arXiv:2601.03438v1 [cs.GT] 6 Jan 2026

两类物品下 EFX 与帕累托最优分配的存在性

VladimirDavidiuk Yuriy Dementiev Artur Ignatiev Danil Sagunov圣彼得堡国立大学 ITMO大学 ITMO大学 ITMO大学

摘要

我们研究如何在具有加性估值的代理人之间公平且高效地分配不可分物品。我们聚焦于任意物品嫉妒无关性（EFX）——这是不可分物品公平分配中的一项重要公平性概念。该领域的一个核心开放问题是：对于任意数量的代理人，EFX 分配是否总是存在。此前的研究已证明，在最多具有三种不同估值的设定下 [Prakash HV 等人， 2025] 以及具有两类物品的设定下[Gorantla 等人， 2023], EFX 分配均存在，但一般情况仍未解决。

本文拓展了现有研究成果，证明当物品有两种类型且估值为正时，满足帕累托最优性（PO）的 EFX 分配总是存在，并且可以在准线性时间内计算得出。这一结果强化了[Gorantla 等人， 2023], 的现有研究；该研究仅保证 EFX 分配存在，并未确保帕累托最优性。我们的研究结果展示了一种相当简单且高效的算法，可构造 EFX+PO 分配。

1 引言

不可分物品的公平分配是算法博弈论和计算社会选择中的核心研究领域，关注如何在偏好各异的代理人之间公平分配离散物品，例如房产、许可证或人道主义援助。在线平台 Spliddit（spliddit.org）提供了公平分配算法的实用实现，以应对现实世界中的分配挑战，包括室友之间的租金分配、出租车费分摊，以及个人之间物品的公平分配。其核心目标是实现公平性和有效性保证，在效率与公平之间取得平衡，即使精确解在理论上或计算上难以获得，也能如此。

公平性的黄金标准——嫉妒无关性（EF） [Foley, 1966], 确保没有代理人更愿意获得他人的分配而非自己的分配。然而，对于不可分物品，EF 分配往往不存在；即使存在，如 [Lipton 等人所示，即便只有两名代理人，识别此类分配也是 NP 完全问题。 2004] 这一局限促使人们研究有意义的放宽条件。嫉妒无关性的最初放宽概念是至多一件物品嫉妒无关性（EF1），由 [Lipton 等人非正式提出， 2004] 后由 [Budish 正式定义。 2011]在 EF1 条件下，代理人 i可以嫉妒代理人 j，前提是 j的物品束中至少有一件商品，移除它后， i对 j 的嫉妒便会消失。对于具有加性估值的不可分物品，EF1 分配始终存在，并且可以使用嫉妒环消除法等算法在多项式时间内计算出来。 [Lipton 等人， 2004]。 [Caragiannis 等人（2019b）]证明，轮流分配算法可以产生 EF1 分配。正如 [Caragiannis 等人（2019b）], 所证明的，最大化纳什社会福利（MNW）的分配必然是帕累托有效的，并满足至多一件物品嫉妒无关性。在这些概念中，由 [Caragiannis 等人（2019b）], 提出的任意物品嫉妒无关性（EFX）已成为一种颇具吸引力的替代方案。EFX 放宽了 EF 的严格要求：虽然代理人可能会嫉妒他人的物品束，但从被嫉妒的物品束中移除任意一件商品后，这种嫉妒便会消失。对于具有任意加性估值的 n 代理人，EFX 是否存在仍是一个悬而未决的问题。

近年来，在回答这一问题方面取得了重大进展，但一般性解决方案仍难以获得。首个关于存在性的正面结果由 [Plaut and Roughgarden, 2020] 给出：当代理人具有相同的估值时，他们证明了字典序最小（lexmin）解在这种情况下保证 EFX。对于两名代理人，[Plaut and Roughgarden, 2020] 证明了切分与选择算法能够保证 EFX。他们还将分析扩展到估值不完全相同的情况，证明嫉妒环消除算法同样能够为有序实例保证 EFX 分配——在这些情况下，代理人对物品具有相同的偏好排序，但其

基数估值可能不同。 [Chaudhury 等人, 2024] 将这一结果扩展到了三名代理人，而 [Mahara，2023] 和[Prakash HV 等人，2025] 分别证明了具有两种和三种代理人类型的设定中的存在性。另一方面， [Gorantla 等人，2023] 证明了当物品仅属于两种不同类型时，EFX 分配确实存在，并进一步部分刻画了在此类情况下何时能够实现完全无嫉妒（EF）。此前的一篇论文证明了字典序偏好下 EFX 和帕累托最优分配的存在性 [Hosseini 等人, 2021]。此外， [Garg and Murhekar，2023] 证明，对于双值实例，存在一种 EFX 且分数帕累托最优的分配，并且可以在多项式时间内计算得到。

帕累托最优性是公平分配中的一项基本效率概念，确保没有代理人能在不损害他人的情况下改善自己的分配。 [Amanatidis 等人， 2021] 证明，当物品至多有两种可能的估值时，最大纳什福利（MNW）解能够保证 EFX 和帕累托最优性（PO）；他们还提出了一种基于匹配、用于实现 EFX 的多项式时间算法。然而， [Plaut and Roughgarden， 2020] 也揭示了一个令人沮丧的局限：如果代理人可以对物品赋予零估值，EFX 和 PO 可能无法兼容。这留下了一个尚未解决的问题：当所有估值均为正时，是否始终存在 EFX 且 PO 的分配?

我们的贡献。我们大幅推进了对两类物品的公平且有效分配的理解。首先，我们证明，当所有代理人都具有正效用时，EFX+PO 分配始终存在，同时说明更强的 EFX+fPO 组合仍不可能实现。这一结果改进了 [Gorantla 等人， 2023], 他们证明了 EFX 分配的存在性，但未能保证帕累托最优性。

我们提供了一种高效的算法解：对于 n 个代理人和 m 件物品，我们的方法可在 $\mathcal{O}(n\log\ n+\log\ m)$ 时间内计算出此类分配。如果代理人按照其对物品类型的相对估值排序，该方法还可在 $\mathcal{O}(\log n+\log m)$ 时间内完成。此外，我们引入了一类适当的分配，并证明每个适当的分配都是帕累托最优的，从而为公平性与效率之间的相互作用提供了新的结构性见解。

示例：EFX 与 fPO 并不总是兼容。考虑一个简单示例，其中有两类物品（羊角面包和咖啡）以及两名代理人（Alice (1) 和 Bob (2)）。有两个羊角面包（a）和两杯咖啡（b），其估值为$v_1(a)\ =\ v_2(a)\ =\ 1$以及 $v_1(b)\ =\ 10$和 $v_2(b)\ =\ 9$。在唯一的 EFX 分配中，每名代理人各获得一个羊角面包和一杯咖啡。尽管该分配满足任意好物无嫉妒，但它并非分数帕累托最优（fPO）：在一种分数分配中，Alice 获得 1.1 杯咖啡，而 Bob 获得 0.9 杯咖啡和两个羊角面包，这将严格改善该分配；Alice 的效用不变，但 Bob 的效用提高了（Alice 为 11，Bob 为 10.1）。然而，在不可分割情形下，该 EFX 分配是帕累托最优（PO）的，因为任何离散重新分配都不可能在不损害另一名代理人的情况下提高一名代理人的效用。这表明，可能不存在同时满足 EFX 和 fPO 的分配。在本文中，我们将证明 EFX+PO 分配总是存在。

				
	1	1	10	10
	1	1	9	9

表 1：包含两类物品的示例。

补充相关工作。近年来，不可分物品的公平分配在理论和算法方面取得了显著进展，数篇全面的综述对此均有记述 [Amanatidis 等人，2023年，Aziz 等人，2022年，Nguyen 和 Rothe， 2023]。

一种颇具前景的方向是采用 EFX 松弛，允许少量物品不予分配——通常将其视为慈善捐赠——同时维持公平性保证。虽然将所有物品都留作未分配，便可轻而易举地满足嫉妒无关性，但这毫无意义；目前，在限制被舍弃物品的数量及其对福利的影响方面，已取得实质性进展。 [Caragiannis 等人，2019a] 证明，对一部分物品存在 EFX 分配，且其最大纳什福利至少保留一半。 [Chaudhury 等人，2021b] 提出了一种计算部分 EFX 分配的算法，其中：(i) 至多有 $n-1$ 件物品不予分配；(ii) 没有任何代理人会严格偏好未分配物品的集合，而非自己的物品束。随后， [Berger 等人 2022] 和 [Mahara 2024] 将这一数量进一步降至一般情况下的 $n-2$ 件物品；对于有四名代理人的实例，则仅需一件物品。 [Ghosal 等人 2025] 推广了这些结果，证明当代理人至多具有 k 种不同估值时，存在仅有 $k-2$ 件物品未分配的 EFX 分配。

近似 EFX 概念也日益受到关注：如果对任意一对代理人 i 和 j，将另一方的物品束中任意一件物品移除后，再按 α缩放，该代理人都不会嫉妒对方，那么这种分配就称为 α-EFX；形式化地说，对于任意 $g \in X_j$，均有：$v_i(X_i) \geq \alpha \cdot v_i(X_j \setminus g)$。[Plaut and Roughgarden, 2020] 证明了 0.5-EFX 分配的存在性；随后，[Amanatidis 等人 2020]将这一界改进至 0.618。最近，[Amanatidis 等人 2024] 证明，对于至多七名代理人，或代理人至多具有三种不同估值的情况，均存在$_{2\ 3}$-EFX 分配。在这项研究的基础上，[Chaudhury 等人，2021a] 巧妙地衔接了近似与慈善这两个概念，证明可以高效地计算出一个 $(1-\varepsilon)$-EFX 分配，同时仅捐赠次线性数量的物品，并为 $\varepsilon \in (0, 0.5]$ 保持较高的纳什福利。

设定。该设定由一组 n 代理人 $N = [n] = \{1, \ldots, n\}$和一个多重集 M组成，其中包含两种不同物品的不可分物品副本：g_1 的重数为 m_1，g_2 的重数为 m_2。每个代理人 $i \in N$ 都有一个估值函数 v_i：$2^M \to \mathbb{R}_{>0}$，用于量化 i 从任意物品子集中获得的效用。我们关注加性估值，即一个子集的价值等于其中各物品价值之和。形式化地，对于任意子集 $S \subseteq M$，估值函数满足 $v_i(S) = \sum_{g \in S} v_i(g)$。分配 $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$是将 M划分为 n 个互不相交的子集，这些子集称为物品束，每个代理人 i 获得物品束X_i。我们将分配 X 与每个代理人物品束中的物品重数 $\{(x_{i,1}, x_{i,2}) \mid i \in [n]\}$相对应，因此可以假设代理人的效用等于 $v_i(X_i) = x_{i,1} \cdot v_{i,1} + x_{i,2} \cdot v_{i,2}$，其中$v_{i,j} = v_i(\{g_j\})$对每个 $i \in [n], j \in [2]$均成立。

定义 1（EFX）。若对于每一对代理人 $i,\ j \in N$，以及任意 $g \in X_j$，均有 $v_i(X_i) + v_i(g) \geq v_i(X_j)$，则分配 X 满足任意好物无嫉妒（EFX）。
如果代理人 i 在任意商品方面嫉妒代理人 j，则称代理人 i 对代理人 j 存在任意商品嫉妒，即 $v_i(X_i) + \min_{g \in X_j} v_i(g) < v_i(X_j)$。

定义 2（PO）。若不存在某个分配 Y，使得对于所有 $i \in N$ 都有 $v_i(Y_i) \geq v_i(X_i)$，且对于某个 $j \in N$有 $v_j(Y_j) > v_j(X_j)$，则称分配 X 为帕累托最优（PO）。等价地，我们称这样的分配不受任何其他分配的帕累托支配。

2 问题设定

为了证明我们的主要结果，我们必须定义几个关键概念。本节将给出必要的定义，并阐述分配结构的基本性质。它们构成了我们算法的基础。
本节中的大多数性质都未附上证明，以便读者更容易理解构造和算法本身。这些性质和命题的完整证明将在后续章节中给出。

输入预处理。我们的首要目标是使输入数据更便于处理，并使其反映实际的分配属性。

用 n 表示代理人的数量，用 m_1 和 m_2 分别表示第一类和第二类物品的总数量。自然地，我们假设 $n \geq 1$ 且 $m_1, m_2 \geq 1$。代理人用 $[n]$ 中的整数编号标识。对于$i \in [n]$、$j \in [2]$，令 $v_{i,\ j}$ 表示代理人 i 对一件类型 j 商品的效用估值。

接下来，我们将代理人分为两组。第一组由代理人 i 组成，他们满足$v_{i,\ 2} \leq v_{i,\ 1}$（即偏好类型1商品而非类型2商品，或认为两者价值相等的代理人）；第二组由代理人 i 组成，他们满足 $v_{i,\ 2} \geq v_{i,\ 1}$[1]。请注意，代理人的分组方式可能不止一种，可任意选择一种。令 n_1，n_2 表示所得的两组人数。如果出现 $\frac{m_1}{n_1} < \frac{m_2}{n_2}$，我们就交换商品类型和分组（这就是我们对称地定义分组的原因）。于是，不等式 $\frac{m_1}{n_1} \geq \frac{m_2}{n_2}$ 成立。如果 $n_2 = 0$，我们认为 $\frac{m_2}{n_2} = \infty$。这尤其意味着 $n_2 > 0$。
我们假设 $v_{i,\ j} > 0$ 对每个 $i \in [n]$，$j \in [2]$ 都成立，正如引言中所述。然后，我们对代理人效用进行标准化：对每个代理人 $i \in [n]$，将 $(v_{i,\ 1},\ v_{i,\ 2})$ 替换为 $(1,\ v_{i,\ 2}/v_{i,\ 1})$。最后，我们重新编号代理人，使得对每个 $i \in [n-1]$，$v_{i,\ 2} \leq v_{i+1,\ 2}$ 成立。根据 n_1 和 n_2 的定义，我们有：$\forall i \in [n_1]$：$v_{i,\ 2} \leq 1$，且$v_{n_1+1,\ 2} \geq 1$。

对我们后续构造至关重要的另一点 是物品总数至少与代理人数相等。

观察 1. 如果 $m_1 + m_2 \leq n$，则给每个满足 $i \leq m_1$ 的代理人 i 分配一件第一类商品。给每个满足 $i \geq n - m_2 + 1$ 的代理人 i 分配一件第二类商品。该分配是 *EFX* 且帕累托最优。

证明。观察到的分配 X 显然是 EFX，因为每位代理人最多获得一件商品。

[1]我们在此不使用$v_{i,\ 2} > v_{i,\ 1}$，这是有意为之。

要证明该分配是帕累托最优，反设并不存在这样的情况，即存在一个分配 Y 帕累托支配X。首先，如果某位代理人在 X 中获得了一件物品（其在 X 中的效用为正），那么他在 Y中至少也应获得一件物品。因此，在 Y中，每位代理人最多获得一件物品。 Y中所有代理人的总效用等于$|S_1| + \sum_{i\in S_2} v_{i,\ 2} = m_1 + \sum_{i\in S_2} v_{i,\ 2}$，其中， S_1和 S_2分别是 Y中获得类型1商品和类型2商品的代理人编号集合。

一旦 Y帕累托支配 X， X 中所有代理人的总效用就应小于 $m_1 + \sum_{i\in S_2} v_{i,2}$。这是不可能的，因为 $\sum_{i\in S_2} v_{i,2}$ 的上界为 $\sum_{i=n-m_2+1}^{n} v_{i,2}$，也就是 X 中第二类物品提供的总效用。

□

我们现在可以总结对输入的限制；输入经过预处理后，这些限制都成立。具体如下。

预处理输入限制

- 对于每个 $i \in [n]$, $v_{i,1} = 1$和 $v_{i,2} > 0$;
- 对于每个 $i \in [n-1]$, $v_{i,2} \le v_{i+1,2}$;
- $n_1 + n_2 = n$ 以及 $v_{n_1,2} \le 1$ 和 $v_{n_1+1,2} \ge 1$;
- $m_1/n_1 \ge m_2/n_2$ 和 $m_2 > 0$ 和 $n_2 > 0$;
- $m_1 + m_2 \ge n$。

在本文其余部分中，我们始终假设输入满足上述约束条件。如果这些约束条件不满足，我们的结果可能不成立。

适当分配。 在我们的工作中，所有构造出的分配都实现了帕累托最优性，包括中间分配（可能并非 EFX）以及最终分配（必然满足 EFX）。我们的所有分配都属于下文给出的概念。

定义3(适当 分配)。 物品 $\{(x_{i,1},x_{i,2})\}$ 若满足以下条件，则称为适当 $t \in [n]$，使得 at

- for each $i \in [t-1]$, $x_{i,2} = 0$, and
- for each $i \in [t+1, n]$, $x_{i,1} < v_{t,2}$.

例如，观察 1 中的分配是适当的（选择 $t = m_1$）。如上所述，我们将证明所有适当的分配都是帕累托最优，具体表述如下。

定理 1. 如果分配是适当的，那么它就是帕累托最优。

优先公平分配。 以下概念是我们构造分配的基础。它正式定义了如何将相同的物品在特定代理人之间（几乎）均等地分配，同时让某些特定代理人获得较大的份额。

下面的概念正式定义了这一过程。请注意，我们用它来进行物品的部分分配，而完整分配则通过连续执行若干次部分分配来完成。

定义 4（优先公平分配，PEA）。 对于整数 $c \in [2], q \in [m_t], s \in [n]$，以及由不同代理人组成的序列 $a_1, a_2, \ldots, a_s \in [n]$，如果我们将 q 个类型为 c 的商品公平优先分配给代理人 $a_1, a_2, \ldots, a_s$，则称

- 对于每个 $i \in [s]$，代理人 a_i 获得类型为 c 的 $\lfloor q/s \rfloor$ 或 $\lceil q/s \rceil$ 件物品；
- 对于每个 $1 \le i < j \le s$，代理人 a_j 获得的类型为 c的物品至少与 a_i一样多。

等价地，如果将 q件类型为 c的物品公平优先分配给代理人 s a_1，a_2，……，a_s，且 r是 q除以 s所得的余数，那么代理人 a_1，a_2，……，a_{s-r}每人获得 $\lfloor q/s \rfloor$ 件物品，而代理人 a_{s-r+1}，……，a_s每人获得 $\lceil q/s \rceil$件物品。

分割分配。接下来介绍算法的核心分配构造——分割分配。简而言之，在分割分配中，只有指定的代理人 t（即“分割点”）可以同时获得两种类型的物品。代理人 $i < t$ 或代理人 $i > t$ 则分别只能获得第一类或第二类物品。

$(t,\ k)$-分割分配作为 PEA 和		
Type (c)	数量 (q)	代理序列 $(a_1, \ldots, a_s)$
2	k	t
2	$m_2 - k$	$t+1, \ldots, n$
1	$\min\{m_1, \lceil kv_{t,2} \rceil \cdot (t-1)\}$	$1, \ldots\ldots, t-1$
1	$\max\{m_1 - \lceil kv_{t,2} \rceil \cdot (t-1)\}$	$1, \ldots, t$

表 2：将 (t, k)-分割分配表示为一系列优先公平分配。

分割分配由两个整数唯一确定：$t \in [n]$ 和 $k \in [m_2]$ ——分配给代理人 t 的第二类物品数量。这些整数必须满足特定的约束条件。我们定义所有有效的整数对 $\mathcal{T} \subset [n] \times [m_2]$:

$$\mathcal{T} = \left\{ (t,k) : v_{t,2} \geq 1, t < n, k \leq \frac{m_2}{n-t+1} \right\} \cup \{(n, m_2)\}.$$

注意，$\mathcal{T}$不为空，因为 $n_2 > 0$ 和 $m_2 > 0$。现在我们给出分割分配的正式定义。

定义 5（分割分配）。对于 $(t,k) \in \mathcal{T}$，(t,k)-分割分配 定义为

1. 将 k 件第二类物品分配给代理人 t。2. 将剩余的 $m_2 - k$件第二类物品公平优先分配给代理人 $t+1$、$t+2$、……、n。3. 令 $p = \lceil k \cdot v_{t,\ 2} \rceil$。将 $\min\{p(t-1),\ m_1\}$ 件第一类物品公平优先分配给代理人 1、2、……、$t-1$。4. 将剩余的 $\max\{0, m_1 - p(t-1)\}$ 件第一类物品公平优先分配给代理人 1、2、……、t。

我们总结如下：$(t,\ k)$-分割分配可表示为表 2 中的一系列四次优先公平分配。请注意，如表 3 所示，代理人 t 可以获得 0 件第一类物品。

	1	……	$t-1$	t	$t+1$	……	n
1	$\lfloor \frac{m_1}{t-1} \rfloor$	……	$\lceil \frac{m_1}{t-1} \rceil$	0	0	$\ldots$	0
2	0	$\ldots$	0	k	$\lfloor \frac{m_2-k}{n-t} \rfloor$	$\ldots$	$\lceil \frac{m_2-k}{n-t} \rceil$

表 3：$m_1 \leq p(t-1)$的 (t,k)-分割分配的结构。i^{th} 列和 j^{th} 行中的数字等于$x_{i,j}$，即分配给代理人 i的类型为 j 的商品数量。

以下简单的观察解释了为什么分割分配是帕累托最优。

观察 2。对于每个$(t,k) \in \mathcal{T}$，(t,k)-分割分配是恰当的。

嫉妒方向。我们的算法会遇到若干分割分配。如果它遇到的分割分配中至少有一个满足 EFX，算法就不会出问题。

但是，如果 $(t,\ k)$-分割分配对 $(t,\ k) \in \mathcal{T}$ 不满足 EFX，我们能对嫉妒情况作何判断？我们将证明，我们对分割分配的设计使得在 $(t,\ k)$-分割分配中，代理人 $i < t$和代理人 $j > t$不可能同时嫉妒。下面给出形式化定义。

定义 6（左侧嫉妒（LE）和右侧嫉妒（RE）分配）。如果分配 X 不满足 EFX，且存在 $i,\ j$，使得代理人 j 嫉妒代理人 i 所获的$i < j$ $(i > j)$（至多相差任意一个物品），我们就称分配 X 为左嫉妒，或左嫉妒（*LE*）（右嫉妒，或 右嫉妒（*RE*））。

我们将证明，任何 $(t,\ k)$-分割分配都不可能在两个方向上都存在嫉妒。

定理 2。对于每个 $(t,k) \in \mathcal{T}$，(t,k)分割分配不能同时满足左嫉妒和右嫉妒。

分割分配有两种自然的“极端”情况。一种是（$n,\ m_2$）分割分配，其中所有第二类物品都分配给代理人 n。这种分配使第二类物品带来的总效用最大化。另一种情况是，第二类物品在分割分配中尽可能占据最靠左的位置。这种情况是（$t,\ \lfloor m_2/(n-t+1) \rfloor$）分割分配，其中 $t \in [n]$ 是满足 $v_{t,\ 2} \geq 1$ 和 $m_2 \geq n-t+1$ 的最小可能值（不存在满足 $t' < t$ 的（$t',\ k'$）$\in \mathcal{T}$）。遵循这一思路，我们定义分割分配的排序。

$(t,\ k)$-重新分配作为 PEA 和		
Type (c)	数量 (q)	代理序列 $(a_1, \ldots, a_s)$
2	k	t
2	$m_2 - k$	$t+1, \ldots, n$
1	$\lceil dv_{t,\ 2} \rceil \cdot (t-1)$	$1,\ \ldots\ldots,\ t-1$
1	$\lceil dv_{t,2} \rceil - p$	t
1	$m_1 - \lceil dv_{t,2} \rceil \cdot t + p$	$1, \ldots, \ell$ or $1,\ \ldots,\ t-1, t+1, \ldots, \ell, t$

表4：将（t, k）重新分配表示为一系列优先公平分配。

定义7(C　　完整的分割分配排序）。 集合 $\mathcal{T}$ 上的一个完整线性排序 $\prec$ 定义如下：

$$(t_1, k_1) \prec (t_2, k_2)$$

当且仅当 $t_1 < t_2$ 或 $t_1 = t_2$ 且 $k_1 > k_2$。

上述两种分割分配自然分别是关于 $\prec$的 $\mathcal{T}$中的最大元素和最小元素。关于嫉妒方向的第二个结果揭示了这两种极端分配具有特定的嫉妒方向（如果它们不是 EFX）。

定理 3。 设(t_L, k_L) 是关于 $\prec$的 $\mathcal{T}$ 中的最小元素。设(t_R, k_R) 是关于 $\prec$的 $\mathcal{T}$ 中的最大元素。以下两点均成立：

1. (t_L, k_L)-分割分配要么是 *EFX*，要么是左嫉妒，
2. (t_R, k_R)-分割分配要么是 *EFX*，要么是右嫉妒。

重新分配。 为了直观理解最后一个概念，假设所有分割分配都不是 EFX。那么定理 3 保证，(t_L, k_L)-分割分配和(t_R, k_R)-分割分配分别是左嫉妒和右嫉妒。由于所有分割分配要么是左嫉妒，要么是右嫉妒，因此应存在$(t, k) \in \mathcal{T}$，使得(t, k)-分割分配是左嫉妒，而其关于 $\prec$的直接后继$(t', k') \in \mathcal{T}$所对应的(t', k')-分割分配是右嫉妒。也就是说，(t, k)和(t', k')构成了“嫉妒方向变化”的一个点。

例如，可以是 $(t, k) \in \mathcal{T}$对于 $t < n$和 $k \geq 2$，以及 $(t, k-1) \in \mathcal{T}$，使得 (t, k)-分割分配为左嫉妒，而 $(t, k-1)$-分割分配为右嫉妒。

我们的最终分配构造会对这类 (t, k)-分割分配进行轻微变换，将第一类物品从 t 左侧的代理人重新分配给 t 右侧的代理人。现在我们正式定义这一构造（另见表4）。

定义8 ((t, k)-重新分配). 对于 $(t, k) \in \mathcal{T}$使得 $t < n$，且 (t, k)-分割分配 X 满足

$$m_1 \geq \lceil d \cdot v_{t,2} \rceil \cdot t - p,$$

其中 $p = \lceil k v_{t,2} \rceil$ 和 $d = x_{t+1,2} = \lfloor (m_2 - k)/(n - t) \rfloor$，$(t, k)$-重新分配 通过以下方式获得 b　　y

1. 从 X 开始，但从每位代理人那里取走所有第一类物品。
2. 令 $\ell \in [n]$ 为满足 $x_{\ell,\ 2} = d$ 的最大可能值。
3. 将$\lceil d \cdot v_{t,\ 2} \rceil$ 个第一类物品分给 $[t-1]$ 中的每位代理人。
4. 将$\lceil d \cdot v_{t,\ 2} \rceil - p$ 个第一类物品分给代理人 t。
5. 将剩余的 $m_1 - \lceil d \cdot v_{t,\ 2} \rceil + p$ 个第一类物品公平优先分配给：
   - 代理人 1、 2、.....、 ℓ，若情况为$\lceil dv_{t,\ 2} \rceil - p > (d-k) \cdot v_{t,\ 2}$；
   - 代理人1、2、.....、 $t-1, t+1$、.....、 ℓ, t，否则。

请注意，$(t,\ k)$-重新分配的定义对 $(t,\ k)$ 施加了额外的约束。我们将证明以下引理：如果 $(t,\ k)$ 对应于“嫉妒方向变化”这一点，则它满足这些约束（以及其他约束）。

引理 1. 设 (t,k)、$(t',k') \in \mathcal{T}$ 满足以下条件：(t,k)-分割分配是左嫉妒的，而 (t',k')-分割分配是右嫉妒的。此外，不存在满足 $(t,k) \prec (t'',k'') \prec (t',k')$ 的 $(t'',k'') \in \mathcal{T}$。那么 $t < n$ 和

$$\lceil x_{t+1,2} \cdot v_{t,2} \rceil \cdot t - \lceil k v_{t,2} \rceil + 1 \leq m_1 \leq \lceil x_{t+1,2} \cdot v_{t,2} \rceil \cdot t - \lceil (k-1) v_{t,2} \rceil.$$

我们最后的红黑大战 结果如下定理所示。结合引理 1，可得到一个 EFX+帕累托最优分配。

定理 4. 设 X 是某个 $(t,k) \in \mathcal{T}$ 的 (t,k)-重新分配。如果

$$m_1 \leq \lceil x_{t+1,2} \cdot v_{t,2} \rceil \cdot t - \lceil (k-1) \cdot v_{t,2} \rceil,$$

那么 X 是 *EFX*+帕累托最优。

如本节前文所述，帕累托最优性可由以下事实推出：任意 (t,k)-重新分配都是适当的。我们将在定理 4 的证明中证明这一事实。

3 算法

我们将上一节的构造及其性质归纳为一种构造所需分配的算法。特别是，该算法证明：只要所有代理人的效用均为正，两类物品总是存在 EFX+PO 分配。

算法 1： 在预处理输入上构造 EFX+PO 分配的算法。

$t_L \leftarrow$ 满足 $(t_L, *) \in \mathcal{T}$ 的 $[n]$ 中最小的整数;
$X_L \leftarrow$ （t_L，$\lfloor \frac{m_2}{n-t_L+1} \rfloor$）-分割分配;
若 X_L 是 ***EFX*** **则返回** X_L;
$t_R \leftarrow n$;
$X_R \leftarrow$ （t_R，m_2）-分割分配;
如果 X_R 是 ***EFX*** **则返回** X_R;
/* 二分搜索以找到 t */
当 $t_R - t_L > 1$ **时**
    $t_M \leftarrow \lfloor (t_L + t_R)/2 \rfloor$;
    $X_M \leftarrow$ （t_M，$\lfloor \frac{m_2}{n-t_M+1} \rfloor$）-分割分配;
    如果 X_M 是 ***EFX***，**则返回** X_M;
    如果 X_M 是左嫉妒，**则** $t_L \leftarrow t_M$，**否则** $t_R \leftarrow t_M$;
$t \leftarrow t_L$ 且 $k_L \leftarrow \lfloor \frac{m_2}{n-t+1} \rfloor$ 且 $k_R \leftarrow 1$;
如果 （t，k_R）-分割分配为右嫉妒 **则**
    /* 二分搜索以查找 k */
    当 $k_L - k_R > 1$ **时执行**
        $k_M \leftarrow \lfloor (k_L + k_R)/2 \rfloor$;
        $X_M \leftarrow$ （t，k_M）-分割分配;
        如果 X_M 是 ***EFX***，**则返回** X_M;
        如果 X_M 是左嫉妒，**则** $k_L \leftarrow k_M$，**否则** $k_R \leftarrow k_M$;
    $k \leftarrow k_L$;
否则
    $X_R \leftarrow$ 该（t，k_R）-分割分配;
    如果 X_R 满足 ***EFX*** **则返回** X_R;
    /* 左嫉妒在（t，k_R）与（$t+1$，$\lfloor m_2/(n-t) \rfloor$）之间变为右嫉妒 */
    $k \leftarrow k_R$;
返回该 (t,k) 重新分配。

定理 5. 给定预处理后的输入，可在 $\mathcal{O}(\log n + \log m)$ 时间内找到一个 *EFX*+帕累托最优分配。

证明。 我们提出一种基于分割分配的嫉妒方向的算法。其伪代码见算法 1，证明过程中我们将引用算法各行。

首先，我们需要解释为什么该算法能够在对数时间内运行，因为仅仅输出一个分配（$2n$个整数）就需要线性时间。接下来的命题将说明这是为何可行；此外，我们甚至可以在常数时间内判断一个分割分配是否满足 EFX。

命题 1. 给定 $(t,k) \in \mathcal{T}$，我们可以在 $\mathcal{O}(1)$ 时间内判断该 (t,k)-分割分配是否满足 *EFX*、左嫉妒或右嫉妒。

命题 *1* 的证明。 根据分割分配的定义，在 $(t,\ k)$-分割分配 X 中，代理人收到的不同物品束有 $b \le 5$ 个。此外，代理人编号中有 b 个连续区段 $[a_1, a_2-1]$，$[a_2, a_3-1]$，……，$[a_b, n]$，其中 $a_1 = 1$ 且 $a_1 < a_2 < \ldots < a_b$。同一区段内的代理人收到的物品束完全相同。注意，按照定义 5，可以根据 $(t,\ k)$ 在 $\mathcal{O}(1)$ 时间内轻松计算出 b 和 a_1，a_2，……，a_b，物品束本身也可以如此计算。

此外，如果代理人 i 对代理人 j 存在嫉妒（至多涉及任意一件物品），且代理人 $i-1$、i、$i+1$ 收到完全相同的物品束，那么代理人 $i-1$ 对代理人 j 或代理人 $i+1$ 对代理人 j 存在必要嫉妒（至多涉及任意一件物品）。

要看出最后一段，假设代理人 i 嫉妒代理人 j，且嫉妒程度达到除去任意一件物品为止。等价地，存在一组整数$z_1,\ z_2 \in \{0,1\}$ 使得 $z_1 + z_2 = 1$ 且 $z_c \le x_{j,\ c}$，并且

$$x_{i,1} + x_{i,2} \cdot v_{i,2} < (x_{j,1} - z_1) + (x_{j,2} - z_2) \cdot v_{i,2},$$

或者，等价地，

$$x_{i,1} - x_{j,1} + z_1 < (x_{j,2} - x_{i,2} - z_2) \cdot v_{i,2}. \tag{1}$$

由于 $v_{i-1,\ 2} \le v_{i,\ 2} \le v_{i+1,\ 2}$ 且 $x_{i-1,\ c} = x_{i,\ c} = x_{i+1,\ c}$ 对每个 $c \in [2]$ 都成立，因此若将 i 替换为 $i+1$（若右侧非负），或替换为 $i-1$（若右侧为负），则式 (1) 成立。等价地，要么代理人 $i+1$ 嫉妒代理人 j，且嫉妒程度达到除去任意一件物品为止，要么代理人 $i-1$ 嫉妒代理人 j，且嫉妒程度达到除去任意一件物品为止。

由此可知，无需检查编号为 $a_s < i < a_{s+1} - 1$ 的代理人 i 是否嫉妒其他代理人（且嫉妒程度达到除去任意一件物品为止）。我们只需检查编号属于 $\{a_1, a_2 - 1, a_2, \ldots, a_{b-1}, a_b, n\}$. 的代理人。 X 中有 b 个不同的物品束，因此对每个代理人，我们需要进行 $b-1$ 次比较（检查代理人 i 是否嫉妒拥有这一特定物品束的代理人）。

总共只需进行 $2b(b-1)$ 次代理人与物品束之间的比较。每次比较都在常数时间内完成。」

接下来我们描述算法本身。算法首先计算定理 3 陈述中的 t_L（第 1 行）。由于

$$t_L = \max\{\min\{t \in [n] : v_{t,2} \ge 1\}, n - m_2 + 1\},$$

t_L 通过对 $(v_{1,\ 2},\ v_{2,\ 2},\ \ldots\ldots,\ v_{n,\ 2})$ 进行下界二分搜索，可在 $\mathcal{O}(\log\ n)$ 时间内求得。

定理 3 陈述中的其他整数可在 $\mathcal{O}(1)$ 时间内计算，算法会检查 $(t_L,\ k_L)$-分割分配或 $(t_R,\ k_R)$-分割分配是否满足 EFX（第 2–5 行）。如果算法没有在此处返回，根据定理 3，我们知道这些分配分别满足左嫉妒和右嫉妒。

然后，算法尝试寻找满足引理 1 的 $(t,\ k) \in \mathcal{T}$。这通过两次二分搜索完成。第一次二分搜索中，算法找到 t；第二次中，算法找到 k（已知 t 的情况下）。在这些搜索过程中，算法可能会遇到满足 EFX 的分割分配。如果发生这种情况，算法将该分配作为最终答案返回。

接下来讨论第一次二分搜索。为执行此次搜索，算法将 t_L 和 t_R 作为二分搜索边界，并相应地调整它们，直到达到 $t_R - t_L = 1$。算法维持以下不变量：$(t_L,\ \lfloor m_2/(n - t_L + 1) \rfloor)$-分割分配是左嫉妒，而 $(t_R,\ \lfloor m_2/(n - t_R + 1) \rfloor)$-分割分配是右嫉妒。在二分搜索的每次迭代中，算法取 t_M 作为 t_L 和 t_R之间的中点，检查 $(t_M,\ \lfloor m_2/(n - t_M + 1) \rfloor)$-分割分配是否为 EFX、左嫉妒或右嫉妒，并据此返回正确的分配、令 t_L 等于 t_M，或令 t_R 等于 t_M（第 8–11 行）。

二分搜索结束后，算法令 $t := t_L$。我们知道，所需的“嫉妒方向变化”点的形式为 $(t,\ k)$，其中整数 k 介于 $\lfloor m_2/(n - t + 1) \rfloor$ 和 1 之间（因为相对于 $\prec$，$(t,\ 1)$ 的后继是右嫉妒）。如果 $(t,\ 1)$ 是右嫉妒分配，那么算法会以与第一次二分搜索完全相同的方式，在 k 上从 $k_L = \lfloor m_2/(n - t + 1) \rfloor$ 和 $k_R = 1$ 开始执行二分搜索（第 14–18 行）。与第一次二分搜索相比，唯一的细微差别是，根据 $\prec$ 的定义，使用的是 $k_L > k_R$（而非 $k_L < k_R$）。

如果（$t,\ 1$）-分割分配不左嫉妒，那么它要么是 EFX（并构成正确的解），要么 $k = 1$ 是引理 1（第 21–23 行）的可行选择。

在这两种情况下中的任一种情况下，算法都会找到对引理 1 可行的 $(t,\ k)$（或者遇到 EFX 分割分配并提前返回）。算法构造 $(t,\ k)$-重新分配，并将其作为最终解返回（第 24 行）。根据定理 4，该分配是 EFX+帕累托最优。

与分割分配类似，$(t,\ k)$-重新分配可在 $\mathcal{O}(1)$ 时间内找到，因为分配给代理人连续区段的物品束数量至多为常数。□

4 适当分配的帕累托最优性

本节证明定理 1：任何适当分配（定义3）都是帕累托最优的。

我们先给出以下简单引理，它允许对帕累托支配分配施加自然的限制。

引理2. 设 $X = \{(x_{i,1},x_{i,2})\}$ 是一个物品分配。如果 X 不是帕累托最优的，则存在一个帕累托支配的物品分配 $Y = \{(y_{i,1},y_{i,2})\}$，使得对于每个 $i \in [n], j \in [2]$

$$\Delta_{i,1} \cdot \Delta_{i,2} \leq 0,$$

其中 $\Delta_{i,j} = y_{i,j} - x_{i,j}$。

证明。采用反证法。设 X 为给定的（非帕累托最优）分配，并假设不存在满足引理陈述的分配Y。于是，设 Y为一个帕累托支配 X的分配，且其可能的最小

$$\sum_{i\in[n],j\in[2]} |\Delta_{i,j}|.$$

根据我们的假设，存在 $i^* \in [n]$ 使得 $\Delta_{i^*,\ 1} \cdot \Delta_{i^*,\ 2} > 0$. 如果 $\Delta_{i^*,\ 1},\ \Delta_{i^*,\ 2} < 0$均成立，那么代理人 i^*在 X 中的效用至少为 $\sum_{j\in[2]} |\Delta_{i^*,\ j}| \cdot v_{i^*,\ j} > 0$ 高于其在 Y中的效用，而这是不可能的。

因此，我们有 $\Delta_{i^*,\ 1},\ \Delta_{i^*,\ 2} > 0$。由于 $\sum_{i\in[n]} \Delta_{i,\ 1} = 0$，存在 $k^* \in [n]$ 使得 $\Delta_{k^*,\ 1} < 0$ 现在，通过在 Y 中将恰好一个类型1物品从代理人 i^* 转移给代理人 k^*，构造另一个分配 Y'。

形式化地，我们定义 $\Delta'_{i^*,1} = \Delta_{i^*,1} - 1 \geq 0$ 和 $\Delta'_{k^*,1} = \Delta_{k^*,1} + 1$。对于其他每个 $i \in [n], j \in [2]$，我们令$\Delta'_{i,\ j} = \Delta_{i,j}$。那么，$Y' = \{(y'_{i,1},y'_{i,2})\}$ 由 $y'_{i,j} = x_{i,j} + \Delta'_{i,j}$ 给出，定义方式与 Y和 Δ类似。注意，Y'是成立的，因为对于每个 $i \in [n], j \in [2]$，都有$y'_{i,j} \geq 0$，并且对于每个 $j \in [2]$，都有$\sum_{i\in[n]} \Delta'_{i,j} = 0$。

我们声称 Y'帕累托支配 X。为此，注意在 Y'中效用低于在 Y中的唯一代理人是代理人 i^*。因此，我们只需验证在 Y'中，i^* 获得的效用仍高于在 X中的效用。事实上，这些效用之差至少为

$$\sum_{j\in[2]} \Delta'_{i^*,j} \cdot v_{i^*,j} \geq \Delta'_{i^*,2} \cdot v_{i^*,2} = \Delta_{i^*,2} \cdot v_{i^*,2} > 0.$$

因此，Y'帕累托支配 X，但$\sum |\Delta'_{i,\ j}| = \sum |\Delta_{i,\ j}| - 2$. 这与最初对 Y的选择相矛盾. □

借助引理2，我们继续证明任何适当分配都是帕累托最优。

定理 *1* 的证明。设 X 是一个适当分配，其中代理人 i 分别获得$x_{i,\ 1},\ x_{i,\ 2}$种类型1和类型2的物品，对每个 $i \in [n]$均如此。根据定义3，设 $t \in [n]$ 为所保证的整数：t 满足对于每个$i \in [t-1]$ $x_{i,\ 2} = 0$，并且对于每个 $i \in [t+1, n]$，有$x_{i,\ 1} < v_{t,\ 2}$。

为导出矛盾，假设 X 不是帕累托最优，并且存在一个分配 $Y = \{(y_{i,\ 1},\ y_{i,\ 2})\}$，该分配帕累托支配 X 并满足引理2。我们使用$\Delta_{i,\ j} = y_{i,\ j} - x_{i,\ j}$。对于每个 $i \in [n]$，有$\Delta_{i,\ 1} \cdot \Delta_{i,\ 2} \leq 0$。

对于每个 $j \in [2]$，定义 $I_j = \{i : \Delta_{i,\ j} > 0\}$，也就是说，$I_j$ 是一组代理人，他们在 Y 中获得了类型 j 的额外物品（与 X 相比）。在证明矛盾之前，我们先证明关于 $\Delta_{i,\ j}$的性质的两个有用命题。这两个命题共同表明，两种类型的交换物品数量之比与 $v_{t,\ 2}$有关。

命题2。成立

$$\sum_{i\in I_1} \Delta_{i,1} \geq v_{t,2} \cdot \sum_{i\in I_1} (-\Delta_{i,2}).$$

如果某个代理人 $i \in I_1$ 在 Y 中的效用严格高于其在 X 中的效用，则该不等式为严格不等式。

命题*2*的证明。考虑任意代理人 $i \in I_1$。其在 Y中的效用不低于在 X中的效用，因此 $\Delta_{i,\ 1} \cdot v_{i,\ 1} + \Delta_{i,\ 2} \cdot v_{i,\ 2} \geq 0$，等价地，$\Delta_{i,\ 1} + \Delta_{i,\ 2} \cdot v_{i,\ 2} \geq 0$。若其在 Y中的效用严格更高，则该不等式为严格不等式。

若 $\Delta_{i,\ 2} = 0$，则 $\Delta_{i,\ 1} \geq 0$，且 $\Delta_{i,\ 1} \geq -\Delta_{i,\ 2} \cdot v_{t,\ 2}$ 成立。若 $\Delta_{i,\ 2} < 0$，则 $x_{i,\ 2} > 0$，且根据 t 的定义，我们有$i \geq t$。因此，$v_{i,\ 2} \geq v_{t,\ 2}$。然后得到

$$\Delta_{i,1} \geq -\Delta_{i,2} \cdot v_{i,2} \geq -\Delta_{i,2} \cdot v_{t,2}.$$

对所有 $i \in I_1$求和即可得出该命题的第一部分。

为证明该命题的第二部分，注意到对于在 Y中效用更高的 $i \in I_1$，$\Delta_{i,1} > -\Delta_{i,2} \cdot v_{t,2}$ 是严格的。因此，所得的和不等式也变为严格不等式。证明完毕。」

第二个命题通过不同的论证给出了一个对称的下界。

命题3。成立

$$\sum_{i \in I_2} \Delta_{i,2} \geq \frac{1}{v_{t,2}} \cdot \sum_{i \in I_2} (-\Delta_{i,1}).$$

若某个代理人 $i \in I_2$ 在 Y 中的效用严格高于在 X中的效用，则该不等式为严格不等式。

命题3的证明。[考虑一位代理人 $i \in I_2$。与前一个命题的证明类似，只需证明$\Delta_{i,2} \geq -\Delta_{i,1}/v_{t,2}$。

我们根据 $i \leq t$ 是否成立分为两种情况。如果 $i \leq t$，那么$v_{i,\ 2} \leq v_{t,\ 2}$。虽然代理人 i 在 Y中的效用不低于在 X中的效用，但我们有 $\sum_{j \in [2]} \Delta_{i,\ j} \cdot v_{i,\ j} \geq 0$，因此

$$\Delta_{i,2} \cdot v_{t,2} \geq \Delta_{i,2} \cdot v_{i,2} \geq -\Delta_{i,1} \cdot v_{i,1} = -\Delta_{i,1}$$

正如所需。

剩下的情况是 $i > t$。根据 t 的定义， $x_{i,1} < v_{t,2}$。由于$\Delta_{i,2} > 0$，因此成立$\Delta_{i,1} \leq 0$，且 $0 \leq y_{i,1} \leq x_{i,1} <v_{t,2}$。于是 $-\Delta_{i,1} = x_{i,1} - y_{i,1} < v_{t,2}$。最后，我们知道 $\Delta_{i,2} \geq 1$，且 $\Delta_{i,2} \geq -\Delta_{i,1}/v_{t,2}$ 随之成立。至此完成了第一部分命题的证明。

第二部分与命题2的证明相同。如果至少有一个 $i \in I_2$ 的效用严格更高，那么对 i 的这一选择会导致严格的 $\Delta_{i,\ 2} > -\Delta_{i,\ 1}/v_{t,\ 2}$，从而得到的总和也严格更高。」

结合命题2和命题3，注意到根据$\Delta_{i,j}$的定义，对于每个 $j \in [2]$，都有$\sum_{i \in [n]} \Delta_{i,j} = 0$。根据$I_j$ 的定义，并且由于 Y 帕累托支配 X，对于每个 $i \in [n] \setminus (I_1 \cup I_2)$，都有$\Delta_{i,1} = \Delta_{i,2} = 0$。因此，对于每个$j \in [2]$，都有

$$\sum_{i \in [n]} \Delta_{i,j} = \sum_{i \in I_1} \Delta_{i,j} + \sum_{i \in I_2} \Delta_{i,j},$$

and

$$-\sum_{i \in I_j} \Delta_{i,j} = \sum_{i \in I_{3-j}} \Delta_{i,j}.$$

将此代入命题2（对于 $j = 1$）和命题3（对于 $j = 2$）右侧的部分，我们得到 n

$$\sum_{i \in I_1} \Delta_{i,1} = v_{t,2} \cdot \sum_{i \in I_2} \Delta_{i,2},$$

命题2和命题3都不可能给出严格不等式。这意味着不存在代理人 $i \in I_1 \cup I_2$ 在 Y中的效用高于其在 X中的效用。

但是， Y帕累托支配 X，因此存在某个代理人 $i^* \in [n] \setminus (I_1 \cup I_2)$，其效用严格更高。然而，该代理人同时满足$\Delta_{i^*,1} \leq 0$ 和$\Delta_{i^*,\ 2} \leq 0$，也就是说，与 X相比，他在 Y中没有获得任何新物品，而且他在 Y中的效用不会高于其在 X中的效用。由此得到的矛盾完成了该定理的证明。 □

分割分配中的 5 个嫉妒方向

本节致力于研究分割分配中嫉妒（至多相差任意一个物品）和嫉妒方向的性质。我们的主要目标是证明定理 2 和定理 3，这两项定理是我们的算法的基础。

Bef在继续之前，我们以数值形式表述分割分配，以便在整个证明过程中引用 .

定义 9（拆分分配的数值定义）。对于 $(t,\ k) \in \mathcal{T}$，$(t,\ k)$-分割分配 $\{(x_{i,\ 1},\ x_{i,\ 2})\}$ 定义为

$$x_{i,2} = \begin{cases} 0, \text{if } i < t, \\ k, \text{if } i = t, \\ q_2, \text{if } t < i < n - r_2, \\ q_2 + 1, \text{if } i > n - r_2, \end{cases}$$

其中 $m_2 - k = q_2(n-t) + r_2$ 对于 $0 \le r_2 < n - t$，而对于 $p = \lceil k \cdot v_{t,\ 2} \rceil$，

(a) 在 $m_1 < p(t-1)$ 的情况下，

$$x_{i,1} = \begin{cases} 0, \text{if } i \ge t, \\ q_1, \text{if } i \le t - 1 - r_1, \\ q_1 + 1, \text{if } i \in [t - r_1, t - 1], \end{cases}$$

其中 $m_1 = q_1 \cdot (t-1) + r_1$ 对于 $0 \le r_1 < (t-1)$，

(b) 在 $m_1 \ge p(t-1)$ 的情况下，

$$x_{i,1} = \begin{cases} 0, \text{if } i > t, \\ q_1, \text{if } i = t \text{ and } r_1 = 0, \\ q_1 + 1, \text{if } i = t \text{ and } r_1 > 0, \\ p + q_1, \text{if } i \le \min\{t - r_1, t - 1\}, \\ p + q_1 + 1, \text{if } i \in [t - r_1 + 1, t - 1], \end{cases}$$

其中 $m_1 - p(t-1) = q_1 \cdot t + r_1$ 对于 $0 \le r_1 < t$。

我们先介绍一系列引理。第一个简单的引理表明，在 $(t,\ k)$-分割分配中，排在 t 之前的代理人之间不会互相嫉妒，排在 t 之后的两个代理人之间也不会互相嫉妒。

引理 3. 设 X 是针对$(t,k) \in \mathcal{T}$的(t,k)分割分配。如果代理人 $i < j$ in$X$ 之间对 $i,j \in [n]$存在嫉妒（即使移除任意一个物品后仍然嫉妒），那么 $i \le t$ and $j \ge t$。

证明。采用反证法。假设 X 不是 EFX，并且代理人 i与代理人 j 之间存在嫉妒（即使移除一个物品后仍然嫉妒），其中 $i < j$ in X，但 $i > t$或 $j < t$ 成立。

考虑 $j < t$ 的情况。根据分割分配的定义，对于每个 $i,j \in [t-1]$，都有$|x_{i,1} - x_{j,1}| \le 1$，而$x_{i,2} = x_{j,2} = 0$。因此，代理人 i 与代理人 j 之间不可能存在嫉妒（即使移除一个物品后仍然嫉妒），因为他们的物品束最多相差一个物品。

那么情况应为 $i > t$。同理，在任意 $i,j \in [t+1,n]$ 对应的 (t,k)-分配 X 中，我们有$|x_{i,2} - x_{j,2}| \le 1$ 以及 $x_{i,1} = x_{j,1} = 0$。若 $i,j > t$，代理人 i 与代理人 j 之间不可能存在嫉妒。证明完毕。 □

下一个引理将 左侧嫉妒（LE）的分割分配限制在分割分配定义 9 中的情形（b） s.

引理 4. 设 X 是(t,k)-分割分配，对应于$(t,k) \in \mathcal{T}$。若 X 左嫉妒，则 $m_1 \ge p \cdot (t-1)$，其中 $p = \lceil k \cdot v_{t,\ 2} \rceil$。

证明。为导出矛盾，假设 $m_1 < p(t-1)$，且 X 左嫉妒。也就是说，对于 X 中的 $i < j$，代理人 i 与代理人 j 之间存在（至多涉及任意一个物品的）嫉妒，且代理人 j 嫉妒代理人 i。根据引理 3，$i \le t$ 和 $j \ge t$。

共有三种可能的情况。第一种情况是当 $i < t$ 和 $j = t$时。根据分割分配的定义，我们有$x_{i,\ 1} \le \lfloor m_1/(t-1) \rfloor + 1$ 和 $x_{i,\ 2} = 0$，因此 $x_{i,\ 1} \le p$。代理人 t 恰好获得了 k 件第二类物品，因此$x_{t,\ 2} = k$。于是 $p = \lceil x_{t,\ 2} \cdot v_{t,\ 2} \rceil$，所以在 X 中，t 的效用至少为 $x_{t,\ 2} v_{t,\ 2} > p - 1$。如果从 i的物品束中任意移除一件物品（必定是第一类物品），那么所得物品束（以代理人 t的效用衡量）的效用恰好为 $(x_{i,\ 1} - 1) \le p - 1$。因此，代理人 t 不会嫉妒代理人 $i < t$。

下一种情况是当 $i < t$和 $j > t$时。根据 $(t,\ k)$-分割分配的定义，代理人 j至少获得 $\lfloor \frac{m_2-k}{n-t} \rfloor$件第二类物品，因此

$$\begin{aligned} x_{j,2} &\geq \left\lfloor \frac{m_2-k}{n-t} \right\rfloor \\ &\geq \left\lfloor \frac{m_2-m_2/(n-t+1)}{n-t} \right\rfloor \\ &= \left\lfloor \frac{m_2}{n-t+1} \right\rfloor \geq k = x_{t,2}, \end{aligned}$$

其中上界 由 $(t,k) \in \mathcal{T}$ 可得。也就是说，代理人 j 获得的第二种 d
类型物品至少与代理人 t一样多。于是 j 无法像前一种情况那样嫉妒 i。

剩下的情况是当 $i = t$ 和 $j > t$。根据 X的定义， $x_{t,1} = 0$。另一方面， $x_{j,2} \geq x_{t,2}$，如前一种情况所述。因此，代理人 j 拥有的每种类型的物品都与代理人 t 拥有的一样多。代理人 j 不会嫉妒代理人 t。

所有情况均已穷尽。由此得到的矛盾完成了证明。 □

系列中的最后一个引理说明， $m_1 \geq p(t-1)$ 也排除了任意代理人 $i < t$ 与代理人 t之间的嫉妒。**引理 5**。 令 X 为(t,k) 下针对$(t,k) \in \mathcal{T}$的分割分配，并令 $p = \lceil k \cdot v_{t,2} \rceil$。若 $m_1 \geq p \cdot (t-1)$，则对于每个$i \in [t-1]$，在 X中代理人 i 与代理人 t 之间不存在嫉妒（即使允许移除任意物品）。

证明。 我们考虑两种嫉妒情况。在这两种情况下，我们都会得到矛盾。

代理人 i 嫉妒代理人 t。 第一种情况是代理人 i 嫉妒（即使允许移除任意物品）代理人 t。若 $x_{t,1} = 0$，则从i 到 t 的嫉妒等价于

$$x_{i,1} + (x_{i,2}+1) \cdot v_{i,2} < x_{t,2} \cdot v_{i,2}. \tag{2}$$

根据分割分配的定义，我们知道 $x_{i,1} \geq p$。根据 p的定义，我们知道 $x_{t,2} \cdot v_{i,2} \leq x_{t,2} \cdot v_{t,2} \leq p$。然后由 (2) 可得 $p < p$，这与假设矛盾。因此必有 $x_{t,1} > 0$。

于是， i 对 t的嫉妒等价于

$$x_{i,1} + x_{i,2} \cdot v_{i,2} + \min\{1, v_{i,2}\} < x_{t,1} + x_{t,2} \cdot v_{i,2}. \tag{3}$$

根据（$t,\ k$）-分割分配的定义（定义 9 情形（b））， 我们有 $x_{i,\ 1} \geq p + q_1$ 和 $x_{i,\ 2} = 0$，而$x_{t,\ 1} \leq q_1 + 1$。将这些与（3）结合，得到

$$(p+q_1) + 0 \cdot v_{i,2} + \min\{1, v_{i,2}\} < (q_1+1) + x_{t,2} \cdot v_{i,2},$$

并改写为

$$p + \min\{1, v_{i,2}\} < x_{t,2} \cdot v_{i,2} + 1. \tag{4}$$

使用 p的定义可得

$$p + \min\{1, v_{i,2}\} < x_{t,2} \cdot v_{i,2} + 1 \leq x_{t,2} \cdot v_{t,2} + 1 \leq p + 1.$$

因此，$v_{i,\ 2} \geq 1$ 是不可能的，所以我们有 $v_{i,\ 2} < 1$，根据（4）可得

$$p + v_{i,2} < x_{t,2} \cdot v_{i,2} + 1,$$

so

$$p < v_{i,2} \cdot (x_{t,2} - 1) + 1 < (x_{t,2} - 1) + 1 = x_{t,2}.$$

根据 p 的定义，我们得到 $x_{t,\ 2} \cdot v_{t,\ 2} < x_{t,\ 2}$，这与来源于（$t,\ k$）$\in \mathcal{T}$的 $v_{t,\ 2} \geq 1$ 相矛盾。代理人 i 嫉妒代理人 t 直至任意物品的情况是不可能的。我们继续讨论剩余的情况。

代理人 t 嫉妒代理人 i。 在这种情况下，代理人 t 对 i 在 X 中的嫉妒等价于

$$(x_{t,1}+1) + x_{t,2} \cdot v_{t,2} < x_{i,1}, \tag{5}$$

因为代理人 i 没有第二类物品。根据 $(t,\ k)$-分割分配 X 的定义，我们有 $x_{i,\ 1} - x_{t,\ 1} \leq p$（根据 i 和 r_1，我们可以得到 $p-1$ 或 p）。将此与 (5) 结合，得到

$$x_{t,2} \cdot v_{t,2} + 1 < p.$$

这与 p 的定义矛盾，因为 $p = \lceil x_{t,\ 2} \cdot v_{t,\ 2} \rceil \leq x_{t,\ 2} \cdot v_{t,\ 2} + 1$。

该情况的证明和引理已经完成。 □

我们现在可以证明关于分割分配中嫉妒方向的主要结果，即定理 2。为方便读者，我们先在此重述。

定理 2. 对于每个 $(t,k) \in \mathcal{T}$，(t,k)-分割分配不可能同时满足左嫉妒和右嫉妒。

证明. 为了导出矛盾，假设存在 $(t,k) \in \mathcal{T}$，使得 (t,k)-分割分配$X = \{(x_{i,1},x_{i,2})\}$ 同时满足左嫉妒和右嫉妒。

根据引理 4，我们知道对于 $p = \lceil x_{t,2} \cdot v_{t,2} \rceil$，$m_1 \geq p \cdot (t-1)$ 成立。特别地，X 来自定义 9 的情形（b）。然后，根据引理 5，任意代理人 $i \in [t-1]$ 和代理人 t 在 X中都不存在嫉妒（即使允许嫉妒一件物品）。因此，如果代理人 i 和代理人 j 在 X中存在嫉妒，其中 $i < j$，那么 $i \leq t$ 和 $j > t$必然成立。

在假设 X 同时是左嫉妒和右嫉妒的初始条件下，我们证明两个相互矛盾的命题。回顾一下，根据分割分配的定义 9，q_1和 r_1 是满足 $m_1 = q_1 \cdot (t-1) + r_1$的非负整数。同样，$q_2$和 r_2 是满足 $m_2 - k = q_2 \cdot (n-t) + r_2$的两个正整数。

第一个命题源于 X 是右嫉妒的。

命题 4. 以下两项均成立：

- *If* $r_1 > 0$, *then* $p + q_1 < q_2 \cdot v_{t,2}$.
- *If* $r_1 = 0$, *then* $v_{t,2} \cdot x_{t,2} + q_1 < q_2 \cdot v_{t,2}$.

命题 *4* 的证明。由于 X 是右嫉妒的，因此存在一个代理人 $i \in [t]$，其嫉妒某个代理人 $j \in [t+1,n]$（允许移除任意一件物品）。根据 $i < t$ 或 $i = t$，分为两种情况。

如果 $i < t$，那么代理人 i 没有第二类物品，而代理人 j 没有第一类物品。代理人 i对代理人 j 的嫉妒等价于 $x_{i,\,1} + 1 \cdot v_{i,\,2} < x_{j,\,2} \cdot v_{i,\,2}$。由定义 9 可知，$x_{i,\,1} \geq p + q_1$ 且 $x_{j,\,2} \leq q_2 + 1$。因此，$p + q_1 + v_{i,\,2} < (q_2+1) \cdot v_{i,\,2}$。由此可得 $p + q_1 < q_2 \cdot v_{i,\,2} \leq q_2 \cdot v_{t,\,2}$，因为 $v_{i,\,2} \leq v_{t,\,2}$。

我们知道，若 $i < t$，则 $p + q_1 < q_2 \cdot v_{t,\,2}$。由于 $p \geq k \cdot v_{t,\,2} = x_{t,\,2} \cdot v_{t,\,2}$，也可得出 $v_{t,\,2} \cdot x_{t,\,2} + q_1 < q_2 \cdot v_{t,\,2}$。因此，只要 $i < t$，命题的两部分便都成立。

现在 考虑代理人 t 嫉妒代理人 $j > t$（允许至多相差任意一件物品）的情况。这种嫉妒等价于

$$x_{t,1} + (x_{t,2} + 1) \cdot v_{t,2} < x_{j,2} \cdot v_{t,2}.$$

回忆一下，$x_{j,\,2} \leq q_2 + 1$ 并将上式改写为

$$x_{t,1} + x_{t,2} \cdot v_{t,2} < q_2 \cdot v_{t,2}. \tag{6}$$

若 $r_1 = 0$，则 $x_{t,\,1} = q_1$，于是（6）变为

$$x_{t,2} \cdot v_{t,2} + q_1 \leq q_2 \cdot v_{t,2},$$

这正是命题第一部分所要求的。

如果 $r_1 > 0$，则 $x_{t,\,1} = q_1 + 1$。然后，根据 $p < x_{t,\,2} \cdot v_{t,\,2} + 1$ 并结合（6）可得

$$p + q_1 < x_{t,2} \cdot v_{t,2} + 1 + q_1 \leq x_{t,1} + x_{t,2} \cdot v_{t,2} < q_2 \cdot v_{t,2}.$$

这证明了该命题陈述的第二部分。至此，命题的证明完成。 ⌟

第二个命题源于 X 是左嫉妒的。

命题 5。 以下两点均成立：

- 如果 $r_1 > 0$，则 $p + q_1 > q_2 \cdot v_{t,\,2}$。
- 如果 $r_1 = 0$，则 $v_{t,\,2} \cdot x_{t,\,2} + q_1 > q_2 \cdot v_{t,\,2}$。

命题 *5* 的证明。由于 X 是左嫉妒的，因此存在一位代理人 $j > t$ 嫉妒某位代理人 $i \in [t]$。根据 $i < t$还是 $i = t$，分为两种情况。

首先考虑 $i < t$的情况。于是，代理人 j 对代理人 i 的嫉妒等价于 $1 + x_{j,\ 2} \cdot v_{j,\ 2} < x_{i,\ 1}$。根据 X的定义，我们有 $x_{j,\ 2} \geq q_2$；并且由于 $j > t$，有 $v_{j,\ 2} \geq v_{t,\ 2}$。结合这些不等式，得到

$$q_2 \cdot v_{t,2} < x_{i,1} - 1. \tag{7}$$

如果 $r_1 > 0$，那么 $x_{i,\ 1} \leq p + q_1 + 1$。由此，（7）得出

$$q_2 \cdot v_{t,2} < p + q_1 + 1 - 1,$$

这实质上就是命题的第一部分。如果 $r_1 = 0$，那么 $x_{i,\ 1} = p + q_1$。结合以上结果、（7）和 $v_{t,\ 2} \cdot x_{t,\ 2} > p - 1$，可得

$$q_2 \cdot v_{t,2} < (p-1) + q_1 < v_{t,2} \cdot x_{t,2} + q_1.$$

情况 $i < t$的第二部分也得到了证明。

接下来考虑剩余的情况 $i = t$。此时，代理人 j 对代理人 t 的嫉妒可表示为 $1 + x_{j,\ 2} \cdot v_{j,\ 2} < x_{t,\ 1} + x_{t,\ 2} \cdot v_{t,\ 2}$。与前一种情况类似，将其改写为

$$q_2 \cdot v_{t,2} < (x_{t,1} - 1) + x_{t,2} \cdot v_{t,2}. \tag{8}$$

如果 $r_1 > 0$，$x_{t,\ 1} = q_1 + 1$。结合以上结果、（8）和 $p \geq x_{t,\ 2} \cdot v_{t,\ 2}$，可得命题的第一部分。如果 $r_1 = 0$，那么$x_{t,\ 1} = q_1$。结合（8）与 $x_{t,\ 1} = q_1$，可得

$$q_2 \cdot v_{t,2} < q_1 - 1 + x_{t,2} \cdot v_{t,2} < q_1 + x_{t,2} \cdot v_{t,2}.$$

$i = t$ 情况的证明以及整个命题均已完成。 ⌟

显然，命题 4 和命题 5 是相互矛盾的陈述，但在初始假设下二者均为真。由此得到的矛盾证明了该定理。 □

虽然定理 2 是我们的分割分配方法的基础，但定理 3 对关于 $\mathcal{T}$ 的二分搜索至关重要。由于篇幅限制，定理 3 的证明略去，详见附录。

证明。根据定理 2，只需证明 $(t_L,\ k_L)$-分割分配不是右嫉妒的（第一部分），并证明 $(t_R,\ k_R)$-分割分配不是左嫉妒的（第二部分）。

我们从该定理的第二部分开始证明。注意，根据 $\mathcal{T}$ 的定义，关于 $\prec$ 的 $\mathcal{T}$ 中的极大元素是 $(n,\ m_2)$。将 $(n,\ m_2)$-分割分配记为 X。为导出矛盾，假设 X 是左嫉妒的。于是存在 $i,\ j \in [n]$，使得 $i < j$，并且代理人 i 在 X 中嫉妒代理人 j。一方面，根据引理 3，有 $i \leq t$ 和 $j \geq t$。在我们的情况下，$t = n$，因此 $j = n$ 和 $i < n$。另一方面，根据引理 4 和引理 5 的结合，可知代理人 $i < n$ 与 $j = n$ 之间不存在嫉妒。这一矛盾证明了该定理的第二部分。

我们接下来证明该定理的第一部分。为方便起见，我们将 $\mathcal{T}$ 中最小的元素 (t_L, k_L) 简记为 (t, k)。根据 $\mathcal{T}$ 的定义，$t = t_L$ 是 $[n]$ 中满足以下条件的最小整数

- $v_{t,2} \geq 1$，且
- $m_2 \geq n - t + 1$。

那么，t 满足 $m_2 = n - t + 1$ 或 $t - 1 \leq n_1$（因为 $n_1 < n$ 且 $v_{n_1+1,2} \geq 1$，根据 n 的定义 $_1$).

那么 $k = k_L = \lfloor m_2/(n - t + 1) \rfloor$。我们将 (t, k)-分割分配记为 X。为证明该定理的第一部分，我们假设 X 是右嫉妒的，并以此导出一个矛盾。

根据我们的假设，存在 $i, j \in [n]$，使得 $i < j$，且代理人 i 在 X 中嫉妒代理人 j（最多相差任意一个物品）。根据引理 3，我们有 $i \leq t$ 和 $j \geq t$。我们根据 $i = t$ 或 $j = t$ 的情况分别讨论，在每种情况下都会得到矛盾。

代理人 $i < t$嫉妒一个人 $j = t$。在这种情况下，根据引理 5，我们有 $m_1 < p\ (t - 1)$。然后根据分割 t 分配，$x_{t,1} = 0$。 那么，代理人 i对代理人 t 的嫉妒（针对任意物品）等价于

$$x_{i,1} < (x_{t,2} - 1) \cdot v_{i,2}.$$

因此，根据 $v_{i,\ 2} \leq 1$，我们有 $x_{i,\ 1} < x_{t,\ 2} - 1 = k - 1$. 根据分割分配的定义，我们知道$x_{s,\ 1} \leq x_{i,\ 1} + 1$ 对于每个 $s \in [t-1]$，以及 $m_1 = \sum_{s \in [t-1]} x_{s,\ 1}$。 然后

$$(k-1)(t-1) \geq m_1,$$

因此 $k \geq 2$。这意味着 $m_2 > n - t + 1$，所以 $t - 1 \leq n_1$ 成立。最后得到

$$\frac{m_2}{n_2} = \frac{m_2}{n - n_1} \geq \frac{m_2}{n - t + 1} \geq k > \frac{m_1}{t-1} \geq \frac{m_1}{n_1}.$$

这与初始假设 $m_1/n_1 \geq m_2/n_2$矛盾。情况 $j = t$ 可排除。

在剩下的两种情况下，我们有 $j > t$。以下命题对这两种情况都很重要 .

命题 6. 对于每个 $j > t$, $x_{j,\ 2} - 1 \leq k$。命题 *6* 的证明。[根据分割分配的定义，我们知道$x_{j,\ 2} \leq \lceil (m_2 - k)/(n - t) \rceil$.

为了导出矛盾，假设

$$k < \left\lceil \frac{m_2 - k}{n - t} \right\rceil - 1. \tag{9}$$

如果 $m_2 - k$ 能被 $n - t$整除，那么

$$k < \frac{m_2 - k}{n - t} - 1,$$

and

$$(n-t) \cdot k < (m_2 - k) - (n - t),$$

so

$$(n - t + 1) \cdot k + (n - t) < m_2.$$

这与 k的定义矛盾。

那么， $m_2 - k$ 必定不能被 $n - t$整除。设 $r > 0$ 是 $m_2 - k$ 除以 $n - t$所得的余数。那么（9）变为

$$k < \left\lfloor \frac{m_2 - k}{n - t} \right\rfloor = \frac{m_2 - k - r}{n - t}.$$

将等式两边乘以（$n - t$），得到

$$(n-t) \cdot k < m_2 - k - r,$$

so

$$(n - t + 1) \cdot k < m_2 - r.$$

设 r' 是 m_2 除以（$n - t + 1$）所得的余数，则（$n - t + 1$） $\cdot k + r' = m_2$. 因此,

$$m_2 - r' < m_2 - r,$$

并且 $r' > r$. 根据 r' 和 r 的定义，我们有

$$((n - t + 1) \cdot k + r') - k = (n - t) \cdot q_2 + r,$$

so

$$r' - r = (n - t) \cdot (q_2 - k).$$

所有部分都是整数，因此 $r' - r$ 能被 $n - t$整除。因此， $r' - r \geq n - t$。由于 $r > 0$，它必定是$r' \geq n - t + 1$。这与 r'的定义矛盾。命题的证明到此结束。」

接下来讨论 i 与 j之间嫉妒的另外两种情况。

代理人 $i < t$ **嫉妒代理人** $j > t$。在这种情况下，我们有

$$x_{i,1} < (x_{j,2} - 1) \cdot v_{i,2}.$$

那么$x_{i,1} < x_{j,2} - 1 \leq k$，因为$v_{i,2} \leq 1$ 根据 $i < t \leq n_1 + 1$。注意，此时 X 并非定义 9 的情形（b），因为在情形（b）中，我们会有$x_{i,1} \geq p = \lceil v_{t,2} \cdot k \rceil \geq k$.

那么， X 是定义 9 中的情况 (a)。根据定义，所有第一类物品都分配给了 $[t-1]$ 中的代理人，因此

$$\sum_{s=1}^{t-1} x_{s,1} = m_1.$$

对于每个 $s \in [t-1]$，$x_{s,\,1} \le x_{i,\,1} + 1 \le k$，而 $x_{i,\,1} < k$。因此，$\sum_{s\in[t-1]} < k(t-1)$ 和 $k(t-1) > m_1$。回想一下，它要么是 $t-1 \le n_1$，要么是 $m_2 = n-t+1$。

若 $t-1 \le n_1$，则利用 $m_1/n_1 \ge m_2/n_2$ 和 $n_1+n_2=n$，得到

$$k > \frac{m_1}{t-1} \ge \frac{m_1}{n_1} \ge \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_2}{n-n_1} \ge \frac{m_2}{n-t+1}.$$

这与 k的定义矛盾。

若 $t-1 > n_1$，则 $m_2 = n-t+1$。于是 $k=1$ 和 $m_1 < k(t-1) = t-1$。因此 y,

$$m_1 + m_2 < (t-1) + (n-t+1) = n.$$

这与初始设定矛盾。

对情况 $t \notin \{i,j\}$ 的分析到此结束。

代理人 $i=t$ 嫉妒代理人 $j>t$。 因此，嫉妒可表示为

$$x_{t,1} + x_{t,2}\cdot v_{t,2} < (x_{j,2}-1)\cdot v_{t,2},$$

因为代理人 j在 X中没有获得第一类物品。因此，$x_{t,\,2} < x_{j,\,2} - 1 \le k$。这与 X的定义矛盾，因为 $x_{t,\,2} = k$。情况 $i=t$也被排除。

所有可能的情况均已穷尽，每种情况下都会得出矛盾。定理的证明完成。

□

6 重新分配

引理 1. 设 (t,k)、$(t',k') \in \mathcal{T}$使得(t,k)-分割分配是左嫉妒的，但(t',k')-分割分配是右嫉妒的。此外，不存在满足$(t,k) \prec (t'',k'') \prec (t',k'')$的$(t'',k'') \in \mathcal{T}$。那么 $t<n$和

$$\lceil x_{t+1,2} \cdot v_{t,2} \rceil \cdot t - \lceil k v_{t,2} \rceil + 1 \le m_1 \le \lceil x_{t+1,2} \cdot v_{t,2} \rceil \cdot t - \lceil (k-1) v_{t,2} \rceil.$$

证明。 我们用 Y表示（t'，k'）-分割分配。我们将用 $y_{i,\,1}$ 和 $y_{i,\,2}$ 表示在 Y中分配给代理人 i 的各类型物品数量。

我们先证明右侧不等式。

考虑两种情况：$t=t'$ 和 $t \ne t'$。

情况1： $t=t'$。

根据（t，k）-分割分配的定义，我们有 $k'=k-1$。反设：

$$m_1 \ge \lceil x_{t+1,2}\, v_{t,2} \rceil\, t - \lceil (k-1)\, v_{t,2} \rceil + 1.$$

根据引理 3，嫉妒只可能发生在代理人 $i \le t$ 和 $j \ge t$之间。此外，根据（t，k）-分割分配的定义：由于 $x_{t+1,\,2} \ge x_{t,\,2} = k$，可得$\lceil x_{t+1,\,2}\, v_{t,\,2} \rceil \ge \lceil k\, v_{t,\,2} \rceil \ge \lceil k'\, v_{t,\,2} \rceil$。因此，

$$m_1 \ge \lceil k'\, v_{t,2} \rceil\, (t-1) + 1 = p\,(t-1) + 1,$$

其中 $p = \lceil k'\, v_{t,\,2} \rceil$。

由引理 5 可知，代理人 $i \le t$与 $j \le t$之间不存在嫉妒。然而，根据假设，(t,k')-分配是右嫉妒的，即存在一位代理人 $i \le t$ 嫉妒另一位代理人 $j > t$。记作：

$$m_1 - p\,(t-1) = q_1\, t + r_1, \qquad 0 \le r_1 < t.$$

那么，代理人的第一类物品数量为：

$$y_{i,1} = \begin{cases} q_1, & \text{if } i = t \text{ and } r_1 = 0, \\ q_1 + 1, & \text{if } i = t \text{ and } r_1 > 0, \\ p + q_1, & \text{if } i \le \min\{t - r_1, t-1\}, \\ p + q_1 + 1, & \text{if } i \in [t - r_1 + 1, t-1]\,. \end{cases}$$

因此，对于代理人 t，我们得到：

$$y_{t,1} = \left\lceil \frac{m_1 - p\,(t-1)}{t} \right\rceil = \left\lceil \frac{m_1 - \lceil k'\,v_{t,2} \rceil\,(t-1)}{t} \right\rceil.$$

根据相反的假设，这大于或等于：

$$\left\lceil \frac{\lceil x_{t+1,2}\,v_{t,2} \rceil\,t - \lceil (k-1)\,v_{t,2} \rceil + 1 - \lceil (k-1)\,v_{t,2} \rceil\,(t-1)}{t} \right\rceil$$
$$= \left\lceil \frac{\lceil x_{t+1,2}\,v_{t,2} \rceil\,t - \lceil (k-1)\,v_{t,2} \rceil\,t + 1}{t} \right\rceil$$
$$\geq \lceil x_{t+1,2}\,v_{t,2} \rceil - \lceil (k-1)\,v_{t,2} \rceil + 1.$$

对于任意代理人 $i < t$，我们有：

$$y_{i,1} \geq p + \left\lfloor \frac{m_1 - p\,(t-1)}{t} \right\rfloor \geq p + (y_{t,1} - 1)$$
$$\geq p + (\lceil x_{t+1,2}\,v_{t,2} \rceil - \lceil (k-1)\,v_{t,2} \rceil) = \lceil x_{t+1,2}\,v_{t,2} \rceil\,.$$

注意，对于代理人 $j > t$，我们有 $y_{j,1} = 0$ 以及 $y_{j,2} \leq x_{t+1,2} + 1$。事实上，假设存在某个代理人 $i > t$，使得 $y_{i,2} \geq x_{t+1,2} + 2$，则会导致矛盾。

根据（t, k）-分割分配的性质，我们知道每个代理人 $i > t$ 至少会获得 $x_{t+1,2} + 1$ 个类型2 的物品。因此，

$$m_2 \geq (x_{t+1,2} + 1)(n - t - 1) + (x_{t+1,2} + 2) + (k - 1),$$

其中（$k - 1$）表示分配给代理人 t的物品。

另一方面，在分配 X中，对于所有 $i > t$，我们有 $x_{i,2} \leq x_{t+1,2} + 1$。对所有这类代理人求和，得到

$$m_2 \leq k + (x_{t+1,2} + 1)(n - t - 1) + x_{t+1,2}.$$

这会导致矛盾，因为 m_2 的下界超过了上界。因此，对于所有 $j > t$，$y_{j,2} \leq x_{t+1,2} + 1$都必须成立。

子情况 *1.1*：代理人 t嫉妒某个 $j > t$。

Then

$$y_{t,1} + y_{t,2}\,v_{t,2} < (y_{j,2} - 1)\,v_{t,2} \leq x_{t+1,2}\,v_{t,2}.$$

另一方面：

$$y_{t,1} + y_{t,2}\,v_{t,2} \geq$$
$$(\lceil x_{t+1,2}\,v_{t,2} \rceil - \lceil (k-1)\,v_{t,2} \rceil + 1) + (k-1)\,v_{t,2} >$$
$$\lceil x_{t+1,2}\,v_{t,2} \rceil - (\lceil (k-1)\,v_{t,2} \rceil - (k-1)\,v_{t,2}) + 1 \geq$$
$$x_{t+1,2}\,v_{t,2}。$$

矛盾。

子情况 *1.2*：代理人 $i < t$嫉妒某个 $j > t$。那么

$$y_{i,1} < (y_{j,2} - 1)\,v_{i,2} \leq x_{t+1,2}\,v_{t,2}.$$

我们有 $y_{i,1} \geq \lceil x_{t+1,2}\,v_{t,2} \rceil$。那么：

$$\lceil x_{t+1,2}, v_{t_2,2} \rceil \leq x_{i,1} < x_{t+1,2}\,v_{t_2,2},$$

这是不可能的。矛盾。

情况 2： $t \neq t'$。

子情况 *2.1*：*t' =n*

In t在这种情况下，$k = 1$、$k' = n$和 $t = n - 1$。由此可得 $x_{t+1,2} = m_2 - 1$。我们需要证明 t

$$m_1 < \lceil (m_2 - 1)\,v_{t,2} \rceil\,(n-1).$$

反设，即：

$$m_1 \geq \lceil (m_2 - 1)\,v_{t,2} \rceil\,(n-1).$$

现在，考虑分配 Y。如果 Y 中存在任何嫉妒，那么 $y_{n,1}=0$；否则，根据引理 5，如果 $m_1 \geq p(t-1)$，就不会存在嫉妒。因此，$y_{n,1}=0$，这意味着对于任意 $i<n$，

$$y_{i,1} \geq \lceil (m_2-1)\, v_{t,2} \rceil .$$

但此时，代理人 i 不能嫉妒代理人 n，因为否则

$$\lceil (m_2-1)\, v_{t,2} \rceil \leq y_{i,1} < (y_{n,2}-1)\, v_{i,2} \leq (m_2-1)\, v_{t,2},$$

这就产生了矛盾。因此，这种情况得以解决。

子情形 *2.2*：$t' < n$

在这种情况下，根据（t，k）-序的定义，$k=1$ 和 $k' = \lfloor \frac{m_2}{n-t} \rfloor$ 以及 $t' = t+1$。我们再次考虑可能出现的嫉妒情形。根据假设，存在代理人 $i<j$，使得 i嫉妒 j。根据引理 3，我们有 $i \leq t'$ 和 $j \geq t'$。

现在，注意到 $i \neq t'$。事实上，对于任意代理人 $j > t'$，我们有

$$y_{j,2} \leq \left\lceil \frac{m_2}{n-t} \right\rceil \leq \left\lfloor \frac{m_2}{n-t} \right\rfloor + 1 = y_{t',2} + 1,$$

因此，代理人 t' 不会嫉妒，嫉妒必定来自某个代理人 $i < t'$。

我们来考察 $i > t$ 的$y_{i,2}$ 最大值。我们断言：

$$\max_{i>t'} y_{i,2} \leq x_{t+1,2} + 1.$$

事实上，反设结论不成立，则会导出矛盾：

$$\max_{i>t'} y_{i,2} \geq x_{t+1,2} + 2.$$

那么，对于所有代理人 $i \geq t'$，都有 $y_{i,2} \geq x_{t+1,2}+1$。因此，

$$m_2 \geq (x_{t+1,2}+1)\,(n-t'-1) + (x_{t+1,2}+2) = \\ (x_{t+1,2}+1)\,(n-t') + 1 = (x_{t+1,2}+1)\,(n-t-1) + 1.$$

另一方面，对于所有 $i > t$，都有 $x_{i,2} \leq x_{t+1,2}+1$，对所有这类代理人求和可得

$$m_2 \leq (x_{t+1,2}+1)\,(n-t-2) + x_{t+1,2} + x_{t,2} = \\ (x_{t+1,2}+1)\,(n-t-2) + x_{t+1,2} + 1 = \\ (x_{t+1,2}+1)\,(n-t-1).$$

这与矛盾相悖，因为 m_2 的下界超过了上界。因此，$i > t'$ 的 $y_{i,2}$最大值不会超过 $x_{t+1,2}+1$。

根据前面的讨论，唯一可能出现的嫉妒，是代理人 $i < t'$ 嫉妒代理人 $j \geq t'$。注意，若 $i < t'$ 嫉妒 t'，则根据引理 5，必有 $m_1 < p(t'-1)$，其中 $p = \lceil k' v_{t',2} \rceil$。在这种情况下，我们有 $y_{t',1}=0$。因此，对于任意代理人 $j > t'$，可得 $y_{j,2} \geq y_{t',2}$，所以代理人 i 也会嫉妒该代理人 $j > t'$。

让我们来考察这一点的含义。对于 $i < t'$，代理人 i 嫉妒代理人 $j > t'$，因此：

$$y_{i,1} < (y_{j,2}-1) v_{i,2} \leq (y_{j,2}-1) v_{t,2}.$$

因此，对于所有 $i < t'$，

$$y_{i,1} \leq (y_{j,2}-1) v_{t,2}.$$

对所有此类代理人求和，可得

$$m_1 \leq (y_{j,2}-1) v_{t,2} (t'-1).$$

现在，将 $y_{j,2}$ 以上界 $x_{t+1,2}+1$ 替代，得到

$$m_1 \leq x_{t+1,2}\, v_{t,2}\, t.$$

注意，我们考虑的是情况 $y_{t',\,1}=0$，否则 $m_1 \geq p(t'-1)$，其中 $p = \lceil k' v_{t',\,2} \rceil$。在这种情况下，对于任意 $i < t'$，我们有

$$y_{i,1} \geq p \geq x_{t+1,2}\, v_{t',2},$$

因此，代理人 i 不会嫉妒任何人，这与存在嫉妒的假设相矛盾。
因此，右侧不等式得证。

接下来用左侧不等式继续证明。
反设:

$$m_1 \leq \lceil x_{t+1,2}\, v_{t,2} \rceil\, t - \lceil k\, v_{t,2} \rceil.$$

由引理 4 和引理 5 可知，在存在左嫉妒的情况下，代理人 $i \leq t$ 和 $j \leq t$ 互不嫉妒。因此，根据引理 3，必定存在一名代理人 $j > t$ 嫉妒某名代理人 $i \leq t$。考虑以下两种情况：**情况1：** 代理人 $j > t$嫉妒代理人 $i < t$。

于是:

$$x_{t+1,2}\, v_{t,2} \leq x_{t+1,2}, v_{j,2} \leq x_{j,2}\, v_{j,2} < x_{i,1} - 1.$$

由此可得:

$$x_{i,1} > x_{t+1,2}\, v_{t,2} + 1.$$

由于对于所有代理人 $i_1 < t$，第一类物品的数量至多相差一，因此我们有

$$x_{i_1,1} \geq \lceil x_{t+1,2}\, v_{t,2} \rceil.$$

这里我们对右侧取上整，因为$x_{i_1,\ 1}$ 是一个整数。
特别地，对于代理人 t:

$$x_{t,1} > x_{t+1,2}\, v_{t,2} + 1 - \lceil k\, v_{t,2} \rceil.$$

对所有此类代理人求和，我们得到

$$m_1 \geq \lceil x_{t+1,2}\, v_{t,2} \rceil (t-2) + (\lceil x_{t+1,2}\, v_{t,2} \rceil + 1) + (\lceil x_{t+1,2}\, v_{t,2} \rceil + 1 - \lceil k\, v_{t,2} \rceil) = \lceil x_{t+1,2}\, v_{t,2} \rceil t - \lceil k\, v_{t,2} \rceil + 2,$$

这与我们的假设矛盾。
情况 2： 代理人 $j > t$嫉妒代理人 t。
在这种情况下:

$$x_{t+1,2}\, v_{t,2} \leq x_{t+1,2}\, v_{j,2} \leq x_{j,2}\, v_{j,2} < x_{t,1} - 1 + k\, v_{t,2}.$$

这里，我们减去 1，因为对于任意代理人 $j > t$ ，都有 $v_{j,\ 2} \geq 1$。

于是:

$$x_{t,1} > (x_{t+1,2} - k)\, v_{t,2} + 1.$$

由此，对于任意 $i \in I1$:

$$x_{i,1} > \left\lceil (x_{t+1,2} - k)\, v_{t,2} + \lceil k\, v_{t,2} \rceil \right\rceil \geq \lceil x_{t+1,2}\, v_{t,2} \rceil.$$

对所有此类代理人求和，我们得到

$$m_1 \geq \lceil x_{t+1,2}\, v_{t,2} \rceil (t-1) + (\lceil x_{t+1,2}\, v_{t,2} \rceil + 1 - \lceil k\, v_{t,2} \rceil) = \lceil x_{t+1,2}\, v_{t,2} \rceil t - \lceil k\, v_{t,2} \rceil + 1,$$

这与我们的假设相矛盾。
两种可能的情况都会导致矛盾，因此假设不成立。左侧不等式得证。
由此，我们证明了这两个不等式，因此引理得证。

□

现在，我们终于可以开始证明主定理并完成证明了。
定理 4. 设 X 是某个$(t,k) \in \mathcal{T}$的(t,k)-重新分配。如果

$$m_1 \leq \lceil x_{t+1,2} \cdot v_{t,2} \rceil \cdot t - \lceil (k-1) \cdot v_{t,2} \rceil,$$

那么 X 是*EFX*+帕累托最优。

证明。 我们先证明帕累托最优性。

命题 7. 分配 X 满足帕累托最优性（帕累托最优）。

证明。 根据定理 1，任何适当分配都是帕累托最优的。我们将证明 X 是适当的。根据适当分配的定义，只需验证

$$\max\{\, x_{i,2} : i > t \,\} < v_{t,2}. \tag{10}$$

注意，对于所有 $i < t$，$x_{i,2} = 0$，因此上述条件确实涵盖了所有相关情况。

首先考虑 $v_{t,2} \notin \mathbb{N}$ 的情况。反设存在某个代理人 $i > t$，使得

$$x_{i,2} \geq v_{t,2}.$$

根据 X 的构造，$x_{i,1}$ 的取值如下确定：

$$x_{i,1} \leq \left\lfloor \frac{m_1 - \lceil d\, v_{t,2} \rceil\, t + \lceil k\, v_{t,2} \rceil}{1+t} \right\rfloor.$$

现在，假设$x_{i,2} \geq v_{t,2}$，我们得到：

$$\left\lfloor \frac{m_1 - \lceil d\, v_{t,2} \rceil\, t + \lceil k\, v_{t,2} \rceil}{1+t} \right\rfloor \geq v_{t,2}. \tag{11}$$

根据引理 1，我们有：

$$m_1 \leq \lceil d\, v_{t,2} \rceil\, t - \lceil (k-1)\, v_{t,2} \rceil.$$

将其代入不等式 (11)，并注意到 m_1 是整数，可得：

$$\left\lfloor \frac{\left\lfloor \lceil d\, v_{t,2} \rceil\, t - \lceil (k-1)\, v_{t,2} \rceil \right\rfloor - \lceil d\, v_{t,2} \rceil\, t + \lceil k\, v_{t,2} \rceil}{1+t} \right\rfloor \qquad \geq \qquad v_{t,2},$$

化简得

$$\left\lfloor \frac{\lceil k\, v_{t,2} \rceil - \lceil (k-1)\, v_{t,2} \rceil}{1+t} \right\rfloor \geq v_{t,2}.$$

现在，对分子作上界估计：

$$\lceil k\, v_{t,2} \rceil - \lceil (k-1)\, v_{t,2} \rceil < \lfloor v_{t,2} + 1 \rfloor.$$

Then

$$\left\lfloor \frac{\lfloor v_{t,2} + 1 \rfloor}{1+t} \right\rfloor > v_{t,2}.$$

由于 $t \geq 1$，我们有：

$$\left\lfloor \frac{\lfloor v_{t,2} + 1 \rfloor}{2} \right\rfloor \geq v_{t,2}.$$

于是：

$$\left\lfloor \frac{\lfloor v_{t,2} \rfloor + 1}{2} \right\rfloor \geq v_{t,2}.$$

因为$v_{t,\ 2} \notin \mathbb{N}$。这意味着

$$\left\lfloor \frac{\lfloor v_{t,2} \rfloor + 1}{2} \right\rfloor > \lfloor v_{t,2} \rfloor,$$

so

$$\frac{\lfloor v_{t,2} \rfloor + 1}{2} > \lfloor v_{t,2} \rfloor,$$

这又意味着

$$\frac{\lfloor v_{t,2} \rfloor}{2} < \frac{1}{2}.$$

但这是不可能的，因为 $v_{t,\ 2} \geq 1$，所以 $\lfloor v_{t,\ 2} \rfloor \geq 1$，进而 $\lfloor v_{t,\ 2} \rfloor \geq \frac{1}{2}$——这就产生了矛盾。

现在考虑第二种情况：$v_{t,\ 2} \in \mathbb{N}$。于是：

$$\lceil d\, v_{t,2} \rceil - \lceil k\, v_{t,2} \rceil = (d-k)\, v_{t,2}.$$

因此，

$$x_{i,1} \leq \left\lceil \frac{m_1 - d\, v_{t,2}\, t + k\, v_{t,2} - 1}{1+t} \right\rceil.$$

这是因为，由于等式

$$\lceil d\, v_{t,2} \rceil - \lceil k\, v_{t,2} \rceil = (d-k)\, v_{t,2},$$

代理人的优先顺序如下：

- Agents $1, 2, \ldots, t-1, t+1, \ldots, \ell, t$.

将引理 1 中对 m_1 的界代入：

$$m_1 \leq d\, v_{t,2}\, t - (k-1)\, v_{t,2}.$$

于是：

$$\left\lceil \frac{d\, v_{t,2}\, t - (k-1)\, v_{t,2} - d\, v_{t,2}\, t + k\, v_{t,2} - 1}{1+t} \right\rceil = \left\lceil \frac{v_{t,2} - 1}{1+t} \right\rceil \geq v_{t,2}.$$

由于 $t \geq 1$，可得

$$\left\lceil \frac{v_{t,2} - 1}{2} \right\rceil \geq v_{t,2}.$$

这将意味着

$$\frac{v_{t,2} - 1}{2} \geq v_{t,2} - \frac{1}{2},$$

这就产生了矛盾。

因此 ， X 是一个适当的分配，并且根据定理 1，它是帕累托最优的。由此，引理得证。 □

现在让我们证明分配 X 满足 EFx。为此，我们将陈述关于不存在嫉妒的若干命题。在继续之前，让我们回顾一下， $\ell \in [n]$ 表示满足 $x_{\ell,\ 2} = d$ 的最大索引。

命题 8。 如果两个代理人 i 和 j之间存在嫉妒，则 $(i-t)(j-t) \leq 0$。

证明。 我们通过反证法进行证明。假设 $(i-t)(j-t) > 0$。

情况1： $i < t$， $j < t$。

这些代理人只获得第一类物品，其数量最多相差 1。由于他们没有获得其他类型的商品，且数量差异受到限制，他们之间不可能产生嫉妒。

情况 2： $i > t$、 $j > t$。让我们根据代理人相对于代理人 ℓ的位置来考虑可能的情况。

情况 *2.1*： $i > l$、 $j > l$。根据分配 X 的构造，这一组中的所有代理人都获得相同的物品集合。因此，不可能产生嫉妒。

情况 *2.2*： $i < l$， $j < l$。假设，代理人 i嫉妒代理人 j。那么

$$x_{i,1} + x_{i,2} < x_{j,2} + x_{j,1} - \min(1, v_{i,2}).$$

然而，根据重新分配的定义，$x_{i,\ 2} = x_{j,\ 2}$，以及 $x_{i,\ 1}$ 和 $x_{j,\ 1}$ 之间的差异至多为 1。因此，在这种情况下不可能存在嫉妒，因为 $v_{i,\ 2} > 1$。

情形 *2.3*：代理人 $j > l$ 嫉妒代理人 $i \leq l$。根据嫉妒的定义：

$$x_{j,2}\, v_{j,2} < (x_{i,1} - 1) + x_{i,2}\, v_{j,2}.$$

代入 $x_{j,\ 2} = d + 1$ 和 $x_{i,\ 2} = d$，得到：

$$(d+1)\, v_{j,2} < (x_{i,1} - 1) + d\, v_{j,2}.$$

重新整理：

$$(d+1)\, v_{j,2} - d\, v_{j,2} < x_{i,1} - 1,$$

So,

$$v_{j,2} < x_{i,1} - 1.$$

根据条件（10），我们有

$$x_{i,1} < v_{t,2}.$$

But

$$v_{t,2} \leq v_{j,2},$$

因此，我们有

$$v_{j,2} < x_{i,1} - 1 < x_{i,1} < v_{j,2}$$

这就产生了矛盾。

情形 *2.4*：代理人 $i < l$ 嫉妒代理人 $j > l$。于是：

$$x_{i,2}\, v_{i,2} + x_{i,1} < (x_{j,2} - 1)\, v_{i,2}.$$

代入 $x_{j,\ 2} = d + 1$ 和 $x_{i,\ 2} = d$，得到：

$$d\, v_{i,2} + x_{i,1} < ((d+1) - 1)\, v_{i,2},$$

因此

$$d\, v_{i,2} + x_{i,1} < d\, v_{i,2}.$$

化简得：

$$x_{i,1} < 0,$$

矛盾。

所有情况均已考虑，且都导致矛盾。因此，i 和 j之间不可能产生嫉妒，引理得证。

□

断言 9。代理人 $i < t$ 与代理人 $j > t$之间不可能存在嫉妒。

证明。考虑代理人 $i < t$ 与代理人 $j > t$之间嫉妒的所有可能情况。

情况1： 代理人 $j > l$ 嫉妒代理人 $i < t$。

代理人 j 只获得第二类物品，而代理人 i 只获得第一类物品。如果 j 嫉妒 i，那么：

$$x_{j,2}\, v_{j,2} < x_{i,1} - 1.$$

然而，根据构造 $x_{i,\ 1} \leq \lceil d\, v_{t,\ 2} \rceil + v_{t,\ 2}$ 以及 $x_{j,\ 2} = d + 1$。因此，

$$(d+1)\, v_{j,2} < \lceil d\, v_{t,2} \rceil + v_{t,2} - 1 \leq (d+1)\, v_{t,2}.$$

并且由于 $v_{j,\ 2} \geq v_{t,\ 2}$，这是不可能的。矛盾。

情况 2： 代理人 $t \geq j > t$嫉妒代理人 $i < t$。

代理人 j 收到$x_{j,\ 2} = d$第二类物品和$x_{j,\ 1} \geq 0$ 第一类物品；代理人 i 仅收到第一类物品。如果 j 被嫉妒 i，则：

$$d\, v_{j,2} + x_{j,1} < x_{i,1} - 1.$$

然而，根据构造 $x_{i,\ 1} < \lceil d\, v_{t,\ 2} \rceil + x_{j,\ 1}$。因此

$$d\, v_{j,2} + x_{j,1} < \lceil d\, v_{t,2} \rceil + x_{j,1} - 1,$$

so

$$d\, v_{j,2} < \lceil d\, v_{t,2} \rceil - 1.$$

但 $v_{j,2} \geq v_{t,2}$，这意味着 $d\, v_{j,2} \geq d\, v_{t,2}$，而$\lceil d\, v_{t,2} \rceil - 1 < d\, v_{t,2}$——再次产生矛盾。

情况3： 代理人 $i < t$嫉妒代理人 $l \geq j > t$。
代理人 i 只获得第一类物品；代理人 j 获得 d 件第二类物品和 $x_{j,1}$ 件第一类物品（根据构造，$x_{j,1} \leq x_{i,1} - \lceil d\, v_{t,2} \rceil + 1$）。存在两种子情况：
子情况*3.1*：$1 \leq v_{i,2}$
那么，嫉妒意味着：

$$x_{i,1} < d\, v_{i,2} + x_{j,1} - 1.$$

但 $x_{j,1} \leq x_{i,1} - \lceil d\, v_{t,2} \rceil + 1$，因此

$$x_{i,1} < d\, v_{i,2} + x_{i,1} - \lceil d\, v_{t,2} \rceil,$$

so

$$0 < d\, v_{i,2} - \lceil d\, v_{t,2} \rceil,$$

这是不可能的，因为$v_{i,\ 2} \leq v_{t,\ 2}$。
子情况*3.2*：$1 > v_{i,\ 2}$
那么，由嫉妒可得：

$$x_{i,1} < (d-1)\, v_{i,2} + x_{j,1}.$$

并且$x_{j,\ 1} \leq x_{i,\ 1} - \lceil d\, v_{t,\ 2} \rceil + 1$，因此

$$x_{i,1} < (d-1)\, v_{i,2} + x_{i,1} - \lceil d\, v_{t,2} \rceil + 1,$$

这可简化为

$$0 < (d-1)\, v_{i,2} - \lceil d\, v_{t,2} \rceil + 1.$$

但由于$v_{i,\ 2} \leq v_{t,\ 2}$，这对$v_{t,\ 2} \geq 1$是不可能的。
情况4： 代理人 $i < t$ 嫉妒代理人 $j > l$。代理人 j 仅获得第二类物品：$x_{j,\ 2} = d + 1, x_{j,\ 1} = 0$。如果 i嫉妒 j，那么：

$$x_{i,1} < (d+1-1)\, v_{i,2} = d\, v_{i,2}.$$

但根据构造，$x_{i,\ 1} \geq \lceil d\, v_{t,\ 2} \rceil$，且 $v_{i,\ 2} \leq v_{t,\ 2}$。因此

$$\lceil d\, v_{t,2} \rceil \leq x_{i,1} < d\, v_{i,2},$$

这是不可能的，因为左侧是一个向上取整值。
因此，在所有情况下都不可能出现嫉妒，引理得证。 □

命题 10。 代理人 t 与代理人 $l \geq i > t$之间不可能存在嫉妒。

证明。 我们考虑两种情况，分别取决于 t 是否嫉妒 i，或 i 是否嫉妒 t。
情况1： 代理人 i 嫉妒代理人 t。
C考虑两种子情况，具体取决于$\lceil d\, v_{t,2} \rceil - \lceil k\, v_{t,2} \rceil$ 和 $(d-k)v_{t,2}$ 之间的关系：
*S*子情况 *1*。*1* $\lceil d\, v_{t,2} \rceil - \lceil k\, v_{t,2} \rceil > (d-k)v_{t,2}$。在这种情况下，根据分配的构造 on:

$$x_{i,1} \geq x_{t,1} - (\lceil d\, v_{t,2} \rceil - \lceil k\, v_{t,2} \rceil).$$

由于代理人按以下顺序排列优先级：

- Agents $1, 2, \ldots, t-1, t, t+1, \ldots, \ell,$.

如果嫉妒是可能的，那么：

$$x_{i,1} + d\,v_{i,2} = x_{i,1} + x_{i,2}\,v_{i,2} < x_{t,1} + x_{t,2}\,v_{i,2} - 1 = x_{t,1} - 1 + k\,v_{i,2},$$

这意味着

$$\begin{aligned} & x_{t,1} - (\lceil d\,v_{t,2}\rceil - \lceil k\,v_{t,2}\rceil) + d\,v_{i,2} < x_{t,1} - 1 + k\,v_{i,2}, \\ \implies & d\,v_{i,2} - (\lceil d\,v_{t,2}\rceil - \lceil k\,v_{t,2}\rceil) < k\,v_{i,2} - 1, \\ \implies & (d-k)\,v_{i,2} - (\lceil d\,v_{t,2}\rceil - \lceil k\,v_{t,2}\rceil) < -1, \\ \implies & (d-k)\,v_{i,2} < (\lceil d\,v_{t,2}\rceil - \lceil k\,v_{t,2}\rceil) - 1, \\ \implies & (d-k)\,v_{i,2} < (d\,v_{t,2} + 1 - k\,v_{t,2}) - 1. \end{aligned}$$

这是一个矛盾。

子情况*1*。*2* $\lceil d\,v_{t,\ 2}\rceil - \lceil k\,v_{t,\ 2}\rceil < (d-k)v_{t,\ 2}$。这里同样有：

$$x_{i,1} \geq x_{t,1} - (\lceil d\,v_{t,2}\rceil - \lceil k\,v_{t,2}\rceil) - 1.$$

如果嫉妒是可能的：

$$x_{i,1} + d\,v_{i,2} < x_{t,1} - 1 + k\,v_{i,2},$$

then

$$x_{t,1} - (\lceil d\,v_{t,2}\rceil - \lceil k\,v_{t,2}\rceil) - 1 + d\,v_{i,2} < x_{t,1} - 1 + k\,v_{i,2},$$

化简为

$$(d-k)\,v_{i,2} < (\lceil d\,v_{t,2}\rceil - \lceil k\,v_{t,2}\rceil).$$

但根据这一子情况的假设：

$$\lceil d\,v_{t,2}\rceil - \lceil k\,v_{t,2}\rceil > (d-k)\,v_{t,2}.$$

这是一个矛盾。

情况 2： 代理人 t嫉妒代理人 i。根据$\lceil d\,v_{t,2}\rceil - \lceil k\,v_{t,2}\rceil$与 $(d-k)\,v_{t,2}$ 的符号，分为两种子情况：子情况 *2*。

1 $\lceil d\,v_{t,2}\rceil - \lceil k\,v_{t,2}\rceil > (d-k)v_{t,2}$。在这种情况下，根据构造：

$$x_{t,1} \geq x_{i,1} + (\lceil d\,v_{t,2}\rceil - \lceil k\,v_{t,2}\rceil) - 1.$$

如果可能发生嫉妒：

$$x_{i,1} + d\,v_{t,2} - 1 > x_{t,1} + k\,v_{t,2},$$

那么代入$x_{t,1}$的界：

$$x_{i,1} + d\,v_{t,2} - 1 > x_{i,1} + (\lceil d\,v_{t,2}\rceil - \lceil k\,v_{t,2}\rceil) - 1 + k\,v_{t,2},$$

化简后得到

$$\begin{aligned} & d\,v_{t,2} > (\lceil d\,v_{t,2}\rceil - \lceil k\,v_{t,2}\rceil) + k\,v_{t,2}, \\ & d\,v_{t,2} - k\,v_{t,2} > \lceil d\,v_{t,2}\rceil - \lceil k\,v_{t,2}\rceil, \\ & (d-k)\,v_{t,2} > \lceil d\,v_{t,2}\rceil - \lceil k\,v_{t,2}\rceil. \end{aligned}$$

但根据这一子情况的假设：

$$\lceil d\,v_{t,2}\rceil - \lceil k\,v_{t,2}\rceil > (d-k)\,v_{t,2}.$$

这是一个矛盾。

子情况 *2*。*2* $\lceil d\,v_{t,\ 2}\rceil - \lceil k\,v_{t,\ 2}\rceil < (d-k)v_{t,\ 2}$。在这种情况下，根据构造：

$$x_{t,1} \geq x_{i,1} + (\lceil d\,v_{t,2}\rceil - \lceil k\,v_{t,2}\rceil).$$

由于代理人的优先顺序如下：代理人 1，2、.....、 $t-1$， t， $t+1$、.....、 ℓ。如果可能存在嫉妒：

$$x_{i,1} + d\,v_{t,2} - 1 > x_{t,1} + k\,v_{t,2},$$

那么将x_t的界代入，1：

$$x_{i,1} + d\,v_{t,2} - 1 > x_{i,1} + (\lceil d\,v_{t,2}\rceil - \lceil k\,v_{t,2}\rceil) + k\,v_{t,2},$$

化简得

$$\begin{aligned} d\,v_{t,2} - 1 &> (\lceil d\,v_{t,2}\rceil - \lceil k, v_{t,2}\rceil) + k\,v_{t,2}, \\ (d-k)\,v_{t,2} - 1 &> \lceil d\,v_{t,2}\rceil - \lceil k\,v_{t,2}\rceil, \\ (d-k)\,v_{t,2} - 1 &> d\,v_{t,2} - (k\,v_{t,2} + 1). \end{aligned}$$

这就产生了矛盾。

因此，在这种情况下也不可能存在嫉妒。引理得证。 □

命题 11. 代理人 t 与代理人 $i > l$ 之间不可能存在嫉妒。

证明。我们分两种情况讨论，具体取决于 t 是否嫉妒 i，或者 i 是否嫉妒 t。**情况1：** 代理人 t嫉妒代理人 i。

根据引理 1,

$$\lceil x_{t+1,2} \cdot v_{t,2}\rceil t - \lceil k v_{t,2}\rceil + 1 \le m_1$$

那么我们知道

$$x_{t,1} \ge \lceil d\,v_{t,2}\rceil - \lceil k\,v_{t,2}\rceil + 1.$$

如果存在嫉妒，那么：

$$x_{t,1} + x_{t,2}\,v_{t,2} < (x_{i,2} - 1)\,v_{t,2} = d\,v_{t,2}.$$

但是 $x_{t,\ 2} = k$ 且 $x_{i,\ 2} = d + 1$。代入得：

$$\lceil d\,v_{t,2}\rceil - \lceil k\,v_{t,2}\rceil + 1 + k\,v_{t,2} < d\,v_{t,2}.$$

将所有项移到一边：

$$-\lceil k\,v_{t,2}\rceil + 1 + k\,v_{t,2} < 0.$$

但是 $k\,v_{t,\ 2} + 1 \ge \lceil k\,v_{t,\ 2}\rceil$。矛盾。因此，代理人 t 不能嫉妒代理人 $i > l$。

情况 2： 代理人 $i > l$ 嫉妒代理人 t。

根据$\lceil d\,v_{t,\ 2}\rceil - \lceil k\,v_{t,\ 2}\rceil$ 和 $(d-k)v_{t,\ 2}$之间的关系，考虑两种子情况：

Subcase 2.1 $\lceil d\,v_{t,2}\rceil - \lceil k\,v_{t,2}\rceil > (d-k)\,v_{t,2}$.

在这种情况下，根据构造：

$$x_{t,1} \le x_{j,1} + (\lceil d\,v_{t,2}\rceil - \lceil k\,v_{t,2}\rceil) < v_{t,2} + (\lceil d\,v_{t,2}\rceil - \lceil k\,v_{t,2}\rceil),$$

其中，j 是一个代理人 $l \ge j > t$，并且根据（10），$x_{j,\ 1} < v_{t,\ 2}$。

如果可能存在嫉妒，那么：

$$(d+1)v_{i,2} = x_{i,2}\,v_{i,2} < x_{t,1} - 1 + x_{t,2}\,v_{i,2} \le v_{t,2} + (\lceil d\,v_{t,2}\rceil - \lceil k\,v_{t,2}\rceil) + k\,v_{t,2} - 1.$$

注意，$k\,v_{t,\ 2} + v_{t,\ 2} = (k+1)v_{t,\ 2}$。因此：

$$v_{t,2} + (\lceil d\,v_{t,2}\rceil - \lceil k\,v_{t,2}\rceil) + k\,v_{t,2} - 1 = \lceil d\,v_{t,2}\rceil + (k\,v_{t,2} - \lceil k\,v_{t,2}\rceil) + v_{t,2} - 1.$$

但是 $k\,v_{t,\ 2} - \lceil k\,v_{t,\ 2}\rceil \le 0$。因此

$$x_{i,2}\,v_{i,2} < \lceil d\,v_{t,2}\rceil + v_{t,2} - 1.$$

根据定义 $x_{i,\ 2} = d + 1$，且由于 $v_{i,\ 2} \le v_{t,\ 2}$，我们有

$$(d+1)\,v_{i,2} \le (d+1)\,v_{t,2}.$$

因此，

$$(d+1)\,v_{i,2} < \lceil d\,v_{t,2}\rceil + v_{t,2} - 1 \le (d+1)\,v_{t,2},$$

这不可能　　可能，因为左侧不可能对所有 $v_{i,\ 2} \leq v_{t,\ 2}$都严格小于右侧。矛盾。

Subcase 2.2 $\lceil d\, v_{t,2} \rceil - \lceil k\, v_{t,2} \rceil \leq (d-k)\, v_{t,2}$.

那么，根据我们的构造：

$$x_{t,1} \leq x_{j,1} + 1 + (\lceil d\, v_{t,2} \rceil - \lceil k\, v_{t,2} \rceil) < v_{t,2} + 1 + (d-k)\, v_{t,2},$$

其中 j 是一位代理人 $l \geq j > t$，且根据 (10)，$x_{j,\ 1} < v_{t,\ 2}$。

如果嫉妒是可能的，那么：

$$(d+1)\, v_{i,2} = x_{i,2}\, v_{i,2} < x_{t,1} - 1 + x_{t,2}\, v_{i,2} \leq v_{t,2} + 1 + (d-k)\, v_{t,2} + k\, v_{i,2} - 1 = (d+1)\, v_{i,2}.$$

也就是说，

$$(d+1)\, v_{i,2} < (d+1)\, v_{i,2},$$

这不可能。

因此，所有情况都已考虑，命题得证。 □

根据命题 7，我们已经证明分配 X 满足帕累托最优性。此外，命题 8、9、10 和 11 已经考虑了可能出现的嫉妒情况。我们只需证明代理人 t与任何代理人 $i < t$之间都不会出现嫉妒。一旦证明这一点，定理便得证。

注意，由于 $m_1 > p(t-1)$，且在第一类物品的分配中，代理人 t 始终优先于所有代理人 $i < t$，因此，本情况中关于不存在嫉妒的证明与引理 5 类似。

因此，定理得证。

□

7 结论

在这项工作中，我们进一步理解了 EFX+帕累托最优分配的存在性与可计算性，证明了在效用为正的两类物品中，这类分配总是存在，并提出了一种高效的算法，其运行时间为 $\mathcal{O}(n\log\ n + \log\ m)$。我们关注这些结果能否扩展到一个更一般的开放问题中的若干简单独立情况。这是更广泛研究中的关键后续步骤，该研究旨在刻画何时能够保证 EFX 和 EFX+帕累托最优分配存在。

开放问题 1。 EFX 分配是否总是存在？当所有效用均为正时，EFX+帕累托最优分配是否总是存在？至少在以下两种设定中：

(a) 效用矩阵的秩为 2，

(b) 三种类型的物品。

参考资料

[Amanatidis 等人， 2023] Amanatidis, G., Aziz, H., Birmpas, G., Filos-Ratsikas, A., Li, B., Moulin, H., Voudouris, A. A. 和 Wu, X.（2023）。不可分物品的公平分配：近期进展与开放问题。人工智能，322:103965。[Amanatidis 等人， 2021] Amanatidis, G., Birmpas, G., Filos-Ratsikas, A., Hollender, A. 和 Voudouris, A. A.（2021）。最大纳什福利及其他关于 EFX 的故事。理论计算机科学，863:69–85。[Amanatidis 等人， 2024] Amanatidis, G., Filos-Ratsikas, A. 和 Sgouritsa, A.（2024）。推动近似 EFX 分配的前沿。在 Bergemann, D.、Kleinberg, R. 和 Sab´an, D.（编）， 第*25*届 *ACM*经济学与计算会议论文集，*EC 2024*，美国康涅狄格州纽黑文，*2024*年*7*月*8*日至*11*日，第1268–1286页。ACM。[Amanatidis 等人， 2020] Amanatidis, G., Markakis, E. 和 Ntokos, A.（2020）。一石多鸟：通过嫉妒环消除将 EFX 和 GMMS 提升至 1/2 以上。理论计算机科学，841:94–109。[Aziz 等人， 2022] Aziz, H., Li, B., Moulin, H. 和 Wu, X.（2022）。不可分物品的算法公平分配：综述与新问题。*SIGecomExch.*，20(1):24–40。

[Berger 等人， 2022] Berger, B., Cohen, A., Feldman, M. 和 Fiat, A.（2022）。四名代理人存在几乎完全 EFX。在第三十六届 AAAI 人工智能会议、第三十四届人工智能创新应用会议、 第十二届人工智能教育进展研讨会（EAAI 2022）虚拟活动，2022年2月22日至3月1日，第4826–4833页。AAAI出版社。[Budish， 2011] Budish, E.（2011）。组合分配问题：等收入下的近似竞争均衡。《政治经济学杂志》，119(6):1061–1103。[Caragiannis 等人，2019a] Caragiannis, I., Gravin, N. 和 Huang, X.（2019a）。具有高纳什福利的至多任意一件物品的无嫉妒性：捐赠物品的价值。在 Karlin, A. R.、Immorlica, N. 和 Johari, R.（编），2019年 ACM经济学与计算会议论文集，EC 2019，美国亚利桑那州凤凰城，2019年6月24日至28日，第527–545页。ACM。[Caragiannis 等人，2019b] Caragiannis, I., Kurokawa, D., Moulin, H., Procaccia, A., Shah, N. 和 Wang, J.（2019b）。最大纳什福利的不合理公平性。ACM经济学与计算汇刊，7:1–32。[Chaudhury 等人， 2024] Chaudhury, B. R., Garg, J. 和 Mehlhorn, K.（2024）。三名代理人存在 EFX。《ACM杂志》，71(1):4:1–4:27。[Chaudhury 等人，2021a] Chaudhury, B. R., Garg, J., Mehlhorn, K., Mehta, R. 和 Misra, P.（2021a）。通过彩虹圈数改进 EFX 保证。在 Bir´o, P.、Chawla, S. 和 Echenique, F.（编），EC ’21：第22届 ACM经济学与计算会议，匈牙利布达佩斯，2021年7月18日至23日，第310–311页。ACM。[Chaudhury 等人，2021b] Chaudhury, B. R., Kavitha, T., Mehlhorn, K. 和 Sgouritsa, A.（2021b）。少量慈善即可保证几乎无嫉妒性。SIAM计算杂志，50(4):1336–1358。[Foley， 1966] Foley, D. K.（1966）。资源分配与公共部门。耶鲁大学。[Garg 和 Murhekar， 2023] Garg, J. 和 Murhekar, A.（2023）。用少量效用值计算公平且有效的分配。理论计算机科学，962:113932。[Ghosal 等人， 2025] Ghosal, P., HV, V. P., Nimbhorkar, P. 和 Varma, N.（2025）。（几乎完全）三种（及更多）代理人类型的 EFX。在 Walsh, T.、Shah, J. 和 Kolter, Z.（编），AAAI-25，由人工智能促进协会赞助，2025年2月25日至3月4日，美国宾夕法尼亚州费城，第13889–13896页。AAAI出版社。[Gorantla 等人， 2023] Gorantla, P., Marwaha, K. 和 Velusamy, S.（2023）。不可分物品多重集的公平分配。在 Bansal, N. 和 Nagarajan, V.（编），2023年 ACM-SIAM离散算法研讨会论文集，SODA 2023，意大利佛罗伦萨，2023年1月22日至25日，第304–331页。SIAM。[Hosseini 等人， 2021] Hosseini, H., Sikdar, S., Vaish, R. 和 Xia, L.（2021）。字典序偏好下的公平且有效的分配。在第三十五届 AAAI 人工智能会议、第三十三届人工智能创新应用会议、 第十一届人工智能教育进展研讨会（ EAAI 2021）虚拟活动，2021年2月2日至9日，第5472–5480页。AAAI出版社。[Lipton 等人， 2004] Lipton, R. J., Markakis, E., Mossel, E. 和 Saberi, A.（2004）。关于不可分物品的近似公平分配。在第5届 ACM电子商务会议论文集，EC ’04，第125–131页，美国纽约州纽约。计算机协会。[Mahara， 2023] Mahara, R.（2023）。两个加性估值下 EFX 的存在性。离散应用数学，340:115–122。[Mahara， 2024] Mahara, R.（2024）。将加性估值扩展到一般估值：关于 EFX 的存在性。Math. Oper. Res.，49(2):1263–1277。[Nguyen 和 Rothe， 2023] Nguyen, T. T. 和 Rothe, J.（2023）。不可分物品公平分配的复杂性结果与精确算法：综述。在第三十二届国际人工智能联合会议论文集，IJCAI 2023，2023年8月19日至25日，中国澳门特别行政区，第6732–6740页。ijcai.org。[Plaut and Roughgarden， 2020] Plaut, B. 和 Roughgarden, T.（2020）。一般估值下的几乎无嫉妒性。SIAM离散数学杂志，34(2):1039–1068。[Prakash HV 等人， 2025] Prakash HV, V., Ghosal, P., Nimbhorkar, P. 和 Varma, N.（2025）。三种代理人类型存在 EFX。在 Ashlagi, I. 和 Roth, A.（编），第26届 ACM经济学与计算会议论文集，EC 2025，斯坦福大学，美国加利福尼亚州斯坦福，2025年7月7日至10日，第101–128页。ACM。