线性与非线性时滞微分方程的指数稳定性：综述与新结果

Leonid Berezansky[a]、Elena Braverman[b]、Alexander Domoshnitsky[c]

[a]内盖夫本-古里安大学数学系，贝尔谢巴 *84105*，以色列[b]卡尔加里大学数学与统计系，加拿大阿尔伯塔省卡尔加里西北大学路*2500*号，*T2N 1N4*[c]阿里埃勒大学数学系，以色列阿里埃勒 *40700*

arXiv:2601.03454v1 [math.DS] 6 Jan 2026

摘要

本文全面综述了现有判据，并介绍了一些针对标量时滞方程的新的一致指数稳定性检验

$$\dot{x}(t)+\sum_{j=1}^{n}a_j(t)x(h_j(t))=0.$$

本文探讨了参数连续与可测两种情形 h_j、 a_j 。

我们采用全局线性化方法，并运用线性结果，探究如下形式的非线性模型的全局指数稳定性

$$\dot{x}(t)+\sum_{j=1}^{n}f_j\left(t,x(h_j(t))\right)=0.$$

证明基于解的估计。此外，Bohl-Perron指数二分性定理对于确立非线性模型的全局指数稳定性至关重要。通过数值例子说明结论。

关键词：线性标量时滞微分方程、非线性微分方程、全局指数稳定、解估计、M矩阵、指数二分性

AMS数学主题分类：34K20,34K25

1. 引言

物理学、工程学和种群动力学中的应用模型，其动力学通常可以通过标量微分方程的解的行为来描述

$$\dot{x}(t)+\sum_{j=1}^{n}f_j\left(t,x(h_j(t))\right)=0,\quad t\geq t_0 \tag{1.1}$$

具有多重时滞（这里我们假设对于任意 j， $h_j(t)\leq t$ ）。

若 $f_j(t,0)\equiv 0$，且极限 $a_j(t)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f_j(t,x)}{x}$ 存在且有限，则方程 (1.1) 关于零平衡点的线性化方程具有如下形式

$$\dot{x}(t)+\sum_{j=1}^{n}a_j(t)x(h_j(t))=0,\quad t\geq t_0. \tag{1.2}$$

Equ方程 (1.1) 和 (1.2) 通常在给定初始函数的条件下进行研究

$$x(t) = \psi(t) \quad \text{for} \quad t \le t_0. \tag{1.3}$$

已知数学模型的线性化方程形式各异：包含一个、两个或多个时滞的方程；所有项均含时滞的方程，以及包含非时滞项（无论该项是否占主导）的方程；仅含非负系数的方程或含有振荡系数的方程；系数符号已知但并非全为正的方程；以及从其非线性对应方程继承而来的具有有界时滞或无界时滞的方程。

要为特定形式的非线性方程（1.1）获得有效的局部稳定性条件，就需要一套明确且便于使用的稳定性判据，涵盖上述所有类型的线性模型。

本文第一部分回顾了若干针对方程（1.2）及其特殊情形的已知渐近稳定性和指数稳定性判据。我们从第 2 节中研究得较为充分的连续参数情形开始。然而，在许多情况下，连续情形的结果能否推广至可测参数而不改变临界常数，仍是未知的。随后，我们在第 3 节介绍针对可测参数的判据。我们还考察了两类重要的方程：含有两个时滞的方程，以及含有非时滞项的方程。

第二部分，尤其是第4节，以一种非常便于应用的形式给出了针对（1.2）的新稳定性条件。在第5节中，我们阐述并应用全局线性化稳定性定理，分析形式为（1.1）的非线性模型的稳定性。在第6节中，我们讨论综述所得及新取得的结果，也探讨尚未解决的问题，并讨论相关的后续研究。

本文综述仅含一个时滞项（$m = 1$）的方程，并联系到含多个时滞的方程的稳定性判据。我们不讨论一些特殊情形，例如具有常系数和常时滞的自治方程、具有周期参数的方程，以及其他一些类别的标量泛函微分方程。此外，本文不涉及高阶方程、向量方程和线性方程组。

开始综述之前，先介绍一些基本定义。相关记号将在后文第3节中引入。

定义 1. 我们称（1.2）是

- 渐近稳定（AS）是指：除具有（局部）稳定性外，任意解 $x(t)$ 都满足 $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$;

- 一致指数稳定（UES）是指：存在常数 $\mathcal{M} > 0$ 和 $\nu > 0$，使得问题（1.2）、（1.3）的任意解都满足估计式

$$|x(t)| \le \mathcal{M} e^{-\nu(t-t_0)} \sup_{t \le t_0} |\psi(t)| \quad \text{for} \quad t \ge t_0,$$

其中，数值 $\mathcal{M}$ 和 ν 与初始点 t_0 和初始函数$\psi(t)$均无关。

定义 2. 方程（1.1）的平衡点（假设为零）是

- 局部渐近稳定（LAS），如果对每个 $\varepsilon > 0$，都存在一个常数 $\delta > 0$，使得$|\psi(t)| \le \delta$ 蕴含 $|x(t)| < \varepsilon$, $t \ge t_0$ 且对于方程 (1.1)、(1.3) 的解 x，有 $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$；

- 局部指数稳定（LES），如果存在 $\delta > 0$、 $\mathcal{M} > 0$ 和 $\nu > 0$，使得估计式

$$|x(t)| \leq \mathcal{M} e^{-\nu(t-t_0)} \sup_{t \leq t_0} |\psi(t)| \tag{1.4}$$

对于满足 $|\psi(t)| \leq \delta$ 的所有方程 (1.1)、(1.3) 的解 x 均成立；

- 若除（局部）稳定性外，方程 (1.1)、(1.3) 的所有解还趋于平衡点 $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$，则称其为全局渐近稳定（GAS）；

- 若对于方程 (1.1)、(1.3) 的任意解，(1.4) 均成立，则称其为全局指数稳定（GES）。

回顾一下，方程 (1.2) 的基本函数 $X(t,s)$ 是以可变初始点 $t_0 = s$、零初始函数 $x(t) = 0$, $t < s$ 和初始值 1 为条件，满足方程 (1.2) 的解： $x(s) = 1$。线性方程的所有稳定性定义都可以利用基本函数用等价形式表述。对于某些方程，这种形式更方便。

定义 3。 线性方程 (1.2) 称为

- 一致稳定，若存在 $\mathcal{M} > 0$，它是 $X(t,s)$ 的上界： $|X(t,s)| \leq M$；

- 一致渐近稳定，当极限 $\lim_{t\to\infty} X(t,s) = 0$ 在 $[t_0, \infty$ 上关于 s 一致时；

- 一致指数稳定，若某些正常数 $\mathcal{M} > 0$ 和 $\nu > 0$ 给出一致指数估计 $|X(t,s)| \leq \mathcal{M} e^{-\nu(t-s)}$。

2. 连续参数方程

本节中，我们假设所有函数 $a_j(t)$、 $h_j(t)$ $k = 1, .., m$ 在 $[t_0, \infty$ 上连续，且 $\lim_{t\to\infty} h_j(t) = \infty$, 初始函数 $\psi(t)$ 在 $(-\infty, t_0]$ 上连续。

含一个时滞的方程 (1.2)

$$\dot{x}(t) + a(t)x(h(t)) = 0 \tag{2.1}$$

已有非常深入的研究，关于方程 (2.1) 稳定性结果的综述，参见 [74] 。特别是，以下著名的稳定性判据 [85] 适用于方程 (2.1)；关于无界时滞，另见 [86] 。

定理 2.1。 *[85]*假设系数 $a(t)$非负，

$$0 < \liminf_{t\to\infty} \int_{h(t)}^{t} a(s)ds \leq \limsup_{t\to\infty} \int_{h(t)}^{t} a(s)ds < \frac{3}{2}.$$

则方程 (2.1)是渐近稳定。常数 $3\ 2$ 是最佳的。

Krisztin [52]得到了关于具有连续参数和多个时滞的方程的一项基本结果。

定理 2.2。 *[52] 1)* 令 $0 \leq a_j(t) \leq a_j$, $0 \leq t - h_j(t) \leq \tau_j$, $j = 1, . . ., n$，系数之和的积分发散 $\int_{\cdot}^{\infty} \sum_{j=1} a_j(s)ds = +\infty$，并且

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \tau_j < 1. \tag{2.2}$$

则，(1.2) 是渐近稳定的，并且 (2.2)右端的常数是最佳常数，不能替换为任何 $c > 1$。

2) 若 $a_j(t) \equiv \alpha_j$ 是正常数，则 (2.2) 中的常数不再是最优的；对于这种情况，右端较大的常数$3\ 2$是可能达到的最佳值。

定理 2.2 给出了方程 (1.2) 的明确稳定性条件。然而，该定理的重要信息是，从一个时滞项增加到多个时滞项时，常数$3\ 2$ 不再保持不变，应替换为更小的、可能达到的最佳常数 1。请注意，对于常系数且只有一个时滞项的情况，最佳常数为 $\pi/2$ ，大于$3\ 2$。

The [74, 推论2.4] 中的陈述为定理 2.2 增添了以下稳定性判据 .

定理 2.3。 *[74]* 设 $a_j(t) \geq 0$, $h_n(t) \geq \cdots \geq h_1(t)$。若

$$\limsup_{t\to\infty} \int_{h_1(t)}^{t} \sum_{j=1}^{n} a_j(s)ds < \frac{3}{2},$$

对于方程(1.2) 的每个解，都存在一个常数 c ，使得$\lim t\to\infty\ ^{x}(t) = c$。此外，发散条件 $\int_{t_0}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} a_j$ $(s)ds = \infty$ 还意味着(1.2) 是渐近稳定。

Faria 在论文 [35] 中研究了一类非常一般的含非时滞项的线性方程，其中包括含非时滞项和若干时滞项的方程 (1.2)，以及含非时滞项和分布时滞的方程。

含有两项的方程 (1.2)（$m = 2$）常作为种群动力学的线性化方程出现。因此，这类方程需要更深入的研究。

考虑一个含非时滞项的方程

$$\dot{x}(t) = -a(t)x(t) + b(t)x(h(t)) \tag{2.3}$$

其中 $a(t) > 0$。

以下 稳定性结果在 [47] 中得出，也可由 [35,推论 3.2 得到].

定理 2.4。 *[35, 47]* 假设存在常数 $T \geq 0$ 和函数 $e(t) \geq 0$ ，该函数局部可积，但 $\int_T^{\infty} e(t)$ $dt = \infty$。若满足以下任一条件

(i) $a(t) - |b(t)| \sup_{t\geq T} \int_{h(t)}^{t} e(u)du \geq e(t)$

or

(ii) $a(t) \geq \alpha|b(t)|$ *for some* $\alpha > 1$

or

(iii) $e(t) \leq a(t) - |b(t)|$, $\sup_{t\geq T} \int_{h(t)}^{t} e(u)du < \infty$

则(2.3)是渐近稳定的。

条件 (ii) 意味着在参数可测的情形下渐近稳定，这是在 [25] 中得到的结果的标量情形。另请注意，对于 $t \geq T$，方程 (2.3) 中的系数并未假设为有界。

考虑一个标量微分方程，其中包含一项不带时滞且系数为正常数的项

$$\dot{x}(t) + \alpha x(t) + \beta(t)x(h(t)) = 0. \tag{2.4}$$

以下结果是 [34]中针对非线性方程得到的一个全局渐近稳定性判据的推论。

定理 2.5. *[34]* 假设 $\alpha > 0$，时滞和变系数有界 $0 \leq \beta(t) \leq b$, $0 \leq t - h(t) \leq h$，其中 $b > 0$, $h \geq 0$, 并且

$$\frac{\alpha}{b} e^{-\alpha h} > \ln \frac{b^2 + \alpha b}{b^2 + \alpha^2}.$$

那么方程 (2.4)是渐近稳定的。

在 [34] 以及 Ivanov、Liz、Trofimchuk 撰写的其他几篇论文中，定理 2.5 被用于为许多种群动力学数学模型推导新的渐近性质。在 [18], 中，定理 2.5 被推广到具有多个时滞项和可测参数的方程。下一节将阐述这一结果。

接下来，研究一个包含非时滞项和一个时滞项的模型

$$\dot{x}(t) + \alpha(t)x(t) + \beta(t)x(h(t)) = 0 \tag{2.5}$$

其中 $\beta(t) \geq 0$。

[88, 定理 2.1] 的判据给出了渐近稳定的尖锐条件。

定理 2.6。 *[88]*设

$$\liminf_{t\to\infty} \int_0^t a(s)ds > -\infty, \ \int_0^\infty e^{-\int_s^t a(u)du} b(s)ds \leq \alpha < 1.$$

那么，条件 $\lim_{t\to\infty} \int_0^t a(s)ds = \infty$ 是 (2.5) 渐近稳定的充要条件。

有时，数学模型的线性化方程包含三项，例如生产项、死亡率项和捕捞项，这三项都可能存在时滞。下面的结果针对这类线性方程。

考虑一个具有三个有界时滞的方程

$$\dot{x}(t) + a(t)x(h_1(t)) - b(t)x(h_2(t)) - c(t)x(h_3(t)) = 0, \tag{2.6}$$

特别是，$0 \leq t - h_j(t) \leq \tau$, $\int_0^\infty a(s)ds = \infty$，第一项具有正系数 $a(t) > 0$，并且在某种意义上占主导地位，超过另外两项。

定理 2.7。 *[78, 定理 7]* 设存在某个 $\theta \in (0,1)$,

$$|b(t)| + |c(t)| < \theta a(t), \ \limsup_{t\to\infty} \int_{h_1(t)}^t (a(s) + |b(s)| + |c(s)|)ds < 1 - \theta.$$

那么，方程 (2.6) 是渐近稳定的。

在 [46], 中，作者研究了具有常系数 $a_j(t) \equiv a_i$ 和分段连续时滞 $h_j(t)$的方程 (1.2)。记

$$a = \sum_{j=1}^{n} a_j, \ \Phi(\tau) = \int_0^{\infty} X(t,\tau)dt,$$

其中， $X(t, \ \tau)$ 是方程 $\dot{x}(t) + x(t-\tau) = 0, \quad 0 < \tau < \frac{\pi}{2}$ 的基本函数。如果 $\tau \leq \frac{1}{e}$，则 $\Phi(\tau) = 1$。对于 $\tau \in (\frac{1}{e}, \ \frac{\pi}{2})$， $\Phi(\tau)$ 的数值估计见 [46, 表 1]。

定理 2.8。 *[46, 定理 3.2]* 假设 $a_i > 0$ 为常数，且存在一个数 $\tau \in [0, \frac{\pi}{2a}]$ 使得

$$\tau a - \frac{1}{\Phi(\tau a)} < \sum_{j=1}^{n} a_j \liminf_{s\to\infty}(s - h_j(s)) \leq \sum_{j=1}^{n} a_j \limsup_{s\to\infty}(s - h_j(s)) < \tau a + \frac{1}{\Phi(\tau a)}\,.$$

那么，具有常系数的方程 (1.2) 是渐近稳定的。

在 [79], 中，研究了含非时滞项的方程

$$\dot{x}(t) = -ax(t) + b(t)x(t-\tau) \tag{2.7}$$

（以及更一般的非线性方程）。作为 [79, 定理 2.5],的推论，我们概述了（2.7）的一个判据。

定理 2.9。 *[79]* 设 $a > 0, 0 \leq b(t) \leq \beta$ 且对于某个 $D > 0$

$$\int_{t-\tau}^{t} e^{-a(t-s)} b(s)ds \leq D < 1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{a^2}{\beta^2}\right) e^{-a\tau}.$$

则方程 (2.7)是一致渐近稳定的。

3. 具有可测参数的方程的稳定性检验

接下来，我们考虑更一般的模型，其中系数和时滞不一定都是连续的。

在本文结束之前，我们假设方程 (1.2) 的所有参数（系数和时滞 $t - h_j(t) \geq 0$）在 $[t_0, \infty)$ 上均为勒贝格可测且本质有界，但初始函数 $\psi(t)$ 除外；初始函数是博雷尔可测且有界的。对于 (1.2) 的所有特殊形式，也作出相同的假设。

我们考虑空间 $\mathbf{L}_\infty[t_0, \infty)$ 中的可测函数（系数、滞后自变量、解的导数），该空间由勒贝格可测函数 $y: [t_0, \infty) \to \mathbb{R}$ 构成，并赋予本质上确界范数 $\|y\| = \operatorname{esssup}_{s\geq t_0} |y(s)|$。我们还将考虑空间 $\mathbf{L}_\infty[a, b]$，其中的函数为 $y: [a, b] \to \mathbb{R}$，并具有$\|y\|_{[a,b]} =$ 本质上确界 $_{s\in[a,b]} |x(s)|$。

N请注意，初值问题 (1.2)、(1.3) 有唯一解，参见 [3, 8, 39, 49].

与齐次方程 (1.2) 一起，我们考虑其初始函数为零的非齐次对应方程

$$\dot{x}(t) + \sum_{j=1}^{n} a_j(t)x(h_j(t)) = f(t), \quad t \geq t_0, \quad x(t) = 0, \quad t \leq t_0, \tag{3.1}$$

其中 $\|f\| < \infty$，范数定义如上。

本节所有定理的证明都主要依赖 Bohl-Perron 结果（引理 3.1）。

引理 3.1. *[3, 39]* 如果对于任意有界的 f，方程 (3.1) 的一个解在 $[t_0, \infty)$上也是有界函数，则(1.2)是一致指数稳定的。

泛函微分方程的非振荡行为与一致指数稳定性之间有着密切联系。对于具有非负系数的方程 **(1.2)**，非振荡性（即存在最终正解）等价于方程 **(1.2)** 的基本函数具有正性。将系数之和记为

$$A(t) = \sum_{j=1}^{n} a_j(t). \tag{3.2}$$

引理 3.2. *[4, P. 52]* 如果 $a_j(t) \geq 0$，且式 (3.2) 中定义的系数之和与零分离 $A(t) \geq a_0 > 0$，那么方程(1.2) 的基本函数具有正性，意味着方程(1.2)是一致指数稳定的。

条件 $A(t) \geq a_0 > 0$ 可以替换为一个更一般的条件：存在 $\mathcal{R} > 0$，使得 $\liminf_{t\to\infty} \int_{t-\mathcal{R}}^{t} A(\zeta)d\zeta > 0$，这等价于常微分方程的一致指数稳定

$$\dot{x}(t) + A(t)x(t) = 0.$$

下面列出一些使方程 **(1.2)** 的基本函数为正的明确条件。其他许多结果可见专著 [4]。

引理 3.3。 *[9, 10]* 假设 $0 \leq a_j(t) \leq \alpha_j$, $t - h_j(t) \leq \tau_j$, A 在(3.2)中定义，并且 r

1) $\int_{\min_j\{h_j(t)\}}^{t} A(s)ds \leq \frac{1}{e}$

or

2) 存在 $\lambda > 0$，使不等式 $\lambda \geq \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e^{\lambda\tau_j}$ 成立。

那么，(1.2) 存在一个正解；此外，它还有一个正基本函数。

本节中的所有稳定性检验分为三组：

1. 类似于（1.2）的方程，其中时滞的数量未作规定；2. 含两个项的模型，且两项均存在时滞；3. 至少含有两个项的方程，其中一项不存在时滞。

3.1. 含多重时滞的方程

我们从方程（1.2）满足渐近稳定或一致指数稳定时的几个明确充分条件开始。

定理 3.1。 *[13, 定理 3.1]* 设 $a_j(t) \geq 0$ 且 上极限 $\limsup_{s\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{A}(s)\, s) \int_{h_j}^{s}(s)\, A(\zeta)\, d\zeta < 1 + \frac{1}{e}$。

若 $\int_{t_0}^{\infty} A(\zeta)d\zeta = \infty$，则方程 (1.2) 是渐近稳定的。若存在 $\mathcal{R} > 0$ 使得 $\liminf_{t\to\infty} \int_{t}^{t+\mathcal{R}} A(\zeta)d\zeta > 0$，则 (1.2) 是一致指数稳定的。

推论 1. 假设 $a_j(t) \geq 0$, $A(t) \equiv \alpha > 0$ 并且

$$\limsup_{t\to\infty} \sum_{j=1}^{n} a_j(t)(t - h_j(t)) < 1 + \frac{1}{e}. \tag{3.3}$$

那么方程 (1.2)是一致指数稳定的。

推论2. 假设 $a_j(t) \geq 0$，而 $0 < a_0 \leq A(t) \leq A$ 并且满足以下任一条件

$$\limsup_{s\to\infty} \int_{\min_j\{h_j(s)\}}^{s} A(\zeta)d\zeta < 1 + \frac{1}{e} \tag{3.4}$$

or

$$\limsup_{s\to\infty} \sum_{j=1}^{n} a_j(s)(s - h_j(s)) < \frac{a_0}{A}\left(1 + \frac{1}{e}\right). \tag{3.5}$$

那么方程 (1.2)是一致指数稳定的。

我们将推论1和推论2与定理 2.2进行比较。在定理 2.2的陈述中，对于常系数，常数 3 2 优于 (3.3) 中的 $1 + \frac{1}{e} \approx 1.368 < 1.5$，但条件 $\sum_{j=1}^{n} a_j(t) \equiv \alpha > 0$ 比每个系数均为常数这一假设更一般。

考虑方程 (1.2) 中系数的一般情形。如果 $\frac{a_0}{A}\left(1 + \frac{1}{e}\right) > 1$ 对于变时滞的情形，那么推论2中的不等式 (3.5) 比定理 2.2 中对应的、常数为 1 的不等式更优。否则，定理 2.2 更精确。

在下面的定理 [9, 定理 6] 和其他一些稳定性检验中，我们不假设 $a_j(t) \geq 0$。这意味着所有系数都可能是振荡的。

定理 3.2. *[9]* 令 $A(t) \geq \alpha > 0$ 满足(3.2)中的条件，并且存在一个自变量函数 $r(t) \leq t$使得

$$\int_{r(t)}^{t} A(s)ds \leq \frac{1}{e}, \quad \limsup_{t\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{|a_j(t)|}{A(t)} \left| \int_{h_j(t)}^{r(t)} \sum_{j=1}^{n} |a_j(s)|ds \right| < 1.$$

那么方程 (1.2)是一致指数稳定的。

推论 3. 设 $A(t) \geq \alpha > 0$ 且

$$\limsup_{s\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{|a_j(s)|}{A(s)} \left| \int_{h_j(s)}^{s} \sum_{j=1}^{n} |a_j(\zeta)|d\zeta \right| < 1.$$

那么，(1.2) 是一致指数稳定的。

接下来，讨论自治情形

$$\dot{x}(t)+\sum_{j=1}^{n}a_jx(t-\sigma_j)=0,t\geq t_0,\ \sigma_j\geq 0. \tag{3.6}$$

$_n$**推论4**。 假设 $\sum a_j>0$ 和$_{j=1}$

$$\sum_{j=1}^{n}|a_j|\sigma_j\leq\frac{\sum_{j=1}^{n}a_j}{\sum_{j=1}^{n}|a_i|}.$$

则方程(3.6)是一致指数稳定的。

定理3.3。 *[11]* 设(3.2) 中的 A 与零保持正距离 $A(t)\geq\alpha>0$。一旦存在正解满足

$$\dot{x}(t)+\sum_{j=1}^{n}a_j^+(t)x(h_j(t))=0,\quad where\quad u^+=\max\{u,0\},$$

（等价地，其基本函数为正），(1.2)是一致指数稳定的。

对于接下来的两个定理，在(1.2)中，系数之和不一定为正：不等式 $A(t)\geq 0$ 可能不成立。这意味着系数之和可能是振荡的。

定理3.4。 *[20]* 用 A_0 表示范数之和 $A_0=\sum_{j=1}^{n}\|a_j\|$。设

$$\dot{x}(t)+A(t)x(t)=0 \tag{3.7}$$

为了一致指数稳定（*UES*），我们回顾一下，时滞是有界的 $0\leq t-h_j\ (t)\ \leq\tau_j$。如果

$$A_0\int_{t_0}^{t}e^{-\int_s^t A(\xi)d\xi}\sum_{j=1}^{n}\tau_j|a_j(s)|ds\leq\beta<1,\quad t\geq t_0$$

那么（1.2）是一致指数稳定
的。

注意到，对于某个 $\mathcal{R}>0$，方程（3.7）是一致指数稳定的，其中

$$\liminf_{s\geq t_0}\int_s^{s+\mathcal{R}}A(\zeta)d\zeta>0.$$

接下来，我们将系数之和表示为一个正项 $\tilde{a}$ 与一个较小的振荡部分之和。

$_n$**定理3.5**。 *[20]* 设 $\sum|a_j\ (t)\ |\leq A_0$、 $s-h_j\ (s)\ \leq\tau_j$ 以及 $A\ (t)\ =\tilde{a}\ (t)\ +\alpha\ (t)$，其中$_{j=1}$

$$\tilde{a}(t)\geq a_0>0,\quad \sup_{t\geq s\geq t_0}\left|\int_s^t\alpha(\xi)d\xi\right|\leq\alpha_0<\infty,\quad A_0\sum_{j=1}^{n}\tau_j\left\|\frac{a_j}{\tilde{a}}\right\|<e^{-\alpha_0}.$$

那么，方程 (1.2)是一致指数稳定的。

现在，我们明确假设该方程既有正系数也有负系数，并且每一项的符号都是预先指定的。

定理 3.6。 *[11]*一旦该方程

$$\dot{x}(t) + \sum_{j=1}^{n} \left[a_j(t)x(h_j(t)) - b_j(t)x(g_j(t)) \right] = 0 \tag{3.8}$$

具有正基本函数且

$$b_j(t) \geq 0, \quad \liminf_{t\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \left[a_j(t) - b_j(t) \right] > 0,$$

$$h_j(t) \leq g_j(t), \quad \limsup_{t\to\infty}(t - h_j(t)) \leq H, \quad H \limsup_{t\to\infty} b_j(t) < 1, \quad j = 1, \dots n,$$

我们便有 (3.8) 是一致指数稳定的。

注 1。 若 (1.2) 具有正基本函数且 $b_j(t) \geq 0$，则 (3.8) 也同样如此。

考 虑具有不同数量正项和负项（通常如此）的方程

$$\dot{x}(t) + \sum_{j=1}^{n} a_j(t)x(h_j(t)) - \sum_{i=1}^{\ell} b_i(t)x(g_i(t)) = 0. \tag{3.9}$$

此处 $a_j(t) \geq 0$, $b_i(t) \geq 0$。

定理 3.7。 *[11]* 假设(1.2)具有正基本函数，且

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(t) - \sum_{i=1}^{\ell} b_i(t) \geq \alpha > 0.$$

那么，方程(3.9)是一致指数稳定的。

此外，我们还给出了若干关于多重时滞方程保持一致指数稳定性的结果。第一个定理是由针对脉冲方程所得定理的一个推论。当然，关于含脉冲方程的每个结论也适用于非脉冲方程。

考虑

$$\dot{x}(t) + \sum_{j=1}^{n} a_j(t)x(h_j(t)) + \sum_{i=1}^{\ell} b_i(t)x(g_i(t)) = 0, \tag{3.10}$$

其中，(3.10) 的参数满足与 (1.2 中相同的条件).

Th定理 3.8. *[7]* 假设方程 (1.2) 是一致指数稳定的。存在 $\nu > 0$ ，使得如果

$$\limsup_{s\to\infty} \int_{s}^{s+1} \sum_{i=1}^{\ell} |b_i(\zeta)| d\zeta < \nu$$

那么方程 (3.10) 是一致指数稳定。

推论 5. 假设方程 (1.2)是一致指数稳定。那么，以下三个条件中的任意一个

$$\lim_{s\to\infty}\int_s^{s+1}\sum_{i=1}^{\ell}|b_i(\zeta)|d\zeta=0,\quad \lim_{s\to\infty}\sum_{i=1}^{\ell}|b_i(s)|=0,\quad \int_{t_0}^{\infty}\sum_{i=1}^{\ell}|b_i(\zeta)|d\zeta<\infty$$

这意味着(3.10)是一致指数稳定的。

我们结合方程 (1.2)，考察一个具有相同数量时滞项的模型

$$\dot{x}(t)+\sum_{j=1}^{n}b_j(t)x(g_j(t))=0. \tag{3.11}$$

这是对方程 (1.2) 的一种“扰动”。此外，假设方程 (3.11) 满足与方程 (1.2) 类似的条件。

定理 3.9。 *[14]* 设方程(1.2) 是一致指数稳定的， $A(t)\geq a_0>0$，其中 A 由(3.2)定义，且对于某个 $\mu\in(0、1)$，

$$\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{|a_j(t)-b_j(t)|}{A(t)}+\frac{|b_j(t)|}{A(t)}\left|\int_{h_j(t)}^{g_j(t)}\sum_{j=1}^{n}|b_j(s)|ds\right|\right]\leq\mu<1.$$

那么方程(3.11) 是一致指数稳定的。

接下来，考虑系数相同情况下的时滞扰动。

定理 3.10。 *[14]* 设系数非负 $a_j(t)\geq 0$ 且其和与零分离 $A(t)\geq a_0>0$，其中 A 由(3.2)定义，且(1.2) 是非振荡的，即其基本函数为正。该不等式

$$\limsup_{s\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j(s)}{A(s)}\left|\int_{h_j(s)}^{g_j(s)}A(\zeta)d\zeta\right|<1$$

可得

$$\dot{x}(t)+\sum_{j=1}^{n}a_j(t)x(g_j(t))=0$$

是一致指
数稳定的。

3.2. 含两个时滞项的方程

在下述结果中，对系数的符号没有限制，只要求它们的和满足符号条件。

定理 3.11。 *[10]* 假设存在一个正数常量 $a_0>0$，使得 $\alpha(t)+\beta(t)\geq a_0$且

$$\int_{h(t)}^{t}(\alpha(\zeta)+\beta(\zeta))d\zeta\leq\frac{1}{e},\quad \limsup_{t\to\infty}\frac{|\beta(t)|}{\alpha(t)+\beta(t)}\left|\int_{h(t)}^{g(t)}(\alpha(\zeta)+\beta(\zeta))d\zeta\right|<1.$$

那么，该方程

$$\dot{x}(t)+\alpha(t)x(h(t))+\beta(t)x(g(t))=0$$

是 *UES*。

进一步，设其中一项为正且占主导，另一项为负。我们从正项的时滞也较大的情况开始。

定理 3.12。 *[11]*设

$$\alpha(t) \geq \beta(t) \geq 0, \quad t \geq g(t) \geq h(t), \quad \limsup_{t\to\infty} \int_{h(t)}^{t} \left[\alpha(\zeta) - \frac{1}{e}\beta(\zeta)\right] d\zeta < \frac{1}{e}.$$

那么，基本函数的

$$\dot{x}(t) + \alpha(t)x(h(t)) - \beta(t)x(g(t)) = 0 \tag{3.12}$$

如果该和不仅非负，而且还与零分离 α（t）$-\beta$（t）$\geq a_0 > 0$，则这将导致 (3.12) 具有一致指数稳定性。

接下来，考虑没有时滞层次结构的 (3.12)，只要两个时滞之差足够小。

定理 3.13。 *[19]* 设 α（t）≥ 0、β（t）≥ 0 满足其差与零分离$\alpha\ t\ -\beta\ t\ \geq a_0 > 0$，且满足以下任一条件( )

1) $\limsup_{t\to\infty} \int_{h(t)}^{t} [\alpha(\zeta) - \beta(\zeta)]d\zeta \leq \frac{1}{e}$, $\left\|\frac{\beta}{\alpha-\beta}\right\| \left\|\int_{h(\cdot)}^{g(\cdot)} [\alpha(\zeta) - \beta(\zeta)]d\zeta\right\| < \frac{1}{2}$

or

2) $\limsup_{t\to\infty} \int\limits_{h(t)}^{t} [\alpha(\zeta) - \beta(\zeta)]d\zeta > \frac{1}{e}, \left\|\int_{h(\cdot)}^{(\cdot)} [\alpha(\zeta) - \beta(\zeta)]d\zeta\right\| + 2\left\|\frac{\beta}{\alpha-\beta}\right\| \left\|\int_{h(\cdot)}^{g(\cdot)} [\alpha(\zeta) - \beta(\zeta)]d\zeta\right\| < 1 + \frac{1}{e},$

equation (3.12) *is UES.*

3.3. 含有非时滞项的方程

令其中一项不包含时滞

$$\dot{x}(t) + \alpha(t)x(t) + \sum_{j=1}^{n} b_j(t)x(h_j(t)) = 0 \quad \text{for} \quad t \geq t_0. \tag{3.13}$$

记为 $b(t) = \sum_{j=1}^{n} b_j(t)$。

下面的结果将定理 2.5 推广到具有可测参数和多个时滞的情形。

定理 m 3.14. *[18] (3.13)* 中的所有系数均为非负，$\alpha(t) \geq a_0 > 0$ 一个 d

$$h_0 = \limsup_{s\to\infty} \int_{\min_j\{h_j(s)\}}^{s} \alpha(\zeta)d\zeta < \infty, \quad \beta = \limsup_{s\to\infty} \frac{b(t)}{\alpha(t)} < \infty.$$

If

$$\frac{1}{\beta}e^{-h_0} > \ln\frac{\beta^2+\beta}{\beta^2+1}$$

则方程 (3.13) 是渐近稳定的。

对于具有正系数的方程，定理 3.14 表明，非时滞项的支配并非必要条件。接下来，考虑系数可能是振荡的情形。

定理 3.15. *[20]* 设 $\alpha(t)$非负。则不等式

$$\limsup_{s\geq t_0}\int_{t_0}^{s} e^{-\int_{\zeta}^{s}\alpha(\xi)d\xi}\sum_{j=1}^{n}|b_j(\zeta)|d\zeta \leq \gamma < 1$$

意味着) 上 (3.13)的所有解有界。

考虑一个辅助方程

$$\dot{y}(t)+(\alpha(t)-\lambda)y(t)+\sum_{j=1}^{n}b_j(t)e^{\lambda(t-h_j(t))}y(h_j(t))=0. \tag{3.14}$$

定理 3.16. *[22]* 设对于固定的 $\lambda > 0$, (3.14) 的所有解在 $[t_0,\infty)$上有界。则方程 (3.13)是一致指数稳定。

$_n$**推论 6.** *[22, 25]* ***a)*** 若 $\alpha(t) \geq 0$ 且 $\sum|b_j(t)| \leq \alpha(t)$ 则方程 (3.13) 的所有解在$_{j=1}$上有界，其中 $[t_0,\infty)$。

$_n$***b)*** 若 $\alpha(t) \geq a_0 > 0$，则对于任意 $\gamma \in (0,1)$，不等式 $\sum|b_j(t)| \leq \gamma\alpha(t)$ 意味着$_{j=1}$一致指数稳定
(3.13).

例 1。 带有非时滞项的模型

$$\dot{x}(t)=-x(t)+b(t)x(h(t))=0,\ x(0)=1 \tag{3.15}$$

将作为测试方程，用于概述本节中的判据。

让我们从定理 3.14 以及参数的特殊情形开始

$$b(t)=1.8+0.2\cos t,\quad \beta=2,\quad h(t)=t-0.25-0.07\sin t,\quad h_0=0.32.$$

那么，很容易看出，非延迟项并不占支配地位，但

$$\frac{1}{\beta}e^{-h_0}\approx 0.363 > \ln\frac{\beta^2+\beta}{\beta^2+1}\approx 0.358,$$

因此，根据定理 3.14，(3.15) 是渐近稳定的。

对于 (3.15) 中任意符号的 b，推论 6 表明，当 $|b(s)| \leq \gamma < 1$ 时，(3.15) 是一致指数稳定的。最后，让我们证明，在系数符号任意的情况下，非延迟项的积分支配

$$\int_0^{\infty}(\alpha(\zeta)+|\beta(\zeta)|)\,d\zeta=-\infty \tag{3.16}$$

对于方程 (3.13) 的渐近稳定性而言**并不充分**。

为此，考虑（3.15），其中在 $[0,1]$ 上，我们有 $h(t) \equiv 0$, $b_1(t) \equiv 0.5$, $x(0) = 1$，从而得到 $\dot{x}(t) = -x(t) + 0.5$，且解为 $0.5 + 0.5e^{-t}$。我们还有 $x(1) = (1 + e^{-1})/2 \approx 0.684$，该

正解在 $[0,1]$ 上递减。接下来，取 $h(t) \equiv 0$, $b_1(t) \equiv 2$ 于 $[1,T]$ 上，其中 T 将在稍后定义，使得 $x(T) = 1$。初值问题

$$\dot{x}(t) = -x(t) + 2, \quad x(1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2e}$$

在某个从 1 开始的区间上有解 $x(t) = 2 - \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2e}\right) e^{-(t-1)}$。我们有

$$2 - \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2e}\right) e^{-(T-1)} = 1 \;\Leftrightarrow\; e^{T-1} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2e} \;\Leftrightarrow\; T - 1 = \ln\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2e}\right) \approx 0.275 < 0.5.$$

因此，初值为 $x(0) = 1$ 且具有如下所述 T-周期参数的 (3.15)

$$h(t) = 0, \quad b(t) = \begin{cases} 0.5, & t \in [0,1), \\ 2, & t \in [1,T) \end{cases}$$

也是 T-周期的。这里时滞有界于 $T < 1.5$，且积分

$$\int_0^T (\alpha(\zeta) + |b(\zeta)|)\, d\zeta = \int_0^1 (-1 + 0.5)\, d\zeta + \int_1^T (-1 + 2)\, d\zeta = -0.5 + T - 1 < -0.2 < 0,$$

因此，条件 (3.16) 成立，但 (3.15) 并非渐近稳定，因为它具有一个周期解。

4. 先验估计的应用

本节将利用线性方程 (1.2) 的解及其导数的先验估计，给出一致指数稳定性检验。

我们假设，与前文一样，系数和时滞均可测且有界，并且 $t - h_j(t) \le \tau_j$, $j = 1, \ldots, n$。

记

$$A(t) = \sum_{j=1}^n a_j(t), \quad J = [t_0, t_1], \quad \Omega \subset N_n = \{1, \ldots, n\}, \quad A_\Omega(t) = \sum_{j \in \Omega} a_j(t),$$

半直线和区间上的范数 $\|f\|$, $\|f\|_J$ 按上述方式定义；通常，我们用 I 表示单位矩阵。

回顾一下，矩阵 $B = (b_{ij})_{i,\ j=1}^m$ 是一个 M-矩阵（这里我们只考虑非奇异矩阵），当且仅当其非对角元均非正，且满足以下条件之一： B 可逆，并且$B^{-1} \ge 0$ （即 B^{-1} 的所有元素均非负）；或者（与此等价）其顺序主子式均为正。特别地，矩阵 B 是一个 M-矩阵，且在$b_{12} \le 0$, $b_{21} \le 0$, $b_{11} > 0$, $b_{22} > 0$ 并且 $\det B > 0$时非奇异。

定理4.1。 设存在一个非空集合$\Omega \subset N_n$ 和一个常数 $\alpha > 0$，使得 $A_\Omega(t) \ge \alpha > 0$，并且满足以下条件之一

$$\sum_{j=1}^n \tau_j \|a_j\| < 1, \ \sum_{j=1}^n \|a_j\| \sum_{j \in \Omega} \tau_j \left\| \frac{a_j}{A_\Omega} \right\| + \sum_{j \in N_n/\Omega} \left\| \frac{a_j}{A_\Omega} \right\| < 1 \tag{4.1}$$

or

$$\|A\| \sum_{j \in \Omega} \tau_j \left\| \frac{a_j}{A_\Omega} \right\| < \left(1 - \sum_{j=1}^n \tau_j \|a_j\|\right) \left(1 - \sum_{j \in N_n/\Omega} \left\| \frac{a_j}{A_\Omega} \right\|\right). \tag{4.2}$$

那么方程 (1.2)是一致指数稳定的。

证明。 1) 假设 $x(t)$ 是方程 (3.1) 的一个解，并求得其导数 $\dot{x}(t)$ 的两个估计。由方程 (3.1) 可得

$$\|\dot{x}\|_J \le \sum_{j=1}^{n} \|a_j\| \|x\|_J + \|f\|. \tag{4.3}$$

通过加法与减法项 $A(t)x(t)$，(3.1)可表示为

$$\dot{x}(t) + A(t)x(t) = \sum_{j=1}^{n} a_j(t) \int_{h_j(t)}^{t} \dot{x}(\xi)d\xi + f(t). \tag{4.4}$$

等式 (4.4)意味着

$$\|\dot{x}\|_J \le \|A\| \|x\|_J + \sum_{j=1}^{n} \tau_j \|a_j\| \|\dot{x}\|_J + \|f\|. \tag{4.5}$$

2) 接下来，我们先在 J 上估计 $x(t)$，然后再在半直线上进行估计。为此，将 (3.1) 改写为

$$\dot{x}(t) + A_\Omega(t)x(t) = \sum_{j\in\Omega} a_j(t) \int_{h_j(t)}^{t} \dot{x}(\xi)d\xi + \sum_{j\in N_n/\Omega} a_j(t)x(h_j(t)) + f(t). \tag{4.6}$$

由 (4.6) 及假设 $x(t_0) = 0$，可得

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} e^{-\int_\zeta^t A_\Omega(s)ds} A_\Omega(\zeta) \left(\sum_{j\in\Omega} \frac{a_j(\zeta)}{A_\Omega(\zeta)} \int_{h_j(\zeta)}^{\zeta} \dot{x}(\xi)d\xi + \sum_{j\in N_n/\Omega} \frac{a_j(\zeta)}{A_\Omega(\zeta)} x(h_j(\zeta)) \right) d\zeta + \tilde{f}(t),$$

其中 $\tilde{f}(t) = \int_{t_0}^{t} e^{-\int_s^t A_\Omega(\zeta)^{d\zeta}} f(s)ds$。

若 $A_\Omega(t) \ge 0$，则 $\left| \int_{t_0}^{t} e^{-\int_s^t A_\Omega(\tau)^{d\tau}} A_\Omega(s)u(s)\ ds \right| \le \|u\|$。因此 $\|\tilde{f}\| < \infty$并且

$$\|x\|_J \le \sum_{j\in\Omega} \tau_j \left\| \frac{a_j}{A_\Omega} \right\| \|\dot{x}\|_J + \sum_{j\in N_n/\Omega} \left\| \frac{a_j}{A_\Omega} \right\| \|x\|_J + \|\tilde{f}\|. \tag{4.7}$$

3) 引入记号

$$X = \{\|x\|_J, \|\dot{x}\|_J\}^T,\ F = \{\|f\|, \|\tilde{f}\|\}^T,\ A_1 = \begin{pmatrix} \sum_{j\in N_n/\Omega} \left\| \frac{a_j}{A_\Omega} \right\| & \sum_{j\in\Omega} \tau_j \left\| \frac{a_j}{A_\Omega} \right\| \\ \sum_{j=1}^{n} \|a_j\| & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_1 = I - A_1 = \begin{pmatrix} 1 - \sum_{j\in N_n/\Omega} \left\| \frac{a_j}{A_\Omega} \right\| & -\sum_{j\in\Omega} \tau_j \left\| \frac{a_j}{A_\Omega} \right\| \\ -\sum_{j=1}^{n} \|a_j\| & 1 \end{pmatrix}.$$

不等式 (4.7) 和 (4.3) 推出 $X \le A_1X + F$，因此 $B_1X \le F$。若条件 (4.1) 成立，则矩阵 B_1 非奇异，且也是一个 M-矩阵。因此 $X \le B_1^{-1}F$，而 B_1^{-1}是一个元素均为非负数的矩阵，这些元素均不依赖于区间 $J = [t_0, t_1]$。于是 $\|x\| < \infty$，并根据引理 3.1，方程 (1.2) 一致指数稳定。

现在假设条件 (4.2) 成立，并记

$$A_2 = \begin{pmatrix} \sum_{j\in N_n/\Omega} \left\| \frac{a_j}{A_\Omega} \right\| & \sum_{j\in\Omega} \tau_j \left\| \frac{a_j}{A_\Omega} \right\| \\ \|A\| & \sum_{j=1}^{n} \tau_j \|a_j\| \end{pmatrix},\ B_2 = I - A_2.$$

不等式 (4.7) 和 (4.5) 意味着 $X \le A_2X + F$，因此 $B_2X \le F$。若条件 (4.2) 成立，则矩阵 B_2 非奇异，且也是一个 M-矩阵。因此 $X \le B_2^{-1}F$，并且逆矩阵 B_2^{-1} 的元素均为非负数，且都不依赖于初始区间 $J = [t_0, t_1]$。于是 $\|x\| < \infty$，由引理 3.1 可知，方程 (1.2) 是一致指数稳定的。 □

选择 $\Omega = N_n$ 得到以下陈述。

推论7。 令 $A(t) \ge \alpha > 0$ 以及以下任一条件

(i) $\sum_{j=1}^{n} \tau_j \|a_j\| < 1,\ \sum_{j=1}^{n} \|a_j\| \sum_{j=1}^{n} \tau_j \left\| \frac{a_j}{a} \right\| < 1$

or

(ii) $\|A\| \sum_{j=1}^{n} \tau_j \left\| \frac{a_j}{a} \right\| < 1 - \sum_{j=1}^{n} \tau_j \|a_j\|.$

则，方程 (1.2) 是一致指数稳定的。

条件 (4.1) 包含 $2^n - 1$ 个相互独立的稳定性判据。如果集合 Ω 由一个元素组成，则条件 (4.1) 优于 (4.2) 中相应的条件。因此，条件 b) 仅有 $2^n - n - 1$ 个独立于条件 a) 的稳定性条件，所以条件 a) 和 b) 总共有 $2^{n+1} - n - 2$ 个相互独立的稳定性判据。例如，对于 $n = 2$，下面列出了 4 个相互独立的稳定性判据。

推论 8。 考虑一个具有两个时滞项的模型

$$\dot{x}(t) + a_1(t)x(h_1(t)) + a_2(t)x(h_2(t)) = 0, \tag{4.8}$$

假设方程 (4.8) 的参数满足与方程 (1.2)相同的条件。令以下四个条件中的任意一个成立：

1) $a_1(t) \ge \alpha > 0,\ \tau_1(\|a_1\| + \|a_2\|) + \left\| \frac{a_2}{a_1} \right\| < 1;$

2) $a_2(t) \ge \alpha > 0,\ \tau_2(\|a_1\| + \|a_2\|) + \left\| \frac{a_1}{a_2} \right\| < 1;$

3) $a_1(t) + a_2(t) \ge \alpha > 0,\ (\|a_1\| + \|a_2\|) \left(\tau_1 \left\| \frac{a_1}{a_1 + a_2} \right\| + \tau_2 \left\| \frac{a_2}{a_1 + a_2} \right\| \right) < 1;$

4) $a_1(t) + a_2(t) \ge \alpha > 0,\ \|a_1 + a_2\| \left(\tau_1 \left\| \frac{a_1}{a_1 + a_2} \right\| + \tau_2 \left\| \frac{a_2}{a_1 + a_2} \right\| \right) < 1 - \tau_1\|a_1\| - \tau_2\|a_2\|.$

Then equation (4.8) *is UES.*

考虑含有非时滞项的方程 (3.13)。以下推论给出了一个时滞无关指数稳定性条件。

推论9。 假设 $a(t) \ge a_0 > 0$ 并且满足以下任一条件

a) $\sum_{j=1}^{n} \left\| \frac{b_j}{\alpha} \right\| < 1$

or

b) for some $t_1 > t_0$ *and* $0 < \gamma < 1$, *we have* $\sum_{j=1}^{n} |b_j(t)| \le \gamma\alpha(t)$.

那么，方程 (3.13) 是一致指数稳定的。

例 2. 设两个时滞均为常数，而两个系数中有一个是振荡的

$$\dot{x}(t) + (1 - 2\cos^2 t)x(t - 0.2) + 2\cos^2 t\ x(t - 0.1) = 0, \quad t \ge 0. \tag{4.9}$$

下面验证方程 (4.9) 是否满足推论 8 中的假设 1)–4)。由于不等式$a_i(t) \ge \alpha > 0$ 对 $i = 1$ 和 $i = 2$ 均不成立，因此条件 1) 和 2) 均不成立。我们有

$$a_1(t) + a_2(t) = 1 > 0, \quad \|a_1\| = \left\|\frac{a_1}{a_1 + a_2}\right\| = 1, \quad \|a_2\| = \left\|\frac{a_2}{a_1 + a_2}\right\| = 2,$$

因此，条件 3) 中的第二个条件为 $3(0.2 + 0.2) < 1$，也不成立。

条件 4) 为 $0.2 + 0.2 < 1 - 0.2 - 0.2$，因此成立。由此，根据推论 8 的第 4 部分，方程 (4.9) 是一致指数稳定的。

不难举出这样的例子：推论 8 中条件 1)–3) 的其中一个成立，而其余三个条件均不成立。因此，条件 1)–4) 相互独立。

5. 非线性方程的应用

为了说明目前在线性情形下获得的稳定性检验的应用，取经典 Mackey-Glass 方程的一个变体作为模型。

例 3. 我们研究

$$\dot{x}(t) + \alpha(t)x(h_1(t))\left(1 + \frac{1}{1 + x^2(h_1(t))}\right) + \beta(t)\frac{x(h_2(t))}{1 + x^2(h_2(t))} = 0 \tag{5.1}$$

其中系数 $\alpha(t)$和 $\beta(t)$为可测本质有界系数，且时滞 $0 \le t - h_i(t) \le \tau_i, i = 1, 2$。

为得到局部指数稳定的充分条件，记

$$f_1(t, u) = \alpha(t)u\left(1 + \frac{1}{1 + u^2}\right), \quad f_2(t, u) = \beta(t)\frac{u}{1 + u^2}$$

and

$$a(t) = \lim_{u\to 0}\frac{f_1(t, u)}{u} = \alpha(t), \quad b(t) = \lim_{u\to 0}\frac{f_2(t, u)}{u} = \beta(t).$$

方程 (5.1) 的线性化方程为

$$\dot{y}(t) + \alpha(t)y(h_1(t)) + \beta(t)y(h_2(t)) = 0. \tag{5.2}$$

分别由推论1和推论2可得以下结果。

陈述1. 设系数之和 $\alpha(t) + \beta(t) \equiv a_0 > 0$ 为常数，而

$$\tau_1\|\alpha\| + \tau_2\|\beta\| < 1 + \frac{1}{e}.$$

那么，方程（5.1）是局部渐近稳定的。

陈述 2. 令 $0 < a_0 \le \alpha(t) + \beta(t) \le A_0$ 且满足以下任一条件

a) $\tau_1\|\alpha\| + \tau_2\|\beta\| < \dfrac{a_0}{A_0}\left(1 + \dfrac{1}{e}\right)$

or

b) $\limsup\limits_{s\to\infty}\left(\int_{h_1(s)}^{s}[\alpha(\zeta)+\beta(\zeta)]\,d\zeta + \int_{h_2(s)}^{s}[\alpha(\zeta)+\beta(\zeta)]\,d\zeta\right) < 1 + \dfrac{1}{e}.$

那么，方程（5.1）是局部渐近稳定的。

接下来，我们将应用推论 8。

陈述 3。 假设以下四个假设中的任意一个成立:

a) $\alpha(t) \ge \alpha_0 > 0,\ \tau_1(\|\alpha\| + \|\beta\|) + \left\|\dfrac{\beta}{\alpha}\right\| < 1;$

b) $\beta(t) \ge \beta_0 > 0,\ \tau_2(\|\alpha\| + \|\beta\|) + \left\|\dfrac{\alpha}{\beta}\right\| < 1;$

c) $\alpha(t) + \beta(t) \ge a_0 > 0, (\|\alpha\| + \|\beta\|)\left(\tau_1\left\|\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\right\| + \tau_2\left\|\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\right\|\right) < 1;$

d) $\alpha(t) + \beta(t) \ge a_0 > 0, \|\alpha+\beta\|\left(\tau_1\left\|\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\right\| + \tau_2\left\|\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\right\|\right) < 1 - \tau_1\|\alpha\| - \tau_2\|\beta\|.$

Then equation (5.1) is LES.

有时，对于方程（1.1），我们只关注某个区间 $A \le x(t) \le B$ 内的解。在这种情况下，讨论全局指数稳定时，我们只考虑这类解。种群动力学方程尤其如此，因为只有正解在生物学上才有意义，而且通常还存在某个自然的上界。

如果线性化方程（1.2）是一致指数稳定的，我们可以得出结论：方程（1.1）的零平衡点（或任何其他常数平衡点；我们可以通过平移将其移至零点）是局部指数稳定的。全局指数稳定则更为复杂。一种称为全局线性化稳定性 [12], 的方法，可以通过构造一个与非线性方程（1.1）相关的线性方程来应用。令 $x(t)$ 为方程（1.1）的任意一个固定解。记

$$c_j(t) = \begin{cases} \frac{f_j(t,x(h_j(t)))}{x(h_j(t))}, & x(h_j(t)) \ne 0, \\ 0, & x(h_j(t)) = 0, \end{cases}$$

并考虑相应的线性方程

$$\dot{y}(t) + \sum_{j=1}^{n} c_j(t) y(h_j(t)) = 0. \tag{5.3}$$

如果方程（5.3）是一致指数稳定的，那么由于 $x(t)$ 是方程（5.3）的解，它具有指数估计。因此，方程（1.1）的每个解都具有指数估计。这意味着方程（1.1）是全局指数稳定的。

更准确地说，全局线性化稳定性方法 [12] 在下面给出。

定理 5.1。 *[12]* 假设存在一些数

$$-\infty \le A \le B \le +\infty,\ -\infty \le d_j \le D_j \le +\infty,\ j = 1, \dots, n,$$

使得方程 (1.1)的任意解 $x(t)$ 都满足先验估计

$$A \le \liminf_{s\to\infty} x(s) \le \limsup_{s\to\infty} x(s) \le B$$

and

$$d_j \le \frac{f_j(t,u)}{u} \le D_j,\ u \in [A,B], \quad j = 1,\dots,n. \tag{5.4}$$

若对于满足不等式 $d_j \le c_j(t) \le D_j$ 的任意 $c_j(t)$ ，方程 (5.3) 都是一致指数稳定的，则 (1.1) 是全局指数稳定的。

例4。 让我们回到模型 **(5.1)**。为了获得 **(5.1)** 的全局稳定性结果，我们将应用定理 **5.1**。取解 **(5.1)** 的 $x(t)$，并记

$$c(t) := \frac{f_1(t,x(h_1(t)))}{x(h_1(t))} = \alpha(t)\left(1 + \frac{1}{1+x^2(h_1(t))}\right),\ d(t) := \frac{f_2(t,x(h_2(t)))}{x(h_2(t))} = \frac{\beta(t)}{1+x^2(h_2(t))}. \tag{5.5}$$

接下来，考虑 **(5.1)** 的线性对应方程

$$\dot z(t) + c(t)z(h_1(t)) + d(t)z(h_2(t)) = 0 \tag{5.6}$$

采用上述记号。

由于不等式 $d(t) \ge d_0 > 0$ 不成立，推论 **1** 和推论 **8** 的 **b)** 部分对于方程（**5.6**）均不成立。在下面的命题中，我们将应用推论 **8** 的第 **1** 部分（第 **3** 和第 **4** 部分可以用类似方式考虑），以及推论**2**。

命题4。 假设存在一个正下界 $\alpha_0 > 0$ ，使得以下两者之一成立:

a) $\alpha(t) \ge \alpha_0, \quad \tau_1(2\|\alpha\| + \|\beta\|) + \left\|\frac{\beta}{\alpha}\right\| < 1$

or

b) $\alpha(t) + \beta(t) \ge a_0, \quad (\tau_1+\tau_2)(2\|\alpha\| + \|\beta\|) < 1 + \frac{1}{e}.$

因此，方程（**5.1**）是全局指数稳定的。

证明。 **a**）对于方程（**5.6**），考虑到方程（**5.5**），我们有

$$c(t) \ge \alpha(t) \ge \alpha_0 > 0, \quad \|c\| = 2\|\alpha\|, \|d\| = \|\beta\|, \quad \left\|\frac{d}{c}\right\| = \left\|\frac{\beta}{\alpha}\right\|.$$

推论 **8** 的第**1**）部分表明，方程（**5.6**）是一致指数稳定的。根据定理**4.1**，方程（**5.1**）是全局指数稳定的。

b）我们有

$$0 < \alpha_0 \le \alpha(t) \le c(t) + d(t) \le 2\|\alpha\| + \|\beta\|.$$

因此

$$\limsup_{t\to\infty}\left(\int_{h_1(t)}^{t}(c(s)+d(s))ds + \int_{h_2(t)}^{t}(c(s)+d(s))ds\right) \le (2\|\alpha\| + \|\beta\|)(\tau_1+\tau_2) < 1 + \frac{1}{e}.$$

不等式（**3.4**）对方程（**5.6**）成立。根据推论**2**，该方程是一致指数稳定的。因此，方程（**5.1**）是全局指数稳定的。 □

在例4中，无需应用解的先验估计即可获得GES条件。在这种情况下，我们估计了线性方程（5.6）的系数；这些系数在无限区间上依赖于未知解。如果已知解的近似估计，则可以用有限区间替代无限区间。这将为非线性方程带来更加准确和高效的稳定性检验。

先验估计的应用示例，包括 Mackey-Glass 方程的三个经典模型，可见于论文 [12, 15, 16, 17]。

6. 讨论与开放问题

由含有一个或多个时滞的微分方程描述的数学模型，在自然科学和工程学的许多领域都有应用。这些模型面临的一个重要问题，是如何获得明确且易于验证的局部和全局稳定性条件。在过去二十年中，各类泛函微分方程都取得了许多有趣的研究成果。除了本文引用的文献之外，我们还可以提及以下关于线性与非线性时滞微分方程稳定性的有趣论文
[1, 2, 5, 6, 26, 27, 28, 23, 45, 40, 44],[55]-[60], [65, 50, 53, 75, 76, 77, 87],，以及一些较早的研究成果 [48, 45, 51]。

关于线性时滞微分方程组的显式稳定性条件，可见[29, 30, 36, 41, 42, 43, 50, 61, 62, 63, 64, 80, 84, 89]；关于积分微分方程和具有分布时滞的方程的稳定性，可见 [23, 31, 33], [66]-[71],[82, 83]。

遗憾的是，目前尚无反映该领域最新进展的专著，也没有针对各类方程稳定性的综述文章。本文部分填补了关于具有多个时滞的标量微分方程这一方面的空白。除综述外，我们还得到了若干新的指数稳定性条件。这些新的一致指数稳定性检验十分简单，便于应用。

要将全局线性化稳定性方法应用于给定的非线性微分方程，我们必须估计相应线性时滞微分方程的系数，而这些系数通常取决于给定非线性方程的未知解。在第5节中，我们在完全不了解解的情况下，得到了（5.1）中系数的此类估计。然而，对于许多已知的数学模型，为了估计线性方程的系数，我们首先需要构造给定非线性方程解的先验估计：

$$A \le \liminf_{t\to\infty} x(t) \le \limsup_{t\to\infty} x(t) \le B.$$

一些已知数学模型中全局线性化稳定性方法的应用示例可见于 [12, 16, 17, 21]。

本文将具有可测参数的方程与具有连续参数的方程的稳定性判据分别讨论。事实上，对于具有可测参数的方程，任何稳定性判据在将问题约化为具有连续时滞和系数的情形后也都适用；但反过来通常并不成立。本文研究系数和时滞均有界的方程，这适用于研究全局指数稳定和局部指数稳定，但并非一般情形。关于系数无界和/或时滞无界的方程的稳定性新结果，以及对已有结果的综述，见近期论文 [22]。

与这篇综述一致，我们列出由此引出的若干开放问题。

- 能否将定理 2.2 的结果（且保持相同常数）推广到系数和时滞允许不连续（即为可测）的情形? 请注意

不久前，定理 2.1 已推广至可测参数（以及更一般的方程，包括含有分布式时滞的方程），参见 [54, 75] 及其中的参考文献。

- 下一个尚待解决的问题是将逐点条件 (2.2) 推广到更一般的积分形式（如果可能的话）。

$$\limsup_{t\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\int_{h_j(t)}^{t}a_j(\zeta)d\zeta \le M < 1.$$

这个不等式能否推出方程 (1.2) 的一致指数稳定性？如果不能，最佳常数是多少？

- 迄今为止，全局线性化稳定性方法的所有应用都针对标量方程。如何将此方法推广到向量方程、标量方程组、高阶方程以及含脉冲的模型？

- 考虑方程 (2.1)，其中系数可以取任意符号，也可以是振荡的。假设 $\liminf_{t\to\infty}\int_{h}^{t}{}_{(t)}\,a(\zeta)$ $d\zeta > 0$。是否存在常数 $M > 0$，使得条件

$$\limsup_{t\to\infty}\int_{h(t)}^{t}a(\zeta)d\zeta < M$$

能够推出方程 (2.1) 的渐近稳定性吗？

- 定理 2.9 能否推广到系数均为变量的模型（即不仅时滞项的系数可变，非延迟项的系数也可变），并以 limsup 或/和 lim inf 替代精确值？

$$\dot{x}(t) = -\alpha(t)x(t) + \beta(t)x(h(t))?$$

致谢

第二作者（E. Braverman）获得了 NSERC 探索资助 # RGPIN-2020-03934 的部分资助。

参考文献

[1] Alexandrova, Irina；Mondié, Sabine，任意时滞线性系统的稳定性，Lect. Notes Control Inf. Sci. Proc. Springer，Cham，2022年，73–80。

[2] I. Alexandrova，S. Mondié，含非公度时滞线性系统的必要稳定性条件，Automatica J. IFAC 129（2021年），论文编号 109628，共 8 页。

[3] N.V. Azbelev，P.M. Simonov，《带后效微分方程的稳定性》。稳定性与控制：理论、方法与应用，20。Taylor & Francis，伦敦，2003年。

[4] R.P. Agarwal、L. Berezansky、E. Braverman、A. Domoshnitsky，《泛函微分方程的非振荡理论及其应用》，Springer，纽约，2012。

[5] ，L. Barreira、C. Valls，时滞差分方程与稳定性，《动力学与微分方程杂志》37 (2025年)，第1期，95–113页。[6] L. Barreira、C. Valls，时滞方程的稳定性，《电子定性微分方程理论杂志》2022，论文第45号，共24页。[7] L. Berezansky、E. Braverman，线性时滞脉冲微分方程受扰动时指数稳定性的保持，《分析与应用杂志》14 (1995年)，157–174页。[8] L. Berezansky、E. Braverman，关于若干线性与非线性时滞微分方程的稳定性，《数学分析及其应用杂志》314 (2006年)，391–411页。[9] L. Berezansky、E. Braverman，具有多个时滞的线性微分方程的指数稳定性，《数学分析及其应用杂志》324 (2006年)，1336–1355页。[10] L. Berezansky、E. Braverman，具有多个时滞的线性微分方程的显式指数稳定性条件，《数学分析及其应用杂志》332 (2007年)，246–264页。[11] L. Berezansky、E. Braverman，振荡系数时滞微分方程的非振荡性与指数稳定性，《动力学与控制系统杂志》15 (2009年)，63–82页。[12] L. Berezansky、E. Braverman，时滞微分方程的全局线性化稳定性理论，《Nonlinear Anal.》71 (2009年)，2614–2624页。[13] L. Berezansky、E. Braverman，具有多个时滞的线性微分方程的新稳定性条件，《Abstr. Appl. Anal.》2011，文章编号178568，共19页。[14] L. Berezansky、E. Braverman，具有多个时滞的方程的指数稳定性保持，《波希米亚数学杂志》136 (2011年)，135–144页。[15] L. Berezansky、E. Braverman、L. Idels，呼吸动力学的Mackey-Glass模型：综述与新结果，《Nonlinear Anal.》75 (2012)，6034–6052页。[16]L. Berezansky、E. Braverman、L. Idels，具有非单调反馈的造血作用Mackey-Glass模型：稳定性、振荡与控制，《应用数学与计算》219 (2013年)，626–6283页。[17] L. Berezansky、E. Braverman、L. Idels，重新探讨具有单调反馈的造血作用Mackey-Glass模型，《应用数学与计算》219 (2013年)，4892–4907页。[18] L. Berezansky、E. Braverman，含非时滞项的标量时滞微分方程的稳定性条件，《应用数学与计算》250 (2015年)，157–164页。[19] L. Berezansky、E. Braverman，关于具有正、负系数的时滞方程的稳定性及其应用，《分析与应用杂志》38 (2019年)，157–189页。[20] L. Berezansky、E. Braverman，振荡系数与核下线性时滞微分方程的指数稳定性，《Differential Integral Equations》35 (2022)，559–580页。[21] L. Berezansky、E. Braverman，死亡率项含小时时滞的Nicholson果蝇微分方程，《非线性分析：现实世界应用》81 (2025年)，论文编号104193，共10页。

[22] L. Berezansky, J. Diblík, Z. Svoboda, Z. Šmarda, 《无界时滞线性积分微分方程有界性与指数稳定性的判据》, Differential Integral Equations 38（2025年）, 43–70。[23] L. Berezansky, A. Domoshnitsky, O. Kupervasser, 《Volterra 型线性积分微分方程的有界解与指数稳定性》, 《应用数学快报》154（2024年）, 论文编号 109112, 共 6 页。[24] A. Berman, R. Plemmons, 《数学科学中的非负矩阵》, 计算机科学与应用数学, Academic Press, 纽约-伦敦, 1979。[25] E. Braverman, C. Tunç, O. Tunç, 《具有无界时滞和分布时滞且由占主导地位的非时滞项构成的非线性系统的全局稳定性》, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 143（2025年）, 论文编号 108590, 共 17 页。[26] J. Čermák, L. Nechvátal, 《具有可公度滞后自变量的线性微分方程的稳定性》, 《应用数学快报》125（2022年）, 论文编号 107750, 共 8 页。[27] J.G. Dix, 《具有变时滞的一阶微分方程解的渐近行为》, Comput. Math. Appl. 50（2005）, 1791–1800。[28] A. Domoshnitsky, E. Berenson, S. Levi, E. Litsyn, 《一类时滞一阶微分方程的 Floquet 理论与稳定性》, Georgian Math. J. 31（2024）, 第 5 期, 757–772。[29] A. Domoshnitsky, M. Gitman, R. Shklyar, 《不确定中立型时滞系统的稳定性与解的估计》, Bound. Value Probl. 2014, 2014:55, 共 14 页。[30] A. Domoshnitsky, R. Shklyar, M. Gitman, V. Stolbov, 《时滞微分系统中基矩阵的正性与指数稳定性》, Abstr. Appl. Anal. 2014, 文章编号 490816, 共 9 页。[31] A. Domoshnitsky, 《非自治积分微分方程的稳定性》, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 新泽西州哈肯萨克, 2005, 1059–1064。[32] A. Domoshnitsky, Ya.M. Goltser, 《研究积分微分方程分岔与稳定性的一种方法》, Math. Comput. Modelling 36（2002）, 第 6 期, 663–678。[33] A. Domoshnitsky, Ya.M. Goltser, 《研究积分微分方程稳定性的一种方法》, Nonlinear Anal. 47（2001）, 第 6 期, 3885–3896。[34] A. Ivanov, E. Liz, S. Trofimchuk, 《Halanay 不等式、Yorke 3/2 稳定性判据与带最大值的微分方程》, Tohoku Math. J. 54（2002）, 277–295。[35] T. Faria, 《无限时滞非自治线性微分系统的稳定性》, J. Dyn. Diff. Equations 34（2022年）, 第 1 期, 747–773。[36] T. Faria, 《无限时滞非自治线性微分系统的稳定性》, J. Dynam. Differential Equations 34（2022年）, 第 1 期, 747773。[37] M.I. Gil', 《振荡系数时滞微分方程的稳定性》, Electron. J. Differential Equations 2010, 第 99 号, 共 5 页。

[38] M.I. Gil’, 《振荡系数与分布时滞泛函微分方程的稳定性》, Differ. Equ. Appl. 3（1）（2011年）11–19。[39] M. Gil’, 《向量微分时滞方程的稳定性》。Front. Math., Birkhäuser/Springer Basel AG，巴塞尔，2013年。[40] M. Gil’, 《巴拿赫空间中具有多个时滞的非自治泛函微分方程的时滞相关稳定性条件》, Nonauton. Dyn. Syst. 8（2021年）, 第 1 期, 168–179。[41] M. Gözen, C. Tunç, 《具有变时滞的一阶线性微分系统指数稳定性的新结果》, Nonlinear Stud. 27（2020年）, 第 1 期，275–284。[42] M. Gözen, C. Tunç, 《关于变时滞线性系统指数稳定性的简述》, Appl. Math. Inf. Sci. 11（2017年）, 第 3 期，899–906。[43] B.G. Grebenshchikov, A.B. Lozhnikov, 《一类线性时滞系统的渐近性质》, Differ. Equ. 59（2023年）, 第 5 期，577–590。[44] S.A. Gusarenko, 《具有滞后自变量的线性微分方程的稳定性判据》, Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat. 2022，第 12 期，34–56；译文载于 Russian Math. (Iz. VUZ) 66（2022年）, 第 12 期，33–52。[45] S.A. Gusarenko, A.I. Domoshnitsky, 《一阶线性标量泛函微分方程的渐近与振荡性质》, Differential Equations 25（12）（1989）1480–1491。[46] I. Győri, F. Hartung, 《时滞扰动微分方程与差分方程的稳定性》, Fields Inst. Commun.，29，美国数学会，普罗维登斯，RI，2001，181–194。[47] I. Györi, L. Horváth, 《时滞微分方程与 Halanay 型不等式解的精确估计》, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. A 37（2017）3211–3242。[48] I. Györi, M. Pituk, 《线性时滞微分方程的稳定性判据》, Differential Integral Equations 10（1997）841–852。[49] J. K. Hale, S.M. Verduyn Lunel, 《泛函微分方程导论》。应用数学科学，**99**。施普林格出版社，纽约，1993年。[50] G.D. Hu, 《通过线性时滞微分系统的解的基本矩阵获得时滞相关稳定性条件》, J. Comput. Appl. Math. 475（2026年）, 论文编号 117041，共 8 页。[51] V.B. Kolmanovskii, A.D. Myshkis。《泛函微分方程理论与应用导论》。数学及其应用 **463**，克吕沃学术出版社，多德雷赫特，1999年。[52] T. Krisztin, 《一维泛函微分方程的稳定性性质》, Funkcial. Ekvac. 34（1991）241–256。[53] E. Liz, M. Pituk, 《标量泛函微分方程中的指数稳定性》, J. Inequal. Appl. 2006年，文章编号 37195，共 10 页。[54] V.V. Malygina, 《Myshkis 3/2 定理及其推广》, 《西伯利亚数学杂志》64（2023年）, 1372–1384。

[55] V. Malygina, T. Sabatulina，关于具有滞后效应且系数异号的自治微分方程解的估计，《泛函微分方程》31 (2024), no. 3-4, 191–203.[56] V.V. Malygina, K.M. Chudinov，关于自治泛函微分方程稳定解的精确双边估计，《西伯利亚数学杂志》63 (2022), no. 2, 299–315.[57] V.V. Malygina, K.M. Chudinov，含多个变时滞的微分方程解的稳定性。I，《俄罗斯数学》（高校学报）57 (2013), no. 6, 21–31.[58] V.V. Malygina, K.M. Chudinov，含多个变时滞的微分方程解的稳定性。II，《俄罗斯数学》（高校学报）57 (2013), no. 7, 1–12.[59] V.V. Malygina, K.M. Chudinov，含多个变时滞的微分方程解的稳定性。III，《俄罗斯数学》（高校学报）57 (2013), no. 8, 37–48.[60] V.V. Malygina，含分布时滞的线性微分方程稳定域的精确边界，《高等学校学报·数学》2008, no. 7, 19–28；译载于《俄罗斯数学》（高校学报）52 (2008), no. 7, 15–23.[61] A. Malyshev, M. Sadkane，线性时滞系统的稳定半径，《BIT》64 (2024), no. 1, Paper No. 5, 24 pp.[62] S. Mondié, A. Egorov, M.A. Gomez，线性时滞系统的李雅普诺夫稳定性判据，《控制年度评论》54 (2022), 68–80.[63] M. Mulyukov，含离散滞后自变量的时滞微分方程的稳定性，《泛函微分方程》31 (2024), no. 3-4, 205–221.[64] M. Mulyukov，含离散滞后自变量和常集中时滞的一个方程的稳定性，《高等学校学报·数学》2023, no. 10, 90–94；译载于《俄罗斯数学》（高校学报）67 (2023), no. 10, 81–84.[65] P.H.A. Ngoc，耦合线性时滞时变微分差分方程的指数稳定性，《IEEE 自动控制汇刊》63 (2018), no. 3, 843–848.[66]P.H.A. Ngoc, L.T. Hieu，非线性 Volterra 积分微分方程的一致渐近稳定性，《国际控制杂志》95 (2022), no. 3, 729–735.[67] P.H.A. Ngoc, L.T. Hieu，积分微分方程的指数稳定性及其应用，《应用数学快报》117 (2021), Paper No. 107127, 8 pp.[68] P.H.A. Ngoc, T.B. Tran, C.T. Tinh, N.D. Huy，泛函微分方程指数稳定性的标量判据，《系统与控制快报》137 (2020), 104642, 7 pp.[69] P.H.A. Ngoc, C.T. Tinh, T.B. Tran，泛函微分方程指数稳定性的进一步结果，《国际系统科学杂志》50 (2019), no. 7, 1368–1377.[70] P.H.A. Ngoc, T. Thai Bao, T. Cao Thanh, H. Nguyen Dinh，线性非自治泛函微分方程指数稳定性的新判据，《系统科学与复杂性杂志》32 (2019), no. 2, 479–495.

[71]T.A. Tran, P.H.A. Ngoc，线性 Volterra 时变积分微分方程的新稳定性判据，《台湾数学杂志》21 (2017), no. 4, 841–863.[72] M. Qu, H. Matsunaga，含离散时滞和分布时滞的线性微分方程的精确稳定性判据，《数学分析及其应用杂志》539 (2024), no. 2, Paper No. 128663, 15 pp.[73] T.L. Sabatulina, V.V. Malygina，含滞后效应的微分方程的稳定性，《俄罗斯数学》（高校学报）58 (2014), no. 4, 20–34.[74] J.W.H. So, J.S. Yu, M.P. Chen，标量时滞微分方程的渐近稳定性，《函数方程》39 (1996), 1–17.[75] J.I. Stavroulakis, E. Braverman，线性时滞微分方程的振荡、收敛与稳定性，《微分方程杂志》293 (2021), 282–312.[76] O. Tunç，非线性微分方程的稳定性判据与解估计。（英文摘要）《国际优化、控制与理论应用杂志》IJOCTA 13 (2023), 92–103.[77] C. Tunç, O. Tunç，具有常时滞的积分微分方程定性分析的新结果，《非线性凸分析杂志》23 (2022), 435–448.[78] T. Taniguchi，利用 Lyapunov-Razumikhin 方法研究非自治泛函微分方程渐近行为的定理，《数学分析及其应用杂志》189 (1995), 715–730.[79] X. Tang, X. Zou，主导时滞项下标量时滞微分方程的稳定性，《爱丁堡皇家学会会刊 A 辑》133 (2003), 951–968.[80] J. Tian, Z. Ren, S. Zhong，一个新的积分不等式及其在时滞系统稳定性中的应用，《应用数学快报》101 (2020), 106058, 7 pp.[81] C. Tunç, S.A. Mohammed，非线性 Volterra 积分微分方程解的渐近稳定性、一致稳定性与有界性，《乌克兰数学杂志》72 (2020), no. 12, 17081720；译载于《乌克兰数学杂志》72 (2021), no. 12, 1976–1989.[82] C. Tunç, İ. Akbulut，具有变时滞的一阶线性积分微分方程的稳定性，《数学分析与应用通报》10 (2018), no. 2, 19–30.[83] C. Tunç, İ. Akbulut，具有变时滞的一阶线性积分微分方程的稳定性，《数学分析与应用通报》10 (2018), no. 2, 19–30.[84] Y. Wang, H. Liu, X. Li，时变时滞系统稳定性分析的一种新方法，《IEEE 自动控制汇刊》66 (2021), no. 3, 1422–1428.[85] T. Yoneyama，关于一维时滞微分方程的$_{3\ 2}$ 稳定性定理，《数学分析及其应用杂志》125 (1987), 161–173.[86] T. Yoneyama，含无界时滞的一维时滞微分方程的 3/2 稳定性定理，《数学分析及其应用杂志》165 (1992), 133–143.[87] T. Yskak，时滞微分方程解的稳定性，《西伯利亚高等数学》33 (2023), no. 3, 253–260.

[88] B. Zhang, 时滞微分方程中的压缩映射与稳定性, Dynamic Syst. Appl., 4 (2004年), 183–190.[89] R. Zhang, D. Zeng, J.H. Park, S. Zhong, Y.Liu, X.Zhou, 时变时滞系统稳定性分析的新方法, J. Franklin Inst. 356 (2019年), no. 7, 4174–4189.