盖关系（见图 3）。给定子集 $S \subseteq \mathcal{P}$，由 S 生成的诱导子偏序集是定义在 S 上的偏序集 $\mathcal{P}_S = (S, \preceq_S)$，其中当且仅当 $i \preceq j$时，$i \preceq_S j$。若子集 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}$ 使得 $\mathcal{P}_C$ 是全序，即任意两个元素都有关联，则称其为链。若一条链不包含在任何严格更大的链中，则称其为极大的链。给定$x, y \in \mathcal{P}$，我们将 x 与 y 之间的区间记为 $[x, y]_{\preceq}$，定义为 $\mathcal{P}$ 中对应于子集 $\{z \in \mathcal{P} \mid x \preceq z \preceq y\}$ 的诱导子偏序集。

3 经典 k-Bruhat顺序

本节概述关于 k-Bruhat顺序及其相关幺半群的经典框架；更多详情请参见 [4, 5]。

如引言中所述，k-Bruhat顺序由 Monk 法则（定理 1.1）中的指标集定义。定义在 k上的 S_n -Bruhat顺序是偏序集 $(S_n, \leq_k)$，其中 $\leq_k$ 由以下关系定义：

以下覆盖关系： $u \lessdot_k us_{ij}$ 当且仅当 $i \le k < j$ 且 $\ell(us_{ij}) = \ell(u) + 1$。等价地，$u \lessdot_k us_{ij}$ 当且仅当 $i \le k < j$， $u(i) < u(j)$，且对所有 $l \in [i,j]$， $u(l) \notin [u(i)\ u(j)]$。我们将 k-Bruhat顺序中的区间记为 $[u,v]_k$，其中 $u, v \in S_n$。图1 (a) 展示了 S_3上的 2-Bruhat顺序。

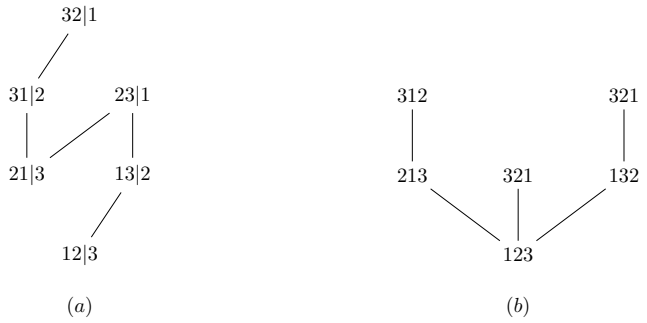


图1：（a） S_3 上的 2-Bruhat 序；（b） S_3上的 Grassmannian Bruhat 序

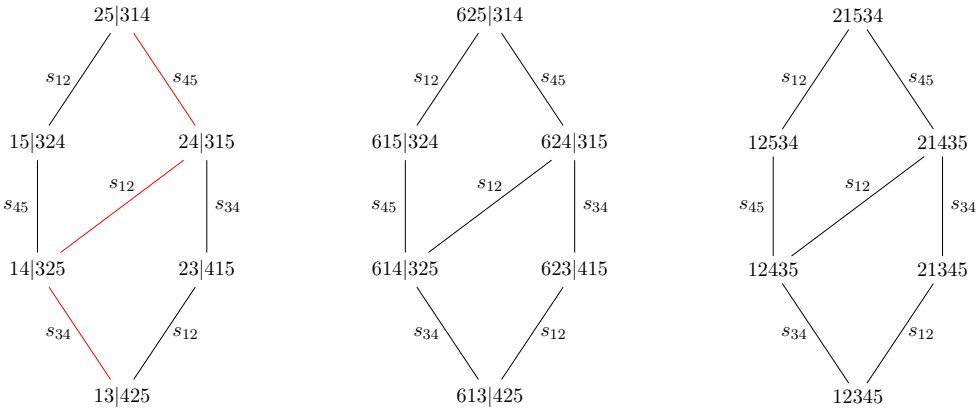
Bergeron 和 Sottile [4] 详细研究了 k-Bruhat 序，并证明了以下结论。

命题 3.1 ([4])。设 $n \ge 1$， u， $v \in S_n$，以及 k， $l \in [n-1]$。

(a) $u \le_k w$ 当且仅当对所有 $a, b \in [n]$，*(i)* $a \le k \le b$ 意味着 $u(a) \le w(a)$ 且 $u(b) \ge w(b)$，并且 *(ii)* 若 $a < b$, $u(a) < u(b)$，且 $w(a) > w(b)$，则 $a \le k < b$。*(b)* 假设 $u \le_k w$, $x \le_l z$ 且 $wu^{-1} = zx^{-1}$。则 $v \longmapsto vu^{-1}x$ 在 $[u,w]_k$ 和 $[x,z]_l$之间诱导一个同构。

请注意，覆盖关系 $u \lessdot_k v$ 对应于记录所交换位置（或值）的对换，即$v = us_{ij}$ （或 $v = s_{ab}u$），我们将其称为与 $u \lessdot_k v$相关联的左换位（或右换位）。因此，区间 $[u,v]_k$ 中的极大链对应于依次“作用”于 u的一系列左换位（或右换位），并且可以据此标记哈斯图的边。在 [4, 5], 中，作者指出，考虑命题 $[u,w]_k$ 和 $[x,z]_l$ 中的区间时，3.1 (b) 所给出的特定同构使它们的哈斯图具有完全相同的左换位标记；示例见图2 (a) 和 (b)。请注意，右换位标记未必也如此。

受这一现象的启发，Bergeron 和 Sottile 在 S_n上引入了另一种偏序集结构。*Grassmannian Bruhat序*$(S_n, \preceq)$ 定义如下：对于 η， $\xi \in S_n$， $\eta \preceq \xi$，如果存在 $u \in S_n$ 和 $k \in [n-1]$ 使得 $u \le_k \eta u \le_k \xi u$。在图1 (b) 中，我们展示了 S_3上的 Grassmannian Bruhat序。



(a) $\leq_2$ (b) $\leq_3$ (c) $\preceq$

图2：(a) $\leq_2$、(b) $\leq_3$ 和 (c) $\preceq$ 中的同构区间

以下结果表明，Grassmannian Bruhat序为研究 k-Bruhat序的区间提供了一种统一的方法。

定理 3.2 ([4])。 设 u、$\zeta \in S_n$ 和 $k \in [n-1]$ 满足 $u \leq_k \zeta u$。则 $\nu \longmapsto \nu u$ 诱导出 $[e,\zeta]_{\preceq}$ 与 $[u,\zeta u]_k$之间的一个同构。

与 k-Bruhat序的情形类似，Grassmannian Bruhat序中的覆盖关系也关联着左换位和右换位。考虑定理 3.2中确定的同构，区间 $[e,\zeta]_{\preceq}$ 和 $[u,\zeta u]_k$ 具有相同的左换位标记；例如见图 2 (c)。

S_n的幺半群结构

为尝试提取由 k-Bruhat顺序的区间所编码的舒伯特多项式中的部分乘法信息，Bergeron和Sottile引入了一个自由幺半群，其生成元表示对换。回顾前文，对于 k-Bruhat顺序中的一个区间 $[u,v]_k$，存在一个与之同构的Grassmannian Bruhat顺序中的区间 $[e,\zeta]_{\preceq}$。在这种同构下，极大链由其左换位序列来标识；也就是说，将这样的序列依次从左侧“作用”于 u 和 e，分别得到 v 和 ζ。因此，对于任意 $k \in [n-1]$ 的取值， S_n 上 k-Bruhat顺序中区间的链结构，都可以通过左换位序列统一编码在 S_n 上的Grassmannian Bruhat顺序中。将对换替换为“算子”，便得到如下结果。

对于 $n \geq 1$，令 $\mathcal{F}_n$ 为由生成元$\mathbf{v}_{ab}$ （a）生成的自由幺半群，$b \in [n]$ 其中 $a < b$，并令$\mathbf{0}$ 为零元。然后，利用上述 S_n上的偏序集结构，我们定义的作用 $\mathcal{F}_n \cup \{\mathbf{0}\}$ 于$S_n \cup \{0\}$ 如下：对于$\mathbf{v}_{ab} \in \mathcal{F}_n$、 $w \in S_n \cup \{0\}$以及 $k \in [n-1]$,

$$\mathbf{0} \bullet_k w = \mathbf{v}_{ab} \bullet_k 0 = \mathbf{0} \cdot w = \mathbf{v}_{ab} \cdot 0 = 0,$$

$$\mathbf{v}_{ab} \bullet_k w = \begin{cases} s_{ab}w, & \text{if } w <_k s_{ab}w \\ 0, & otherwise, \end{cases} \quad \text{and} \quad \mathbf{v}_{ab} \cdot w = \begin{cases} s_{ab}w, & \text{if } w \prec s_{ab}w \\ 0, & otherwise. \end{cases}$$

我们将 $\mathcal{F}_n$ 的单个生成元称为一个算子，并将生成元的乘积称为算子复合。对于算子复合 $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{a_r b_r} \cdots \mathbf{v}_{a_1 b_1} \in \mathcal{F}_n$，我们通过 supp(v) $= \{a_1, b_1, \ldots, a_r, b_r\}$ 定义 v 的支撑。注意，对于 $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{a_r b_r} \cdots \mathbf{v}_{a_1 b_1} \in \mathcal{F}_n$ 以及 u、$w \in S_n$，当且仅当在 k-Bruhat序（分别为 Grassmannian Bruhat序）中存在一条从 u 到 w 的极大链，且其覆盖关系按顺序所对应的左换位为 $s_{a_i b_i}$（对于 $i \in [r]$）时，有 $\mathbf{v} \bullet_k u = w$（分别地，$\mathbf{v} \cdot u = w$）。例如，由于 $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{45}\mathbf{v}_{12}\mathbf{v}_{34} \in \mathcal{F}_5$ 满足 $\mathbf{v} \bullet_2 13425 = 25314$，v 对应于图2（a）中突出显示的极大链。下文中，我们将 $\preceq$（分别为 $\leq_k$）中的极大链与其对应的左换位序列相对应。

研究上述 $\mathcal{F}_n \cup \{\mathbf{0}\}$ 对 $S_n \cup \{0\}$ 的作用时，Bergeron 和 Sottile 得出了以下幺半群。

定义 3.3。 定义 $\mathcal{M}_n$ 为将 $\mathcal{F}_n \cup \{\mathbf{0}\}$ 按以下关系取商所得的幺半群 s

(i) $\mathbf{v}_{bc}\mathbf{v}_{cd}\mathbf{v}_{ac} \equiv \mathbf{v}_{bd}\mathbf{v}_{ab}\mathbf{v}_{bc}$ **和** $\mathbf{v}_{ac}\mathbf{v}_{cd}\mathbf{v}_{bc} \equiv \mathbf{v}_{bc}\mathbf{v}_{ab}\mathbf{v}_{bd}$，**若** $a < b < c < d$；
(ii) $\mathbf{v}_{ab}\mathbf{v}_{cd} \equiv \mathbf{v}_{cd}\mathbf{v}_{ab}$，**若** $b < c$ **或** $a < c < d < b$；**(iii)** $\mathbf{v}_{ac}\mathbf{v}_{bd} \equiv \mathbf{v}_{bd}\mathbf{v}_{ac} \equiv \mathbf{0}$，**若** $a \leq b < c \leq d$；**(iv)** $\mathbf{v}_{bc}\mathbf{v}_{ab}\mathbf{v}_{bc} \equiv \mathbf{v}_{ab}\mathbf{v}_{bc}\mathbf{v}_{ab} \equiv \mathbf{0}$，**若** $a < b < c$。

幺半群 $\mathcal{F}_n$ 和 $\mathcal{M}_n$ 与 k-Bruhat序及 Grassmannian Bruhat序的关系如下。

定理 3.4 ([5])。 (a) 映射 $\mathcal{F}_n \cup \{\mathbf{0}\} \to S_n \cup \{0\}$ 定义为 $\mathbf{v} \longmapsto \mathbf{v} \cdot e$ 是满射，且可经由 $\mathcal{M}_n$ 因子分解，并在 $\mathcal{M}_n$ 与 $S_n \cup \{0\}$ 之间诱导出一个双射。

(b) 对于 u、$w \in S_n$ 和 $k \in [n-1]$，集合 $\{v \in \mathcal{F}_n \mid v \bullet_k u = w\}$ 与 $[u, w]_k$ 中的极大链集合之间存在双射，该双射通过上述左换位序列建立对应。事实上，若 v、v' 属于上述集合，则它们可通过定义 *3.3* 中的一系列关系 *(i) –(ii)* 相互关联。此外，绝不可能应用任何关系 *(iii) –(v)* 得到这样的算子。

(c) 对于 u，$w \in S_n$ 和 $k \in [n-1]$，若 $\mathbf{v} \bullet_k u = w$ 和 $\mathbf{v}'$ 通过一系列关系与 $\mathbf{v}$ 相互关联(i) $–(ii)$（定义 *3.3*）中，那么 $\mathbf{v}' \bullet_k u = w$。

(d) 对于 $\zeta \in S_n$，集合 $\{\mathbf{v} \in \mathcal{F}_n \mid \mathbf{v} \cdot e = \zeta\}$ 与$[e, \zeta]_{\preceq}$中的极大链集合之间存在双射。

作为 [5],中工作的推论，我们得到以下结论。

定理 3.5. 两个元素$\mathbf{u}$、$\mathbf{v} \in \mathcal{F}_n \cup \{\mathbf{0}\}$ 属于 $\mathcal{M}_n$ 的同一个等价类，当且仅当对于所有 $w \in S_n$ 和所有 $k \in [n-1]$，都有$\mathbf{v} \bullet_k w = \mathbf{u} \bullet_k w$。

证明。$\boxed{\Longrightarrow}$ 考虑 $w \in S_n$ 和 $k \in [n-1]$。只需证明 $\mathbf{u} \bullet_k w = \mathbf{v} \bullet_k w$。如果$\mathbf{u} \bullet_k w = \mathbf{v} \bullet_k w = 0$，那么结论成立。因此，假设 $\mathbf{u} \bullet_k w = w^* \in S_n$。然后，应用定理 3.4 (c)，我们得到 $\mathbf{v} \bullet_k w = w^* \in S_n$，正如所需。

$\boxed{\Longleftarrow}$ 首先，假设 $\mathbf{u}$和$\mathbf{v}$ 对某个 S_n的置换具有非零作用；也就是说，存在 $w, w' \in S_n$ 和 $k \in [n-1]$，使得 $\mathbf{v} \bullet_k w = \mathbf{u} \bullet_k w = w'$。于是，根据定理 3.4 (b)，$\mathbf{v}$ 和 $\mathbf{u}$ 分别对应 $[w, w']_k$ 和 $\mathbf{u} \equiv \mathbf{v}$的极大链，正如所需。现在，假设

$\mathbf{v} \bullet_k w = \mathbf{u} \bullet_k w = 0$ 对所有 $w \in S_n$ 和所有 $k \in [n-1]$均成立。我们断言 $\mathbf{v} \equiv \mathbf{0} \equiv \mathbf{u}$，并通过收缩进行论证。不失一般性，假设 $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$。那么，考察定理 3.4 (a)，可知存在 $\zeta \in S_n$，使得 $\mathbf{v} \cdot 1 = \zeta$。根据 Grassmannian Bruhat序的定义，存在 $u \in S_n$ 和 $k \in [n-1]$，使得 $u \leq_k u \leq_k \zeta u$。因此，应用定理 3.2，可得 $[u, \zeta u]_k \cong [1, \zeta]_{\preceq}$。此外，考察定理 3.2中给出的双射，必有 $\mathbf{v} \bullet_k u = \zeta u$，这与假设矛盾。断言及由此得到的结论成立。

□

对于顺序 $\preceq$ （分别地，$\leq_k$），$\mathcal{M}_n$ 定义中的关系 (i) 和 (ii) 对应于这样的关系：它们可以将元素 $u, v \in S_n$ 之间的任意一条极大链变为 $[u, v]_k$ （分别地，$[u, v]_{\preceq}$）中的另一条任意极大链。另一方面，关系 (iii) 和 (iv) 对应于在任何极大链中都不会出现的左换位序列。

4 量子 k-Bruhat序

本节仿照经典情形中的讨论，定义k-Bruhat序的量子版本，并介绍 $\mathcal{F}_n$的量子版本；本文余下部分将研究后者。首先，我们介绍量子 k-Bruhat序。

在这种情形下，我们关注的偏序集的底层集合是 S_n的以下变形。考虑不定元集合 $\mathbf{q} := \{q_1, q_2, \ldots, q_{n-1}\}$。对于 $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) \in \prod_{i=1}^{n-1} \mathbb{Z}_{\geq 0}$，令 $\mathbf{q}^\alpha := \prod q_i^{\alpha_i}$；对于 $1 \leq i < j \leq n-1$，令 $\mathbf{q}^{ij} := \prod q_k$。此外，对于 $\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{n-1}$，我们用 $\deg \mathbf{q}^\alpha$ 表示单项式 $\mathbf{q}^\alpha$ 在 $\mathbb{Z}[\mathbf{q}]$中的通常（总）次数。现在定义

$$S_n[\mathbf{q}] := \{\mathbf{q}^\alpha w \mid w \in S_n \text{ and } \alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{n-1}\},$$

并将长度函数 ℓ 在 S_n 上 $S_n[\mathbf{q}]$ 通过 $\ell(\mathbf{q}^\alpha w) = \ell(w) + 2$ 次$\mathbf{q}^\alpha$。下文中，我们将 S_n 及其框架称为经典情形，而将 $S_n[\mathbf{q}]$ 及其框架称为量子情形。令 $q_i = 0$对所有 $i = 1, \ldots\ldots, n-1$。通过这种方式，便可从量子框架恢复经典框架。

注记 4.1。 接下来，给定一个元素 $\mathbf{q}^\alpha w \in S_n[\mathbf{q}]$, ，假设 $w \in S_n$。

与经典框架类似，量子 *k-Bruhat* 序 $(S_n[\mathbf{q}], \preceq_k^{\mathbf{q}})$ 由其覆盖关系定义，这些覆盖关系源自量子 Monk 规则（定理 1.2 ）中的指标集：对于 $w \in S_n$,

(1) $w \lessdot_k^{\mathbf{q}} ws_{ij}$ 若 $i \leq k < j$ 且 $\ell(w) + 1 = \ell(ws_{ij})$，(2) $w \lessdot_k^{\mathbf{q}} \mathbf{q}^{ij} ws_{ij}$ 若 $i \leq k < j$ 且 $\ell(w) + 1 = \ell(\mathbf{q}^{ij} ws_{ij})$，并且

(3) 按$\mathbf{q}$乘法扩展：当且仅当$\mathbf{q}^\gamma \mathbf{q}^\alpha u \leq_k^{\mathbf{q}} \mathbf{q}^\gamma \mathbf{q}^\beta v$ 时，对$\mathbf{q}^\alpha u, \mathbf{q}^\beta v \in S_n[\mathbf{q}]$ 及任意 $\gamma \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{n-1}$，有$\mathbf{q}^\alpha u \leq_k^{\mathbf{q}} \mathbf{q}^\beta v$。

我们将形式为 (1) 的覆盖关系称为经典覆盖关系，将形式为 (2) 的覆盖关系称为量子覆盖关系。以下结果提供了另一种理解量子k-Bruhat序中覆盖关系的方法，无需计算排列的长度。

命题 4.2 ([2])。 设 $w \in S_n$ 和 $u \in S_n[\mathbf{q}]$。则 $w \lessdot_k^{\mathbf{q}} \mathbf{q}^\alpha u$ 当且仅当

(a) $\boldsymbol{q}^\alpha u = ws_{ij}$，对于某个 $i \le k < j$，满足 $w(i) < w(j)$，且不存在 l 使得$i < l < j$ 并且 $w(i) < w(l) < w(j)$；或者（b） $\boldsymbol{q}^\alpha u = \boldsymbol{q}^{\mathbf{ij}} ws_{ij}$，对于某个 $i \le k < j$，满足 $w(i) > w(j)$，并且对于每个满足 $i < l < j$ 的 l，都有 $w(j) < w(l) < w(i)$。

注 4.3。 注意，根据 $<_k$ 和 $<_k^q$ 的定义，对于 $u, v \in S_n$，有 $u <_k v$ 当且仅当对于任意 $\alpha \in \mathbb{Z}_{\ge 0}^{n-1}$，$\mathbf{q}^\alpha u <_k^q \mathbf{q}^\alpha v$。

接下来，在讨论量子 k-Bruhat序上的 $S_n[\mathbf{q}]$, 时，我们用一条竖线分隔位置 k 上的数值和位置 $k+1$上的数值，以此表示 S_n 的排列。然后，覆盖关系对应于交换两个数值 $w(i)$ 和 $w(j)$，一个在竖线左侧，另一个在右侧，且位置 $i, \ldots, j$中的数字满足命题 4.2中讨论的两个条件之一。

例 4.4. 注意，在 $S_3[\mathbf{q}]$ 上的量子 *2-Bruhat* 序中， $21|3 \lessdot_2^{\mathbf{q}} 23|1$ 是一个经典覆盖，而 $32|1 \lessdot_2^{\mathbf{q}} q_2 31|2$ 是一个量子覆盖。下面的图展示了 $S_3[\mathbf{q}]$ 上的量子 *2-Bruhat* 序哈斯图的一部分，见图 3。

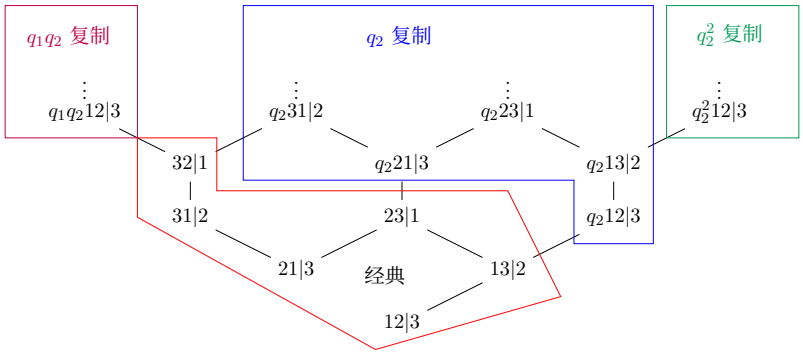


图 3： $S_3[\mathbf{q}]$上的量子 2-Bruhat 序

$S_n[\mathbf{q}]$上的幺半群结构

我们定义一种幺半群结构，其作用来源于量子 $S_n[\mathbf{q}]$ -Bruhat序的覆盖关系。这种结构及其伴随的作用最早由 [2], 提出，它们推广了 Bergeron 和 Sottile 在 [5]中研究的经典框架。

令 $\mathcal{F}_n^{\mathbf{q}}$ 为由符号 $\{\mathbf{v}_{ab} \mid a、b \in [n]、a \ne b\}$ 生成的自由幺半群，并令 0 表示一个零元，称为零算子。与经典情形一样，我们将 $\mathcal{F}_n^{\mathbf{q}}$ 的单个生成元称为算子，将生成元的乘积称为算子复合。因此， $\mathcal{F}_n^{\mathbf{q}}$ 中的元素都是如下形式的算子复合：$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{a_r b_r} \cdots \mathbf{v}_{a_1 b_1}$（其中从右向左的标记方式反映了下文定义的左作用）。我们将 $\mathbf{v}$ 的支撑定义为集合 $\mathrm{supp}(\mathbf{v}) = \{a_1, b_1, \ldots, a_r, b_r\}$，并称 $\mathbf{v}$ 的次数为 r，表示其中包含 r 个算子。

于是， $\mathcal{F}_{\mathbf{q}n} \cup \{\mathbf{0}\}$ 按如下方式作用于 $S_n[\mathbf{q}] \cup \{0\}$：对于 $\mathbf{v}_{ab} \in \mathcal{F}_n^{\mathbf{q}}$、 $w \in S_n \cup \{0\}$ 和$k \in [n-1]$, 我们令 $\mathbf{v}_{ab} \bullet_k 0 = \mathbf{0} \bullet_k w = 0$,

$$\mathbf{v}_{ab} \bullet_k u = \begin{cases} s_{ab}u, & \text{if } a < b \text{ and } u \lessdot_k^{\mathbf{q}} s_{ab}u \\ \mathbf{q_{ij}} s_{ab}u, & \text{if } a > b \text{ and } u \lessdot_k^{\mathbf{q}} \mathbf{q_{ij}} s_{ab}u \ (u(i) = a, u(j) = b) \\ 0, & otherwise, \end{cases}$$

并通过设定 $S_n[\mathbf{q}] \cup \{0\}$ 来扩展$\mathbf{v} \bullet_k (\mathbf{q}^\alpha w) = \mathbf{q}^\alpha(\mathbf{v} \bullet_k w)$，其中 $\mathbf{v} \in \mathcal{F}_n^{\mathbf{q}} \cup \{\mathbf{0}\}$。满足 $\mathbf{v}_{ab}$且 $a < b$ 的算子称为经典（对应经典覆盖），而满足 $a > b$ 的算子称为量子（对应量子覆盖）。

我们用如下图示方式表示算子的复合：对于 $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{a_r b_r} \cdots \mathbf{v}_{a_1 b_1} \in \mathcal{F}_n^{\mathbf{q}}$，画一个矩形窗口，其中为 supp(v) 中的每个元素画一条竖直虚线，并从左到右按递增顺序标记。现在，单个经典（分别为量子）算子 $\mathbf{v}_{ab}$ 由一条绿色（分别为点状的砖红色）水平线段表示，该线段从标记为a 的竖线延伸至标记为 b的竖线。算子的复合通过自下而上堆叠线段来表示，复合的读取顺序为从右向左。我们在图 $\mathbf{v}_{14}\mathbf{v}_{62}\mathbf{v}_{16} \in \mathcal{F}_6^{\mathbf{q}}$ 中展示4。

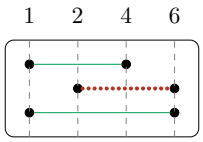


图4：$\mathbf{v}_{14}\mathbf{v}_{62}\mathbf{v}_{16} \in \mathcal{F}_6^{\mathbf{q}}$ 的图示表示

注 4.5. 考虑算子$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{a_r b_r} \cdots \mathbf{v}_{a_1 b_1}$的一个非零复合。那么，存在$n \in \mathbb{Z}_{>0}$、 $u \in S_n$和 $k \in [n-1]$，使得$\mathbf{v} \bullet_k u = \mathbf{q}^\alpha w \neq 0$。我们注意到以下两点：

(1) $\mathbf{v}$中涉及的量子算子数量，即满足$\mathbf{v}_{a_i b_i}$ 且$a_i > b_i$的 i 的数量，等于$\mathbf{q}^\alpha$中 q_k 的幂次，因为每当我们应用一个量子算子时，相应的单项式$\mathbf{q_{ij}}$ 都包含 q_k。

(2) 长度 $f\ \mathbf{q}^\alpha w$ 可以根据$\mathbf{v}$ a中涉及的算子信息计算。 s

$$\ell(\mathbf{q}^\alpha w) = \ell(u) + r = \ell(u) + \#\{i \mid a_i > b_i,\ 1 \le i \le r\} + \#\{i \mid a_i < b_i,\ 1 \le i \le r\}.$$

这是因为长度函数的定义使得当我们应用算子$\mathbf{v}_{a_i b_i}$时，无论$\mathbf{v}_{a_i b_i}$ 是经典的还是量子的，长度都会增加一。因此，只需统计涉及多少个算子即可。

我们称 $\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in \mathcal{F}_{\mathbf{q}n}$是等价的，记作 $\mathbf{v} \equiv \mathbf{v}'$，当且仅当 $\mathbf{v} \bullet_k u = \mathbf{v}' \bullet_k u$对所有 $\mathbf{q}^\alpha u \in S_n[\mathbf{q}]$ 以及 $k \in [n-1]$均成立。我们将 $\mathbf{v} \equiv \mathbf{0}$ 称为零等价，并将 $\mathbf{v} \equiv \mathbf{v}' \neq \mathbf{0}$ 称为非零等价。

备注 *4.6*。需要注意的是，这里的等价关系定义不同于 *[2]* 中提出的定义。在 *[2]*, 中，作者称两个算子 v、$v' \in \mathcal{F}_n^{\mathbf{q}}$ 对于 $u \in S_n$ 和 $k \in [n-1]$ 是 *(u, k)*-等价的，只要 $v \bullet_k u = v' \bullet_k u \neq 0$。注意，这里考虑的等价关系 $\equiv$ 比 *(u, k)*-等价更强，因为如果 $v \equiv v' \neq 0$，那么对于所有满足 $v \bullet_k u \neq 0$ （等价地，$v' \bullet_k u \neq 0$）的 $u \in S_n$ 和 $k \in [n-1]$，v 和 v' 都是 *(u, k)*-等价的。因此，这种等价关系 $\equiv$ 已被证明更难分析。

正如引言中所述，本文主要关注对以下关系集合的刻画：$\mathbf{u} \equiv \mathbf{v}$ 和 $\mathbf{u} \equiv \mathbf{0}$，其中 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{F}_n^{\mathbf{q}}$。

技术结果

在本小节中，我们将讨论与上文引入的等价关系有关的两个初步问题：

(a) 是否可能存在两个非零算子复合，它们彼此等价，但涉及的算子数量不同？(b) 是否可能存在两个非零算子复合，它们彼此等价，但支撑不相同？

如引理 4.7 和命题 4.8所示，这两个问题的答案均是否定的。因此，由命题 4.8可知，supp(v) 是良定义的，且独立于用于定义它的复合 $\mathbf{v} \equiv \mathbf{v}^{a_r b_r} \cdots \mathbf{v}^{a_1 b_1}$。值得注意的是，正如我们稍后将通过例如定理 6.3和命题6.9看到的，如果考虑与零等价的算子复合，那么问题 (a) 和 (b) 的答案均为肯定的。

我们先讨论问题 (a)，考察在非零等价关系中所涉及的算子数量。结合注记4.5 (2)，便可立即得到以下结论。

引理 4.7。 设$\mathbf{v} = \mathbf{v}^{a_{r_1} b_{r_1}} \cdots \mathbf{v}^{a_1 b_1}$和$\mathbf{v}' = \mathbf{v}^{c_{r_2} d_{r_2}} \cdots \mathbf{v}^{c_1 d_1}$是两个非零复合，且满足$\mathbf{v} \equiv \mathbf{v}' \neq \mathbf{0}$。则 $r_1 = r_2$。

接下来，我们转向问题 (b)，考察等价的非零算子复合的支撑。不同于问题 (a) 的情形，我们对问题 (b) 的回答并不那么直接。

命题 4.8。 设$\mathbf{v} = \mathbf{v}^{a_r b_r} \cdots \mathbf{v}^{a_1 b_1}$和$\mathbf{v}' = \mathbf{v}^{c_r d_r} \cdots \mathbf{v}^{c_1 d_1}$是两个非零复合，且满足$\mathbf{v} \equiv \mathbf{v}' \neq \mathbf{0}$。则，支撑(**v**) = 支撑(**v**′)。

证明。 由于$\mathbf{v} \equiv \mathbf{v}' \neq 0$，存在 $n \geq 3$、 $u \in S_n$、 $k \in [n-1]$和 $\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{n-1}$，使得$\mathbf{v} \bullet_k u = \mathbf{q}^{\alpha} w = \mathbf{v}' \bullet_k u \neq 0$。反设，支撑(**v**) ≠ 支撑(**v**′)。不失一般性，假设存在 $c \in$ 支撑(**v**′)，使得 $c \notin$ 支撑(**v**)。

由于 $c \notin$支撑(**v**)， c 在 $\mathbf{v}$ 中的位置由所有算子 $\mathbf{v}^{a_i b_i}$固定。因此，

$$\text{if} \quad \mathbf{v}^{a_i b_i} \cdots \mathbf{v}^{a_1 b_1} \bullet_k u = \mathbf{q}^{\alpha^i} u^i \quad \text{for } 1 \leq i \leq r \text{ and } \alpha^i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{n-1}, \quad \text{then} \quad u^{-1}(c) = (u^i)^{-1}(c).$$

此外，令 $\mathbf{q}^{\alpha^0} = 1$ ，并比较应用算子$\mathbf{v}^{a_i b_i}$ 时 $\mathbf{q}^{\alpha}$ 中的各项（$1 \leq i \leq r$），以下情况中仅有一种成立：

- $\mathbf{v}^{a_i b_i}$ 是一个经典算子，因此 $\mathbf{q}^{\alpha^i} = \mathbf{q}^{\alpha^{i-1}}$。
- $\mathbf{v}^{a_i b_i}$ 是一个量子算子，其中 c 的位置严格介于数值a_i 和 b_i的位置之间。因此，我们有 $\mathbf{q}^{\alpha^i} = \mathbf{q}^{jl} \mathbf{q}^{\alpha^{i-1}}$ ，其中 $j \leq u^{-1}(c) - 1 < u^{-1}(c) < l$。由此，单项式$\mathbf{q}^{jl}$ 含有因子$q_{\alpha_{u^{-1}(c)-1}} q_{\alpha_{u^{-1}(c)}}$。

- $\mathbf{v}_{a_ib_i}$ 是一个量子算子，其中 c 的位置严格处于数值 a_i 和 b_i的位置范围之外。因此，我们有 $\mathbf{q}^{\alpha^i} = \mathbf{q}^{jl}\mathbf{q}^{\alpha^{i-1}}$，其中 $u^{-1}(c) - 1 < u^{-1}(c) < j$ 或$l \leq u^{-1}(c) - 1 < u^{-1}(c)$。因此，我们得出结论，单项式 $\mathbf{q}^{jl}$ 不含因子 $q_{\alpha_{u^{-1}(c)-1}}$ 或 $q_{\alpha_{u^{-1}(c)}}$。请注意，如果 $l = u^{-1}(c) - 1$，那么 $q_{\alpha_{u^{-1}(c)-1}}$ 不会出现在 $\mathbf{q}^{jl}$ 中，因为乘积一直到 $l - 1$为止。

因此可得 $\alpha_{u^{-1}(c)} = \alpha_{u^{-1}(c)-1}$；注意，若 $u^{-1}(c) = 1$，则 $\alpha_1 = 0$。

现在，我们考虑 $\mathbf{v}'$。由于 $c \in \mathrm{supp}(\mathbf{v}')$ 且 $u^{-1}(c) = w^{-1}(c)$，因此在逐个应用算子$\mathbf{v}'$的过程中，c必须从位置 $u^{-1}(c)$ 移开，并返回到同一位置。我们证明 $\alpha_{u^{-1}(c)} \neq \alpha_{u^{-1}(c)-1}$，从而导出矛盾。为此，考虑依次应用各个 $\mathbf{v}_{c_id_i}$ 后得到的 $S_n[\mathbf{q}]$ 中元素的序列。对于 $1 \leq i \leq r$，我们记作

$$\mathbf{v}_{c_id_i} \dots \mathbf{v}_{c_1d_1} \bullet_k u = \mathbf{q}^{\beta^i} w^i,$$

其中 $\beta^i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{n-1}$。那么必定存在 $1 \leq j_1 < j_2 \leq r$，使得 $c \in \{c_{j_1}, d_{j_1}\} \cap \{c_{j_2}, d_{j_2}\}$，满足

- $(w^i)^{-1}(c) = u^{-1}(c)$ 对于 $1 \leq i < j_1$ 和 $j_2 \leq i \leq r$，并且
- $(w^{j_1})^{-1}(c) \neq u^{-1}(c) \neq (w^{j_2-1})^{-1}(c)$。

接下来，我们假设 $u^{-1}(c) \leq k$，另一种情形可通过类似论证得出。我们声称存在 j^* 使得 $j_1 \leq j^* \leq j_2$、$c_{j^*} > d_{j^*}$，且 $u^{-1}(c) = (w^{j^*-1})^{-1}(c_{j^*})$，也就是说，存在一个量子算子 $\mathbf{v}_{c_{j^*}d_{j^*}}$，属于$\mathbf{v}_{c_{j_1}d_{j_1}}$、……、$\mathbf{v}_{c_{j_2}d_{j_2}}$，使得 c_{j^*} 位于 w^{j^*-1} 的位置 $u^{-1}(c)$。否则，对于 $j_1 - 1 \leq i \leq j_2$，数值 $w^i(u^{-1}(c))$ 必须弱递增；但是

$$w^{j_1-1}(u^{-1}(c)) = c < w^{j_1}(u^{-1}(c)) > c = w^{j_2}(u^{-1}(c)),$$

这就导出了矛盾。现在，令 $q^{\beta^0} = 1$，注意，对于 $1 \leq i \leq r$，由于 $u^{-1}(c) \leq k$，不可能出现 $\mathbf{q}^{\beta^i} = \mathbf{q}^{jl}\mathbf{q}^{\beta^i-1}$，其中 $\mathbf{q}^{jl}$ 含有因子 $q_{u^{-1}(c)-1}$，且不含因子 $q_{u^{-1}(c)}$。因此，由于 $\mathbf{q}^{\beta^{j^*}} = \mathbf{q}_j$，$\iota\mathbf{q}^{\beta^{j^*-1}}$，且 $j = u^{-1}(c)$，可知 $\beta^{j^*}_{u^{-1}(c)-1} \neq \beta^{j^*}_{u^{-1}(c)}$，进而$\alpha_{u^{-1}(c)-1} \neq \alpha_{u^{-1}(c)}$，这正是所需的矛盾，结论得证。□

备注 4.9. 需要注意，命题 *4.8*并未说明数值 c_1、d_1、……、c_r、d_r是数值 a_1、b_1、……、a_r、b_r的重新排列。例如，正如我们稍后将看到的，$\mathbf{v}_{13}\mathbf{v}_{34}\mathbf{v}_{23} \equiv \mathbf{v}_{23}\mathbf{v}_{12}\mathbf{v}_{24}$ 其中

$$\mathrm{supp}(\mathbf{v}_{13}\mathbf{v}_{34}\mathbf{v}_{23}) = \mathrm{supp}(\mathbf{v}_{23}\mathbf{v}_{12}\mathbf{v}_{24}) = \{1, 2, 3, 4\},$$

并且$\mathbf{v}_{23}\mathbf{v}_{12}\mathbf{v}_{24}$ 的指标并非$\mathbf{v}_{13}\mathbf{v}_{34}\mathbf{v}_{23}$的指标的重新排列。

5 保持等价关系的变换

本节将证明，对算子复合进行作用的某些变换能够同时保持零等价与非零等价。其中一些变换已在 [2]中讨论过。然而，正如备注4.6所解释的，我们的等价关系具有更普遍的适用性，且此处给出的结果均以此等价关系为基础。

5.1 展平

我们先考虑与指标上的一个保序映射相对应的算子复合变换，该映射将复合的支撑映射到 $[m]$，其中 $m \in \mathbb{Z}_{>0}$。为此，我们需要以下在 [2]中引入的辅助映射和记号。

给定子集 $S \subseteq [n]$，其中 $|S| = m \leq n$，我们用 ϕ_S 表示从 S到 $[m]$的唯一保序双射。对于 $s \in [n]$，定义截断映射 $\tau_s \colon [n] \to [n-1] \cup \{0\}$ 如下

$$\tau_s(j) = \begin{cases} j, & \text{if } j < s \\ j-1, & \text{if } j \geq s. \end{cases}$$

给定 $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{a_r b_r} \cdots \mathbf{v}_{a_1 b_1}$，其中 $S = \mathrm{supp}(\mathbf{v})$ 且 $p \notin S$，我们定义

$$\tau_p(\mathbf{v}_{a_r b_r} \cdots \mathbf{v}_{a_1 b_1}) = \mathbf{v}_{\tau_p(a_r)\tau_p(b_r)} \cdots \mathbf{v}_{\tau_p(a_1)\tau_p(b_1)}.$$

注意，由于 $p \notin S$，对于 $1 \leq i \leq r$，$\tau_p(a_i)$ 和 $\tau_p(b_i)$ 的值均非零，且 S的不同取值经 τ_p映射后仍为不同值。若 $\max S = n$ 且 $[n] \setminus S = \{p_1 < p_2 < \ldots < p_j\}$，则定义展平为$\mathbf{v}$ 的

$$\underline{\mathbf{v}} = \tau_{p_1}(\tau_{p_2}(\cdots \tau_{p_j}(\mathbf{v}) \cdots)).$$

显然有以下结果，它指出，$\mathbf{v}$ 的展平是通过以保序方式将指标缩减为 1、2、.....、 $|\mathrm{supp}(\mathbf{v})|$ 而得到的算子复合。

引理 5.1. 设$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{a_r b_r} \cdots \mathbf{v}_{a_1 b_1}$，其中 $S = \mathrm{supp}(\mathbf{v})$ 且 $|S| = m$。那么，$\mathrm{supp}(\mathbf{v}) = [m]$ 且

$$\underline{\mathbf{v}} = \mathbf{v}_{\phi_S(a_r)\phi_S(b_r)} \cdots \mathbf{v}_{\phi_S(a_1)\phi_S(b_1)}.$$

例 5.2. 对于 $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{35}\mathbf{v}_{13}\mathbf{v}_{37}$,

$$\underline{\mathbf{v}} = \tau_2(\tau_4(\tau_6(\mathbf{v}))) = \tau_2(\tau_4(\tau_6(\mathbf{v}_{35}\mathbf{v}_{13}\mathbf{v}_{37}))) = \tau_2(\tau_4(\mathbf{v}_{34}\mathbf{v}_{13}\mathbf{v}_{36})) = \tau_2(\mathbf{v}_{34}\mathbf{v}_{13}\mathbf{v}_{35}) = \mathbf{v}_{23}\mathbf{v}_{12}\mathbf{v}_{24}.$$

以下结果说明，展平操作保持零与非零等价关系。

定理 5.3. 设$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{a_r b_r} \cdots \mathbf{v}_{a_1 b_1}$ 和$\mathbf{v}' = \mathbf{v}_{c_r d_r} \cdots \mathbf{v}_{c_1 d_1}$ 是两个非零复合，且$\mathrm{supp}(\mathbf{v}) = \mathrm{supp}(\mathbf{v}') = S$。那么，

(a) $\mathbf{v} \equiv 0$ 当且仅当$\mathbf{v}' \equiv \underline{0}$。(

b) $\mathbf{v} \equiv \mathbf{v}'$ 当且仅当$\mathbf{v} \equiv \mathbf{v}'$。

为证明定理 5.3，我们需要引入一种记号，它类似于对置换层面以及 $\mathbf{q}$ 的单项式中所涉及序列进行的展平操作。对于 $u \in S_n$ 和$r \in [n]$，令 $u/r \in S_{n-1}$ 表示省略 r^{th} 的值后，对剩余值应用 $\tau_{u(r)}$ 所得到的置换。类似地，对于 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{n-1}$，定义序列

$$\alpha/s = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{s-1}, \alpha_{s+1} \ldots, \alpha_{n-1}),$$

通过省略 s^{th} 的分量得到 α。反过来，对于 r， $s \in [n+1]$， $v \in S_n$，以及 $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{n-1}$，定义置换 $\epsilon_{r,\ s(v)}$: $= u \in S_{n+1}$ 令其为满足以下条件的唯一置换： $u(r) = s$ 以及 $u/r = v$。类似地，定义序列

$$\epsilon_{r,s}(\alpha) := (\alpha_1, \ldots, \alpha_{r-1}, s, \alpha_r, \ldots, \alpha_{n-1})$$

通过在 r^{th} 位置引入 s 而得到。

下面的例子说明这些概念。

例5.4。对于 $u = (3, 2, 4, 1)$， $u/2 = (\tau_2(3)\ \tau_2(4)\ \tau_2(1)) = (2, 3, 1)$以及 $\epsilon_{23}(u) = (4, 3, 2, 5, 1)$。对于 $\alpha = (2, 2, 3, 1)$， $\alpha/2 = (2, 3, 1)$以及$\epsilon_{2,4}(\alpha) = (2, 4, 2, 3, 1)$。

接下来，我们建立一系列引理来描述τ_p 和$\epsilon_{r,s}$的性质。

引理 5.5。设 $a, b, p \in [n]$。

(a) 若 $a < b$ 和 $p \neq a, b$， 则$\tau_p(a) < \tau_p(b)$。

(b) 若 $\tau_p(a) < \tau_p(b)$， 则 $a < b$。

(c) 对于 $a < b$ 和 $p \neq ab$， τ_p 将 $(a, b)\backslash\{p\}$ 中的元素映射到 $(\tau_p(a)\tau_p(b))$ 中的元素，并将 $[n]\backslash([a, b] \cup \{p\})$ 中的元素映射到 $[n-1]\backslash[\tau_p(a)\ \tau_p(b)]$中的元素。

证明。 (a) 我们考察三种可能的情形。若 $p < a < b$， 则 $\tau_p(a) = a - 1 < b - 1 = \tau_p(b)$；若$a < p < b$， 则 $\tau_p(a) = a \leq p - 1 < \tau_p(b) = b - 1$； 若 $a < b < p$， 则$\tau_p(a) = a < b = \tau_p(b)$。在这三种情形下，顺序均保持不变。

(b) 我们再次考察可能的情形。若 $\tau_p(a) < \tau_p(b) < p - 1$， 则 $a = \tau_p(a) < \tau_p(b) = b$；而若 $p - 1 < \tau_p(a) < \tau_p(b)$， 则 $a - 1 = \tau_p(a) < \tau_p(b) = b - 1$。若 $\tau_p(a) < \tau_p(b) = p - 1$， 则当 $b \neq p$ 时， $a = \tau_p(a) < \tau_p(b) = b$ ； 否则， $a = \tau_p(a) < \tau_p(b) = b - 1 = p - 1 < b = p$。最后，若 $\tau_p(a) \leq p - 1 < \tau_p(b)$， 则当$a \neq p$时， $a = \tau_p(a) < \tau_p(b) = b - 1 < b$ ； 否则， $a - 1 = p - 1 = \tau_p(a) < \tau_p(b) = b - 1$ 。因此，在所有情形下， $a < b$，如所需。

(c) 这直接由 (a) 得出。

□

注记 5.6. 引理 *5.5* 告诉我们，τ_p 在“几乎”保序的意义下，只有在 $p - 1$ 和 p处会失去保序性；这两个值可能变得相同$\tau_p(p - 1) = p - 1 = \tau_p(p)$。

接下来，对于算子$\mathbf{v}$ 与 $p \notin$supp(v) 的非零复合，我们将建立$\mathbf{v}$ 与τ_p(v)的作用之间的关系。

引理 5.7. 设$\mathbf{v} = \mathbf{v}^{a_r b_r} \cdots \mathbf{v}^{a_1 b_1}$ 是一个非零算子复合，且满足$\text{supp}(\mathbf{v}) \subsetneq [n]$。考虑 $u \in S_n$、 $k \in [n-1]$ 和 $\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{n-1}$， 使得$\mathbf{v} \bullet_k u = \mathbf{q}^{\alpha} w \in S_n[\mathbf{q}]$。那么，对于所有$p \notin \text{supp}(\mathbf{v})$， 都有 $\tau_p(\mathbf{v}) \bullet_{\tau_t(k)} u/t = \mathbf{q}^{\alpha/t} w/t$ ， 其中 $t = u^{-1}(p)$。

证明。 我们首先注意到，由于$\mathbf{v}$ 的支撑， $w^{-1}(p) = t = u^{-1}(p)$；并且，由于$\mathbf{v} \bullet_k u \neq 0$， $\tau_p(k) > 0$。

我们分析三种情形：(a) 当 $\mathbf{v}$ 是一个单独的经典算子时；(b) 当 $\mathbf{v}$ 是一个单独的量子算子时；以及 (c) 一般情形。

情形 (a): 假设 $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{ab}$ 且 $a < b$。那么，$i = u^{-1}(a)$ 和 $j = u^{-1}(b)$ 满足 $i \le k < j$。根据命题 4.2，$\{u(x) \mid i < x < j\} \subseteq [n]\backslash[a, b]$。令 $i' = (u/t)^{-1}(\tau_p(a))$ 且 $j' = (u/t)^{-1}(\tau_p(b))$，我们断言 $i' \le \tau_t(k) < j'$。为说明这一点，注意到

- 若 $t < i$，则 $i' = i - 1 \le k - 1 = \tau_t(k) < j - 1 = j'$;
- 若 $i < t \le k$，则 $i' = i \le k - 1 = \tau_t(k) < j - 1 = j'$;
- 若 $k < t < j$，则 $i' = i \le k = \tau_t(k) < j - 1 = j'$；并且
- 若 $j < t$，则 $i' = i \le k = \tau_t(k) < j = j'$。

此外，由引理 5.5 (c)，$\{(u/t)(x) \mid i' < x < j'\} = \{\tau_p(u(x)) \mid i < x < j,\ x \ne t\} \subseteq [n-1]\backslash[\tau_p(a)\tau_p(b)]$。最后，由命题 4.2，$\tau_p(\mathbf{v}_{ab}) \bullet_{\tau_t(k)} u/t = (u/t)s_{i'j'}$，并且不难验证 $(u/t)s_{i'j'} = w/t$。

情况（b）：设 $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{ab}$ with $a > b$。那么，$i = u^{-1}(a)$ 和 $j = u^{-1}(b)$ 满足 $i \le k < j$，记作 $\mathbf{q}_{ij} = \mathbf{q}^{\alpha}$。根据命题 4.2，$\{u(x) \mid i < x < j\} \subseteq (ab)$。令 $i' = (u/t)^{-1}(\tau_p(a))$ 且 $j' = (u/t)^{-1}(\tau_p(b))$，由与情形 (a) 相同的论证可得 $i' \le \tau_t(k) < j'$。此外，在此情形下，根据引理 5.5 (c)，$\{(u/t)(x) \mid i' < x < j'\} = \{\tau_p(u(x)) \mid i < x < j,\ x \ne t\} \subseteq (\tau_p(a)\tau_p(b))$。最后，根据命题 4.2，$\tau_p(\mathbf{v}_{ab}) \bullet_{\tau_t(k)} u/t = \mathbf{q}_{i'j'}(u/t)s_{i',j'}$，并且不难验证 $(u/t)s_{i',j'} = w/t$ and $\mathbf{q}_{i'j'} = \mathbf{q}^{\alpha/t}$。

情形（c）：对于一般情形，我们对 r 使用归纳法。情形（a）和情形（b）涵盖了基础情形。假设

$$(\mathbf{v}_{a_{r-1}b_{r-1}} \dots \mathbf{v}_{a_1b_1}) \bullet_k u = \mathbf{q}^{\alpha^{r-1}} w_{r-1} \quad \text{and} \quad \mathbf{v}_{a_rb_r} \bullet_k w_{r-1} = \mathbf{q}^{\beta^r} w_r.$$

然后，应用归纳假设两次，我们得到

$$\begin{aligned}
\tau_p(\mathbf{v}_{a_rb_r} \dots \mathbf{v}_{a_1b_1}) \bullet_{\tau_t(k)} u &= \tau_p(\mathbf{v}_{a_rb_r}) \bullet_{\tau_t(k)} \left(\tau_p(\mathbf{v}_{a_{r-1}b_{r-1}} \dots \mathbf{v}_{a_1b_1}) \bullet_{\tau_t(k)} u\right) \\
&= \tau_p(\mathbf{v}_{a_rb_r}) \bullet_{\tau_t(k)} q^{\alpha^{r-1}/t} w_{r-1}/t \\
&= \mathbf{q}^{\beta^r/t}\mathbf{q}^{\alpha^{r-1}/t} w_r/t \\
&= \mathbf{q}^{\beta^r/t}\mathbf{q}^{\alpha^{r-1}/t} w/t.
\end{aligned}$$

Th通过注意到 $\mathbf{q}^{\beta^r}\mathbf{q}^{\alpha^{r-1}} = \mathbf{q}^{\alpha}$，从而 $\mathbf{q}^{\beta^r/t}\mathbf{q}^{\alpha^{r-1}/t} = \mathbf{q}^{\alpha}$，即可得到结果 $/t$. □

例5.8。考虑 $v = v_{61}v_{78}v_{53}$，其中 $supp(v) \subsetneq [8]$，$u = (7, 6, 2, 5, 3, 4, 1, 8) \in S_8$，且 $k = 4 \in [7]$。那么，$v_{61}v_{78}v_{53} \bullet_k u = q^{\alpha}w$，其中 $w = (8, 1, 2, 3, 5, 4, 6, 7)$ 且 $\alpha = (0, 1, 1, 2, 1, 1)$。

取 $p = 2 \notin$ 支撑(v) 和 $t = u^{-1}(p) = 3$，我们得到 $w/t = (7, 1, 2, 4, 3, 5, 6)$ 和 $\alpha/t = (0, 1, 2, 1, 1)$。读者可以检查，正如结果中所述，

$$\tau_2(\mathbf{v}_{61}\mathbf{v}_{78}\mathbf{v}_{53}) \bullet_{\tau_3(4)} u/3 = \mathbf{q}^{\alpha/t} w/t.$$

零等价

在本小节中，我们证明定理 5.3 的(a)部分。为此，我们需要以下命题。

命题 5.9. 设 $\mathbf{v} = \mathbf{v}^{a_r b_r} \cdots \mathbf{v}^{a_1 b_1}$ 且令 $p \notin \operatorname{supp}(\mathbf{v})$。那么，$\mathbf{v} \equiv \mathbf{0}$ 当且仅当 $\tau_p(\mathbf{v}) \equiv \mathbf{0}$。

证明。$\boxed{\Longrightarrow}$ 通过逆否论证，假设 $\tau_p(\mathbf{v}) \not\equiv \mathbf{0}$。那么存在 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$、$u \in S_n$ 和 $k \in [n-1]$，使得 $\tau_p(\mathbf{v}) \bullet_k u \neq 0$。可以直接验证，$\mathbf{v} \bullet_k \epsilon_{n+1,p}(u) \neq 0$，因此 $\mathbf{v} \not\equiv \mathbf{0}$。

$\boxed{\Longleftarrow}$ 我们再次考虑逆否命题。若 $\mathbf{v} \not\equiv \mathbf{0}$，则存在 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$、$u \in S_n$ 和 $k \in [n-1]$，使得 $\mathbf{v} \bullet_k u \neq 0$。假设 $\mathbf{v} \bullet_k u = \mathbf{q}^{\alpha} w$，其中 $\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{n-1}$ 和 $w \in S_n$。应用引理 5.7，可得 $\tau_p(\mathbf{v}) \bullet_{\tau_t(k)} u/t = \mathbf{q}^{\alpha/t} w/t \neq 0$，因此 $\tau_p(\mathbf{v}) \not\equiv \mathbf{0}$。 □

我们现在证明定理 5.3(a)。

定理 5.3（a）的证明。令 $S = \mathrm{v}$ 的支撑，其中 $|S| = m$，$n = \max S$，且 $N = n - m$。我们对 N 使用归纳法证明该结果。对于 $N = 0$，$\mathbf{v} = \mathbf{v}$，结论立即成立。命题 5.9 涵盖了情形 $N = 1$。现假设该结果对 $N - 1 \geq 1$ 成立。令 $\widehat{\mathbf{v}} = \tau_{p_N}(\mathbf{v})$。注意，$S = \widehat{\mathbf{v}}$ 的支撑满足 $|S| = m$、$\max S = n-1$、$\widehat{[n]\backslash S} = \{p_1 < \ldots < p_N\}$ 且 $[n-1]\backslash S = \{p_1 < \ldots < p_{N-1}\}$。因此，

- $\mathbf{v} \equiv \mathbf{0}$ 当且仅当 $\widehat{\mathbf{v}} \equiv \mathbf{0}$ 根据命题 5.9 和
- $\widehat{\mathbf{v}} \equiv \mathbf{0}$ 当且仅当 $\widehat{\underline{\mathbf{v}}} = \underline{\mathbf{v}} \equiv \mathbf{0}$ 由我们的归纳假设得出。

结论由此得出。 □

非零等价关系

在本小节中，我们通过证明 (b) 部分来完成定理 5.3 的证明。为此，我们需要一个与命题5.9类似的结果。

定理 5.10。 设 $\mathbf{v} = \mathbf{v}^{a_r b_r} \cdots \mathbf{v}^{a_1 b_1}$ 且 $\mathbf{v}' = \mathbf{v}^{c_r d_r} \cdots \mathbf{v}^{c_1 d_1}$，其中 $p \notin \operatorname{supp}(\mathbf{v}) = \operatorname{supp}(\mathbf{v}')$。那么 $\mathbf{v} \equiv \mathbf{v}'$ 当且仅当 $\tau_p(\mathbf{v}) \equiv \tau_p(\mathbf{v}')$。

这个结果的证明比命题 5.9的证明更为复杂。因此，我们将在下文概述证明思路。

（步骤 1）我们引入给定置换$L_{<p,\,t}(u)$ 和 $u \in S_n$ 与 p的$t \in [n]$概念，用于统计 u 中位置 t 右侧且值严格小于 p的元素。此外，我们还建立了$L_{<p,\,t}(u)$ 的一些有用性质（引理5.11）。

（步骤 2）我们证明一个技术性结果，指出在什么情形下，已知对于某个特定的$\tau_p(\mathbf{v}) = 0$，给定 u和 k 时，意味着$\mathbf{v}$ 对于这些 u和 k 也为零（命题5.13）。

（步骤 3）我们证明$\tau_p(\mathbf{v}) \equiv \tau_p(\mathbf{v}') \implies \mathbf{v} \equiv \mathbf{v}'$（命题5.14）。

(步骤 4) 我们证明$\mathbf{v} \equiv \mathbf{v}' \implies \tau_p(\mathbf{v}) \equiv \tau_p(\mathbf{v}')$（命题 5.15）。

回到（步骤 1），给定置换 $u \in S_n$ 和 $p \in [n]$，令 $t = u^{-1}(p)$ 并定义

$$L_{<p,t}(u) := \#\{i \mid i < t,\ u(i) < p\}.$$

以下结果概述了$L_{<p,t}(u)$的一些性质。

引理 5.11. 对于 $n \in \mathbb{Z}_{>1}$，设 $u \in S_n$、$k \in [n-1]$ 和 $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{a_r b_r} \cdots \mathbf{v}_{a_1 b_1}$ 满足 支撑$(v) \subsetneq [n]$。假设 $p \notin$ 支撑$(\mathbf{v})$，$u^{-1}(p) = t$，且 $\tau_p(\mathbf{v}) \bullet_{\tau_t(k)} u/t \neq 0$。令 $u_0 = u$，对 $i \in [r]$，定义

$$\tau_p(\mathbf{v}_{a_i b_i} \dots \mathbf{v}_{a_1 b_1}) \bullet_{\tau_t(k)} u/t = \mathbf{q}^{\beta^i} w_i$$

其中 $w_i \in S_{n-1}$，且 $u_i = \epsilon_{t,p}(w_i)$。

(a) 对于 $i \in [r]$，$L_{<p,t}(u_i/t) = L_{<p,t}(u_{i-1}/t) + 1$ 当且仅当 $u_{i-1}^{-1}(a_i) < t < u_{i-1}^{-1}(b_i)$ 且$a_i > p > b_i$。

(b) 对于 $i \in [r]$，$L_{<p,t}(u_i/t) = L_{<p,t}(u_{i-1}/t) - 1$ 当且仅当 $u_{i-1}^{-1}(a_i) < t < u_{i-1}^{-1}(b_i)$ 且$a_i < p < b_i$。

(c) $L_{<p,\ t}(w/t) - L_{<p,\ t}(u/t) \leq \#\{i \in [r] \mid u_{i-1}^{-1}(a_i) < t < u_{i-1}^{-1}(b_i)$ 以及 $a_i > p > b_i\}$；当且仅当不存在满足 $u_{j-1}^{-1}(a_j) < t < u_{j-1}^{-1}(b_j)$ 且满足 $a_j < p < b_j$ 的 $j \in [r]$ 时，等号成立。

(d) 如果 $\mathbf{v} \bullet_k u = \mathbf{q}^{\alpha} w \in S_n[\mathbf{q}]$ 以及 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{n-1}$和 $w \in S_n$，则 n

$$\alpha_{t-1} = L_{<p,t}(w) - L_{<p,t}(u) = L_{<p,t}(w/t) - L_{<p,t}(u/t).$$

证明。(a) 对于 $i \in [r]$，注意到 $L_{<p,\ t}(u_i/t) = L_{<p,\ t}(u_{i-1}/t) + 1$ 当且仅当

$$\tau_p(b_i) < p \leq \tau_p(a_i) \text{ and } (u_{i-1}/t)^{-1}(\tau_p(a_i)) < t \leq (u_{i-1}/t)^{-1}(\tau_p(b_i)). \tag{1}$$

由于 $p \notin$ 支撑$(\mathbf{v})$, (1) 当且仅当 $b_i < p < a_i$ 且 $u_{i-1}^{-1}(a_i) < t < u_{i-1}^{-1}(b_i)$ 成立，结论得证。

(b) 这与 (a) 部分类似，只需将 $\tau_p(b_i) < p \leq \tau_p(a_i)$ 替换为 $\tau_p(b_i) \geq p > \tau_p(a_i)$。

(c) 由于$|L_{<p,\ t}(u_i/t) - L_{<p,\ t}(u_{i-1}/t)| \leq 1$ 对于 $i \in [r]$，因此该性质可由 (a) 和 (b) 两部分推出。

(d) 第二个等式由以下事实得出：$L_{<p,\ t}(w) = L_{<p,\ t}(w/t)$以及 $L_{<p,\ t}(u) = L_{<p,\ t}(u/t)$。对于第一个等式，令 $u_0' = u$，对于 $i \in [r]$，定义

$$q^{\alpha^i} u_i' = (\mathbf{v}_{a_i b_i} \dots \mathbf{v}_{a_1 b_1}) \bullet_k u$$

其中 $u_i' \in S_n$。注意，对于 $i \in [r]$，$u_i' = u_i$，且

$$\alpha_{t-1} = \#\{j \in [r] \mid a_j > b_j \text{ and } u_{j-1}^{-1}(a_j) < t < u_{j-1}^{-1}(b_j)\}.$$

由于 $u_i(t) = p$ 对所有 $0 \leq i \leq r$ 以及 $\mathbf{v} \bullet_k u \neq 0$，根据命题 4.2，

$\#\{j \in [r] \mid a_j > b_j \text{ and } u_{j-1}^{-1}(a_j) < t < u_{j-1}^{-1}(b_j)\} = \#\{j \in [r] \mid a_j > p > b_j \text{ and } u_{j-1}^{-1}(a_j) < t < u_{j-1}^{-1}(b_j)\}$

并且不存在满足 $a_j < p < b_j$ 且 $u_{j-1}^{-1}(a_j) < t < u_{j-1}^{-1}(b_j)$ 的 $j \in [r]$。因此，根据 (c) 部分，

$$L_{<p,\ t}(w/t) - L_{<p,t}(u/t) = \#\{i \in [r] \mid u_{i-1}^{-1}(a_i) < t < u_{i-1}^{-1}(b_i) \text{ and } a_i > p > b_i\} = \alpha_{t-1},$$

如所期望的。 □

转到（步骤 2），我们在下文建立命题 5.13，它将在本文后续部分发挥作用。我们从单个算子的情形开始，并在下文的引理 5.12中单独处理。

引理 5.12. 考虑$\mathbf{v}_{ab}$，其中 a、$b \in [n]$ 和 $a \neq b$，并设 $u \in S_n$。令 $p \in [n] \setminus \{a, b\}$ 和 $t = u^{-1}(p)$。若对某个 $k \in [n-1]$，有 $\tau_p(\mathbf{v}_{ab}) \bullet_{\tau_t(k)} u/t = 0$，则$\mathbf{v}_{ab} \bullet_k u = 0$。

证明. 令 $i = u^{-1}(a)$、$j = u^{-1}(b)$、$i' = (u/t)^{-1}(\tau_p(a)) = \tau_t(i)$，以及 $j' = (u/t)^{-1}(\tau_p(b)) = \tau_t(j)$。我们分析可能的情形，根据相关论证将其分为两类。

情形 (a)：$j' < i'$、$\tau_t(k) < i' < j'$，或 $i' < j' \leq \tau_t(k)$。对于 $j' < i'$、$\tau_t(k) < i' < j'$，或 $i' < j' < \tau_t(k)$，应用引理 5.5 (b)，可分别得到 $j < i$、$k < i < j$，或 $i < j < k$。因此，$\mathbf{v}_{ab} \bullet_k u = 0$。现在，对于 $i' < j' = \tau_t(k)$，由于 $u^{-1}(p) = t \neq u^{-1}(a)\ u^{-1}(b)$，应用引理 5.5 (b)，若 $k \neq t$ 则为 $i < j = k$，否则为 $i < j = t-1 < k = t$。无论哪种情形，均有 $\mathbf{v}_{ab} \bullet_k u = 0$，证毕。

情况（b）：$i' \leq \tau_t(k) < j'$，且 $a < b$ 或者 $a > b$。我们考虑情形 $a < b$，因为另一个情形可类似证明。注意，由于 $u^{-1}(p) = t \neq u^{-1}(a)\ u^{-1}(b)$，应用引理5.5 (b)，可得以下二者之一：

- $i' < \tau_t(k) < j'$ 使得 $i < k < j$,
- $k \neq t$ 且 $i' = \tau_t(k) < j'$ 使得 $i = k < j$，或者
- $k = t$ 且 $i' = \tau_t(k) < j'$ 使得 $i = t-1 < t = k < j$。

因此，$i \leq k < j$。现在，应用引理 5.5 (a)，可得 $\tau_p(a) < \tau_p(b)$。因此，应用命题 4.2，存在 $l' \in (i', j')$，使得 $(u/t)(l') \in (\tau_p(a)\tau_p(b))$。根据引理 5.5 (b)，这意味着存在 $i < l < j$，使得 $\tau_t(l) = l'$ 且 $u(l) \in (a, b)$。因此，再次应用命题 4.2，可得 $\mathbf{v}_{ab} \bullet_k u = 0$，证毕。 □

现在，我们陈述并证明与（步骤 2）对应的结果。

命题 5.13. 设 $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{a_r b_r} \cdots \mathbf{v}_{a_1 b_1}$ 且令 $p \notin$ 支撑$(\mathbf{v})$。假设 $u \in S_n$ 和 $k \in [n-1]$满足 $\tau_p(\mathbf{v}) \bullet_{\tau_t(k)} u/t = 0$，其中 $t = u^{-1}(p)$。那么 $\mathbf{v} \bullet_k u = 0$。

证明。我们定义 $i^* \in [r]$ 为满足 $\tau_p(\mathbf{v}_{a_{i^*} b_{i^*}} \cdots \mathbf{v}_{a_1 b_1}) \bullet_{\tau_t(k)} u/t = 0$的最小整数。若$i^* = 1$，则应用引理 5.12 即可得出结论。因此，假设 $i^* > 1$。在此情形下，$\tau_p(\mathbf{v}_{a_{i^*-1} b_{i^*-1}} \cdots \mathbf{v}_{a_1 b_1}) \bullet_{\tau_t(k)} u/t \neq 0$ 且 $\tau_p(\mathbf{v}_{a_{i^*} b_{i^*}} \cdots \mathbf{v}_{a_1 b_1}) \bullet_{\tau_t(k)} u/t = 0$。注意，若 $i^* > 1$ 且 $\mathbf{v}_{a_{i^*-1} b_{i^*-1}} \cdots \mathbf{v}_{a_1 b_1} \bullet_k u = 0$，则可直接得出结论。因此，我们还假设 $\mathbf{v}_{a_{i^*-1} b_{i^*-1}} \cdots \mathbf{v}_{a_1 b_1} \bullet_k u = \mathbf{q}^{\alpha} w \neq 0$，其中 $\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{n-1}$且 $w \in S_n$。应用引理 5.7，可得 $\tau_p(\mathbf{v}_{a_{i^*-1} b_{i^*-1}} \cdots \mathbf{v}_{a_1 b_1}) \bullet_{\tau_t(k)} u/t = \mathbf{q}^{\alpha/t} w/t$ 且

$$\begin{aligned} 0 &= \tau_p(\mathbf{v}_{a_{i^*} b_{i^*}} \cdots \mathbf{v}_{a_1 b_1}) \bullet_{\tau_t(k)} u/t = \tau_p(\mathbf{v}_{a_{i^*} b_{i^*}}) \bullet_{\tau_t(k)} \left(\tau_p(\mathbf{v}_{a_{i^*-1} b_{i^*-1}} \cdots \mathbf{v}_{a_1 b_1}) \bullet_{\tau_t(k)} u/t\right) \\ &= \tau_p(\mathbf{v}_{a_{i^*} b_{i^*}}) \bullet_{\tau_t(k)} \mathbf{q}^{\alpha/t} w/t = \mathbf{q}^{\alpha/t} \tau_p(\mathbf{v}_{a_{i^*} b_{i^*}}) \bullet_{\tau_t(k)} w/t; \end{aligned}$$

也就是说，$\tau_p(\mathbf{v}_{a_{i^*} b_{i^*}}) \bullet_{\tau_t(k)} w/t = 0$。因此，再次应用引理 5.12 可得

$$\mathbf{v} \bullet_k u = \mathbf{v}_{a_{i^*} b_{i^*}} \cdots \mathbf{v}_{a_1 b_1} \bullet_k u = \mathbf{v}_{a_{i^*} b_{i^*}} \bullet_k w = 0,$$

正如所需。 □

接下来，对于（步骤 3），我们证明 $\tau_p(\mathbf{v}) \equiv \tau_p(\mathbf{v}')$ 蕴含 $\mathbf{v} \equiv \mathbf{v}'$。

命题 5.14。设 $\mathbf{v} = \mathbf{v}^{a_r b_r} \cdots \mathbf{v}^{a_1 b_1}$ 和 $\mathbf{v}' = \mathbf{v}^{c_r d_r} \cdots \mathbf{v}^{c_1 d_1}$ 满足 $S = \mathrm{supp}(\mathbf{v}) = \mathrm{supp}(\mathbf{v}')$，并取 $p \notin S$。若 $\tau_p(\mathbf{v}) \equiv \tau_p(\mathbf{v}')$，则 $\mathbf{v} \equiv \mathbf{v}'$。

证明。对于 $n \geq \max(S)$，考虑 $u \in S_n$ 和 $k \in [n-1]$，并令 $t = u^{-1}(p)$。因此，只需证明 $\mathbf{v} \bullet_k u = \mathbf{v}' \bullet_k u$。

若 $\tau_p(\mathbf{v}) \bullet_{\tau_t(k)} u/t = \tau_p(\mathbf{v}') \bullet_{\tau_t(k)} u/t = 0$，则由命题 5.13可得 $\mathbf{v} \bullet_k u = \mathbf{v}' \bullet_k u = 0$。因此，还需考虑两种情形。

情形 (a)：$\tau_p(\mathbf{v}) \bullet_{\tau_t(k)} u/t = \tau_p(\mathbf{v}') \bullet_{\tau_t(k)} u/t \in S_{n-1}[\mathbf{q}]$ 以及 $\mathbf{v} \bullet_k u, \mathbf{v}' \bullet_k u \neq 0$。令 $\mathbf{v} \bullet_k u = \mathbf{q}^{\alpha} w_1$ 且 $\mathbf{v}' \bullet_k u = \mathbf{q}^{\beta} w_2$，其中 $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}),\ \beta = (\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{n-1}$。应用引理 5.7，可得 $w_1 = \epsilon_{t\,p}\ w_1/t\ = \epsilon_{t\,p}\ w_2/t\ = w_2 \qquad \alpha^i = \beta^i \qquad i \neq t \qquad\qquad \alpha_t = \alpha_{t-1} \qquad \beta_t = \beta_{t-1}$ (v) ( )

$u/t = \mathbf{q}^{\alpha/\mathbf{t}} w_1/t = \mathbf{q}^{\beta/t} w_2/t = \tau_p(\mathbf{v}')$ ( ) u/t，这意味着 , ( ) , ( ) 且对于 。我们声称 和，由此可得 $\alpha = \beta$。由于论证相同，我们对 α_t证明该断言。令$u_0 = u$ 且 $\alpha_0 = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{n-1}$，对于 $i \in [r]$，定义

$$\mathbf{q}^{\alpha^i} u_i = (\mathbf{v}_{a_i b_i} \ldots \mathbf{v}_{a_1 b_1}) \bullet_k u$$

与 $u_i \in S_n$。注意，若 $a_i > b_i$ 对于某个 $i \in [r]$ 满足 $u_{i-1}^{-1}(a_i) = i^*$ 且 $u_{i-1}^{-1}(b_i) = j^*$，那么由于 $p \notin S$，以下情形之一成立：

- $t < i^* < j^*$ 或 $i^* < j^* < t$；在这些情形下，q_{t-1} 和 q_t 都不是$\mathbf{q}^{\alpha^i}\ \mathbf{q}^{\alpha_{i-1}}$的因子；或者
- $i^* < t < j^*$；在这种情形下，q_{t-1} 和 q_t 都是$\mathbf{q}^{\alpha^i}\ \mathbf{q}^{\alpha_{i-1}}$的因子。

因此，所述断言得证。于是，$\mathbf{v} \bullet_k u = \mathbf{v}' \bullet_k u$，如所需。

情况（b）：$\tau_p(\mathbf{v}) \bullet_{\tau_t(k)} u/t = \tau_p(\mathbf{v}') \bullet_{\tau_t(k)} u/t = q^{\alpha/t} w/t \in S_{n-1}[\mathbf{q}]$ 对于 $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{n-1}$和$w \in S_n$，且 $\mathbf{v} \bullet_k u = 0$ 或 $\mathbf{v}' \bullet_k u = 0$。我们断言 $\mathbf{v} \bullet_k u = \mathbf{v}' \bullet_k u = 0$。不失一般性，假设 $\mathbf{v}' \bullet_k u = 0$。为导出矛盾，假设 $\mathbf{v} \bullet_k u = \mathbf{q}^{\alpha} w \in S_n[\mathbf{q}]$。应用引理 5.11 (d)，可得

$$\alpha_{t-1} = L_{<p,t}(w) - L_{<p,t}(u) = L_{<p,t}(w/t) - L_{<p,t}(u/t). \tag{2}$$

现在，定义 $i^* \in [r]$ 为满足 $\mathbf{v}^{c_{i^*} d_{i^*}} \cdots \mathbf{v}_{c_1 d_1} \bullet_k u = 0$ 的最小整数。特别地，若 $\mathbf{v}_{c_1 d_1} \bullet_k u = 0$，则 $i^* = 1$；否则，$i^* > 1$ 满足 $\mathbf{v}^{c_{i^*-1} d_{i^*-1}} \cdots \mathbf{v}_{c_1 d_1} \bullet_k u = \mathbf{q}^{\beta} u_{i^*-1} \in S_n[\mathbf{q}]$ 且$\mathbf{v}^{c_{i^*} d_{i^*}} \cdots \mathbf{v}_{c_1 d_1} \bullet_k u = 0$。分为两种情形，在这两种情形中，令 $u_0 = u$，对于 $j \in [r]$，我们定义

$$\tau_p(\mathbf{v}_{a_j b_j} \ldots \mathbf{v}_{a_1 b_1}) \bullet_{\tau_t(k)} u/t = \mathbf{q}^{\beta^j} w_j$$

其中 $w_j \in S_{n-1}$，且 $u_j = \epsilon_{t,p}(w_j)$。

情况（b.1）：$c_{i^*} > d_{i^*}$。由于 $\tau_p(\mathbf{v}^{c_{i^*} d_{i^*}} \cdots \mathbf{v}_{c_1 d_1}) \bullet_{\tau_t(k)} u/t \neq 0$，因此

$$\mathbf{v}_{c_{i^*} d_{i^*}} \bullet_k (\mathbf{v}_{c_{i^*-1} d_{i^*-1}} \ldots \mathbf{v}_{c_1 d_1} \bullet_k u) = 0$$

由于在位置 p t中 u添加了。因此，考虑命题4.2，我们必有 $(u_{i^*-1})^{-1}(c_{i^*}) < t <(u_{i^*-1})^{-1}($ d_{i^*})，并且 $p > c_{i^*}$ 或 $p < d_{i^*}$。注意，在这两种情况下，应用引理 5.11 (c)，我们有

$$\begin{aligned}\alpha_{t-1} &= \#\{j \in [r] \mid \tau_p(c_j) > \tau_p(d_j),\ (u_{j-1}/t)^{-1}(\tau_p(c_j)) < t \le (u_{j-1}/t)^{-1}(\tau_p(d_j))\}\\ &= \#\{j \in [r] \mid c_j > d_j,\ u_{j-1}^{-1}(c_j) < t < u_{j-1}^{-1}(d_j)\}\\ &\ge \#\{j \in [r] \mid c_j > p > d_j,\ u_{j-1}^{-1}(c_j) < t < u_{j-1}^{-1}(d_j)\} + 1\\ &> L_{<p,t}(w/t) - L_{<p,t}(u/t),\end{aligned}$$

其中我们将 α 视为 $\tau_p(\mathbf{v}')\bullet_{\tau_t(k)}$ $u/t = \mathbf{q}^{\alpha/t}w/t$。考虑到 (2)，这就产生了矛盾。

情形 (b.2): $c_i^* < d_i^*$. 由于在 u 中位置 t 添加了 p，我们有 th at

$$\mathbf{v}_{c_{i^*}d_{i^*}} \bullet_k (\mathbf{v}_{c_{i^*-1}d_{i^*-1}} \cdots \mathbf{v}_{c_1d_1} \bullet_k u) = 0.$$

因此，根据命题 4.2，我们必有 $(u_{i^*-1})^{-1}(c_{i^*}) < t < (u_{i^*-1})^{-1}(d_{i^*})$，并且$c_{i^*} < p < d_{i^*}$。因此，应用引理 5.11 (c)，可得

$$\begin{aligned}\alpha_{t-1} &= \#\{j \in [r] \mid \tau_p(c_j) > \tau_p(d_j),\ (u_{j-1}/t)^{-1}(\tau_p(c_j)) < t \le (u_{j-1}/t)^{-1}(\tau_p(d_j))\}\\ &= \#\{j \in [r] \mid c_j > d_j,\ u_{j-1}^{-1}(c_j) < t < u_{j-1}^{-1}(d_j)\}\\ &\ge \#\{j \in [r] \mid c_j > p > d_j,\ u_{j-1}^{-1}(c_j) < t < u_{j-1}^{-1}(d_j)\}\\ &> L_{<p,t}(w/t) - L_{<p,t}(u/t).\end{aligned}$$

与前面一样，考虑到 (2)，这就产生了矛盾。 □

最后，对于（步骤 4），我们证明 $\mathbf{v} \equiv \mathbf{v}'$ 蕴含 $\tau_p(\mathbf{v}) \equiv \tau_p(\mathbf{v}')$。

命题 5.15。令 $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{a_rb_r} \cdots \mathbf{v}_{a_1b_1}$ 以及 $\mathbf{v}' = \mathbf{v}_{c_rd_r} \cdots \mathbf{v}_{c_1d_1}$，其中 $S =$ 支撑$(\mathbf{v}) =$ 支撑$(\mathbf{v}')$，并考虑 $p \notin S$。若 $\mathbf{v} \equiv \mathbf{v}'$，则 $\tau_p(\mathbf{v}) \equiv \tau_p(\mathbf{v}')$。

证明。当 $p >$最大值 S 时结果显然成立，因此我们假设 $p <$最大值 S。对于 $n \ge$最大值S，考虑 $u \in S_{n-1}$和 $k \in [n-2]$，并定义 $u^* = \epsilon_{n,\ p}(u)$。若 $\mathbf{v} \bullet_k u^* = \mathbf{v}' \bullet_k u^* = \mathbf{q}^\alpha w \ne 0$，则应用引理 5.7，可得

$$\tau_p(\mathbf{v}) \bullet_k u = \tau_p(\mathbf{v}) \bullet_{\tau_n(k)} u^*/n = \mathbf{q}^{\alpha/n}w/n = \tau_p(\mathbf{v}') \bullet_{\tau_n(k)} u^*/n = \tau_p(\mathbf{v}') \bullet_k u.$$

另一方面，若 $\mathbf{v} \bullet_k u^* = \mathbf{v}' \bullet_k u^* = 0$，则我们断言 $\tau_p(\mathbf{v}) \bullet_k u = \tau_p(\mathbf{v}') \bullet_k u = 0$。我们证明 $\tau_p(\mathbf{v}) \bullet_k u = 0$ 关于 $\tau_p(\mathbf{v}') \bullet_k u = 0$ 同样由相同的论证得出。

定义 $i^* \in [r]$ 为使 $\mathbf{v}_{a_{i^*}b_{i^*}} \cdots \mathbf{v}_{a_1b_1} \bullet_k u^* = 0$成立的最小整数。特别地，若 $\mathbf{v}_{a_1b_1} \bullet_k u^* = 0$，则 $i^* = 1$；否则，$i^* > 1$ 满足 $\mathbf{v}_{a_{i^*-1}b_{i^*-1}} \cdots \mathbf{v}_{a_1b_1} \bullet_k u^* = \mathbf{q}^\beta w \in S_n[\mathbf{q}]$且 $\mathbf{v}_{a_{i^*}b_{i^*}} \cdots \mathbf{v}_{a_1b_1} \bullet_k u^* = 0$。应用引理 5.7，我们得到 $\tau_p(\mathbf{v}_{a_{i^*-1}b_{i^*-1}} \cdots \mathbf{v}_{a_1b_1}) \bullet_k u = \mathbf{q}^{\beta/n}w/n \in S_{n-1}[\mathbf{q}]$。我们分析可能的情形，并根据相关论证将其分为两类。

情形 (a): $w^{-1}(a_{i^*}) > w^{-1}(b_{i^*})$、$w^{-1}(a_{i^*}) < w^{-1}(b_{i^*}) \le k$，或 $k < w^{-1}(a_{i^*}) < w^{-1}(b_{i^*})$。由于，$w^{-1}(a_{i^*}) = (w/n)^{-1}(\tau_p(a_{i^*}))$ 且 $w^{-1}(b_{i^*}) = (w/n)^{-1}(\tau_p(b_{i^*}))$，我们必有 $\tau_p(\mathbf{v}_{a_{i^*}b_{i^*}}) \bullet_k w/n = 0$，即 $\tau_p(\mathbf{v}) \bullet_k u = 0$。

情况（b）：$w^{-1}(a_{i^*}) \le k < w^{-1}(b_{i^*})$，且 $a_{i^*} < b_{i^*}$ 或 $a_{i^*} > b_{i^*}$。我们考虑情形 $a_{i^*} < b_{i^*}$，因为另一种情形的证明类似。根据命题 4.2，存在 $l \in (w^{-1}(a_{i^*})\ w^{-1}(b_{i^*}))$，使得 $c = w(l) \in (a_{i^*}, b_{i^*})$。由于根据 u^* 的构造，$p \neq a_{i^*}$、b_{i^*}、c，应用引理 5.5 (a)，可得 $\tau_p(a_{i^*}) < \tau_p(c) < \tau_p(b_{i^*})$。因此，

$$w^{-1}(a_{i^*}) = \tau_n(w^{-1}(a_{i^*})) = (w/n)^{-1}(\tau_p(a_{i^*})) < l = \tau_n(l) < w^{-1}(b_{i^*}) = \tau_n(w^{-1}(b_{i^*})) = (w/n)^{-1}(\tau_p(b_{i^*}))$$

并且 $\tau_p(c) = \tau_p(w(l)) \in (\tau_p(a_{i^*})\tau_p(b_{i^*}))$; 也就是说，$(w/n)^{-1}(\tau_p(a_{i^*})) < l < (w/n)^{-1}(\tau_p(b_{i^*}))$ 且 $(w/n)(l) \in (\tau_p(a_{i^*})\ \tau_p(b_{i^*}))$。因此，根据命题 4.2，$\tau_p(\mathbf{v}^{a_{i^*}b_{i^*}}) \bullet_k w/n = 0$，即 $\tau_p(\mathbf{v}) \bullet_k u = 0$。 □

所有 ste ps 完备，定理 5.10 得证。现在我们可以完成定理 5.3 的证明 .

定理 5.3 的证明（b）。令 $S = \mathrm{supp}(\mathbf{v}) = \mathrm{supp}(\mathbf{v}')$，其中 $|S| = m$, $n = \max S$，且 $N = n - m$。我们对 N 使用归纳法。对于 $N = 0$，$\mathbf{v} = \mathbf{v}$ 且 $\mathbf{v}' = \mathbf{v}'$，因此结论立即成立。定理 5.10 涵盖了 $N = 1$ 的情形。现在假设结论对 $N-1 \ge 1$ 成立。令 $[n]\backslash S = \{p_1 < \ldots < p_N\}$, $\hat{\mathbf{v}}_1 = \tau_{p_N}(\mathbf{v})$，且 $\hat{\mathbf{v}}_2 = \tau_{p_N}(\mathbf{v}')$。注意到 $S = \mathrm{supp}(\tau_{p_N}(\mathbf{v})) = \mathrm{supp}(\tau_{p_N}(\mathbf{v}'))$ 满足 $|S| = m$、$\max S = n - 1$ 和 $[n-1]\backslash S = \{p_1 < \ldots < p_{N-1}\}$。因此可得

(1) $\mathbf{v} \equiv \mathbf{v}'$ 当且仅当 $\hat{\mathbf{v}}_1 \equiv \hat{\mathbf{v}}_2$ 根据定理 5.10 和

(2) $\hat{\mathbf{v}}_1 \equiv \hat{\mathbf{v}}_2$ 当且仅当 $\underline{\mathbf{v}} = \underline{\hat{\mathbf{v}}_1} \equiv \underline{\hat{\mathbf{v}}_2} = \mathbf{v}'$ 根据我们的归纳假设。

结论由此得出。 □

在转向下一个值得关注的保持等价关系的变换之前，我们先介绍两个关于展平的进一步结果。这两个结果对于我们研究其余保持等价关系的变换至关重要。

命题 5.16. 设 $S = \mathrm{supp}(\mathbf{v})$ 且 $|S| = m$。那么 $\mathbf{v} \equiv 0$ 当且仅当 $\mathbf{v} \bullet_k u = 0$ 对所有$u \in S_m$ 和 $k \in [m-1]$均成立。

证明。根据定理 5.3 (a)，只需证明对于所有 $u \in S_m$ 和 $k \in [m-1]$，$\mathbf{v} \equiv 0$ 当且仅当 $\mathbf{v} \bullet_k u = 0$。正向结论显然成立。反过来，假设 $\mathbf{v} \neq 0$。那么存在 N、$u \in S_N$ 和 $k \in [N-1]$，使得 $\mathbf{v} \bullet_k u \neq 0$。我们取最小可能的 N。注意，由假设可知 $N > m$，因此 $N \notin \mathrm{supp}(\mathbf{v}) = [m]$。于是，令$t = u^{-1}(N)$ 并应用引理 5.7，可得

$$\underline{\mathbf{v}} \bullet_{\tau_t(k)} u/t = \tau_N(\underline{\mathbf{v}}) \bullet_{\tau_t(k)} u/t \neq 0,$$

其中 $u/t \in S_{N-1}$，这与 N 的极小性相矛盾。结论得证。 □

以下命题的非零类比的证明5.16 与命题 5.14的证明几乎完全相同，因此我们省略细节。

命题 5.17。设 $\mathbf{v} = \mathbf{v}^{a_r b_r} \cdots \mathbf{v}^{a_1 b_1}$、$\mathbf{v}' = \mathbf{v}^{c_r d_r} \cdots \mathbf{v}^{c_1 d_1}$，且 $S = \text{支撑}(\mathbf{v}) = \text{支撑}(\mathbf{v}')$ 且$|S| = m$。那么，$\mathbf{v} \equiv \mathbf{v}'$ 当且仅当对于所有 $u \in S_m$ 和 $k \in [m-1]$，$\mathbf{v} \bullet_k u = \mathbf{v}' \bullet_k u$。

5.2 循环移位

在本小节中，我们考虑与指标的循环移位相对应的变换。对于 $n>0$ 和 $S=\{t_1<\cdots<t_m\}\subset[n]$，令 $\mathfrak{o}_S$： $S\to S$ 为如下定义的映射

$$\mathfrak{o}(t_i)=\begin{cases}t_{i+1}, & 1\le i<m\\ t_1, & i=m.\end{cases}$$

给定一个算子 $\mathbf{v}=\mathbf{v}_{a_rb_r}\cdots\mathbf{v}_{a_1b_1}$ 满足 $S=\mathrm{supp}(\mathbf{v})$，我们定义 $\mathfrak{o}(\mathbf{v})$： $=\mathbf{v}_{\mathfrak{o}_S(a_r)\mathfrak{o}_S(b_r)}\cdots\mathbf{v}_{\mathfrak{o}_S(a_1)\mathfrak{o}_S(b_1)}$。我们将此变换称为循环移位。

在 $\mathrm{supp}(\mathbf{v})=[n]$ 的特殊情形下，我们简单记作 $\mathfrak{o}_n:=\mathfrak{o}_{[n]}$。注意，可以将 $\mathfrak{o}_n$ 看作一个 n-循环 (2，3，4..... n，1)，它作用在 $\mathbf{v}$ 中算子的指标上。此外，给定$u\in S_n$ 和 $1\le i<j\le n$，我们定义 $\mathfrak{o}_n(u)\in S_n$ 为

$$\mathfrak{o}_n(u)(i)=\begin{cases}u(i)+1 & u(i)\ne n\\ 1 & u(i)=1\end{cases}$$

and

$$\mathbf{q}^{\mathfrak{o}(u,n,i,j)}=\begin{cases}\mathbf{q}_{ij}^{-1}, & \text{if } u(i)=n,\\ \mathbf{q}_{ij}, & \text{if } u(j)=n,\\ 1, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

例 *5.18*。对于算子 $v=v_{28}v_{83}v_{25}$，，我们有 $\mathfrak{o}(v)=v_{32}v_{25}v_{38}$。$v$ 的图示（左）和 $\mathfrak{o}(v)$ 的图示（右）如图 *5* 所示。对于 $u=(2,4,3,1)\in S_4$，我们有 $\mathfrak{o}_4(u)=(3,1,4,2)$，$q^{\mathfrak{o}(u,4,1,3)}=1$，$q^{\mathfrak{o}(u,4,1,2)}=q_{12}$，和 $q^{\mathfrak{o}(u,4,2,4)}=q_{24}^{-1}$。

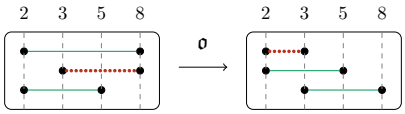


图 5：算子

下文将证明，零等价与非零等价关系在循环移位下保持不变，这构成了本小节的主要结果。

定理 5.19。

(a) $\mathbf{v}\equiv\mathbf{0}$ 当且仅当 $\mathfrak{o}(\mathbf{v})\equiv\mathbf{0}$。(b) $\mathbf{v}\equiv\mathbf{v}'$ 当且仅当 $\mathfrak{o}(\mathbf{v})\equiv\mathfrak{o}(\mathbf{v}')$。

我们首先注意到 $\mathfrak{o}(\mathbf{v})=\mathfrak{o}(\mathbf{v})$，因此根据定理 5.3，只需考虑 $\mathrm{supp}(\mathbf{v})=\mathrm{supp}(\mathbf{v}')=[n]$ 对某个 $n\in\mathbb{Z}_{>0}$ 的情形。此外，根据命题 5.16 和 5.17，我们只需检查所有 $u\in S_n$ 和 $k\in[n-1]$ 下作用的等价关系。

鉴于上述内容，定理 5.19 （a）可通过归纳法证明，如 [2]所示。单个算子的基础情形将在下文列出，以供后续使用。

引理 5.20。 *[2, 推论 5.11 (2)]* 设 a, $b \in [n]$ 其中 $a \neq b$, $u \in S_n$, 且 $k \in [n-1]$。则

$$\mathbf{v}_{ab} \bullet_k u \neq 0 \qquad \textit{if and only if} \qquad \mathbf{v}_{\mathfrak{o}_n(a)\mathfrak{o}_n(b)} \bullet_k \mathfrak{o}_n(u) \neq 0.$$

此外,

$$\mathbf{v}_{ab} \bullet_k u = \mathbf{q}^{\alpha} w \qquad \textit{if and only if} \qquad \mathbf{v}_{\mathfrak{o}_n(a)\mathfrak{o}_n(b)} \bullet_k \mathfrak{o}_n(u) = \mathbf{q}^{\mathfrak{o}(u,n,u^{-1}(a),u^{-1}(b))}\mathbf{q}^{\alpha}\mathfrak{o}_n(w).$$

现在，为了完成定理 5.19 的证明，我们还需证明定理 5.19 (b)。我们将这一结果的证明分为两步：

（第一步）我们证明，对于一个算子 $\mathbf{v}$，其支撑 $\mathrm{supp}(\mathbf{v})$ 为 $=[n]$、$u \in S_n$ 和 $k \in [n-1]$,

$$\mathbf{v} \bullet_k u = \mathbf{q}^{\alpha} w \qquad \text{if and only if} \qquad \mathfrak{o}_n(\mathbf{v}) \bullet_k \mathfrak{o}_n(u) = \mathbf{q}^{\beta}\mathbf{q}^{\alpha}\mathfrak{o}_n(w),$$

对于某个 $\beta \in \mathbb{Z}^{n-1}$ （命题 5.21）。

（第二步）我们证明上述 β 仅取决于 u 和 w （引理 5.22）。

完成这两步后可知，算子 $\mathbf{v}$、$\mathbf{v}'$，其支撑为 $[n]$，对 S_n 的所有元素的作用相同（对 $k \in [n-1]$ 的所有取值均成立），当且仅当 $\mathfrak{o}_n(\mathbf{v})$ 和 $\mathfrak{o}_n(\mathbf{v}')$ 也如此。如上所述，这足以证明定理 5.19(b)。

命题 5.21. 设 $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{a_r b_r} \cdots \mathbf{v}_{a_1 b_1}$，且 支撑$(\mathbf{v}) \subseteq [n]$。考虑 $u \in S_n$ 和 $k \in [n-1]$，使得 $\mathbf{v} \bullet_k u \neq 0$。取 $u_0 = u$，并对 $1 \leq i < r$，定义 $u_i \in S_n$ 为 $\mathbf{v}_{a_i b_i} \cdots \mathbf{v}_{a_1 b_1} \bullet_k u_0 = \mathbf{q}^{\alpha^i} u_i$，其中 $\alpha^i \in \mathbb{Z}^{n-1}_{\geq 0}$。那么，

$$\mathbf{v} \bullet_k u = \mathbf{q}^{\alpha} w \qquad \textit{if and only if} \qquad \mathfrak{o}_n(\mathbf{v}) \bullet_k \mathfrak{o}_n(u) = \left(\prod_{i=1}^{r} \mathbf{q}^{\mathfrak{o}(u_{i-1},n,u_{i-1}^{-1}(a_i),u_{i-1}^{-1}(b_i))} \right) \mathbf{q}^{\alpha}\mathfrak{o}_n(w).$$

证明. 我们对 r 进行归纳。基础情形由引理5.20给出。假设该结论对 $r-1 \geq 0$成立。此外，假设 $\mathbf{v}_{a_r b_r} \bullet_k u_{r-1} = \mathbf{q}^{\beta} w$；注意，根据定义，我们有$\beta + \alpha^{r-1} = \alpha$。于是，结合归纳假设和引理 5.20，可得$\mathbf{v} \bullet_k u = w$ 当且仅当

$$\begin{aligned}
\mathfrak{o}(\mathbf{v}) \bullet_k \mathfrak{o}(u_0) &= \left(\prod_{i=1}^{r-1} \mathbf{q}^{\mathfrak{o}(u_{i-1},n,u_{i-1}^{-1}(a_i),u_{i-1}^{-1}(b_i))} \right) \mathbf{q}^{\alpha^{r-1}} \mathfrak{o}_n(\mathbf{v}_{a_r b_r}) \bullet_k \mathfrak{o}_n(u_{r-1}) \\
&= \left(\prod_{i=1}^{r-1} \mathbf{q}^{\mathfrak{o}(u_{i-1},n,u_{i-1}^{-1}(a_i),u_{i-1}^{-1}(b_i))} \right) \mathbf{q}^{\alpha^{r-1}} \mathbf{q}^{\mathfrak{o}(u_{r-1},n,u_{r-1}^{-1}(a_r),u_{i-1}^{-1}(b_r))} \mathbf{q}^{\beta} \mathfrak{o}_n(u) \\
&= \left(\prod_{i=1}^{r} \mathbf{q}^{\mathfrak{o}(u_{i-1},n,u_{i-1}^{-1}(a_i),u_{i-1}^{-1}(b_i))} \right) \mathbf{q}^{\alpha} \mathfrak{o}_n(u),
\end{aligned}$$

正如所需。因此，结论由归纳法得出。 □

最后，我们来看$\mathbf{q}$-单项式，它出现在命题 5.21中。

引理 5.22。 在与命题 *5.21*相同的假设和记号下，再加上$u^{-1}(n) = i$ 和 $w^{-1}(n) = j$，我们有

$$\prod_{i=1}^{r} \mathbf{q}^{\mathfrak{o}(u_{i-1},n,(u_{i-1})^{-1}(a_i),(u_{i-1})^{-1}(b_i))} = \begin{cases} \mathbf{q}_{ji}, & \text{if } j < i \\ \mathbf{q}_{ij}^{-1}, & \text{if } i < j \\ 1, & \text{if } i = j. \end{cases}$$

证明。 我们对 r 进行归纳。基础情形显然成立。假设结论对$r-1 \geq 0$成立。分三种情形讨论。

情形 (a)： $n \notin \{a_r, b_r\}$。 在此情形下 $\mathbf{q}^{\mathfrak{o}(u_{r-1},n,(u_{r-1})^{-1}(a_r),(u_{r-1})^{-1}(b_r))} = 1$ 因此

$$\prod_{i=1}^{r} \mathbf{q}^{\mathfrak{o}(u_{i-1},n,(u_{i-1})^{-1}(a_i),(u_{i-1})^{-1}(b_i))} = \prod_{i=1}^{r-1} \mathbf{q}^{\mathfrak{o}(u_{i-1},n,(u_{i-1})^{-1}(a_i),(u_{i-1})^{-1}(b_i))}.$$

应用归纳假设，我们得到

$$\prod_{i=1}^{r} \mathbf{q}^{\mathfrak{o}(u_{i-1},n,(u_{i-1})^{-1}(a_i),(u_{i-1})^{-1}(b_i))} = \begin{cases} \mathbf{q}_{u_{r-1}^{-1}(n)u^{-1}(n)}, & u_{r-1}^{-1}(n) < u^{-1}(n) \\ \mathbf{q}^{-1}_{u^{-1}(n)u_{r-1}^{-1}(n)}, & u^{-1}(n) < u_{r-1}^{-1}(n) \\ 1, & u^{-1}(n) = u_{r-1}^{-1}(n) \end{cases} = \begin{cases} \mathbf{q}_{u_r^{-1}(n)u^{-1}(n)}, & u_r^{-1}(n) < u^{-1}(n) \\ \mathbf{q}^{-1}_{u^{-1}(n)u_r^{-1}(n)}, & u^{-1}(n) < u_r^{-1}(n) \\ 1, & u^{-1}(n) = u_r^{-1}(n), \end{cases}$$

正如所需，其中最后一个等式成立是因为 $u_r^{-1}(n) = u_{r-1}^{-1}(n)$。

情形(b)： $n = a_r$。 在这种情形下 $\mathbf{q}^{\mathfrak{o}(u_{r-1},n,(u_{r-1})^{-1}(a_r),(u_{r-1})^{-1}(b_r))} = \mathbf{q}^{-1}_{u_{r-1}^{-1}(n)u_r^{-1}(n)}$。 应用归纳假设，我们得到

$$\prod_{i=1}^{r} \mathbf{q}^{\mathfrak{o}(u_{i-1},n,(u_{i-1})^{-1}(a_i),(u_{i-1})^{-1}(b_i))} = \mathbf{q}^{-1}_{u_{r-1}^{-1}(n)u_r^{-1}(n)} \prod_{i=1}^{r-1} \mathbf{q}^{\mathfrak{o}(u_{i-1},n,(u_{i-1})^{-1}(a_i),(u_{i-1})^{-1}(b_i))}$$

$$= \mathbf{q}^{-1}_{u_{r-1}^{-1}(n)u_r^{-1}(n)} \begin{cases} \mathbf{q}_{u_{r-1}^{-1}(n)u^{-1}(n)}, & u_{r-1}^{-1}(n) < u^{-1}(n) \\ \mathbf{q}^{-1}_{u^{-1}(n)u_{r-1}^{-1}(n)}, & u^{-1}(n) < u_{r-1}^{-1}(n) \\ 1, & u^{-1}(n) = u_{r-1}^{-1}(n) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \mathbf{q}_{u_r^{-1}(n)u^{-1}(n)}, & u_{r-1}^{-1}(n) < u_r^{-1}(n) < u^{-1}(n) \\ \mathbf{q}^{-1}_{u^{-1}(n)u_r^{-1}(n)}, & u_{r-1}^{-1}(n), u^{-1}(n) < u_r^{-1}(n) \text{ and } u_{r-1}^{-1}(n) \neq u^{-1}(n) \\ 1, & u_{r-1}^{-1}(n) < u_r^{-1}(n) = u^{-1}(n) \\ \mathbf{q}^{-1}_{u_{r-1}^{-1}(n)u_r^{-1}(n)}, & u^{-1}(n) = u_{r-1}^{-1}(n) < u_r^{-1}(n) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \mathbf{q}_{u_r^{-1}(n)u^{-1}(n)}, & u_r^{-1}(n) < u^{-1}(n) \\ \mathbf{q}^{-1}_{u^{-1}(n)u_r^{-1}(n)}, & u^{-1}(n) < u_r^{-1}(n) \\ 1, & u^{-1}(n) = u_r^{-1}(n), \end{cases}$$

正如所需。

情形(c)：$n = b_r$。在此情形下 $\mathbf{q}^{\mathfrak{o}(u_{r-1},n,(u_{r-1})^{-1}(a_r),(u_{r-1})^{-1}(b_r))} = \mathbf{q}_{u_r^{-1}(n)u_{r-1}^{-1}(n)}$。应用归纳假设，我们得到

$$\prod_{i=1}^{r} \mathbf{q}^{\mathfrak{o}(u_{i-1},n,(u_{i-1})^{-1}(a_i),(u_{i-1})^{-1}(b_i))} = \mathbf{q}_{u_r^{-1}(n)u_{r-1}^{-1}(n)} \prod_{i=1}^{r-1} \mathbf{q}^{\mathfrak{o}(u_{i-1},(u_{i-1})^{-1}(a_i),(u_{i-1})^{-1}(b_i))}$$

$$= \mathbf{q}_{u_r^{-1}(n)u_{r-1}^{-1}(n)} \begin{cases} \mathbf{q}_{u_{r-1}^{-1}(n)u^{-1}(n)}, & u_{r-1}^{-1}(n) < u^{-1}(n) \\ \mathbf{q}^{-1}_{u^{-1}(n)u_{r-1}^{-1}(n)}, & u^{-1}(n) < u_{r-1}^{-1}(n) \\ 1, & u^{-1}(n) = u_{r-1}^{-1}(n) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \mathbf{q}_{u_r^{-1}(n)u^{-1}(n)}, & u_r^{-1}(n) < u_{r-1}^{-1}(n), u^{-1}(n) \text{ and } u_{r-1}^{-1}(n) \neq u^{-1}(n) \\ 1, & u_r^{-1}(n) = u^{-1}(n) < u_{r-1}^{-1}(n) \\ \mathbf{q}^{-1}_{u^{-1}(n)u_r^{-1}(n)}, & u^{-1}(n) < u_r^{-1}(n) < u_{r-1}^{-1}(n) \\ \mathbf{q}_{u_r^{-1}(n)u_{r-1}^{-1}(n)}, & u_r^{-1}(n) < u^{-1}(n) = u_{r-1}^{-1}(n) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \mathbf{q}_{u_r^{-1}(n)u^{-1}(n)}, & u_r^{-1}(n) < u^{-1}(n) \\ \mathbf{q}_{u^{-1}(n)u_r^{-1}(n)}, & u^{-1}(n) < u_r^{-1}(n) \\ 1, & u^{-1}(n) = u_r^{-1}(n), \end{cases}$$

正如所需。 □

5.3 水平翻转

本小节中，我们考虑与将相应图形水平“翻转”相对应的变换。

对于 $S = \{t_1 < \ldots < t_m\} \subseteq [n]$，令 $\mathfrak{h}_S\colon S \to S$ 为如下定义的映射

$$\mathfrak{h}_S(t_i) = t_{m-i+1}.$$

我们通过定义 $\mathfrak{h}_n : S_n \to S_n$ 为 $\mathfrak{h}(u) = w_0 u w_0$，其中 $u \in S_n$，将此定义扩展到排列；其中 w_0 是 S_n 的最长元素，即 $\mathfrak{h}_n(u)(i) = n - u(n-i+1) + 1$，其中 $i \in [n]$。给定一个算子 $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{a_r b_r} \cdots \mathbf{v}_{a_1 b_1}$，其支撑 $\mathrm{supp}(\mathbf{v}) = S$，我们定义 $\mathfrak{h}(\mathbf{v}) = \mathbf{v}_{\mathfrak{h}_S(b_r)\mathfrak{h}_S(a_r)}$ 以及 $\cdots \mathbf{v}_{\mathfrak{h}_S(b_1)\mathfrak{h}_S(a_1)}$，并将此变换称为水平翻转。最后，将 $\mathfrak{h}(\alpha)$ 定义为通过反转 $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{n-1}$ 的各项得到的复合，即 $\mathfrak{h}(\alpha) = (\alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_1)$。

例 *5.23*。对于算子 $v = v_{28}v_{83}v_{25}$，，我们有 $\mathfrak{h}(v) = v_{28}v_{52}v_{38}$。$v$（左侧）和 $\mathfrak{h}(v)$（右侧）的图示见图 *6*。对于 $u = (2, 4, 3, 1) \in S_4$ 和 $\alpha = (2, 0, 2, 5) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^4$，我们有 $\mathfrak{h}_4(u) = (4, 2, 1, 3)$，以及 $\mathfrak{h}(\alpha) = (5, 2, 0, 2)$。

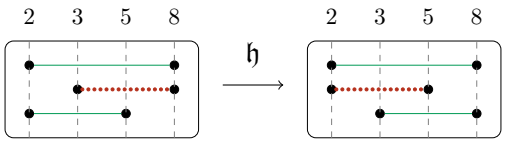


图 6：水平翻转

下面我们　证明零等价与非零等价在水平翻转下保持不变　.

定理 5.24。

(a) $\mathbf{v} \equiv \mathbf{0}$ 当且仅当 $\mathfrak{h}(\mathbf{v}) \equiv \mathbf{0}$。

(b) $\mathbf{v} \equiv \mathbf{v}'$ 当且仅当 $\mathfrak{h}(\mathbf{v}) \equiv \mathfrak{h}(\mathbf{v}')$。

与循环移位的情形一样，只需证明定理 5.24在算子支撑为 $[n]$ 的情形下成立，并且只需检验所有 $u \in S_n$ 和 $k \in [n-1]$对应的等价关系。此外，与定理 5.19 (a) 一样，定理5.24 (a) 可由归纳法推出，如 [2]所示。单个算子的基础情形将在下文给出，以便后续使用。

引理 5.25. *[2, 推论 5.11 (3)]* 设 $a, b \in [n]$ 满足 $a \neq b$, $u \in S_n$，且 $k \in [n-1]$。那么，

$$\mathbf{v}_{ab} \bullet_k u \neq 0 \qquad \textit{if and only if} \qquad \mathfrak{h}_{[n]}(\mathbf{v}_{ab}) \bullet_{n-k} \mathfrak{h}_n(u) \neq 0.$$

此外，

$$\mathbf{v}_{ab} \bullet_k u = \mathbf{q}^{\alpha} w \qquad \textit{if and only if} \qquad \mathfrak{h}_{[n]}(\mathbf{v}_{ab}) \bullet_{n-k} \mathfrak{h}_n(u) = \mathbf{q}^{\mathfrak{h}(\alpha)} \mathfrak{h}_n(w).$$

现在，为完成定理 5.24 的证明，还需证明定理 5.24 (b)。为此，我们证明：对于一个支撑 $\mathrm{supp}(\mathbf{v}) = [n]$, $u \in S_n$，且 $k \in [n-1]$ 的算子 $\mathbf{v}$，当且仅当 $\mathfrak{h}_n(\mathbf{v}) \bullet_{n-k} \mathfrak{h}_n(u) = \mathbf{q}^{\mathfrak{h}(\alpha)} \mathfrak{h}_n(w)$ 时，$\mathbf{v} \bullet_k u = \mathbf{q}^{\alpha} w$。由此可知，支撑为 $[n]$ 的算子 $\mathbf{v}$、$\mathbf{v}'$ 对 S_n 中所有元素的作用相同（对 $k \in [n-1]$ 的所有取值），当且仅当 $\mathfrak{h}_n(\mathbf{v})$ 和 $\mathfrak{h}_n(\mathbf{v}')$ 也如此。

命题 5.26. 设 $\mathbf{v} = \mathbf{v}^{a_r b_r} \cdots \mathbf{v}^{a_1 b_1}$，其中 支撑$(\mathbf{v}) \subseteq [n]$, $u \in S_n$，并且 $k \in [n-1]$ 满足$\mathbf{v} \bullet_k u \neq 0$。那么，

$$\mathbf{v} \bullet_k u = \mathbf{q}^{\alpha} w \qquad \textit{if and only if} \qquad \mathfrak{h}_{[n]}(\mathbf{v}) \bullet_{n-k} \mathfrak{h}_n(u) = \mathbf{q}^{\mathfrak{h}(\alpha)} \mathfrak{h}_n(w).$$

证明。 我们对 r进行归纳。基础情形由引理5.25涵盖。假设结论对 $r-1 \geq 0$成立。由于 $\mathbf{v} \bullet_k u = \mathbf{v}^{a_r b_r} \cdots \mathbf{v}_{a_1 b_1} \bullet_k u \neq 0$，可得 $\mathbf{v}^{a_{r-1} b_{r-1}} \cdots \mathbf{v}_{a_1 b_1} \bullet_k u \neq 0$。设 $\mathbf{v}^{a_{r-1} b_{r-1}} \cdots \mathbf{v}_{a_1 b_1} \bullet_k u = \mathbf{q}^{\beta} u^*$ 对 $\beta \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{n-1}$以及 $u^* \in S_n$成立。那么，结合归纳假设和引理 5.25，可得

$$\mathbf{v} \bullet_k u = \mathbf{v}_{a_r b_r} \bullet_k \mathbf{q}^{\beta} u^* = \mathbf{q}^{\beta} \mathbf{v}_{a_r b_r} \bullet_k u^* = \mathbf{q}^{\beta} \mathbf{q}^{\gamma} w = \mathbf{q}^{\beta+\gamma} w = \mathbf{q}^{\alpha} w$$

当且仅当

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}_{[n]}(\mathbf{v}) \bullet_{n-k} \mathfrak{h}_n(u) = \mathfrak{h}_{[n]}(\mathbf{v}_{a_r b_r}) \bullet_{n-k} \mathbf{q}^{\mathfrak{h}(\beta)} \mathfrak{h}_n(u^*) = \mathbf{q}^{\mathfrak{h}(\beta)} \mathfrak{h}_{[n]}(\mathbf{v}_{a_r b_r}) \bullet_{n-k} \mathfrak{h}_n(u^*) = \mathbf{q}^{\mathfrak{h}(\beta)} \mathbf{q}^{\mathfrak{h}(\gamma)} \mathfrak{h}_n(w) \\ = \mathbf{q}^{\mathfrak{h}(\beta)+\mathfrak{h}(\gamma)} \mathfrak{h}_n(w). \end{aligned}$$

由于 $\alpha = \beta + \gamma$ 当且仅当 $\mathfrak{h}(\alpha) = \mathfrak{h}(\beta) + \mathfrak{h}(\gamma)$ 是 $\mathbb{Z}_{\geq 0}^{n-1}$ 中的向量，因此我们有 $\mathbf{q}^{\mathfrak{h}(\beta)+\mathfrak{h}(\gamma)} \mathfrak{h}_n(w) = \mathbf{q}^{\mathfrak{h}(\alpha)} \mathfrak{h}_n(w)$，结论随之得出。 □

5.4 垂直翻转

在本小节中，我们考虑与算子顺序反转相对应的变换，它本质上会将相关图示垂直“翻转”。

在这种情形下，变换直接针对算子定义。对于算子 $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{a_r b_r} \cdots \mathbf{v}_{a_1 b_1}$，我们将变换 ρ 定义为 $\rho(\mathbf{v}) = \mathbf{v}_{a_1 b_1} \cdots \mathbf{v}_{a_r b_r}$，并将此变换称为垂直翻转。此外，我们还需要给出排列和复合的相应定义。给定一个置换 $u \in S_n$，定义 $\rho_n(u) : S_n \to S_n$ 为 $\rho_n(u) := uw_0$，其中 w_0是 S_n的最长元素，即 $\rho_n(u)$ 是满足对$i \in [n]$有 $\rho_n(u)(i) = u(n-i+1)$ 的置换。

例 *5.27*。对于算子 $v = v_{28}v_{83}v_{25}$，，我们有 $\rho(v) = v_{25}v_{83}v_{28}$。$v$（左）和 $\rho(v)$（右）的图示见图*7*。对于 $u = (2, 4, 3, 1) \in S_4$，我们有 $\rho_n(u) = (1, 3, 4, 2)$。

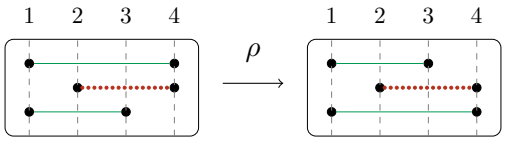


图7：垂直翻转

下面，我们证 明零等价与非零等价在垂直翻转下保持不变。

定理5.28。

(a) $\mathbf{v} \equiv \mathbf{0}$ 当且仅当 $\rho(\mathbf{v}) \equiv \mathbf{0}$。(b) $\mathbf{v} \equiv \mathbf{v}'$ 当且仅当 $\rho(\mathbf{v}) \equiv \rho(\mathbf{v}')$。

与前述情形一样，只需证明算子支撑为 $[n]$ 的情形，而且我们只需检验所有 $u \in S_n$ 和 $k \in [n-1]$ 的等价关系。此外，与定理5.19 (a) 和 5.24 (a) 的情形一样，定理 5.28 (a) 可由归纳法推出，如 [2] 所示。单个算子的基础情形将在下文给出，以供后续使用。

引理 5.29。 *[2, 推论 5.11 (4)]* 设 a、$b \in [n]$ 满足 $a \neq b$、u、$w \in S_n$以及 $k \in [n-1]$。那么，$\rho(\mathbf{v}_{ab}) = \mathbf{v}_{ab}$，并且

$$\mathbf{v}_{ab} \bullet_k u = \mathbf{q}^{\alpha} w \qquad \textit{if and only if} \qquad \mathbf{v}_{ab} \bullet_{n-k} \rho_n(w) = \mathbf{q}^{\mathfrak{h}(\alpha)} \rho_n(u).$$

现在，为完成定理5.28的证明，还需证明定理5.28 (b)。为此，我们证明：对于一个满足 $\mathrm{supp}(\mathbf{v}) = [n]$、$u \in S_n$和 $k \in [n-1]$ 的算子 $\mathbf{v}$，$\mathbf{v} \bullet_k u = \mathbf{q}^{\alpha} w$ 当且仅当 $\rho(\mathbf{v}) \bullet_{n-k} \rho_n(w) = \mathbf{q}^{\mathfrak{h}(\alpha)} \rho_n(u)$。由此可知，对于任意 $k \in [n-1]$ 的选择，具有支撑 $[n]$ 的算子 $\mathbf{v}$、$\mathbf{v}'$ 在 S_n 的所有元素上的作用相同，当且仅当 $\rho(\mathbf{v})$ 和 $\rho(\mathbf{v}')$ 也相同。

命题 5.30。 设 $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{a_r b_r} \cdots \mathbf{v}_{a_1 b_1}$、$u \in S_n$ 和 $k \in [n-1]$。则 $\mathbf{v} \bullet_k u = \mathbf{q}^{\alpha} w$ 当且仅当 $\rho(\mathbf{v}) \bullet_{n-k} \rho_n(w) = \mathbf{q}^{\mathfrak{h}(\alpha)} \rho_n(u)$。

证明。 我们对 r 进行归纳法。基础情形由引理5.29 覆盖。假设该结果对 $r-1 \geq 1$ 成立。由于 $\mathbf{v} \bullet_k u = \mathbf{v}_{a_r b_r} \cdots \mathbf{v}_{a_1 b_1} \bullet_k u \neq 0$，可知 $\mathbf{v}_{a_{r-1} b_{r-1}} \cdots \mathbf{v}_{a_1 b_1} \bullet_k u \neq 0$。设 $\mathbf{v}_{a_{r-1} b_{r-1}} \cdots \mathbf{v}_{a_1 b_1} \bullet_k u = \mathbf{q}^{\beta} u^*$，且 $\beta \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{n-1}$和 $u^* \in S_n$。然后，结合归纳假设以及引理 5.29，我们得到

$$\begin{aligned}\mathbf{v} \bullet_k u = \mathbf{v}_{a_r b_r} \cdots \mathbf{v}_{a_1 b_1} \bullet_k u = \mathbf{v}_{a_r, b_r} \bullet_k (\mathbf{v}_{a_{r-1} b_{r-1}} \cdots \mathbf{v}_{a_1 b_1}) \bullet_k u = \mathbf{v}_{a_r, b_r} \bullet_k \mathbf{q}^{\beta} u^* = \mathbf{q}^{\beta} \mathbf{v}_{a_r, b_r} \bullet_k u^* \\ = \mathbf{q}^{\beta} \mathbf{q}^{\gamma} w = \mathbf{q}^{\beta+\gamma} w = \mathbf{q}^{\alpha} w\end{aligned}$$

当且仅当

$$\begin{aligned}\rho(\mathbf{v}) \bullet_{n-k} \rho_n(w) &= \mathbf{v}_{a_1, b_1} \cdots \mathbf{v}_{a_{r-1} b_{r-1}} \mathbf{v}_{a_r b_r} \bullet_{n-k} \rho_n(w) = (\mathbf{v}_{a_1, b_1} \cdots \mathbf{v}_{a_{r-1} b_{r-1}}) \bullet_{n-k} (\mathbf{v}_{a_r b_r} \bullet_{n-k} \rho_n(w)) \\ &= \mathbf{v}_{a_1, b_1} \cdots \mathbf{v}_{a_{r-1} b_{r-1}} \bullet_{n-k} \mathbf{q}^{\mathfrak{h}(\gamma)} \rho_n(u^*) = \mathbf{q}^{\mathfrak{h}(\gamma)} \mathbf{v}_{a_1, b_1} \cdots \mathbf{v}_{a_{r-1} b_{r-1}} \bullet_{n-k} \rho_n(u^*) \\ &= \mathbf{q}^{\mathfrak{h}(\gamma)} \mathbf{q}^{\mathfrak{h}(\beta)} \rho_n(u) = \mathbf{q}^{\mathfrak{h}(\gamma)+\mathfrak{h}(\beta)} \rho_n(u) = \mathbf{q}^{\mathfrak{h}(\alpha)} \rho_n(u),\end{aligned}$$

正如所需。

□

6 低阶等价关系

本节的主要目标是确定所有次数为二、三和四的零等价，以及所有次数为二和三的非零等价关系。由于两个算子复合之间的等价关系在进一步应用其他算子后仍然成立，我们引入以下概念。

定义 6.1。 我们称一个等价关系是极小的，若它不是次数较低的等价关系的推论(即涉及较少的算子)。

T本节其余部分将按照算子复合的次数进行组织 s.

6.1 次数 2 等价关系

我们首先分析零等价。根据定理 5.19(a)，只需考虑第一个算子为量子的那些复合。图 8展示了所有这类图示。

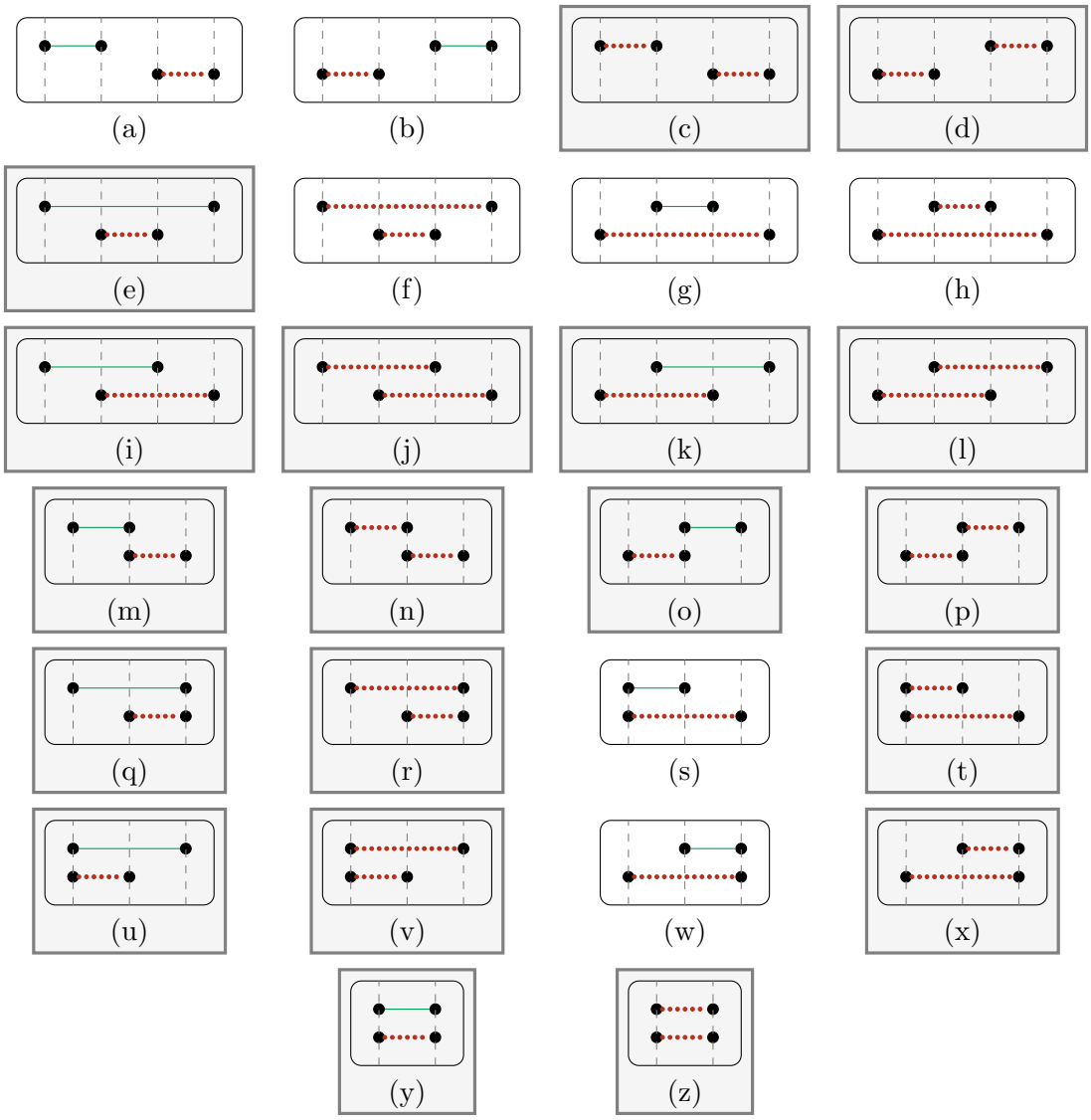


图 8：两个算子的复合，其中第一个算子为量子算子

下面的结果将确定图 8 中出现的哪些复合等价于零。

命题6.2。 设 $a < b$ 和 $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{cd}\mathbf{v}_{ba}$。则 $\mathbf{v} \equiv \mathbf{0}$ 当且仅当以下条件之一成立 ：

(i) $a = d < b = c$; (ii) $d < c < a < b$ 或 $a < b < d < c$;
(iii) $c < d = a < b$、 $d < c = a < b$、 $a < b = c < d$或
$a < b = d < c$; (iv) $c < a < d < b$、 $d < a < c < b$、
$a < c < b < d$或 $a < d < b < c$;

(v) $c<a<b=d$、 $d<a<b=c$、 $a=d<c<b$、 $a=c<b<d$、 $a=d<b<c$或 $a<d<c=b$; (vi) $c<a<b<d$。

满足 *(i)-(vi)* 中某一条件的算子集合，对应于图示 8中标出的图示，它们对应标签 *(c)*、*(d)*、*(e)*、*(i)*、*(j)*、*(k)*、*(l)*、*(m)*、*(n)*、*(o)*、*(p)*、*(q)*、*(r)*、*(t)*、*(u)*、*(v)*、*(x)* 和 *(z)*。

证明。 首先，我们证明图示 8中的复合 (a)、(c)、(f)、(g)、(h)、(s)、(w) 和 (y) 均非零。注意，要做到这一点，对于这样的算子 $\mathbf{v}$，只需找出 $n\in\mathbb{Z}_{>0}$、 $k\in[n-1]$ 和 $u\in S_n$ ，使得 $\mathbf{v}\bullet_k u\neq 0$。为此，考虑置换 $w=71635|428$，其中 $n=8$ 且 $k=5$。于是我们有

(a) $\mathbf{v}_{12}\mathbf{v}_{54}\bullet_k w=q_5\cdot 72634|518$(k) $\mathbf{v}_{24}\mathbf{v}$
$_{52}\bullet_k w=q_5q_6\cdot 71634|258$(q) $\mathbf{v}_{34}\mathbf{v}$
$_{62}\bullet_k w=q_3q_4q_5q_6\cdot 71245|368$(s) $\mathbf{v}_{56}\mathbf{v}$
$_{62}\bullet_k w=q_3q_4q_5q_6\cdot 71236|458$

(j) $\mathbf{v}_{62}\mathbf{v}_{54}\bullet_k w=q_3q_4q_5^2q_6\cdot 71234|568$
(m) $\mathbf{v}_{45}\mathbf{v}_{54}\bullet_k=q_5\cdot 71635|428=w$
(r) $\mathbf{v}_{54}\mathbf{v}_{62}\bullet_k w=q_3q_4q_5^2q_6\cdot 71234|568$
(y) $\mathbf{v}_{78}\mathbf{v}_{54}\bullet_k w=q_5\cdot 81634|527$

为了完成证明，我们必须证明图 8 中的其余算子等价于 $\mathbf{0}$。结果发现，其余算子是两个经典算子的复合的循环移位。因此，这类算子等价于$\mathbf{0}$ 这一事实可由 [2, 命题 5。2] 得出。为了说明如何证明算子复合等价于 $\mathbf{0}$，我们给出关系 (b) 的证明。

假设 $a<b<c<d$ 且$\mathbf{v}=\mathbf{v}_{ba}\mathbf{v}_{dc}\neq\mathbf{0}$。那么必定存在一个置换 $w=(w_1,\dots,w_n)\in S_n$ 以及 $k\in[n-1]$，使得 $\mathbf{v}\bullet_k w\neq 0$。由于 $\mathbf{v}=\mathbf{v}_{ba}\mathbf{v}_{dc}$，因此必有$\mathbf{v}_{dc}\bullet_k w=q^\alpha w'\neq 0$，其中某个 $q^\alpha w'=q^\alpha(w'_1,\dots,w'_n)\in S_n$[q]；也就是说，若 $w_{i_1}=c$ 且 $w_{j_1}=d$，则对所有 $j_1<l<i_1$，都有$j_1\leq k<i_1$ 且 $c<w_l<d$。现在，同样地，

$$\mathbf{v}\bullet_k w=\mathbf{v}_{ba}\bullet_k(\mathbf{v}_{dc}\bullet_k w)=\mathbf{v}_{ba}\bullet_k w'\neq 0,$$

必然有：若 $w'_{i_2}=a$ 和 $w'_{j_2}=b$，则对于所有 $j_2<l<i_2$， $j_2\leq k<i_2$ 和 $a<w_l<b$。由于 $a<b<c<d$，可得 $w_{i_2}=w'_{i_2}=a$ 和 $w_{j_2}=w'_{j_2}=b$。因此，有两种情形：或者

- $j_1<j_2\leq k<i_1$，这与我们的假设矛盾：对于所有 $j_1<l<i_1$， $c<w_l<d$， o r
- $j_2<j_1\leq k<i_2$，这与我们的假设矛盾：对于所有 $j_2<l<i_2$， $a<w_l<b$；

也就是说，无论哪种情形，都会导出矛盾。结论得证。 □

将第5 节中保持等价关系的算子应用于命题 6.2中的算子复合，可得以下定理，它刻画了与零等价的二次算子复合。

定理 6.3。 设 $\mathbf{v}=\mathbf{v}_{cd}\mathbf{v}_{ab}$。那么 $\mathbf{v}\equiv\mathbf{0}$ 当且仅当以下条件之一成立：

(i) $a=c<b=d$ 或 $b=d<a=c$;

(ii) $a<d<c<b$ 或 $c<b<a<d$;

(iii) $a<c<b=d$、 $a<d<b=c$、 $a=c<d<b$、 $a=d<c<b$、 $c<a<b=d$、 $c<b<a=d$、 $a=c<b<d$、 $b=c<a<d$、 $b=d<c<a$、 $d<b<a=c$、 $d=b<a<c$, 或 $b<d<c=a$;

(iv) $a<c<b<d$、 $b<c<a<d$、 $a<d<b<c$、 $b<d<a<c$、 $c<a<d<b$、 $c<b<d<a$、$d<a<c<b$或 $d<b<c<a$;

(v) $a<b=d<c$、 $b<a=c<d$、 $b<a=d<c$、 $d<c=a<b$、 $c<d=b<a$或 $d<c=b<a$; (vi) $d<c<b<a$ 或 $b<a<d<c$。

接下来，我们考察两个算子的非零复合之间的等价关系。以下结果给出了 [2, 命题 5。2]中出现的一组非零等价关系。我们在图9中对其进行了说明，其中该列表所包含的图示采用了与图8 相同的标记。

命题 6。 **4.** 令 $a<b<c<d$。我们有以下二次等价关系列表:

(i) $\mathbf{v}_{dc}\mathbf{v}_{ab}\equiv\mathbf{v}_{ab}\mathbf{v}_{dc}$,

(ii) $\mathbf{v}_{da}\mathbf{v}_{cb}\equiv\mathbf{v}_{cb}\mathbf{v}_{da}$,

(iii) $\mathbf{v}_{da}\mathbf{v}_{bc}\equiv\mathbf{v}_{bc}\mathbf{v}_{da}$,

(iv) $\mathbf{v}_{cd}\mathbf{v}_{ba}\equiv\mathbf{v}_{ba}\mathbf{v}_{cd}$,

(v) $\mathbf{v}_{ab}\mathbf{v}_{cd}\equiv\mathbf{v}_{cd}\mathbf{v}_{ab}$, *and*

(vi) $\mathbf{v}_{ad}\mathbf{v}_{bc}\equiv\mathbf{v}_{bc}\mathbf{v}_{ad}$.

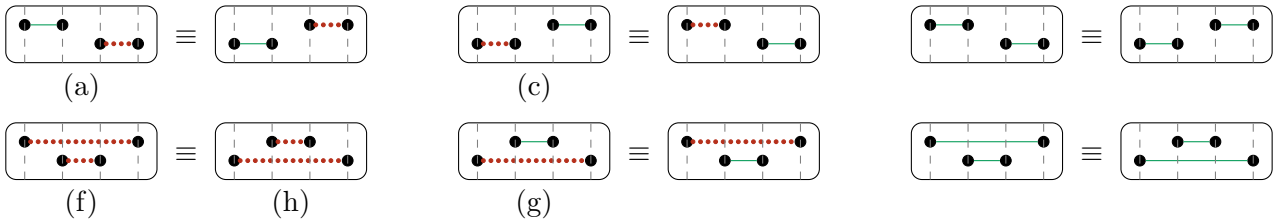


图 9：二次等价的非零复合

为了举例说明如何着手证明算子的非零复合之间的等价关系，我们附上以下引理及其证明，它对应于命题6.4 **(i)**。

引理 6.5. 若 $a<b<c<d$, 则 $\mathbf{v}_{dc}\mathbf{v}_{ab}\equiv\mathbf{v}_{ab}\mathbf{v}_{dc}$。

证明。设 $\mathbf{v}=\mathbf{v}_{dc}\mathbf{v}_{ab}$。假设 $\mathbf{v}\bullet_k w\neq 0$, $w^{-1}(a)=i_1$, $w^{-1}(b)=j_1$, $w^{-1}(c)=i_2$, 且$w^{-1}(d)=j_2$。那么，由于 $\mathbf{v}\bullet_k w\neq 0$, 可知 $\mathbf{v}_{ab}\bullet_k w\neq 0$。应用命题 4.2, $\mathbf{v}_{ab}\bullet_k w\neq 0$ 当且仅当 $i_1\leq k<j_1$，并且对于 $l\in(a,b)$, $w^{-1}(l)<i_1$ 或 $w^{-1}(l)>j_1$。由于$c,d\notin(a,b)$, 我们对 i_1、j_1、i_2 和 j_2没有额外限制。注意，在 $\mathbf{v}_{ab}\bullet_k w$中，$a$位于位置 $j_1>k$, b 位于位置 $i_1\leq k$, c 位于位置 i_2, 而 d 位于位置 j_2。现在，由于

$$\mathbf{v}\bullet_k w=\mathbf{v}_{dc}\bullet_k(\mathbf{v}_{ab}\bullet_k w)\neq 0,$$

再次应用命题 4.2，我们发现 $j_2\leq k<i_2$ 并且，对于 $l\in\mathbb{Z}_{>0}\backslash[c,d]$, $w^{-1}(l)<j_2$或 $w^{-1}(l)>i_2$。由于 a, $b\in\mathbb{Z}_{>0}\backslash[c,d]$, 由此可得 $i_1<j_2\leq k<i_2<j_1$。因此，综上可得 $\mathbf{v}\bullet_k w\neq 0$ 当且仅当

- $i_1 < j_2 \le k < i_2 < j_1$,
- $w^{-1}(l) < i_1$ 或 $w^{-1}(l) > j_1$ 对于 $l \in (a, b)$，并且
- $w^{-1}(l) < j_2$ 或 $w^{-1}(l) > i_2$ 对于 $l \in \mathbb{Z}_{>0} \backslash [c, d]$。

此外，$\mathbf{v} \bullet_k w$ 的系数为 $q_{j_2 i_2}$，a 位于位置 j_1，b 位于位置 i_1，c 位于位置 j_2，d 位于位置 i_2，而 w 的所有其他项均固定。

对 $\mathbf{v}^* = \mathbf{v}_{ab}\mathbf{v}_{dc}$ 进行类似分析可知，$\mathbf{v}^* \bullet_k w \neq 0$ 当且仅当

- $i_1 < j_2 \le k < i_2 < j_1$,
- $w^{-1}(l) < j_2$ 或 $w^{-1}(l) > i_2$ 对于 $l \in \mathbb{Z}_{>0} \backslash [c, d]$，并且
- $w^{-1}(l) < i_1$ 或 $w^{-1}(l) > j_1$ 对于 $l \in (a, b)$;

也就是说，所需条件与 $\mathbf{v} \bullet_k w \neq 0$ 完全相同。此外，与 $\mathbf{v} \bullet_k w$ 中一样，可以发现$\mathbf{v}^* \bullet_k w$ 在位置 j_1 上的系数为 $q_{j_2 i_2}$，a 在位置 i_1 上，b 在位置 j_2 上，c 在位置 i_2 上，且 w 的所有其他项均保持不变；也就是说，在非平凡情况下，$\mathbf{v}$ 和 $\mathbf{v}^*$ 具有相同的作用。结论得证。 □

事实证明，　这些就是涉及二次非零复合的所有等价关系。

定理 6.6. 命题 *6.4* 中列出的二次非零复合的等价关系已完备；也就是说，不存在其他仅由两个算子组成的非零复合等价关系。

证明。我们通过分析其余由两个算子组成的非零复合，并证明它们对所有排列的作用不可能相同，来证明这一结论。

设 $a_1 < b_1$、$a_2 < b_2 < c_2$ 和 $a_3 < b_3 < c_3 < d_3$。我们需要证明，以下集合中的任意两个算子都不等价：

$$S = \big\{\mathbf{v}_{a_2b_2}\mathbf{v}_{b_2c_2}, \mathbf{v}_{b_2c_2}\mathbf{v}_{a_2b_2}, \mathbf{v}_{a_3b_3}\mathbf{v}_{c_3d_3}, \mathbf{v}_{a_3d_3}\mathbf{v}_{b_3c_3}, \mathbf{v}_{a_1b_1}\mathbf{v}_{b_1a_1}, \mathbf{v}_{a_1b_1}\mathbf{v}_{b_1a_1}, \mathbf{v}_{a_2b_2}\mathbf{v}_{c_2a_2}, \mathbf{v}_{b_2c_2}\mathbf{v}_{c_2a_2},$$
$$\mathbf{v}_{c_2a_2}\mathbf{v}_{b_2c_2}, \mathbf{v}_{c_2a_2}\mathbf{v}_{a_2b_2}, \mathbf{v}_{a_3b_3}\mathbf{v}_{d_3c_3}, \mathbf{v}_{b_3c_3}\mathbf{v}_{d_3a_3}, \mathbf{v}_{b_3a_3}\mathbf{v}_{c_3d_3}, \mathbf{v}_{d_3a_3}\mathbf{v}_{c_3b_3}\big\}.$$

考虑引理 4.7 和命题 4.8，我们根据 S 的支撑以及涉及的量子算子数量，将其划分为若干子集。

$$S_1 = \{\mathbf{v}_{a_2b_2}\mathbf{v}_{b_2c_2}, \mathbf{v}_{b_2c_2}\mathbf{v}_{a_2b_2}\} \qquad S_2 = \{\mathbf{v}_{a_3b_3}\mathbf{v}_{c_3d_3}, \mathbf{v}_{a_3d_3}\mathbf{v}_{b_3c_3}\}$$
$$S_3 = \{\mathbf{v}_{a_1b_1}\mathbf{v}_{b_1a_1}, \mathbf{v}_{a_1b_1}\mathbf{v}_{b_1a_1}\} \qquad S_4 = \{\mathbf{v}_{a_2b_2}\mathbf{v}_{c_2a_2}, \mathbf{v}_{b_2c_2}\mathbf{v}_{c_2a_2}, \mathbf{v}_{c_2a_2}\mathbf{v}_{b_2c_2}, \mathbf{v}_{c_2a_2}\mathbf{v}_{a_2b_2}\}$$
$$S_5 = \{\mathbf{v}_{a_3b_3}\mathbf{v}_{d_3c_3}, \mathbf{v}_{b_3c_3}\mathbf{v}_{d_3a_3}, \mathbf{v}_{b_3a_3}\mathbf{v}_{c_3d_3}\} \qquad S_6 = \{\mathbf{v}_{d_3a_3}\mathbf{v}_{c_3b_3}\}.$$

对于 $i \in [5]$，我们逐一分析每个集合 S_i。

情形 1: 设 $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}^{a_2b_2}\mathbf{v}^{b_2c_2}$ 和 $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}^{b_2c_2}\mathbf{v}^{a_2b_2}$ 属于 S_1。若 $\mathbf{v}_1 \bullet_k w \neq 0$，则 $w(i) = b_2$ 推出$i \le k$。另一方面，若 $\mathbf{v}_2 \bullet_k w \neq 0$，则 $w(i) = b_2$ 推出 $i > k$。因此，$\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{v}_2$，且 S_1 的任意两个复合都不等价。

情况 2: 令$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}^{a_3b_3}\mathbf{v}^{c_3d_3}$ 和$\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}^{a_3d_3}\mathbf{v}^{b_3c_3}$ 属于 S_2。若$\mathbf{v}_1 \bullet_k w \neq 0$，则 $w(i) = c_3$ 蕴含$i \le k$。另一方面，若$\mathbf{v}_2 \bullet_k w \neq 0$，则 $w(i) = c_3$ 蕴含 $i > k$。因此，$\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{v}_2$，且 S_2 的任意两个复合都不等价。

案例3: 令$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_{a_1b_1}\mathbf{v}_{b_1a_1}$和$\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_{b_1a_1}\mathbf{v}_{a_1b_1}$属于 S_3。注意，若$\mathbf{v}_1 \bullet_k w \neq 0$，则 $w(i) = a_1$蕴含 $i > k$。另一方面，若$\mathbf{v}_2 \bullet_k w \neq 0$，则 $w(i) = a_1$ 蕴含 $i \leq k$。因此，$\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{v}_2$，且 S_3 的任意两个复合都不等价。

案例4: 设 $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_{a_2b_2}\mathbf{v}_{c_2a_2}$、$\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_{b_2c_2}\mathbf{v}_{c_2a_2}$、$\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_{c_2a_2}\mathbf{v}_{b_2c_2}$和 $\mathbf{v}_4 = \mathbf{v}_{c_2a_2}\mathbf{v}_{a_2b_2}$ 属于 S_4。若 $\mathbf{v}_4 \bullet_k w \neq 0$，则 $w(i) = a_2$ 意味着 $i \leq k$。另一方面，若 $\mathbf{v}_1 \bullet_k w \neq 0$、$\mathbf{v}_2 \bullet_k w \neq 0$ 或 $\mathbf{v}_3 \bullet_k w \neq 0$，则 $w(i) = a_2$ 意味着 $i > k$。因此，$\mathbf{v}_4 \neq \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$。现在，若 $\mathbf{v}_3 \bullet_k w \neq 0$，则$w(i) = c_2$ 意味着 $i > k$。另一方面，若 $\mathbf{v}_1 \bullet_k w \neq 0$ 或 $\mathbf{v}_2 \bullet_k w \neq 0$，则 $w(i) = c_2$ 意味着$i \leq k$。因此，$\mathbf{v}_3 \neq \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$。最后，若 $\mathbf{v}_1 \bullet_k w \neq 0$，则 $w(i) = b_2$ 意味着 $i > k$。另一方面，若 $\mathbf{v}_2 \bullet_k w \neq 0$，则 $w(i) = b_2$ 意味着 $i \leq k$。因此，$\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{v}_2$。由此， S_4 的任意两个复合都不等价。

案例5: 设 $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_{a_3b_3}\mathbf{v}_{d_3c_3}$、$\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_{b_3c_3}\mathbf{v}_{d_3a_3}$ 和 $\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_{b_3a_3}\mathbf{v}_{c_3d_3}$ 属于 S_5。如果 $\mathbf{v}_1 \bullet_k w \neq 0$，那么 $w(i) = b_3$ 蕴含 $i > k$。另一方面，如果 $\mathbf{v}_2 \bullet_k w \neq 0$ 或 $\mathbf{v}_3 \bullet_k w \neq 0$，那么 $w(i) = b_3$ 蕴含 $i \leq k$。因此，$\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$。现在，如果 $\mathbf{v}_2 \bullet_k w \neq 0$，那么 $w(i) = d_3$ 蕴含 $d_3 \leq k$。另一方面，如果 $\mathbf{v}_3 \bullet_k w \neq 0$，那么 $w(i) = d_3$ 蕴含 $d_3 > k$。因此，$\mathbf{v}_2 \neq \mathbf{v}_3$。由此， S_5 的任意两个复合都不等价。□

下一个结果表明，如果在一个由支撑值互不相同的算子构成的非零复合中添加一个算子，结果变成零复合，那么这就是二次零等价的结果。

命题 6.7. 设 $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{a_nb_n} \cdots \mathbf{v}_{a_1b_1} \neq \mathbf{0}$。假设 $a_{n+1}, b_{n+1} \in \mathbb{Z}_{>0}$ 满足 $a_{n+1} \neq b_{n+1}$且 $a_{n+1}, b_{n+1} \notin \{a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n\}$。那么 $\mathbf{v}_{a_{n+1}b_{n+1}}\mathbf{v} \equiv \mathbf{0}$ 当且仅当存在某个 $1 \leq i \leq n$使得 $\mathbf{v}_{a_{n+1}b_{n+1}}\mathbf{v}_{a_ib_i} \equiv \mathbf{0}$。

证明。注意，由于 $\{a_{n+1}, b_{n+1}\} \cap \{a_i, b_i\} = \emptyset$ 对所有 $i \in [n]$均成立，结合定理 6.3 (ii), (iv), (vi) 以及命题6.4可得

$$(\star) \qquad \text{for each } i \in [n], \quad \mathbf{v}_{a_{n+1}b_{n+1}}\mathbf{v}_{a_ib_i} \equiv \mathbf{v}_{a_ib_i}\mathbf{v}_{a_{n+1}b_{n+1}}.$$

反向结论可直接由（$\star$）推出。对于正向结论，假设 $\mathbf{v}_{a_{n+1}b_{n+1}}\mathbf{v}_{a_ib_i} \not\equiv \mathbf{0}$ 对所有 $1 \leq i \leq n$ 均成立。我们构造一个置换 w^*，使得存在 $k^* \in \mathbb{Z}_{>0}$ 满足 $\mathbf{v}_{a_{n+1}b_{n+1}}\mathbf{v} \bullet_{k^*} w^* \neq 0$。由定理 5.19 (a)，不失一般性，可假设 $a_{n+1} > b_{n+1}$。于是，由于 $\mathbf{v}_{a_{n+1}b_{n+1}}\mathbf{v}_{a_ib_i} \not\equiv \mathbf{0}$ 对所有 $1 \leq i \leq n$均成立，根据定理 6.3 (ii)、(iv)、(vi)，对于 $i \in [n]$，必有：

(1) 若 $a_i > b_i$，则 $b_i < b_{n+1} < a_{n+1} < a_i$ 或 $b_{n+1} < b_i < a_i < a_{n+1}$；并且

(2) 若 $a_i < b_i$，则 $b_{n+1} < a_i < b_i < a_{n+1}$、$a_i < b_i < b_{n+1} < a_{n+1}$ 或 $b_{n+1} < a_{n+1} < a_i < b_i$；

t也就是说，

$$(\star\star) \qquad \text{for each } i \in [n], \text{ either} \quad a_i, b_i \in (b_{n+1}, a_{n+1}) \quad \text{or} \quad a_i, b_i \notin [b_{n+1}, a_{n+1}].$$

由于 $\mathbf{v} \not\equiv 0$，若 $|\text{支撑(v)}| = t$，则存在 $u \in S_t$ 和 $k \in \mathbb{Z}_{>0}$，使得 $\mathbf{v} \bullet_k u \neq 0$。设 $u = (u'_1, \ldots, u'_t)$。若 $\phi : \text{supp(v)} \to [t]$ 表示唯一的保序双射，则令 $(u_1, \ldots, u_t) = (\phi^{-1}(u'_1) \ldots, \phi^{-1}(u'_t))$。令 $N = \max\{a_1, b_1, \ldots, a_{n+1}, b_{n+1}\}$，定义$w, w^* \in S_N$如下。令 $w = (w_1, \ldots, w_N)$，其中 $w_i = u_i$对于 $i \in [t]$成立，而值 w_i对于

$i > t$ 是按递增顺序排列的值 $[N]\backslash\{a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n\}$。注意，由于 $\mathbf{v} \bullet_k u \neq 0$，显然 $\mathbf{v} \bullet_k w \neq 0$。现在，对于 w^*，若存在这样的 $i \leq k$，令 $i^* = 1 + \max\{i \mid i \leq k,\ u_i \notin [b_{n+1}, a_{n+1}]\}$；否则令 $i^* = 1$；若存在这样的值 $j > k$，令 $j^* = 1 + \min\{j \mid j > k,\ u_j \notin [b_{n+1}, a_{n+1}]\}$；否则令 $j^* = t + 2$。然后，我们定义 $w^* = (w'_1, \ldots, w'_N)$，其中 $w'_i = w_i$ 对于 $1 \leq i < i^*$ 成立，$w'_{i^*} = a_{n+1}$ 对于 $i^* < i < j^*$ 成立，$w'_{j^*} = b_{n+1}$ 对于 $t + 2 < i \leq N$ 成立。注意，按构造，对于 $i^* + 1 \leq i \leq j^* - 1$，有 $w'_i = u_{i-1} \in [b_{n+1}, a_{n+1}]$。接下来，我们假设 $i^* > 1$ 和 $j^* < t + 2$；其他情形的论证类似，但更简单。在这种情形下，我们有

$$w^* = (u_1, \ldots, u_{i^*-1}, a_{n+1}, u_{i^*}, \ldots, u_{j^*-2}, b_{n+1}, u_{j^*-1}, \ldots, u_t, w_{t+3}, \ldots, w_N).$$

我们断言，取 $k^* = k+1$ 我们有 $\mathbf{v}^{a_{n+1}b_{n+1}}\mathbf{v} \bullet_{k^*} w^* \neq 0$。反之，假设不然。根据构造，我们有

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_{a_{n+1}b_{n+1}} \bullet_{k^*} w^* &= q_{i^*,j^*}(u_1, \ldots, u_{i^*-1}, b_{n+1}, u_{i^*}, \ldots, u_{j^*-1}, a_{n+1}, u_{j^*}, \ldots, u_t, w_{t+3}, \ldots, w_N) \\ &= q_{i^*,j^*} w' \neq 0.\end{aligned}$$

因此，由于根据（$\star$）有 $\mathbf{v}^{a_{n+1}b_{n+1}}\mathbf{v} \equiv \mathbf{v}\mathbf{v}^{a_{n+1}b_{n+1}}$，可得 $\mathbf{v} \bullet_{k^*} w' = 0$。令 $m \in [n]$ 为满足 $\mathbf{v}_{a_m b_m} \cdots \mathbf{v}_{a_1 b_1} \bullet_{k^*} w' = 0$ 的最小值。根据构造，$\mathbf{v}_{a_m b_m} \cdots \mathbf{v}_{a_1 b_1} \bullet_{k^*} w' = 0$ 必然是由 w' 中 b_{n+1} 和 a_{n+1} 的位置所决定的。特别地，令 $\mathbf{q}^\alpha \widehat{w} = \mathbf{v}_{a_{m-1}b_{m-1}} \cdots \mathbf{v}_{a_1 b_1} \bullet_{k^*} w^* \neq 0$。由于对所有 $i \in [n]$，a_{n+1} 和 b_{n+1} 的位置均由 $\mathbf{v}_{a_i b_i}$ 确定，应用命题 4.2可得两种情形。

情形 1：$a_m < b_m$ 且满足以下任一条件

- $a_m < a_{n+1} < b_m$ 其中 $\widehat{w}^{-1}(a_m) < j^* < \widehat{w}^{-1}(b_m)$，或者
- $a_m < b_{n+1} < b_m$ 其中 $\widehat{w}^{-1}(a_m) < i^* < \widehat{w}^{-1}(b_m)$。

由上文的 (2)，a_{n+1}，$b_{n+1} \notin [a_m, b_m]$，因此这两种可能都不成立。

情况 2：$a_m > b_m$ 且满足以下任一条件

- $a_{n+1} \notin [b_m, a_m]$ with $\widehat{w}^{-1}(a_m) < j^* < \widehat{w}^{-1}(b_m)$ or
- $b_{n+1} \notin [b_m, a_m]$ with $\widehat{w}^{-1}(a_m) < i^* < \widehat{w}^{-1}(b_m)$.

由上文的 (2)，两种情况下都必须有 $[b_m, a_m] \subset (b_{n+1}, a_{n+1})$。假设 $a_{n+1} \notin [b_m, a_m]$ 其中 $\widehat{w}^{-1}(a_m) < j^* < \widehat{w}^{-1}(b_m)$，另一种情况可用类似的论证得出。由于 $w^*(j^*+1) = u_{j^*-1} \notin [b_{n+1}, a_{n+1}]$，可得 $w^*(j^*+1) \notin [b_m, a_m]$，并且考察 ($\star\star$)，有 $\widehat{w}(j^*+1) \notin [b_m, a_m]$。因此，$\widehat{w}^{-1}(a_m) < j^* + 1 < \widehat{w}^{-1}(b_m)$。令 $\mathbf{q}^\beta w'' = \mathbf{v}_{a_{m-1}b_{m-1}} \cdots \mathbf{v}_{a_1 b_1} \bullet_k w$，这意味着 $(w'')^{-1}(b_m) < j^* - 1 < (w'')^{-1}(a_m)$，其中 $w''(j^* - 1) \notin [b_m, a_m]$；但此时 $\mathbf{v}_{a_m b_m} \bullet_k w'' = 0$，即 $\mathbf{v} \bullet_k w = 0$，这就产生了矛盾。因此，$\mathbf{v}^{a_{n+1}b_{n+1}}\mathbf{v} \bullet_{k^*} w^* \neq 0$，正如所需，结论得证。 □

我们以一个关于等价于 **0** 的复合、其支撑以及与极小性相关的推论的结果结束本小节。这些结果的主要动机是计算方面的。正如引言中所述，我们的目标是完整刻画所有次数的极小零等价与非零等价，而计算机测试对此是不可或缺的。然而，鉴于样本的规模以及需要检验的等式，若能得到允许我们限制需要考察的复合的支撑大小的结果，将会非常有帮助。

引理 6.8。 令 $n>1$ 和 $\mathbf{v}=\mathbf{v}^{a_nb_n}\cdots\mathbf{v}^{a_1b_1}$ 满足以下任一条件

(*a*) $|\mathbf{v}$ 的支撑$|=2n$ 或
(*b*) $|\mathbf{v}$ 的支撑$|=2n-1$。

若 $\mathbf{v}\equiv\mathbf{0}$，则 $\mathbf{v}\equiv\mathbf{v}^{a'_nb'_n}\cdots\mathbf{v}^{a'_1b'_1}$ 其中 $\mathbf{v}^{a'_{i+1}b'_{i+1}}\mathbf{v}_{a'_ib'_i}\equiv\mathbf{0}$ 对某个 $1\le i<n$ 成立，即 $\mathbf{v}\equiv\mathbf{0}$，这是二次零等价的推论。

证明。 我们通过对 n 归纳法分别处理每种情形。

(*a*) 基础情形显然成立。假设结论对 $n-1\ge1$ 成立。注意，$|\mathbf{v}$ 的支撑$(\mathbf{v})|=2n$ 蕴含 $\{a_i,b_i\}\cap\{a_j,b_j\}=\emptyset$ 对所有 $i,\ j\in[n]$ 使得 $i\ne j$。因此，结合定理6.3 (ii)、(iv)、(vi) 以及命题 6.4 可得

$$(\star)\qquad \mathbf{v}_{a_ib_i}\mathbf{v}_{a_jb_j}\equiv\mathbf{v}_{a_jb_j}\mathbf{v}_{a_ib_i}\text{ for all }i,j\in[n]\text{ such that }i\ne j.$$

现在，若$\mathbf{v}=\mathbf{v}^{a_nb_n}\cdots\mathbf{v}_{a_1b_1}\equiv0$，则

- $\mathbf{v}^{a_{n-1}b_{n-1}}\cdots\mathbf{v}_{a_1b_1}\equiv\mathbf{0}$，结论由归纳假设得出；或者
- $\mathbf{v}^{a_{n-1}b_{n-1}}\cdots\mathbf{v}_{a_1b_1}\not\equiv\mathbf{0}$，结论由命题 6.7 以及（$\star$）得出。

（*b*）与（a）中一样，基础情形显然成立。假设结论对 $n-1\ge1$ 成立。注意到$|\mathbf{supp}(\mathbf{v})|=2n-1$ 蕴含

- 存在唯一一对 $i^*,\ j^*\in[n]$ 使得 $i^*<j^*$ 且 $|\{a_{i^*},b_{i^*}\}\cap\{a_{j^*},b_{j^*}\}|=1$，并且
- 对于满足 $i\ne j$ 的所有其他对 $i,\ j\in[n]$，有 $\{a_i,b_i\}\cap\{a_j,b_j\}=\emptyset$。

因此，如果 $i\notin\{i^*,j^*\}$，那么 $\{a_i,b_i\}\cap\{a_j,b_j\}=\emptyset$ 对于所有满足 $j\in[n]$ 的 $j\ne i$。于是，结合定理6.3 (ii)、(iv)、(vi)以及命题6.4，我们得到

$$(\star\star)\text{ if }i\notin\{i^*,j^*\},\text{ then }\mathbf{v}_{a_ib_i}\mathbf{v}_{a_jb_j}\equiv\mathbf{v}_{a_jb_j}\mathbf{v}_{a_ib_i}\text{ for all }j\in[n]\text{ such that }i\ne j.$$

因此，不失一般性，我们可以假设 $i^*=1$ 和 $j^*=2$。现在，如果$\mathbf{v}=\mathbf{v}^{a_nb_n}\cdots\mathbf{v}_{a_1b_1}\equiv0$，那么以下两种情况必有其一：

- $\mathbf{v}^{a_{n-1}b_{n-1}}\cdots\mathbf{v}_{a_1b_1}\equiv\mathbf{0}$，结论由归纳假设得出；或者
- $\mathbf{v}^{a_{n-1}b_{n-1}}\cdots\mathbf{v}_{a_1b_1}\not\equiv\mathbf{0}$，根据命题6.7 以及（$\star\star$）可得结论。 □

6.2 次数 3 等价关系

本节确定所有次数为三的极小等价关系。我们采用与次数为二的等价关系相同的方法。因此，我们从次数为三的零等价开始，并根据定理 5.19(a)，重点考察第一个算子为量子的情形。

利用 [2, 命题5.2] 以及循环移位变换的性质，我们得到如下结论。

命题 6.9。 设 $a<b<c<d$。那么以下是三次的极小零等价：

(i) $\mathbf{v}_{ca}\mathbf{v}_{bc}\mathbf{v}$
$_{ca} \equiv \mathbf{0}$;(ii) $\mathbf{v}_{ca}\mathbf{v}_{ab}\mathbf{v}$
$_{ca} \equiv \mathbf{0}$;(iii) $\mathbf{v}_{bd}\mathbf{v}_{ab}\mathbf{v}$
$_{ca} \equiv \mathbf{0}$;

(iv) $\mathbf{v}_{ca}\mathbf{v}_{bc}\mathbf{v}_{db} \equiv \mathbf{0}$;

(v) $\mathbf{v}_{db}\mathbf{v}_{bc}\mathbf{v}_{ca} \equiv \mathbf{0}$;

(vi) $\mathbf{v}_{ac}\mathbf{v}_{cd}\mathbf{v}_{db} \equiv \mathbf{0}$.

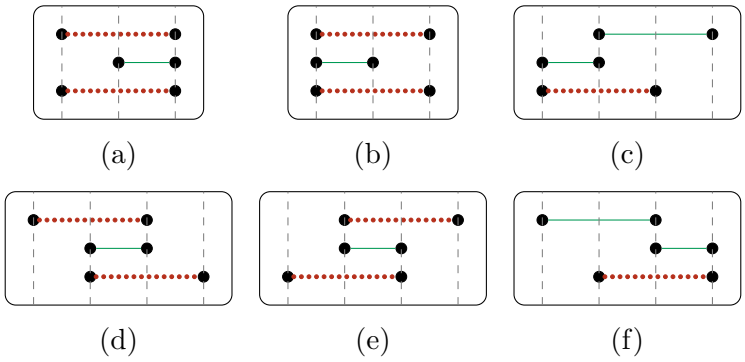
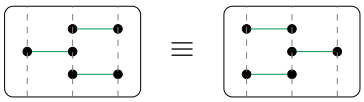


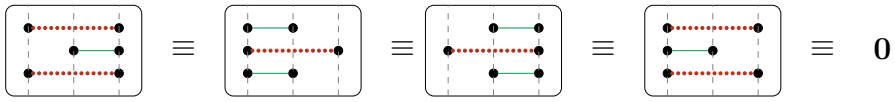
图10：涉及三个算子的极小零等价

事实证明，利用第5节中的变换，这些零等价足以生成完整列表。下一个结果总结了所有三次极小零等价及其对应的图示表示。

定理6.10。(i) 对于 $a < b < c$，有$\mathbf{v}_{bc}\mathbf{v}_{ab}\mathbf{v}_{bc} \equiv \mathbf{v}_{ab}\mathbf{v}_{bc}\mathbf{v}_{ab} \equiv \mathbf{0}$。

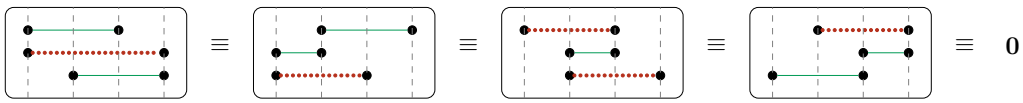


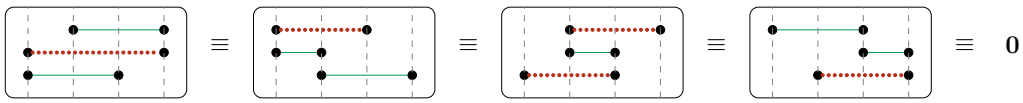
(ii) 对于 $a < b < c$，有 $\mathbf{v}_{ca}\mathbf{v}_{bc}\mathbf{v}_{ca} \equiv \mathbf{v}_{ab}\mathbf{v}_{ca}\mathbf{v}_{ab} \equiv \mathbf{v}_{bc}\mathbf{v}_{ca}\mathbf{v}_{bc} \equiv \mathbf{v}_{ca}\mathbf{v}_{ab}\mathbf{v}_{ca} \equiv \mathbf{0}$。



(iii) 对于 $a < b < c < d$，有

$\mathbf{v}_{ac}\mathbf{v}_{da}\mathbf{v}_{bd} \equiv \mathbf{v}_{bd}\mathbf{v}_{ab}\mathbf{v}_{ca} \equiv \mathbf{v}_{ca}\mathbf{v}_{bc}\mathbf{v}_{bd} \equiv \mathbf{v}_{db}\mathbf{v}_{cd}\mathbf{v}_{ac} \equiv \mathbf{v}_{bd}\mathbf{v}_{da}\mathbf{v}_{ac} \equiv \mathbf{v}_{ac}\mathbf{v}_{cd}\mathbf{v}_{db} \equiv \mathbf{v}_{db}\mathbf{v}_{bc}\mathbf{v}_{ca} \equiv \mathbf{v}_{ca}\mathbf{v}_{ab}\mathbf{v}_{bd} \equiv \mathbf{0}.$





转向三次的非零等价关系，我们继续采用系统化的方法；也就是说，我们收集所有首个复合为量子的三次非零复合，并应用第5节中的所有保持等价关系的变换。接下来，我们将所得的复合集合分成若干组，每组包含支撑和量子算子数量相同的复合。然后，在每组内部确定哪些复合彼此等价。最后，我们移除因应用二次等价关系而产生的任何等价关系。

由于需要考虑的算子复合集合数量相当多，我们仅提供几个示例来说明我们的方法。首先，我们有

$$C_1 = \{\mathbf{v}_{12}\mathbf{v}_{21}\mathbf{v}_{12}\}$$

是由三个算子构成、含一个量子算子且支撑为 $[2],$ 的非零复合集合

$$C_2 = \{\mathbf{v}_{21}\mathbf{v}_{12}\mathbf{v}_{21}\}$$

是由三个算子构成、含两个量子算子且支撑为 $[2],$ 的非零复合集合，并且

$$\begin{aligned} C_3 = \{&\mathbf{v}_{23}\mathbf{v}_{12}\mathbf{v}_{31},\mathbf{v}_{31}\mathbf{v}_{12}\mathbf{v}_{23},\mathbf{v}_{12}\mathbf{v}_{23}\mathbf{v}_{31},\mathbf{v}_{31}\mathbf{v}_{23}\mathbf{v}_{12},\mathbf{v}_{23}\mathbf{v}_{12}\mathbf{v}_{21},\mathbf{v}_{21}\mathbf{v}_{12}\mathbf{v}_{23},\mathbf{v}_{12}\mathbf{v}_{23}\mathbf{v}_{32},\\ &\mathbf{v}_{32}\mathbf{v}_{23}\mathbf{v}_{12},\mathbf{v}_{13}\mathbf{v}_{31}\mathbf{v}_{12},\mathbf{v}_{13}\mathbf{v}_{31}\mathbf{v}_{23},\mathbf{v}_{13}\mathbf{v}_{31}\mathbf{v}_{13},\mathbf{v}_{23}\mathbf{v}_{31}\mathbf{v}_{13},\mathbf{v}_{12}\mathbf{v}_{31}\mathbf{v}_{23},\mathbf{v}_{23}\mathbf{v}_{31}\mathbf{v}_{12}\}\end{aligned}$$

是由三个算子构成、支撑为 $[3]$ 且含一个量子算子的非零复合集合。比较 C_3 中的复合，我们得到以下等价关系

$$\mathbf{v}_{cb}\mathbf{v}_{bc}\mathbf{v}_{ab} \equiv \mathbf{v}_{ab}\mathbf{v}_{ca}\mathbf{v}_{ac}, \qquad \mathbf{v}_{ac}\mathbf{v}_{ca}\mathbf{v}_{bc} \equiv \mathbf{v}_{bc}\mathbf{v}_{ab}\mathbf{v}_{ba}, \qquad \mathbf{v}_{ba}\mathbf{v}_{ab}\mathbf{v}_{bc} \equiv \mathbf{v}_{bc}\mathbf{v}_{ca}\mathbf{v}_{ac},$$

and

$$\mathbf{v}_{ac}\mathbf{v}_{ca}\mathbf{v}_{ab} \equiv \mathbf{v}_{ab}\mathbf{v}_{bc}\mathbf{v}_{cb},$$

这些都不是二次非零等价关系的推论，也就是说，这四个等价关系都是极小的。另一方面，比较剩余的由三个算子组成、含一个量子且支撑为 $[6],$ 的非零复合，可以得到等价关系 $\mathbf{v}_{12}\mathbf{v}_{43}\mathbf{v}_{56} \equiv \mathbf{v}_{56}\mathbf{v}_{12}\mathbf{v}_{43}$。由于等价关系 $\mathbf{v}_{12}\mathbf{v}_{43}\mathbf{v}_{56} \equiv \mathbf{v}_{56}\mathbf{v}_{12}\mathbf{v}_{43}$ 是二次非零等价关系的推论，因此我们不会将其列入最终的极小三次非零等价关系清单。

以下结果总结了上述过程的输出。

定理6.11。设 $a < b < c < d$。以下是三次非零等价关系的完整列表：

(i) $\mathbf{v}_{cb}\mathbf{v}_{bc}\mathbf{v}_{ab} \equiv \mathbf{v}_{ab}\mathbf{v}_{ca}\mathbf{v}_{ac}$

(ii) $\mathbf{v}_{ac}\mathbf{v}_{ca}\mathbf{v}_{bc} \equiv \mathbf{v}_{bc}\mathbf{v}_{ab}\mathbf{v}_{ba}$

(iii) $\mathbf{v}_{ba}\mathbf{v}_{ab}\mathbf{v}_{ca} \equiv \mathbf{v}_{ca}\mathbf{v}_{bc}\mathbf{v}_{cb}$

(iv) $\mathbf{v}_{ba}\mathbf{v}_{ab}\mathbf{v}_{bc} \equiv \mathbf{v}_{bc}\mathbf{v}_{ca}\mathbf{v}_{ac}$

(v) $\mathbf{v}_{cb}\mathbf{v}_{bc}\mathbf{v}_{ca} \equiv \mathbf{v}_{ca}\mathbf{v}_{ab}\mathbf{v}_{ba}$

(vi) $\mathbf{v}_{ac}\mathbf{v}_{ca}\mathbf{v}_{ab} \equiv \mathbf{v}_{ab}\mathbf{v}_{bc}\mathbf{v}_{cb}$

(vii) $\mathbf{v}_{db}\mathbf{v}_{bc}\mathbf{v}_{ab} \equiv \mathbf{v}_{ab}\mathbf{v}_{da}\mathbf{v}_{ac}$

(viii) $\mathbf{v}_{ac}\mathbf{v}_{cd}\mathbf{v}_{bc} \equiv \mathbf{v}_{bc}\mathbf{v}_{ab}\mathbf{v}_{bd}$

(ix) $\mathbf{v}_{bd}\mathbf{v}_{da}\mathbf{v}_{cd} \equiv \mathbf{v}_{cd}\mathbf{v}_{bc}\mathbf{v}_{ca}$

(x) $\mathbf{v}_{ca}\mathbf{v}_{ab}\mathbf{v}_{da}^{q} \equiv \mathbf{v}_{da}\mathbf{v}_{cd}\mathbf{v}_{db}$

(xi) $\mathbf{v}_{ca}\mathbf{v}_{bc}\mathbf{v}_{cd} \equiv \mathbf{v}_{cd}\mathbf{v}_{da}\mathbf{v}_{bd}$

(xii) $\mathbf{v}_{db}\mathbf{v}_{cd}\mathbf{v}_{da} \equiv \mathbf{v}_{da}\mathbf{v}_{ab}\mathbf{v}_{ca}$

(xiii) $\mathbf{v}_{ac}\mathbf{v}_{da}\mathbf{v}_{ab} \equiv \mathbf{v}_{ab}\mathbf{v}_{bc}\mathbf{v}_{db}$ (xiv) $\mathbf{v}_{bd}\mathbf{v}_{ab}\mathbf{v}_{bc} \equiv \mathbf{v}_{bc}\mathbf{v}_{cd}\mathbf{v}_{ac}$

6.3 四次等价关系

本节讨论四次的极小等价关系。总体方法与二次和三次等价关系的情形相同。不过，需要考虑的复合数量正变得相当庞大。此外，辨认哪些等价关系不是极小的也越来越困难。因此，我们先给出两个技术结果，以帮助辨认非极小等价关系并缩小搜索范围。

引理 6.12。设$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{a_4b_4}\mathbf{v}_{a_3b_3}\mathbf{v}_{a_2b_2}\mathbf{v}_{a_1b_1}$ 满足

(i) $|\{a_1, b_1\} \cap \{a_2, b_2\}| = 1$，$(ii)$ $|\{a_3, b_3\} \cap \{a_4, b_4\}| = 1$，以及$(iii)$ $|\{a_1, b_1, a_2, b_2\} \cap \{a_3, b_3, a_4, b_4\}| = 0$。

若$\mathbf{v} \equiv \mathbf{0}$，则这是二次或三次零等价的推论；也就是说，$\mathbf{v} \equiv \mathbf{v}^{a'_4b'_4}\mathbf{v}^{a'_3b'_3}\mathbf{v}^{a'_2b'_2}\mathbf{v}^{a'_1b'_1}$ 其中，要么$\mathbf{v}^{a'_{i+1}b'_{i+1}}\mathbf{v}_{a'_ib'_i} \equiv \mathbf{0}$ 对 $i \in [3]$ 成立，要么$\mathbf{v}^{a'_{i+2}b'_{i+2}}\mathbf{v}^{a'_{i+1}b'_{i+1}}\mathbf{v}_{a'_ib'_i} \equiv \mathbf{0}$ 对$i \in [2]$成立。

注 6.13。注意，$\mathbf{v}$ 在引理*6.12*中对指标取值的条件$\mathbf{v}$ 本质上就是说，ν 是两个不相交的二次复合的复合，每个二次复合都由两个不同的算子构成，且这两个算子的支撑共享一个值。

证明。假设

$$(\star)\quad \text{if } \mathbf{v} \equiv \mathbf{v}_{a'_4b'_4}\mathbf{v}_{a'_3b'_3}\mathbf{v}_{a'_2b'_2}\mathbf{v}_{a'_1b'_1}, \text{ then } \mathbf{v}_{a'_{i+1}b'_{i+1}}\mathbf{v}_{a'_ib'_i} \not\equiv \mathbf{0} \text{ for } i \in [3] \text{ and } \mathbf{v}_{a'_{i+2}b'_{i+2}}\mathbf{v}_{a'_{i+1}b'_{i+1}}\mathbf{v}_{a'_ib'_i} \not\equiv \mathbf{0} \text{ for } i \in [2].$$

我们证明 $\mathbf{v} \not\equiv \mathbf{0}$。考虑表示 $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{a_4b_4}\mathbf{v}_{a_3b_3}\mathbf{v}_{a_2b_2}\mathbf{v}_{a_1b_1}$，其中

(i) $|\{a_1, b_1\} \cap \{a_2, b_2\}| = 1$、$(ii)$ $|\{a_3, b_3\} \cap \{a_4, b_4\}| = 1$ 和 (iii) $|\{a_1, b_1, a_2, b_2\} \cap \{a_3, b_3, a_4, b_4\}| = 0$。

注意，由于 $|\{a_1, b_1\} \cap \{a_2, b_2\}| = 1$，$|\{a_3, b_3\} \cap \{a_4, b_4\}| = 1$，$\mathbf{v}_{a_2b_2}\mathbf{v}_{a_1b_1} \not\equiv 0$，且$\mathbf{v}_{a_4b_4}\mathbf{v}_{a_3b_3} \not\equiv 0$根据假设，考虑定理6.3，可知 $a_i > b_i$ 至多有一个 $i \in [2]$，且至多有一个 $i \in \{3, 4\}$。此外，注意到由于 $|\{a_1, b_1, a_2, b_2\} \cap \{a_3, b_3, a_4, b_4\}| = 0$，结合定理6.3 (ii)、(iv)、(vi) 和命题6.4，可得

$$(\star\star)\quad \mathbf{v}_{a_4b_4}\mathbf{v}_{a_3b_3}\mathbf{v}_{a_2b_2}\mathbf{v}_{a_1b_1} \equiv \mathbf{v}_{a_4b_4}\mathbf{v}_{a_2b_2}\mathbf{v}_{a_3b_3}\mathbf{v}_{a_1b_1} \equiv \mathbf{v}_{a_2b_2}\mathbf{v}_{a_4b_4}\mathbf{v}_{a_1b_1}\mathbf{v}_{a_3b_3} \equiv \mathbf{v}_{a_2b_2}\mathbf{v}_{a_1b_1}\mathbf{v}_{a_4b_4}\mathbf{v}_{a_3b_3}.$$

有三种情形需要考虑。

情形 1：$a_1 > b_1$ 或 $a_2 > b_2$，且 $a_3 > b_3$ 或 $a_4 > b_4$。我们假设 $a_1 > b_1$ 且 $a_3 > b_3$，因为其他情形的证明类似。由于 $|\{a_1, b_1\} \cap \{a_2, b_2\}| = 1$ 且 $|\{a_3, b_3\} \cap \{a_4, b_4\}| = 1$，结合定理 6.3，必有 $b_1 = a_2 < b_2 < a_1$ 或 $b_1 < a_2 < b_2 = a_1$ 且

$b_3 = a_4 < b_4 < a_3$ 或 $b_3 < a_4 < b_4 = a_3$。由于论证都类似，我们假设 $b_1 = a_2 < b_2 < a_1$ 且 $b_3 = a_4 < b_4 < a_3$。现在，结合（$\star$）和（$\star\star$），可得 $\mathbf{v}^{a_i b_i}\mathbf{v}_{a_j b_j} \neq \mathbf{0}$且 $\mathbf{v}^{a_i b_i}\mathbf{v}_{a_1 b_1} \neq \mathbf{0}$ 对于 $i \in \{3,4\}$和 $j \in \{1,2\}$。因此，由于 $|\{a_1, b_1, a_2, b_2\} \cap \{a_3, b_3, a_4, b_4\}| = 0$，根据定理6.3，必有

- $b_2 < a_4 < a_3 < a_1$，结论随即成立，因为对于

$$u_1 = (a_1, a_3, b_4, a_4, b_2, a_2, \ldots),$$

  我们有 $\mathbf{v} \bullet_2 u_1 \neq 0$；或者

- $b_4 < a_2 < a_1 < a_3$，结论随即成立，因为对于

$$u_2 = (a_3, a_1, b_2, a_2, b_4, a_4, \ldots),$$

  我们有 $\mathbf{v} \bullet_2 u_2 \neq 0$。

情况 2： $a_i < b_i$ 对于 $i \in \{3,4\}$，且 $a_1 > b_1$ 或 $a_2 > b_2$。我们假设 $a_1 > b_1$，因为另一种情形的证明类似。由于 $|\{a_1, b_1\} \cap \{a_2, b_2\}| = 1$，结合定理 6.3，我们必有 $b_1 = a_2 < b_2 < a_1$ 或 $b_1 < a_2 < b_2 = a_1$。此外，由于 $|\{a_3, b_3\} \cap \{a_4, b_4\}| = 1$ 与$a_3 < b_3$ 且 $a_4 < b_4$，再次结合定理 6.3，我们必有 $a_3 < b_3 = a_4 < b_4$或 $a_4 < b_4 = a_3 < b_3$。由于所有论证都类似，我们假设 $b_1 = a_2 < b_2 < a_1$ 且$a_3 < b_3 = a_4 < b_4$。现在，由于在情况 1 中注意到，对于 $i \in \{3,4\}$ 和 $j \in \{1,2\}$，有 $\mathbf{v}^{a_i b_i}\mathbf{v}_{a_j b_j} \neq \mathbf{0}$ 且 $\mathbf{v}^{a_i b_i}\mathbf{v}_{a_1 b_1} \neq \mathbf{0}$，并且 $|\{a_1, b_1, a_2, b_2\} \cap \{a_3, b_3, a_4, b_4\}| = 0$，应用定理 6.3 可知必有 $b_4 < a_2$、 $a_2 < a_3 < b_4 < b_2$、 $b_2 < a_3 < b_4 < a_1$或 $a_1 < a_3$。在所有情况下，若$u =$（a_3、 a_1、 b_2、 a_2、 a_4、 b_4、 .....），则 $\mathbf{v} \bullet_2 u \neq 0$。

案例3： $a_i < b_i$ 对所有 $i \in [4]$。由于 $|\{a_1, b_1\} \cap \{a_2, b_2\}| = 1$ 且 $|\{a_3, b_3\} \cap \{a_4, b_4\}| = 1$，考虑定理6.3，我们必有

- 要么 $a_1 < b_1 = a_2 < b_2$，要么 $a_2 < b_2 = a_1 < b_1$ 且
- 要么 $a_3 < b_3 = a_4 < b_4$，要么 $a_4 < b_4 = a_3 < b_3$。

由于这些论证都类似，我们假设 $a_1 < b_1 = a_2 < b_2$ 且 $a_3 < b_3 = a_4 < b_4$。现在，由于$\mathbf{v}^{a_i b_i}\mathbf{v}_{a_j b_j} \neq \mathbf{0}$ 且$\mathbf{v}^{a_i b_i}\mathbf{v}_{a_1 b_1} \neq \mathbf{0}$ 对于 $i \in \{3,4\}$ 且 $j \in \{1,2\}$ 如案例1中所述，且$|\{a_1, b_1, a_2, b_2\} \cap \{a_3, b_3, a_4, b_4\}| = 0$，应用定理 6.3 可得，要么

- $b_4 < a_1$、 $b_2 < a_3$、 $a_1 < a_3 < b_4 < a_2$ 或 $a_2 < a_3 < b_4 < a_2$，结论由此得出，因为对于

$$u_1 = (a_3, a_1, b_2, a_2, b_4, a_4, \ldots),$$

  我们有 $\mathbf{v} \bullet_2 u_1 \neq 0$；或者

- $a_3 < a_1 < b_2 < a_4$ 或 $a_4 < a_1 < b_2 < b_4$，结论由此得出，因为对于

$$u_2 = (a_1, a_3, b_4, a_4, b_2, a_2, \ldots),$$

  我们有$\mathbf{v} \bullet_2 u_2 \neq 0$。 □

下一个结果与引理6.8的形式相似。由于证明与引理6.12的证明相似，我们省略证明。

引理 6.14。 令 $n \geq 4$ 并考虑一个复合 $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{a_n b_n} \cdots \mathbf{v}_{a_1 b_1}$，其中 $|\text{支撑}(\mathbf{v})| = 2n-2$。若$\mathbf{v} \equiv \mathbf{0}$，则它是二次或三次零等价的推论；也就是说，$\mathbf{v} \equiv \mathbf{v}^{a'_n b'_n} \cdots \mathbf{v}^{a'_1 b'_1}$，其中要么 $\mathbf{v}^{a'_{i+1} b'_{i+1}} \mathbf{v}_{a'_i b'_i} \equiv \mathbf{0}$，对于 $i \in [n-1]$，要么 $\mathbf{v}^{a'_{i+2} b'_{i+2}} \mathbf{v}^{a'_{i+1} b'_{i+1}} \mathbf{v}_{a'_i b'_i} \equiv \mathbf{0}$，对于 $i \in [n-2]$。

最后，我们总结了对四阶等价关系的完整研究结果，这与第 6.2 节对三次等价关系的处理相同。定理 7.1 证明了这些等价关系确实是极小的；该定理还讨论了任意次数的推广。

定理 6.15。 次数为四的极小等价关系由图 *11* 所示的复合，以及通过应用第 *5*节中的保持等价关系的变换而与它们相关的任何复合组成。

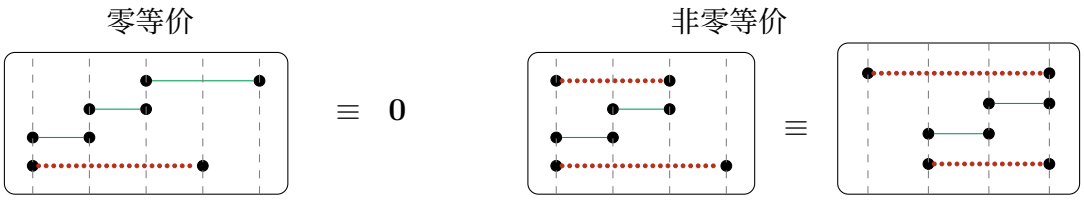


图 11：四阶极小等价关系

虽然我们可以像上面一样继续研究次数为五、六等的等价关系，但显然，仅凭这样的实验依据不足以得到等价关系的完整列表。特别是，对量子 k-Bruhat序有更深入的理解似乎至关重要（见第 7 节末尾的讨论）。在此之前，我们只能猜测等价关系的完整列表。关于这一点，我们相信，上文找到的等价关系，加上下一节讨论的两个任意次数的推广，确实构成了等价关系的完整列表。

7 任意次数的等价关系

本节中，我们建立了任意次数的两族极小关系，一族为零关系，另一族为非零关系，从而推广了上一节中发现的极小四次等价关系。具体而言，本节余下部分以及本文其余部分都将用于证明以下结果。

定理 7.1. 设 $n \geq 4$ 并考虑 $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$。那么，我们有以下极小等价关系：

(i) $\mathbf{v}_{a_{n-2}a_n} \mathbf{v}_{a_{n-3}a_{n-2}} \cdots \mathbf{v}_{a_1 a_2} \mathbf{v}_{a_{n-1}a_1} \equiv \mathbf{0}$; 和

(ii) $\mathbf{V}_{a_{n-1}a_1} \mathbf{V}_{a_{n-2}a_{n-1}} \mathbf{V}_{a_{n-3}a_{n-2}} \cdots \mathbf{V}_{a_1 a_2} \mathbf{V}_{a_n,a_1} \equiv \mathbf{V}_{a_n a_1} \mathbf{V}_{a_{n-1}a_n} \mathbf{V}_{a_{n-2}a_{n-1}} \cdots \mathbf{V}_{a_2 a_3} \mathbf{V}_{a_n a_2}$.

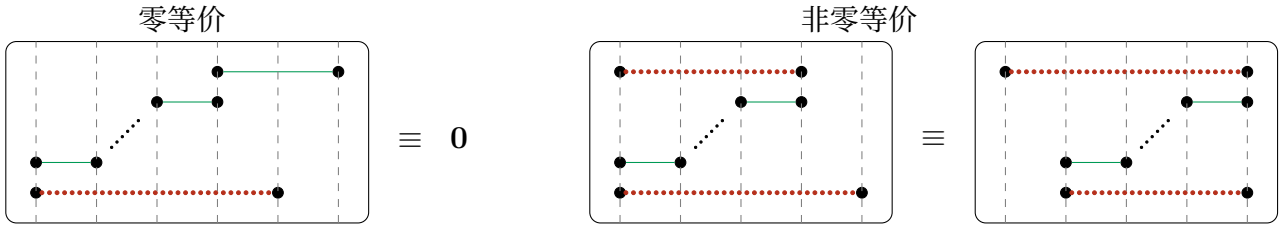


图12：任意阶等价

定理 7.1 中的零等价出现在 [2], ，作者在其中证明了它们确实等价于零。因此，还需要证明它们也是极小的。

命题 7.2. 对于 $n \geq 4$ 和 $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$，以下零等价是极小的

$$\mathbf{v}_{a_{n-2}a_n}\mathbf{v}_{a_{n-3}a_{n-2}} \cdots \mathbf{v}_{a_1a_2}\mathbf{v}_{a_{n-1}a_1} \equiv \mathbf{0}.$$

证明。 设 $\mathbf{v} = \mathbf{v}^{a_{n-2}a_n}\mathbf{v}^{a_{n-3}a_{n-2}} \cdots \mathbf{v}^{a_1a_2}\mathbf{v}^{a_{n-1}a_1}$，其中 $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$。关系 $\mathbf{v} \equiv \mathbf{0}$ 可能不是极小的，有两种情况:

(1) 存在$\mathbf{v}$ 的一个连续子组合等价于$\mathbf{0}$ ，或者

(2) 可以对 $\mathbf{v}$ 应用非零等价关系，从而得到满足 (1) 的表达式。

对于 (1)，考虑到 [5]，中关于经典算子的复合的结果，可知

$$\mathbf{v}_{a_{n-i}a_{n-i+1}}\mathbf{v}_{a_{n-i+1}a_{n-i+2}} \cdots \mathbf{v}_{a_{n-j}a_{n-j+1}} \neq \mathbf{0}$$

对于 $3 \leq i < j \leq n-1$ 和

$$\mathbf{v}_{a_{n-2}a_n}\mathbf{v}_{a_{n-3}a_{n-2}} \cdots \mathbf{v}_{a_{n-i}a_{n-i+1}} \neq \mathbf{0}$$

对于 $3 \leq i \leq n-1$。剩下需要考虑形如 $\mathbf{v}^{a_ia_{i+1}} \cdots \mathbf{v}^{a_1a_2}\mathbf{v}^{a_{n-1}a_1}$ 对于$1 \leq i \leq n-3$ 的复合。根据定理 5.3，只需证明 $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{i,i+1} \cdots \mathbf{v}_{12}\mathbf{v}_{n-1,1} \neq \mathbf{0}$ 对于$1 \leq i \leq n-3$。为此，注意到

$$\mathbf{v}_i \bullet_2 (n, n-1|1, 2, 3, \ldots, i, i+1, i+2, \ldots, n-2) = q_2(n, i+1|n-1, 1, 2, \ldots, i-1, i, i+2, \ldots, n-2) \neq 0$$

因此，如果 $\mathbf{v} \equiv \mathbf{0}$ 不是最小的，那么这可由 (2) 推出。

如果可以对 v 应用非平凡的非零等价关系，那么它们必定适用于以下某种形式的子复合:

$$\mathbf{v}_{a_{n-i}a_{n-i+1}}\mathbf{v}_{a_{n-i+1}a_{n-i+2}} \cdots \mathbf{v}_{a_{n-j}a_{n-j+1}}$$

对于 $3 \leq i < j \leq n-1$,

$$\mathbf{v}_{a_{n-2}a_n}\mathbf{v}_{a_{n-3}a_{n-2}} \cdots \mathbf{v}_{a_{n-i}a_{n-i+1}}$$

对于 $3 \leq i \leq n-1$，或者

$$\mathbf{v}_{a_ia_{i+1}} \cdots \mathbf{v}_{a_1a_2}\mathbf{v}_{a_{n-1}a_1}$$

对于 $1 \le i \le n-3$。等价地，应用定理 5.3，必定存在涉及以下形式的算子复合的非平凡非零等价关系

$$\mathbf{v}_{i,i+1}\mathbf{v}_{i-1,i}\cdots\mathbf{v}_{j,j+1}$$

对于 $1 \le j < i \le n-1$ or 这种形式

$$\mathbf{v}_{i,i+1}\cdots\mathbf{v}_{12}\mathbf{v}_{n-1,1}$$

对于 $1 \le i \le n-3$。注意，对后一个算子复合进行循环移位，可得

$$\mathbf{v}_{i+1,i+2}\cdots\mathbf{v}_{23}\mathbf{v}_{12}.$$

再次考虑 [5]，中关于经典算子复合的结果，可知不存在涉及上述 $\mathbf{v}$ 的两种可能子复合中任意一种的非平凡非零等价关系。因此，等价关系 $\mathbf{v} \equiv \mathbf{0}$ 必定是极小的。

□

对命题7.2中的复合应用循环移位变换，可得以下任意次数的零等价列表。图 13 展示了 $n=4$ 时这些复合的示例。

推论 7.3。令 $n \ge 4$ 并考虑 $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$。则下列等价关系是极小的

(i) $\mathbf{v}_{a_{n-1}a_1}\mathbf{v}_{a_{n-2}a_{n-1}}\cdots\mathbf{v}_{a_2a_3}\mathbf{v}_{a_na_2} \equiv \mathbf{0}$,
(ii) $\mathbf{v}_{a_na_2}\mathbf{v}_{a_{n-1}a_n}\cdots\mathbf{v}_{a_3a_4}\mathbf{v}_{a_1a_3} \equiv \mathbf{0}$，以及

(iii) $\mathbf{v}_{a_{i-1}a_{i+1}}\mathbf{v}_{a_{i-2}a_{i-1}}\cdots\mathbf{v}_{a_1a_2}\mathbf{v}_{a_na_1}\mathbf{v}_{a_{n-1}a_n}\cdots\mathbf{v}_{a_{i+2}a_{i+3}}\mathbf{v}_{a_ia_{i+2}} \equiv \mathbf{0}$ 对于 $1 < i < n-1$。

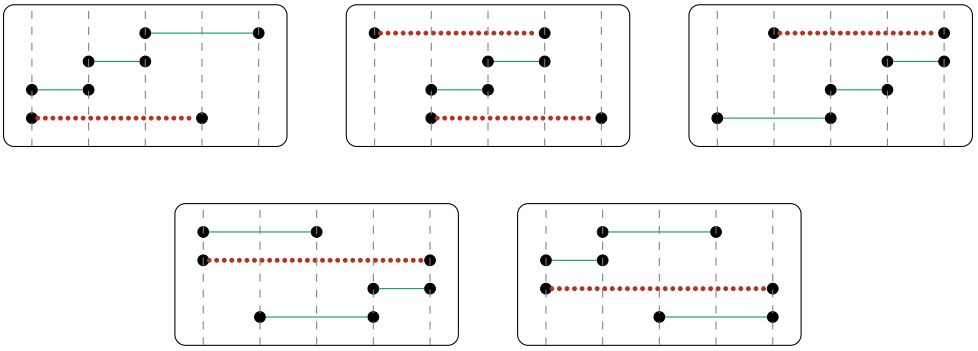


图 13：推论 7.3 对于 $n=4$

转向定理7.1的非零等价后，我们将证明分为两部分。在命题 7.4中，我们证明这些复合等价；在命题7.5中，我们证明该等价关系是最小的。

命题 7.4。令 $n \ge 4$ 并考虑 $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$。则

$$\mathbf{v}_{a_{n-1}a_1}\mathbf{v}_{a_{n-2}a_{n-1}}\mathbf{v}_{a_{n-3}a_{n-2}}\cdots\mathbf{v}_{a_1a_2}\mathbf{v}_{a_n,a_1} \equiv \mathbf{v}_{a_na_1}\mathbf{v}_{a_{n-1}a_n}\mathbf{v}_{a_{n-2}a_{n-1}}\cdots\mathbf{v}_{a_2a_3}\mathbf{v}_{a_na_2}.$$

证明。 考虑定理 5.3，只需证明

$$\mathbf{v}_{n-1,1}\mathbf{v}_{n-2,n-1}\mathbf{v}_{n-3,n-2}\cdots\mathbf{v}_{12}\mathbf{v}_{n,1} \equiv \mathbf{v}_{n,1}\mathbf{v}_{n-1,n}\mathbf{v}_{n-2,n-1}\cdots\mathbf{v}_{23}\mathbf{v}_{n,2}.$$

让我们从

$$\mathbf{v}_{\mathbf{1}}^{*} = \mathbf{v}_{n-1,1}\mathbf{v}_{n-2,n-1}\mathbf{v}_{n-3,n-2}\cdots\mathbf{v}_{12}\mathbf{v}_{n,1}.$$

对于 $w \in S_N$，满足 $N \geq n$，假设

$$\mathbf{v}_{\mathbf{1}}^{*} \bullet_k w \neq 0$$

且对于 $1 \leq i \leq n$， $w^{-1}(i) = j_i$。

(1) 由于 $\mathbf{v}_{\mathbf{1}}^{*} \bullet_k w \neq 0$，可得 $\mathbf{v}_{n,\,1} \bullet_k w \neq 0$。应用命题 4.2，我们有$\mathbf{v}_{n,\,1} \bullet_k w \neq 0$ 当且仅当

- $j_n \leq k < j_1$ 且

对于 $s \in [N]\backslash[1,n]$， • $w^{-1}(s) < j_n$ 或 $w^{-1}(s) > j_1$。

注意，在$\mathbf{v}_{n,\,1} \bullet_k w$中，1位于位置 $j_n \leq k$， n 位于位置 $j_1 > k$，而 i 在 $2 \leq i \leq n-1$时位于位置j_i。此外，我们还得到系数$\mathbf{q}_{j_n,\,j_1}$。

(2) 与(1)中一样，我们必须有$\mathbf{v}_{12} \bullet_k (\mathbf{v}_{n,\,1} \bullet_k w) \neq 0$。考虑到上文指出的$\mathbf{v}_{n,\,1} \bullet_k w$ 的形式，并应用命题4.2，我们发现$\mathbf{v}_{12} \bullet_k (\mathbf{v}_{a_n a_1} \bullet_k w) \neq 0$ 当且仅当 $k < j_2$。注意，在$\mathbf{v}_{12}\mathbf{v}_{n,\,1} \bullet_k w$中，1位于位置 j_2，2位于位置 j_n， n 位于位置 j_1，而 i 在 $3 \leq i \leq n-1$时位于位置 j_i。

(3) 上文(2)中使用的相同推理可以递归地应用于

$$\mathbf{v}_{i,i+1} \bullet_k (\mathbf{v}_{i-1,i}\cdots\mathbf{v}_{12}\mathbf{v}_{n,1} \bullet_k w)$$

对于 $2 \leq i \leq n-2$。由此，我们发现

$$\mathbf{v}_{i,i+1} \bullet_k (\mathbf{v}_{i-1,i}\cdots\mathbf{v}_{12}\mathbf{v}_{n,1} \bullet_k w) \neq 0$$

当且仅当 $k < j_{i+1}$对于 $2 \leq i \leq n-2$。注意，在 $\mathbf{v}_{n-2,\,n-1}\mathbf{v}_{n-3,\,n-2}\cdots\mathbf{v}_{12}\mathbf{v}_{n,\,1} \bullet_k w$ 中，我们有 i对于 $1 \leq i \leq n-2$位于位置 j_{i+1}， $n-1$ 位于位置 j_n，而 n 位于位置 j_1。

(4) 最后，由于 $\mathbf{v}_{\mathbf{1}}^{*} \bullet_k w \neq 0$，我们必有

$$\mathbf{v}_{n-1,1} \bullet_k (\mathbf{v}_{n-2,n-1}\mathbf{v}_{n-3,n-2}\cdots\mathbf{v}_{12}\mathbf{v}_{n,1} \bullet_k w) \neq 0.$$

记住，1 位于位置 j_2且 n位置 j_1属于 $\mathbf{v}_{n-2,\,n-1}\mathbf{v}_{n-3,\,n-2}\cdots\mathbf{v}_{12}\mathbf{v}_{n,\,1} \bullet_k w$，应用命题 4.2，我们发现

$$\mathbf{v}_{n-1,1} \bullet_k (\mathbf{v}_{n-2,n-1}\mathbf{v}_{n-3,n-2}\cdots\mathbf{v}_{12}\mathbf{v}_{n,1} \bullet_k w) \neq 0$$

当且仅当

- $j_1 > j_2 > k$ 和
- $w^{-1}(s) < j_n$或 $w^{-1}(s) > j_2$对于 $s \in [N]\backslash[1,n-1]$。

注意，在$\mathbf{v}_{\mathbf{1}}^{*} \bullet_k w$中，位置 j_n 上为 **1**， i 在位置 j_{i+1} 上对应 $2 \leq i \leq n-2$， $n-1$ 在位置 j_2 上，且 n 在位置 j_1 上。此外，我们得到一个$\mathbf{q}_{j_n, j_2}$系数。

因此，$\mathbf{v}_{\mathbf{1}}^{*} \bullet_k w \neq 0$ 当且仅当

(a_1) $j_n \leq k < j_1$，……，j_{n-1}、(b_1) $j_1 > j_2$，且(
$c_1)$ $w^{-1}(s) < j_n$或者 $w^{-1}(s) > j_1$对于
$s \in [N] \backslash [1, n]$。

此外，在这种情形下，我们有 $\mathbf{v}_{\mathbf{1}}^{*} \bullet_k w = \mathbf{q}^{\alpha} u$，其中 $u^{-1}(1) = j_n$， $u^{-1}(i) = j_{i+1}$ 对于 $2 \leq i \leq n-2$，$u^{-1}(n-1) = j_2$， $u^{-1}(n) = j_1$， $u^{-1}(s) = w^{-1}(s)$ 对于 $s \in [N] \backslash [n]$，且 $\mathbf{q}^{\alpha} = \mathbf{q}_{j_n,\ j_2} \mathbf{q}_{j_n,\ j_1}$。

现在，设

$$\mathbf{v}_{\mathbf{2}}^{*} = \mathbf{v}_{n,1} \mathbf{v}_{n-1,n} \mathbf{v}_{n-2,n-1} \cdots \mathbf{v}_{23} \mathbf{v}_{n,2}$$

并假设 $\mathbf{v}_{\mathbf{2}}^{*} \bullet_k w \neq 0$ 对于 $w \in S_N$ 如上所述。

(1) 由于 $\mathbf{v}_{\mathbf{2}}^{*} \bullet_k w \neq 0$，因此 $\mathbf{v}_{n,\ 2} \bullet_k w \neq 0$。应用命题 4.2，我们得到$\mathbf{v}_{n,\ 2} \bullet_k w \neq 0$ 当且仅当

- $j_n \leq k < j_2$,
- $w^{-1}(s) < j_n$或 $w^{-1}(s) > j_2$对于 $s \in [N] \backslash [2, n]$。

由上述第二个条件可知， $j_1 < j_n$ 或 $j_1 > j_2$。注意，在$\mathbf{v}_{n,\ 2} \bullet_k w$中，**2** 位于位置 $j_n \leq k$， i 位于位置 j_i （对于 $i \in [n] \backslash \{2, n\}$），而 n 位于位置$j_2 > k$。此外，我们还得到系数 $\mathbf{q}_{j_n,\ j_2}$。

(2) 与 **(2)** 中一样，我们必须有 $\mathbf{v}_{23} \bullet_k (\mathbf{v}_{n,\ 2} \bullet_k w) \neq 0$。考虑到上文所述$\mathbf{v}_{n,\ 2} \bullet_k w$ 的形式，并应用命题 4.2，$\mathbf{v}_{23} \bullet_k (\mathbf{v}_{n,\ 2} \bullet_k w) \neq 0$ 当且仅当 $k < j_3$。注意，在$\mathbf{v}_{23} \mathbf{v}_{n,\ 2} \bullet_k w$中，**1** 位于位置 $j_1 < j_n$ 或 $j_1 > j_2$，**2** 位于位置 $j_3 > k$，**3** 位于位置$j_n \leq k$， i位于位置 j_i（对于 $i \in [n] \backslash \{1, 2, 3, n\}$），而 n位于位置 $j_2 > k$。

(3) 上述情形中使用的推理可以递归地应用于

$$\mathbf{v}_{i,i+1} \bullet_k (\mathbf{v}_{i-1,i} \cdots \mathbf{v}_{23} \mathbf{v}_{n,2} \bullet_k w)$$

对于 $3 \leq i \leq n-2$。这样，我们得到

$$\mathbf{v}_{i,i+1} \bullet_k (\mathbf{v}_{i-1,i} \cdots \mathbf{v}_{23} \mathbf{v}_{n,2} \bullet_k w) \neq 0$$

当且仅当 $k < j_{i+1}$对于 $2 \leq i \leq n-2$。注意，在 $\mathbf{v}_{n-2,\ n-1} \cdots \mathbf{v}_{23} \mathbf{v}_{n,\ 2} \bullet_k w$ 中，**1** 位于位置 $j_1 < j_n$，或者 $j_1 > j_2$， i 对于 $2 \leq i \leq n-2$ 位于位置 j_{i+1}， $n-1$ 位于位置 j_n，而 n 位于位置 j_2。

(4) 现在，由于 n 位于 $\mathbf{v}_{n-2,\ n-1} \cdots \mathbf{v}_{23} \mathbf{v}_{n,\ 2} \bullet_k w$ 的位置 j_2，且 $n-1$ 位于位置 j_n，并且有 $j_n < j_2$，我们得到

$$\mathbf{v}_{n-1,n} \bullet_k (\mathbf{v}_{n-2,n-1} \cdots \mathbf{v}_{23} \mathbf{v}_{n,2} \bullet_k w) \neq 0.$$

此外，在$\mathbf{v}_{n-1,\ n} \bullet_k (\mathbf{v}_{n-2,\ n-1} \cdots \mathbf{v}_{23} \mathbf{v}_{n,\ 2} \bullet_k w)$中，**1** 位于位置 $j_1 < j_n$或 $j_1 > j_2$， i位于位置 j_{i+1} （ $2 \leq i \leq n-2$）， $n-1$ 位于位置 j_2，而 n 位于位置 j_n。

(5) 最后，应用命题4.2，我们得到

$$\mathbf{v}_{n,1} \bullet_k (\mathbf{v}_{n-1,n}\mathbf{v}_{n-2,n-1}\cdots\mathbf{v}_{23}\mathbf{v}_{n,2} \bullet_k w) \neq 0$$

当且仅当

- $k < j_2 < j_1$，并且
- $w^{-1}(s) < j_n$ 或 $w^{-1}(s) > j_1$ 对于 $s \in [N]\backslash[1,n]$。

注意，在 $\mathbf{v}_2^* \bullet_k w$ 中，1 位于位置 j_n，i 位于位置 j_{i+1}（对于 $1 \leq i \leq n-2$），$n-1$ 位于位置 j_2，而 n 位于位置 j_1。此外，我们得到一个系数$\mathbf{q}_{j_n,j_1}$。

因此，$\mathbf{v}_2^* \bullet_k w \neq 0$ 当且仅当

(a_2) $j_n \leq k < j_1, \ldots, j_{n-1}$,

(b_2) $j_1 > j_2$，并且

(c_2) $w^{-1}(s) < j_n$ or $w^{-1}(s) > j_1$ for $s \in [N]\backslash[1,n]$.

此外，在这种情形下，我们有 $\mathbf{v}_2^* \bullet_k w = \mathbf{q}^\alpha u$，其中 $u^{-1}(1) = j_n$, $u^{-1}(i) = j_{i+1}$ 对于 $2 \leq i \leq n-2$,$u^{-1}(n-1) = j_2$, $u^{-1}(n) = j_1$, $u^{-1}(s) = w^{-1}(s)$ 对于 $s \in [N]\backslash[n]$，且 $\mathbf{q}^\alpha = \mathbf{q}_{j_n,j_2}\mathbf{q}_{j_n,j_1}$。

比较 $\mathbf{v}_1^* \bullet_k w \neq 0$和 $\mathbf{v}_2^* \bullet_k w \neq 0$的条件可知，它们完全相同；也就是说，$\mathbf{v}_1^* \bullet_k w \neq 0$ 当且仅当 $\mathbf{v}_2^* \bullet_k w \neq 0$。此外，上述论证表明，在这种情形下 $\mathbf{v}_1^* \bullet_k w = \mathbf{v}_2^* \bullet_k w$。为此，注意到 $\mathbf{v}_1^*$ 和 $\mathbf{v}_2^*$ 均非零，取 $w^* = (\ldots a_n \mid a_2\ a_1\ a_3 \ldots a_{n-1} \ldots)$，便可直接验证 $\mathbf{v}_1^* \bullet_k w^* = \mathbf{v}_2^* \bullet_k w^* \neq 0$。结论得证。□

命题 7.5. 令 $n \geq 4$，并考虑 $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$。以下等价关系是极小的

$$\mathbf{v}_{a_{n-1}a_1}\mathbf{v}_{a_{n-2}a_{n-1}}\mathbf{v}_{a_{n-3}a_{n-2}}\cdots\mathbf{v}_{a_1a_2}\mathbf{v}_{a_n,a_1} \equiv \mathbf{v}_{a_na_1}\mathbf{v}_{a_{n-1}a_n}\mathbf{v}_{a_{n-2}a_{n-1}}\cdots\mathbf{v}_{a_2a_3}\mathbf{v}_{a_na_2}.$$

证明。令

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_{a_{n-1}a_1}\mathbf{v}_{a_{n-2}a_{n-1}}\mathbf{v}_{a_{n-3}a_{n-2}}\cdots\mathbf{v}_{a_1a_2}\mathbf{v}_{a_n,a_1}$$

and

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_{a_na_1}\mathbf{v}_{a_{n-1}a_n}\mathbf{v}_{a_{n-2}a_{n-1}}\cdots\mathbf{v}_{a_2a_3}\mathbf{v}_{a_na_2}.$$

只需证明 $\mathbf{v}_1$ 或 $\mathbf{v}_2$ 的任何由连续算子组成的子复合都不满足非平凡的非零等价。事实上，结合定理5.3、5.24和 5.28，只需证明如下形式的算子复合

(1) $\mathrm{v}_{i,i+1}\mathrm{v}_{i-1,i}\cdots\mathrm{v}_{j,j+1}$，其中 $1 \leq i < j$; (2) $\mathrm{v}_{i,i+1}\mathrm{v}_{i-1,i}\cdots\mathrm{v}_{12}\mathrm{v}_{n,1}$，其中 $1 \leq i < n-2$; 以及 (3) $\mathrm{v}_{n-1,n}\mathrm{v}_{n-2,n-1}\cdots\mathrm{v}_{12}\mathrm{v}_{n,1}$

不满足任何非平凡的非零等价关系。注意，形式为 (2) 的关系可以循环移位为形式 (1) 的关系。因此，应用有关 [5], 经典算子复合的研究，我们发现，涉及形式为 (1) 或 (2) 的算子的非平凡非零等价关系不存在。至于 (3)，令

$$\widehat{\mathbf{v}} = \mathbf{v}_{n-1,n}\mathbf{v}_{n-2,n-1}\cdots\mathbf{v}_{12}\mathbf{v}_{n,1},$$

注意到

$$\widehat{\mathbf{v}} \bullet_1 (n|1,2,\ldots,n-1) = q_1(n|n-1,1,2,\ldots,n-2).$$

假设 $\mathbf{v}^* \equiv \widehat{\ }\mathbf{v}_\circ$ 那么存在 $\{a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n\} = [n]$ 使得

$$\mathbf{v}^* = \mathbf{v}_{a_nb_n}\cdots\mathbf{v}_{a_1b_1}$$

and

$$\mathbf{v}^* \bullet_1 (n|1,2,\ldots,n-1) = q_1(n|n-1,1,2,\ldots,n-2).$$

显然，考虑到 $(n|1,\ 2,\ \ldots,\ n-1)$ 的形式以及 $\bullet_1$ 作用，可知 $\mathbf{v}^{a_1b_1} = \mathbf{v}_{n,\ 1\circ}$ 因此，

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_{a_nb_n}\cdots\mathbf{v}_{a_2b_2} \bullet_1 (1|n,2,\ldots,n-1) &= \mathbf{v}_{n-1,n}\mathbf{v}_{n-2,n-1}\cdots\mathbf{v}_{12} \bullet_1 (1|n,2,\ldots,n-1)\\ &= (n|n-1,1,2,\ldots,n-2).\end{aligned}$$

我们证明 $\mathbf{v}^{a_ib_i} = \mathbf{v}_{i-1,\ i}$ 对于 $2 \le i \le n$ 按 i递增顺序排列的情形。对于 $i = 2$，考虑到 $(1|n,\ 2,\ \ldots,\ n-1)$ 的形式，可知要么 $\mathbf{v}^{a_2b_2} = \mathbf{v}_{1,\ n}$ 要么 $\mathbf{v}_{12\circ}$ 应用命题 3.1 和备注4.3，我们得到

$$\mathbf{v}_{1,n} \bullet_1 (1|n,2,\ldots,n-1) = (n|1,2,\ldots,n-1) \not\leftarrow_1^{\mathbf{q}} (n|n-1,1,2,\ldots,n-2).$$

因此，$\mathbf{v}_{a_2,\ b_2} = \mathbf{v}_{12\circ}$ 现在，假设对于所有满足 $2 < j < n-1$ 的 $2 \le i \le j < n-1$，都有 $\mathbf{v}^{a_ib_i} = \mathbf{v}_{i-1,\ i\ \circ}$ 那么

$$\mathbf{v}_{a_jb_j}\cdots\mathbf{v}_{a_2b_2} \bullet_1 (1|n,2,\ldots,n-1) = (j|n,1,2\ldots,j-1,j+1,j+2,\ldots,n-1)$$

and

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_{a_nb_n}\cdots\mathbf{v}_{a_{j+1}b_{j+1}} &\bullet_1 (j|n,1,2\ldots,j-1,j+1,j+2,\ldots,n-1)\\ &= \mathbf{v}_{n-1,n}\cdots\mathbf{v}_{j,j+1} \bullet_1 (j|n,1,2\ldots,j-1,j+1,j+2,\ldots,n-1)\\ &= (n|n-1,1,2,\ldots,n-2).\end{aligned}$$

考虑到 $(j|n,\ 1,\ 2\ldots\ldots,\ j-1,\ j+1,\ j+2,\ n-1)$ 的形式，我们知道以下两种情况必有其一：$\mathbf{v}^{a_{j+1}b_{j+1}} = \mathbf{v}_{j,\ n}$或者 $\mathbf{v}_{j,\ j+1\circ}$ 再次应用命题 3.1 和注释 4.3，

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_{j,n} \bullet_1 (j|n,1,2\ldots,j-1,j+1,j+2,\ldots,n-1) &= (n|j,1,2\ldots,j-1,j+1,j+2,\ldots,n-1)\\ &\not\leftarrow_1^{\mathbf{q}} (n|n-1,1,2,\ldots,n-2).\end{aligned}$$

因此，$\mathbf{v}^{a_{j+1}b_{j+1}} = \mathbf{v}_{j,\ j+1\circ}$ 最后，我们转到 $i = n_\circ$ 注意，上述推导表明$\mathbf{v}^{a_jb_j} = \mathbf{v}_{j-1,\ j}$对于 $2 \le j \le n-1$ 成立；也就是说，我们证明了$\mathbf{v}^* = \mathbf{v}^{a_nb_n}\mathbf{v}_{n-2,\ n-1}\cdots\mathbf{v}_{12}\mathbf{v}_{n,\ 1\circ}$ 因此，由于

$$\widehat{\mathbf{v}} \bullet_1 (n|1,2,\ldots,n) = \mathbf{v}^* \bullet_1 (n|1,2,\ldots,n) \neq 0,$$

由此可得$\mathbf{v}_{a_nb_n} = a_{n-1,n\circ}$ 因此，$\widehat{\ }\mathbf{v} = \mathbf{v}^*$，并且不存在涉及形式为 (3) 的算子复合的非平凡非零等价关系。结论得证。 □

将命题 7.5 中的等价关系应用循环移位变换，可得到以下任意阶零等价列表。图 14 展示了这些 $n = 4$复合的示意图。

推论 7.6。 令 $n \geq 4$，并考虑 $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$。那么以下等价关系是极小的

$$(i)\ \mathbf{V}_{a_n a_2}\mathbf{V}_{a_{n-1}a_n}\cdots\mathbf{V}_{a_2 a_3}\mathbf{V}_{a_1 a_2} \equiv \mathbf{V}_{a_1 a_2}\mathbf{V}_{a_n a_1}\mathbf{V}_{a_{n-1}a_n}\cdots\mathbf{V}_{a_3 a_4}\mathbf{V}_{a_1 a_3},$$

(ii) 对于 $2 \leq j \leq n-2$,

$$\mathbf{V}_{a_{j-1}a_{j+1}}\mathbf{V}_{a_{j-2}a_{j-1}}\cdots\mathbf{V}_{a_2 a_3}\mathbf{V}_{a_1 a_2}\mathbf{V}_{a_n a_1}\mathbf{V}_{a_{n-1}a_n}\cdots\mathbf{V}_{a_{j+1}a_{j+2}}\mathbf{V}_{a_j a_{j+1}}$$
$$\equiv \mathbf{V}_{a_j a_{j+1}}\cdots\mathbf{V}_{a_2 a_3}\mathbf{V}_{a_1 a_2}\mathbf{V}_{a_n a_1}\mathbf{V}_{a_{n-1}a_n}\cdots\mathbf{V}_{a_{j+4}a_{j+5}}\mathbf{V}_{a_{j+3}a_{j+4}}\mathbf{V}_{a_j a_{j+3}},$$

$$(iii)\ \mathbf{V}_{a_{n-2}a_n}\mathbf{V}_{a_{n-3}a_{n-2}}\cdots\mathbf{V}_{a_2 a_3}\mathbf{V}_{a_1 a_2}\mathbf{V}_{a_n a_1}\mathbf{V}_{a_{n-1}a_n} \equiv \mathbf{V}_{a_{n-1}a_n}\cdots\mathbf{V}_{a_2 a_3}\mathbf{V}_{a_1 a_2}\mathbf{V}_{a_{n-1}a_1}.$$

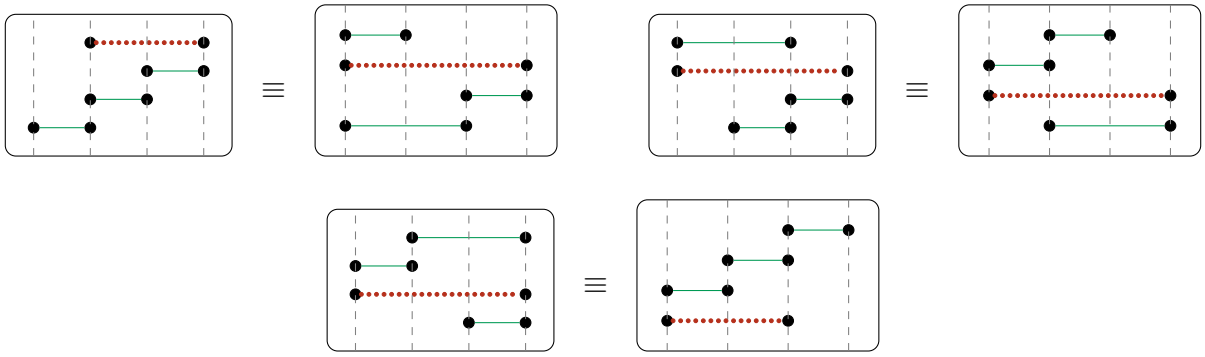


图 14：推论 7.6 对于 $n = 4$

基于实验依据，我们猜想本研究中介绍的零等价与非零等价关系构成了等价关系的完整列表。

猜想 7.7。 元素 $\mathcal{F}_n^{\mathfrak{q}}$所满足的极小等价关系的完整集合，由图 *15*中所示的等价关系以及通过应用第 *5*节中的保持等价关系的变换而与它们相关的所有等价关系组成。

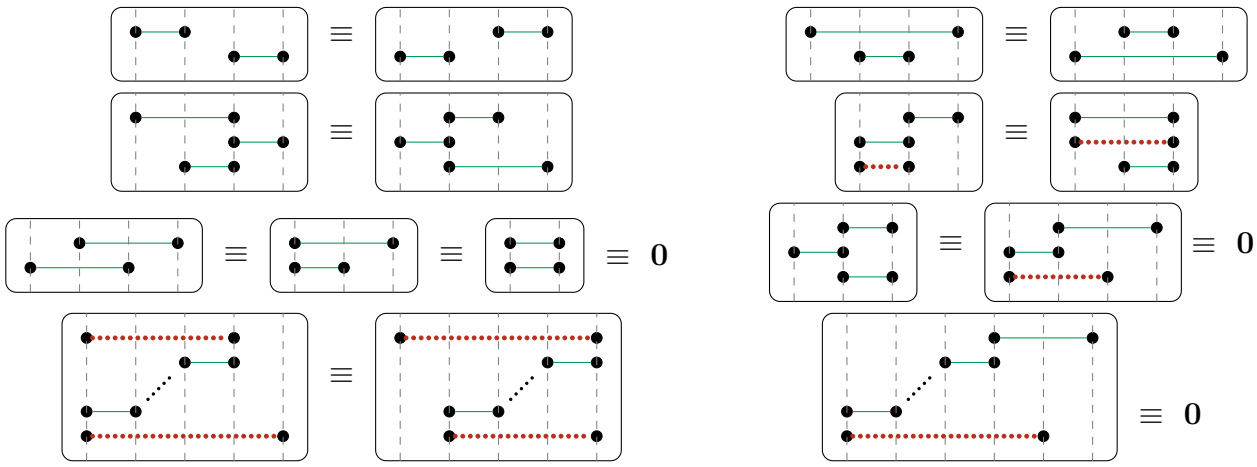


图 15：猜想由这些等价关系生成定义 $\mathcal{F}_n^{\mathfrak{q}}$ 的所有等价关系

在经典情形中，对 k-Bruhat序链结构的理解，在证明猜想 7.7的经典版本（即定理 3.4 (a)）中发挥了关键作用。具体而言，证明利用了 k-Bruhat序中相关元素之间的一种规范极大链。对于量子 k-Bruhat序，我们甚至无法一般性地判断两个元素何时相关，更不用说确定两个元素之间的一条极大链了。今后，本文作者计划进一步研究量子 k-Bruhat序，以期证明猜想 7.7。

参考文献

[1] S. H. Assaf. 舒伯特多项式的 Kohnert规则的一个双射证明。组合理论，2(1):第5号论文，9，2022。[2] C. Benedetti、N. Bergeron、L. Colmenarejo、F. Saliola 和 F. Sottile。旗流形上的量子 Murnaghan–Nakayama 法则。代数组合，8(3):619–653，2025。[3] N. Bergeron 和 S. Billey。RC图与舒伯特多项式。实验数学，2(4):257–269，1993。[4] N. Bergeron 和 F. S ottile。舒伯特多项式、Bruhat序与旗流形的几何。杜克数学杂志，(94):373–423，1998。[5] N. Bergeron 和 F. Sottile。Grassmannian Bruhat序的一个幺半群。欧洲组合学杂志，20(3):197–211，1999。[6] S. Billey、W. Jockusch 和 R. Stanley。舒伯特多项式的一些组合性质。代数组合学杂志，2(4):345–374，1993。[7] I. Ciocan-Fontanine。旗簇的量子上同调。国际数学研究通知，(6):263–277，1995。

[8] S. Fomin、 和 R. Stanley。舒伯特多项式与 nilCoxeter代数。Adv. Math., 103(2):196–207，1994。[9] S. Fomin、S. Gelfand 和 A. Postnikov。量子舒伯特多项式。J. Amer. Math. Soc., 10(3):565–596，1997。[10] A. Givental 和 B. Kim。旗流形的量子上同调与 Toda格。Comm. Math. Phys., 168(3):609–641，1995。[11] B. Kim。部分旗流形的量子上同调及其交配对的留数公式。Intern. Math. Research Notices, (1):1–16，1995。[12] B. Kim。论等变量子上同调。Intern. Math. Research Notices, (17):841–851，1996。[13] B. Kim。旗流形 g/b 的量子上同调与量子 Toda格。Ann. of Math., 149(1):129–148，1999。[14] A. Kirillov。量子舒伯特多项式与量子舒尔函数。Internat. J. Algebra Comput., 9(03n04):385–404，1999。[15] A. Kirillov 和 T. Maeno。量子双舒伯特多项式、量子舒伯特多项式与 Vafa-Intriligator公式。Discrete Math., 217(1-3):191–223，2000。[16] M. Kontsevich 和 Y. Manin。格罗莫夫-维滕类、量子上同调与计数几何。Comm. Math. Phys., 164(3):525–562，1994。[17] A. Lascoux 和 M. Sch¨ utzenberger。舒伯特多项式。C. R. Math. Acad. Sci. Paris, S ´er. I Math., 294(13):447–450, 1982。[18] T. Le、S. Ouyang、L. Tao、J. Restivo 和 A. Zhang。量子bumpess管道图。载于: arXiv:2403.16168 (2024)。[19] I. G. MacDonald。关于舒伯特多项式的笔记。1991。[20] D. Monk。旗流形的几何。Proc. London Math. Soc., 9:253–286，1959。[21] D. Monk。关于舒伯特多项式的笔记。Publications LACIM，1991。[22] Y. Ruan 和 G. Tian。量子上同调的数学理论。J. Diff. Geom., 42(2):259–367，1995。[23] F. Sottile。旗流形的 Pieri公式与舒伯特多项式。Ann. Inst. Fourier, 46:89–110，1996。[24] R. Winkel。关于舒伯特多项式的乘法。Adv. in Appl. Math., 20(1):73–97，1998。[25] R. Winkel。生成舒伯特多项式的图规则。J. Combin. Theory Ser. A, 86(1):14–48，1999。[26] R. Winkel。从 Monk 法则推导 Kohnert算法。S ´em. Lothar. Combin., 48:Art. B48f, 14，2002。