arXiv:2601.03462v1 [math.DG] 6 Jan 2026

关于双调和共形超曲面

A. MOHAMMED CHERIF 和 YE-LIN OU

Abstract

本文首先推导一般黎曼流形中共形超曲面的双调和方程，将其推广为 [17] 中双调和超曲面的方程以及 [16, 18, 20]中双调和共形曲面的方程。随后，我们证明，若空间形式中的全脐超曲面存在到环境空间的双调和共形浸入，则共形因子必为等距函数。我们还证明，非正曲率空间形式中的非极小全脐超曲面的任何部分，都不存在到该空间形式的双调和共形浸入；而对于正曲率空间形式，我们证明全脐超曲面 $S^4(\sqrt{\frac{3}{2}}) \hookrightarrow S^5$ 确实存在到 S^5的双调和共形浸入。

1. Biharmonic conformal hypersurfaces: Equations and some examples

回顾一下，黎曼流形之间的映射 $\varphi: (M, g) \longrightarrow (N, h)$ 若为双能量泛函的临界点，则称其为双调和映射

$$E_2(\varphi, \Omega) = \frac{1}{2}\int_{\Omega} |\tau(\varphi)|^2 \, \mathrm{d}x$$

对于 M 的任意紧子集 Ω，其中 $\tau(\varphi) = \mathrm{Trace}_g \nabla \mathrm{d}\varphi$表示 φ 的张力场。双调和映射方程由双能量泛函的欧拉-拉格朗日方程给出，它是一个四阶偏微分方程组（参见 [8]）

$$\tau_2(\varphi) := \mathrm{Trace}_g(\nabla^{\varphi}_{\cdot}\nabla^{\varphi}_{\cdot} - \nabla^{\varphi}_{\nabla^M_{\cdot}\cdot})\tau(\varphi) - \mathrm{Trace}_g R^N(\mathrm{d}\varphi(\cdot), \tau(\varphi))\mathrm{d}\varphi(\cdot) = 0,$$

其中 R^N to 表示 (N, h) 的曲率算子，定义如下：

$$R^N(X, Y)Z = [\nabla^N_X, \nabla^N_Y]Z - \nabla^N_{[X,Y]}Z.$$

日期：01/06/26. 2020 数学主题分类。58E20, 53C12。关键词和短语。双调和映射、双调和共形浸入、共形超曲面、全脐超曲面、等距函数。1

双调和映射研究的一个重要方面聚焦于几何双调和映射，即具有几何意义（或满足某些几何约束）的双调和映射。这类映射包括双调和等距浸入（即推广了极小子流形概念的双调和子流形）和双调和共形映射；二者都带来了丰硕的成果和有趣的联系。关于双调和子流形的研究，参见综述文章 [14, 19]、近期出版的一本著作 [22], 以及其中的大量参考文献。关于双调和黎曼浸没，或更一般地说，水平弱共形双调和映射，参见 [15, 9, 13, 4, 10, 30, 7, 1, 27, 28, 21, 31, 32, 23, 11]。关于相同维数流形之间的双调和共形映射，参见 [3, 4, 5, 6, 24]。关于双调和共形浸入，参见 [16, 18, 20, 29]。

回顾一下，共形浸入是两个黎曼流形之间的浸入 $\phi\colon (M^m,\ \bar{g}) \to (N^n,\ h)$，满足 $\phi^*h = \lambda^2\bar{g}$ 对于 M 上的某个正函数 λ。当 λ 为常数时，称其为相似浸入。特别地，当 $\lambda \equiv 1$ 时，共形浸入就成为等距浸入。还需回顾的是，等距浸入的像称为子流形，而余维为一的子流形称为超曲面。同理，共形浸入的像称为共形子流形，余维为一的共形子流形称为共形超曲面。

注意，每个满足 $\phi^*h = \lambda^2\bar{g}$ 的共形浸入 $\phi\colon (M^m, \bar{g}) \to (N^n, h)$ 都与一个子流形相关联，即一个等距浸入 $\phi\colon (M^m, g = \lambda^2\bar{g}) \to (N^n, h)$。反过来，任意子流形（即等距浸入）$(M^m, \phi^*h) \to (N^n, h)$ 以及定义在 M 上的任意正函数 λ，都与一个共形因子为 λ 的共形浸入 $(M^m, \lambda^{-2}\phi^*h) \to (N^n, h)$ 相关联。根据 [18]（定义 2.2），我们称黎曼流形 (N^{m+1}, h) 中由等距浸入 $\phi\colon (M^m, g = \phi^*h) \to (N^{m+1}, h)$ 定义的超曲面允许浸入到 (N^{m+1}, h) 中的双调和共形浸入，如果存在一个光滑函数 $\lambda\colon M^m \to \mathbb{R}^+$，使得共形因子为 λ 的共形浸入 $\phi\colon (M^m, g = \lambda^{-2}g) \to (N^{m+1}, h)$ 是一个双调和映射。

由此可知，具有共形因子 λ 的双调和共形浸入与存在具有 λ 的双调和共形浸入的超曲面满足同一个方程。对于 $m = 2$, [16, 18, 20] 中证明了，共形浸入 $\phi\colon (M^2,\ \bar{g}) \to (N^3,\ h)$ 满足 $\varphi^*h = \lambda^2\bar{g}$ 是双调和的，当且仅当

$$(1)\qquad \begin{cases} \Delta(\lambda^2 H) - (\lambda^2 H)[|A|^2 - \mathrm{Ric}^N(\xi,\xi)] = 0, \\ A(\mathrm{grad}(\lambda^2 H)) + (\lambda^2 H)[\mathrm{grad}H - (\mathrm{Ric}^N(\xi))^\top] = 0, \end{cases}$$

其中，ξ、A和 H 分别是曲面 $\varphi(M) \subset (N^3, h)$的单位法向量场、形算子和平均曲率函数，而

算子 Δ、grad和 $|,\ |$ 均是相对于曲面上的诱导度量 $g=\varphi^*h=\lambda^2\bar{g}$ 而言的。

对于一般的 m，我们有

定理 1.1。 共形浸入 $\phi:(M^m,g)\to(N^{m+1},h)$ 具有 $\bar{\phi}^*h=\lambda^2\bar{g}$，当且仅当其为双调和的

$$
\begin{aligned}
(2)\quad & m\Big[\Delta H-H|A|^2+H\mathrm{Ric}^N(\xi,\xi)\Big]-2(m-2)\mathrm{Tr}\,g(A(\cdot),\nabla^M_{\cdot}\nabla\ln\lambda)\\
&+2mH\Big[\Delta\ln\lambda-(m-4)\,|\nabla\ln\lambda|^2\Big]-2m(m-4)g(\nabla\ln\lambda,\nabla H)\\
&+(m-2)(m-6)g(A(\nabla\ln\lambda),\nabla\ln\lambda)=0,\\
(3)\quad & -m\Big[2A(\nabla H)+\frac{m}{2}\nabla H^2-2H(\mathrm{Ric}^N\xi)^\top\Big]-(m-2)\Big[2\,\mathrm{Ric}^M(\nabla\ln\lambda)\\
&+\nabla\Delta\ln\lambda\Big]-2(m-2)\Big[\Delta\ln\lambda-(m-4)\,|\nabla\ln\lambda|^2\Big]\nabla\ln\lambda\\
&+\frac{1}{2}(m-2)(m-6)\nabla|\nabla\ln\lambda|^2+2m(m-4)HA(\nabla\ln\lambda)=0,
\end{aligned}
$$

其中，ξ、A和 H 分别是超曲面 $\phi(M)\subset(N^{m+1},h)$ 的单位法向量场、形算子和平均曲率函数，而算子 Δ、∇ 和 $|\cdot|$ 是相对于超曲面上诱导度量 $g=\phi^*h=\lambda^2\bar{g}$ 定义的。

证明。 文献 [16] 证明了，共形浸入 $\phi:(M^m,\bar{g})\to(N^n,h)$ 具有 $\phi^*h=\lambda^2\bar{g}$，当且仅当其为双调和的

$$
\begin{aligned}
(4)\quad & \tau_2(\phi,g)+(m-2)J^\phi_g(\mathrm{d}\phi(\nabla\ln\lambda))\\
&+2\Big[\Delta\ln\lambda-(m-4)\,|\nabla\ln\lambda|^2\Big]\tau(\phi,g)-(m-6)\nabla^\phi_{\nabla\ln\lambda}\tau(\phi,g)\\
&-2(m-2)\Big[\Delta\ln\lambda-(m-4)\,|\nabla\ln\lambda|^2\Big]\mathrm{d}\phi(\nabla\ln\lambda)\\
&+(m-2)(m-6)\nabla^\phi_{\nabla\ln\lambda}\,\mathrm{d}\phi(\nabla\ln\lambda)=0,
\end{aligned}
$$

其中，$\tau_2(\phi,g)$ 是超曲面 $\phi(M)\subset(N^{m+1},h)$ 的双张力场，而∇ 和 Δ 分别表示相对于度量$g=\lambda^2\bar{g}$定义的梯度和拉普拉斯算子。

由于 ϕ 是浸入，我们可以在局部将 $p\in M$ 认作 $\phi(p)\in N$，并且 $\mathrm{d}\phi(X)=X$。我们将利用这些关系来计算项 $J^\phi_g(\mathrm{d}\phi(\nabla\ln\lambda))$。设 $\{e_i\}_{1\le i\le m}$ 是 M 中关于黎曼度量 g 的局部标准正交标架。那么，$\{e_i=\frac{1}{\lambda}e_i\}_{1\le i\le m}$ 是 M 中关于黎曼度量 $\bar{g}=\lambda^2 g$ 的局部标准正交标架。根据雅可比算子的定义

J_g^ϕ，我们有

$$(5)J_g^\phi(\mathrm{d}\phi(\nabla \ln\lambda)) = -\sum_{i=1}^{m}\big[R^N(\nabla \ln\lambda, e_i)e_i + \nabla^\phi_{e_i}\nabla^\phi_{e_i}\nabla \ln\lambda - \nabla^\phi_{\nabla^M_{e_i}e_i}\nabla \ln\lambda\big].$$

记 $T_1 = -\sum_{i=1}^m R^N(\nabla \ln\lambda, e_i)e_i$, $T_2 = -\sum_{i=1}^m \nabla^\phi_{e_i}\nabla^\phi_{e_i}\nabla \ln\lambda$ 和 $T_3 = \sum_{i=1}^m \nabla^\phi_{\nabla^M_{e_i}e_i}\nabla \ln\lambda$，我们将如下计算这三项。

利用高斯方程

$$\begin{aligned} g(R^M(V,W)X,Y) &= h(R^N(V,W)X,Y) + h(B(W,X),B(V,Y)) \\ &\quad -h(B(V,X),B(W,Y)), \end{aligned}$$

我们得到 T_1 的切向部分为

$$\begin{aligned} T_1^\top &= -\sum_{i,j=1}^{m} h(R^N(\nabla \ln\lambda, e_i)e_i, e_j)e_j \\ &= -\sum_{i,j=1}^{m}\Big[g(R^M(\nabla \ln\lambda, e_i)e_i, e_j) + h(B(\nabla \ln\lambda, e_i), B(e_i, e_j)) \\ &\quad -h(B(e_i, e_i), B(\nabla \ln\lambda, e_j))\Big]e_j. \end{aligned} \tag{6}$$

利用 $B(X, Y) = g(A(X) Y)\xi$, $\sum_{i=1}^m B(e_i, e_i) = mH\xi$, $\mathrm{Ric}^M(\nabla \ln \lambda) = \sum_{i=1}^m R^M(\nabla \ln \lambda, e_i)e_i$ 我们可以将方程 (6) 改写为

$$T_1^\top = -\mathrm{Ric}^M(\nabla \ln\lambda) - \sum_{j=1}^{m} g(A(\nabla \ln\lambda), A(e_j))e_j + mHA(\nabla \ln\lambda). \tag{7}$$

T_1 的法向部分为

$$T_1^\perp = -\sum_{i=1}^{m} h(R^N(\nabla \ln\lambda, e_i)e_i, \xi)\xi = -\mathrm{Ric}^N(\nabla \ln\lambda, \xi)\xi. \tag{8}$$

由（7）和（8），我们得到

$$\begin{aligned} T_1 &= -\mathrm{Ric}^M(\nabla \ln\lambda) - \sum_{j=1}^{m} g(A(\nabla \ln\lambda), A(e_j))e_j + mHA(\nabla \ln\lambda) \\ &\quad -\mathrm{Ric}^N(\nabla \ln\lambda, \xi)\xi. \end{aligned} \tag{9}$$

T_2 的切向部分为

$$\begin{aligned} T_2^{\top} &= -\sum_{i,j=1}^{m} h(\nabla^{\phi}_{e_i}\nabla^{\phi}_{e_i}\nabla \ln\lambda, e_j)e_j \\ &= -\sum_{i,j=1}^{m}\big[e_i h(\nabla^{\phi}_{e_i}\nabla \ln\lambda, e_j) - h(\nabla^{\phi}_{e_i}\nabla \ln\lambda, \nabla^{\phi}_{e_i}e_j)\big]e_j \\ &= -\sum_{i,j=1}^{m}\Big[e_i h(\nabla^{M}_{e_i}\nabla \ln\lambda, e_j) - h(\nabla^{M}_{e_i}\nabla \ln\lambda, \nabla^{M}_{e_i}e_j) \\ &\quad -h(B(e_i,\nabla \ln\lambda), B(e_i,e_j))\Big]e_j. \end{aligned} \tag{10}$$

利用 $\phi^*h = \lambda^2\overline{g} = g$, $d\phi(X) = X$，我们可以将方程 (10) 写成

$$\begin{aligned} T_2^{\top} &= -\sum_{j=1}^{m}\Big[\sum_{i=1}^{m}\Big(e_i g(\nabla^{M}_{e_i}\nabla \ln\lambda, e_j) - g(\nabla^{M}_{e_i}\nabla \ln\lambda, \nabla^{M}_{e_i}e_j)\Big) \\ &\quad -g(A(\nabla \ln\lambda), A(e_j))\Big]e_j \\ &= -\sum_{j=1}^{m}\Big[\sum_{i=1}^{m} g(\nabla^{M}_{e_i}\nabla^{M}_{e_i}\nabla \ln\lambda, e_j) - g(A(\nabla \ln\lambda), A(e_j))\Big]e_j. \end{aligned} \tag{11}$$

T_2 的法向部分为

$$\begin{aligned} T_2^{\perp} &= -\sum_{i=1}^{m}\big[\nabla^{\phi}_{e_i}\nabla^{\phi}_{e_i}\nabla \ln\lambda\big]^{\perp} \\ &= -\sum_{i=1}^{m}\big[\nabla^{\phi}_{e_i}\nabla^{M}_{e_i}\nabla \ln\lambda + \nabla^{\phi}_{e_i}B(e_i,\nabla \ln\lambda)\big]^{\perp} \\ &= -\sum_{i=1}^{m}\Big[B(e_i,\nabla^{M}_{e_i}\nabla \ln\lambda) + \nabla^{\perp}_{e_i}B(e_i,\nabla \ln\lambda)\Big]. \end{aligned}$$

对所有 $i = 1,...,m$使用 $\nabla^{\perp}_{e_i}\xi = 0$ ，我们得到

$$\begin{aligned} T_2^{\perp} &= -\sum_{i=1}^{m}\Big[g(A(e_i),\nabla^{M}_{e_i}\nabla \ln\lambda) + \nabla^{\perp}_{e_i}g(A(e_i),\nabla \ln\lambda)\Big]\xi \\ &= -\sum_{i=1}^{m}\Big[2g(A(e_i),\nabla^{M}_{e_i}\nabla \ln\lambda) + g(\nabla^{M}_{e_i}A(e_i),\nabla \ln\lambda)\Big]\xi. \end{aligned} \tag{12}$$

由 (11) 和 (12) 可得

$$\begin{aligned} T_2 &= -\sum_{i=1}^{m}\Big[\nabla^M_{e_i}\nabla^M_{e_i}\nabla\ln\lambda - g(A(\nabla\ln\lambda),A(e_i))e_i \\ &\quad +2g(A(e_i),\nabla^M_{e_i}\nabla\ln\lambda)\xi + g(\nabla^M_{e_i}A(e_i),\nabla\ln\lambda)\xi\Big]. \end{aligned} \tag{13}$$

通过直接计算，我们得到

$$\begin{aligned} T_3 &= \sum_{i=1}^{m}\nabla^{\phi}_{\nabla^M_{e_i}e_i}\nabla\ln\lambda = \sum_{i=1}^{m}\Big[\nabla^M_{\nabla^M_{e_i}e_i}\nabla\ln\lambda + B(\nabla^M_{e_i}e_i,\nabla\ln\lambda)\Big] \\ &= \sum_{i=1}^{m}\Big[\nabla^M_{\nabla^M_{e_i}e_i}\nabla\ln\lambda + g(A(\nabla^M_{e_i}e_i),\nabla\ln\lambda)\xi\Big]. \end{aligned} \tag{14}$$

将 (9)、(13) 和 (14) 代入 (5)，并利用公式

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\,(\nabla^M)^2\nabla\ln\lambda &= \mathrm{Ric}^M(\nabla\ln\lambda) + \nabla\Delta\ln\lambda, \\ \sum_{i=1}^{m}(\nabla_{e_i}A)(e_i) &= m\,\nabla H - (\mathrm{Ric}^N\xi)^{\top},\ (see\ e.g.,[12]) \end{aligned}$$

我们得到

$$\begin{aligned} J^{\phi}_g(\mathrm{d}\phi(\nabla\ln\lambda)) &= -2\mathrm{Ric}^M(\nabla\ln\lambda) + mHA(\nabla\ln\lambda) - \nabla\Delta\ln\lambda \\ &\quad -2\sum_{i=1}^{m}g(A(e_i),\nabla^M_{e_i}\nabla\ln\lambda)\xi - mg(\nabla H,\nabla\ln\lambda)\xi. \end{aligned} \tag{15}$$

另一方面，利用 $\tau(\phi,\ g) = mH\xi$ 并经过直接计算，我们有

$$\begin{aligned} \nabla^{\phi}_{\nabla\ln\lambda}\tau(\phi,g) &= m\nabla^{\phi}_{\nabla\ln\lambda}H\xi \\ &= mg(\nabla H,\nabla\ln\lambda)\xi + mH\nabla^{\phi}_{\nabla\ln\lambda}\xi \\ &= mg(\nabla H,\nabla\ln\lambda)\xi - mHA(\nabla\ln\lambda). \end{aligned} \tag{16}$$

将 (15)、(16) 和

$$\begin{aligned} \nabla^{\phi}_{\nabla\ln\lambda}d\phi(\nabla\ln\lambda) &= \nabla^M_{\nabla\ln\lambda}\nabla\ln\lambda + B(\nabla\ln\lambda,\nabla\ln\lambda) \\ &= \frac{1}{2}\nabla|\nabla\ln\lambda|^2 + g(A(\nabla\ln\lambda),\nabla\ln\lambda)\xi, \end{aligned}$$

代入 (4)，我们得出，共形浸入 $\phi\colon (M^m, g) \to (N^{m+1}, h)$ 是双调和的，当且仅当

$$
\begin{aligned}
(17)\qquad & \tau_2(\phi, g) + (m-2)\Big[-2\mathrm{Ric}^M(\nabla \ln\lambda) + mHA(\nabla\ln\lambda) - \nabla\Delta\ln\lambda \\
& - 2\sum_{i=1}^{m} g(A(e_i), \nabla^M_{e_i}\nabla\ln\lambda)\xi - mg(\nabla H, \nabla\ln\lambda)\xi\Big] + 2mH\Big[\Delta\ln\lambda \\
& - (m-4)\left|\nabla\ln\lambda\right|^2\Big]\xi - m(m-6)\Big[g(\nabla H, \nabla\ln\lambda)\xi - HA(\nabla\ln\lambda)\Big] \\
& - 2(m-2)\Big[\Delta\ln\lambda - (m-4)\left|\nabla\ln\lambda\right|^2\Big]\nabla\ln\lambda \\
& + (m-2)(m-6)\Big[\frac{1}{2}\nabla|\nabla\ln\lambda|^2 + g(A(\nabla\ln\lambda), \nabla\ln\lambda)\xi\Big] = 0.
\end{aligned}
$$

定理 1.1 可由 (17) 以及超曲面 ϕ 的双张力场的下列公式推出（见 [17]）：(M^m, $g = \lambda^2\bar{g}$) $\to$ (N^{m+1}, h)

$$
\begin{aligned}
\tau_2(\phi, g)^{\perp} &= m\Big[\Delta H - H|A|^2 + H\mathrm{Ric}^N(\xi, \xi)\Big]\xi \\
\tau_2(\phi, g)^{\top} &= -m\Big[2A(\nabla H) + \frac{m}{2}\nabla H^2 - 2H(\mathrm{Ric}^N\xi)^{\top}\Big].
\end{aligned}
$$

□

注 1. (i) 容易看出，当 $\lambda = 1$ 时，定理 1.1 中的双调和共形超曲面方程就简化为 [18] 中得到的双调和超曲面方程。(ii) 也可以验证，当 $m = 2$ 时，定理 1.1 中给出的双调和方程会简化为 (1)。

众所周知，来自二维流形的共形浸入是极小的，当且仅当它是调和的，而调和映射总是双调和的。当定义域维数 $m \geq 3$ 时，极小共形浸入不再是调和的，并且有

推论 1.2. 极小共形浸入 $\phi\colon (M^m, g) \to (N^{m+1}, h)\,(m \geq 3)$ 满足 $\phi^* h = \lambda^2\bar{g}$，当且仅当它是双调和的

$$
(18)\qquad 2\lambda\,\mathrm{Tr}\,g(A(\cdot), \nabla^M_{\cdot}\nabla\lambda) - (m-6)g(A(\nabla\lambda), \nabla\lambda) = 0,
$$

$$
(19)\qquad 2\lambda\,\mathrm{Ric}^M(\nabla\lambda) + \nabla(\lambda\Delta\lambda) - \frac{m-4}{2}\nabla|\nabla\lambda|^2 - (m-2)\lambda^{-1}|\nabla\lambda|^2\nabla\lambda = 0.
$$

特别地，全测地超曲面 $\phi\colon (M^m, g) \to (N^{m+1}, h)\,(m \geq 3)$可以在共形因子为 λ 时双调和共形浸入(N^{m+1}, h)，当且仅当

$$
(20)\qquad 2\lambda\,\mathrm{Ric}^M(\nabla\lambda) + \nabla(\lambda\Delta\lambda) - \frac{m-4}{2}\nabla|\nabla\lambda|^2 - (m-2)\lambda^{-1}|\nabla\lambda|^2\nabla\lambda = 0.
$$

证明。 根据定义，共形浸入 $\phi\colon M^m \to (N^{m+1}, h)$ $(m \geq 3)$ 是极小的，因此 $H = 0$。将其代入 (2) 和 (3)，可知极小共形浸入是双调和的，当且仅当

$$
\begin{aligned}
&2\mathrm{Tr}\, g(A(\cdot), \nabla^M_{\cdot} \nabla \ln\lambda) - (m-6) g(A(\nabla \ln\lambda), \nabla \ln\lambda) = 0,\\
&\Big[2\,\mathrm{Ric}^M(\nabla \ln\lambda) + \nabla\Delta \ln\lambda\Big] + 2\Big[\Delta \ln\lambda - (m-4)\,|\nabla \ln\lambda|^2\Big]\nabla \ln\lambda\\
&-\frac{(m-6)}{2}\nabla|\nabla \ln\lambda|^2 = 0.
\end{aligned}
$$

利用 $\Delta \ln\lambda = \lambda^{-1}\Delta\lambda - \lambda^{-2}|\nabla\lambda|^2$，$|\nabla \ln\lambda|^2 = \lambda^{-2}|\nabla\lambda|^2$ 并经过直接计算，我们得到推论的第一个结论。第二个结论由第一个结论结合 $A = 0$ 得出。□

回顾一下，光滑函数 $f\colon M \to \mathbb{R}$ 称为**等距函数**，如果存在光滑函数 α，$\beta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，使得 $|\nabla f|^2 = \alpha(f)$ 且 $\Delta f = \beta(f)$。文献 [4] 证明了，来自爱因斯坦流形的共形映射 $\phi\colon (M^m, g) \to (N^m, h)$，若满足 $\phi^* h = \lambda^2 g$ 和 $m \neq 4$，则其为双调和映射，当且仅当 λ 是等距函数。

我们的下一个推论表明，浸入空间形式的全测地双调和共形浸入的共形因子总是等距函数；在这种情况下，双调和方程化简为一个常微分方程，这有助于构造许多双调和共形超曲面的实例。

推论 1.3。 维数为 $m \geq 3$ 的空间形式中的全测地超曲面 $\phi\colon (M^m, g) \to (N^{m+1}(c), h)$ 存在一个到环境空间中的双调和共形浸入，且其共形因子 λ 非常数，当且仅当 λ 是 (M, g) 上的等距函数，其中 $|\nabla\lambda|^2 = \alpha(\lambda)$ 且 $\Delta\lambda = \beta(\lambda)$，这里 α 和 β 是满足常微分方程的某些光滑实函数

$$
\lambda\beta'(\lambda) + \beta(\lambda) - \frac{m-4}{2}\alpha'(\lambda) - (m-2)\lambda^{-1}\alpha(\lambda) + 2(m-1)c\,\lambda = 0. \tag{21}
$$

特别地，当 $m = 4$ 时，该方程化简为

$$
\lambda\beta'(\lambda) + \beta(\lambda) - 2\lambda^{-1}\alpha(\lambda) + 6c\,\lambda = 0. \tag{22}
$$

证明。容易验证，空间形式 $(N^{m+1}(c), h)$ 中的全测地超曲面也是具有相同常截面曲率 c 的空间形式，因此 $\mathrm{Ric}^M(\nabla\lambda) = (m-1)c\,\nabla\lambda$。由此及式 (20) 可知，全测地超曲面 $\phi\colon (M^m, g) \to (N^{m+1}(c), h)$ $(m \geq 3)$ 能够双调和共形浸入 $(N^{m+1}(c), h)$，当且仅当

$$
2(m-1)c\,\lambda\nabla\lambda + \nabla(\lambda\Delta\lambda) - \frac{m-4}{2}\nabla|\nabla\lambda|^2 - (m-2)\lambda^{-1}|\nabla\lambda|^2\nabla\lambda = 0. \tag{23}
$$

特别地，若 $m=4$，则全测地超曲面 ϕ: $(M^4,\ g)\ \to (N^5,\ h)$ 能够双调和共形浸入 $(N^5,\ h)$，当且仅当

$$6c\,\lambda\,\nabla\lambda+\nabla(\lambda\Delta\lambda)-2\lambda^{-1}|\nabla\lambda|^2\nabla\lambda=0. \tag{24}$$

现在，(23) 可写为

$$\nabla\left[(m-1)c\,\lambda^2+\lambda\Delta\lambda-\frac{m-4}{2}|\nabla\lambda|^2\right]=(m-2)\lambda^{-1}|\nabla\lambda|^2\nabla\lambda.$$

利用这一点以及 [6] 的引理 2，我们有

$$(m-1)c\,\lambda^2+\lambda\Delta\lambda-\frac{m-4}{2}|\nabla\lambda|^2=u(\lambda), \tag{25}$$

对于某个满足以下条件的光滑函数 u

$$u'(\lambda)=\lambda^{-1}|\nabla\lambda|^2. \tag{26}$$

由 (26) 和 (25) 可知，λ是一个等距函数。将 $|\nabla\lambda|^2=\alpha(\lambda)$ 和 $\Delta\lambda=\beta(\lambda)$ 代入 (23)，经过直接计算可得

$$\left[\lambda\beta'(\lambda)+\beta(\lambda)-\frac{m-4}{2}\alpha'(\lambda)-(m-2)\lambda^{-1}\alpha(\lambda)+2(m-1)c\,\lambda\right]\nabla\lambda=0,$$

由于 λ不是常数，故得到 (21)。显然，当$m=4$时，(21) 化为 (22)。□

现在我们将说明，可以利用推论 1.3 构造许多真双调和共形浸入的例子，其中全测地超曲面浸入空间形式。

例 1. (欧氏空间中的真双调和共形超曲面) 令 $a_1, ..., a_m, b\in\mathbb{R}$. 取

$$\Omega=\{(x_1,...,x_m)\in\mathbb{R}^m\mid\sum_{i=1}^m a_ix_i+b>0\}.$$

考虑由下式定义的全测地超曲面 $\phi:\Omega\ \to(\mathbb{R}^{m+1},h)$

$$\phi(x_1,...,x_m)=(x_1,...,x_m,\sum_{i=1}^m a_ix_i+b),$$

其中 $h=dy_1^2+...+dy_{m+1}^2$ 表示 $\mathbb{R}^{m+1}$上的标准欧氏度量。该超曲面的诱导黎曼度量 $g=\phi^*h$ 的分量由 $g_{ii}=1+a_i^2$和 $g_{ij}=a_ia_j$给出，其中 $i\neq j$。我们寻找 $\lambda(x_1, ..., x_m)\ =(\sum_{i=1}^m a_ix_i+b)^t$，其中常数 t。经过直接计算可得

$$\alpha(\lambda)=|\nabla\lambda|^2=\frac{t^2|a|^2}{1+|a|^2}\lambda^{2(t-1)/t},\ \beta(\lambda)=\Delta\lambda=\frac{t(t-1)|a|^2}{1+|a|^2}\lambda^{(t-2)/t},$$

其中 $|a|^2 = \sum_{i=1}^{m} a_i^2$。将这些代入带有 $c = 0$的式 *(21)*，可得共形超曲面 ϕ: $(\Omega g = \lambda^{-2} g) \to (\mathbb{R}^{m+1}, h)$ 满足 $m \neq 2$ 时是真双调和的，当且仅当

$$2(m-4)t^2 - (m-8)t - 2 = 0.$$

若 $m = 4$，则得到 $t = 1/2$。对于 $m \neq 4$，有 $t = 1/2$ 或 $t = -2/(m-4)$。

对于双曲空间形式，即具有常负截面曲率的空间形式，我们有以下真双调和共形全测地超曲面的例子。

例2。（双曲空间中的真双调和共形超曲面）容易验证，超曲面

$$\phi : (\mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R}^+, g_{ij} = x_m^{-2}\delta_{ij}) \to (\mathbb{H}^{m+1}, h_{ab} = y_{m+1}^{-2}\delta_{ab}),$$

其中 $\phi(x_1, ..., x_m) = (1, x_1, ..., x_m)$ 是全测地且爱因斯坦的，其 $\mathrm{Ric}^M = -(m-1)g$。我们寻找某个常数 $t \neq 0$，使得共形超曲面

$$\phi : (\mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R}^+, \overline{g}_{ij} = x_m^{2(t-1)}\delta_{ij}) \to (\mathbb{H}^{m+1}, h_{ab} = y_{m+1}^{-2}\delta_{ab}),$$

为真双调和。直接计算可得 $\alpha(\lambda) = |\nabla\lambda|^2 = t^2\lambda^2$，以及 $\beta(\lambda) = \Delta\lambda = [(m-1)t + t^2]\lambda$。将这些代入 (21)，并取 $c = -1$，可知共形超曲面是真双调和当且仅当

$$(m-4)t^2 - (m-1)t + (m-1) = 0,$$

其在 $m = 3$、4、5 时有解。更确切地说，对于 $m = 4$，我们得到 $t = 1$，这一结果已在 [16] 中得到。对于 $m = 3$、5，我们分别有 $t = \pm\sqrt{3} - 1$ 和 $t = 2$。

例 3。（球面中的真双调和共形超曲面）我们知道（见 [16]），共形超曲面

$$\phi : (\mathbb{S}^4 \backslash \{P\} \equiv \mathbb{R}^4, \overline{g}_{ij} = \delta_{ij}) \to (\mathbb{S}^5 \backslash \{N\} \equiv \mathbb{R}^5, h_{ab} = \frac{4\delta_{ab}}{(1+|y|^2)^2}),$$
$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_1, x_2, x_3, x_4, 0)$$

是一个真双调和超曲面。现在让我们使用推论 1.3 来验证这一点。容易检查出，其相应的等距浸入

$$\phi : (\mathbb{S}^4 \backslash \{P\} \equiv \mathbb{R}^4, g_{ij} = \frac{4\delta_{ij}}{(1+|x|^2)^2}) \to (\mathbb{S}^5 \backslash \{N\} \equiv \mathbb{R}^5, h_{ab} = \frac{4\delta_{ab}}{(1+|y|^2)^2}),$$

是全测地的。对于 $\lambda = 2(1+|x|^2)^{-1}$，直接计算可得

$$\alpha(\lambda) = |\nabla\lambda|^2 = \frac{4|x|^2}{(1+|x|^2)^2} = 2\lambda - \lambda^2, \quad \beta(\lambda) = \Delta\lambda = \frac{4(|x|^2-1)}{1+|x|^2} = 4(1-\lambda).$$

因此，这个 $\lambda = 2(1+|x|^2)^{-1}$ 确实是一个等距函数，并且可以验证它满足方程（22）。

2. Biharmonic conformal immersions of non-minimal totally umbilical hypersurfaces

众所周知，全测地超曲面是全脐超曲面的一个子类，并且全脐超曲面是极小的，当且仅当它是全测地的。本节研究非极小（即非全测地）全脐超曲面能够双调和共形浸入空间形式的条件。

首先，我们将证明，如果空间形式中的非极小全脐超曲面能够双调和共形浸入该空间形式，那么共形因子 λ 必须是关于诱导度量的等距函数。此外，还将确定 $|\nabla\lambda|^2$，$\Delta\lambda$ 的显式公式。

推论 2.1. 非极小全脐超曲面 $\phi\colon\ M^m \to (N^{m+1}(c)\ h)$ 能够双调和共形浸入 $(N^{m+1}(c)\ h)$，当且仅当存在一个光滑函数 $\lambda\colon\ (M^m,\ \phi^*h) \to \mathbb{R}^+$，使得

$$\begin{aligned}(27)\quad &\Big[2m(m-4)H^2\lambda - 2(m-2)(m-1)(H^2+c)\lambda + (m-2)^2\lambda^{-1}|\nabla\lambda|^2\Big]\nabla\lambda\\ &-(m-2)\nabla(\lambda\Delta\lambda) + \frac{1}{2}(m-2)(m-4)\nabla|\nabla\lambda|^2 = 0,\end{aligned}$$

$$(28)\quad m^2(c-H^2)\lambda^2 + 4\lambda\Delta\lambda - (m^2-8)\,|\nabla\lambda|^2 = 0.$$

证明。众所周知，对于空间形式 $(N^{m+1}(c)\ h)$ 中的全脐超曲面 $(M^m,\ g)$，其形算子为 $A = HId$，其中 Id 是恒等映射。利用高斯方程，我们得到

$$(29)\qquad \mathrm{Ric}^M(\nabla\lambda) = (m-1)(H^2+c)\nabla\lambda.$$

利用方程 (29)、假设 $H \neq 0$ 以及以下恒等式进行直接计算

$$\Delta\ln\lambda = \lambda^{-1}\Delta\lambda - \lambda^{-2}|\nabla\lambda|^2,\ |\nabla\ln\lambda|^2 = \lambda^{-2}|\nabla\lambda|^2,$$

我们分别由 (2) 和 (3) 得到 (27) 和 (28)。

□

容易验证，对于 $m = 2$，(27) 和 (28) 意味着 $\lambda =$ 为常数且 $H^2 = c$。注意，$\lambda =$为常数意味着该共形浸入实际上在一个相似变换意义下是等距浸入。利用双调和性在相似变换下保持不变这一事实，以及三维空间形式中双调和曲面的著名分类，我们可得以下结论

推论 2.2。 [18, 29] 在$\mathbb{R}^3$中的任意全脐共形双调和曲面，或 H^3 都是极小的；而 S^3 中唯一的共形双调和曲面实际上是双调和曲面，因此在相似变换意义下，它是 $S^2(\frac{1}{\sqrt{2}})$ 的一部分。

注意到， $\mathbb{R}^3$ 中的任意全脐曲面都是平面或球面的一部分。因此，推论 2.2 中关于 $\mathbb{R}^3$ 中的全脐共形双调和曲面的陈述，等价于说， $\mathbb{R}^3$ 的非极小全脐曲面的任何部分都不能双调和共形浸入到 $\mathbb{R}^3$中；这一点已在 [18]的推论 2.9 中得到证明。

下面的定理表明，非极小全脐共形双调和超曲面的共形因子是一个等距函数，其， $\Delta\lambda$ 可以显式确定。

定理 2.3。 如果空间形式中的非极小全脐超曲面 $\phi:\ M^m \to (N^{m+1}(c)\ h)(m \geq 3)$ 可以双调和共形浸入到$(N^{m+1}(c)\ h)$，且共形因子为 λ，那么 λ 是$(M^m, \phi^* h)$ 上的等距函数，其中

$$|\nabla\lambda|^2 = \delta\,\lambda^2 + \frac{2C_0}{m(m-2)}\,\lambda^{\frac{4}{m}}, \tag{30}$$

$$\Delta\lambda = \frac{1}{4}\left[(m^2-8)\delta + m^2(H^2-c)\right]\lambda + \frac{C_0(m^2-8)}{2m(m-2)}\lambda^{-\frac{m-4}{m}}, \tag{31}$$

对于某个常数 C_0和 $\delta = -\frac{m^3-2\,m^2+4\,m+8}{(m-2)_3}H^2 + c$。

证明。 容易验证，(27) 可写为

$$\begin{aligned}&\left[4m\frac{m-4}{m-2}H^2\lambda - 4(m-1)(H^2+c)\lambda + 2(m-2)\lambda^{-1}|\nabla\lambda|^2\right]\nabla\lambda \\ =&\nabla[2\lambda\Delta\lambda - (m-4)|\nabla\lambda|^2].\end{aligned} \tag{32}$$

情形 I： 若 $2\lambda\Delta\lambda - (m-4)|\nabla\lambda|^2 = C_1$为常数，则 (32) 表明，要么$\nabla\lambda \equiv 0$ ，从而 λ 为常数；要么

$$4m\frac{m-4}{m-2}H^2\lambda - 4(m-1)(H^2+c)\lambda + 2(m-2)\lambda^{-1}|\nabla\lambda|^2 = 0, \tag{33}$$

在一个开集上。在后一种情形下，由 (33) 可得， $|\nabla\lambda|^2$ 是关于 λ的多项式函数。由此以及 $2\lambda\Delta\lambda - (m-4)|\nabla\lambda|^2 = C_1$ ，我们得出$\Delta\lambda$ 也是关于 λ的函数。因此，在这种情形下， λ 也是一个等距函数。

情形 II： 如果 $2\lambda\Delta\lambda - (m-4)|\nabla\lambda|^2$ 不是常数，则存在一点 x_0使得 $\nabla\left[2\lambda\Delta\lambda - (m-4)|\nabla\lambda|^2\right](x_0) \neq 0$。应用 [6] 的引理 2，我们有

$$2\lambda\Delta\lambda - (m-4)|\nabla\lambda|^2 = u(\lambda), \tag{34}$$

对于某个非常数光滑函数 u，使得

$$u'(\lambda) = 4m\frac{m-4}{m-2}H^2\lambda - 4(m-1)(H^2+c)\lambda + 2(m-2)\lambda^{-1}|\nabla\lambda|^2. \tag{35}$$

结合方程 (34)，可知在这种情况下，λ 也是一个等距函数。这便得到了定理的第一个结论。

现在，由于 $H \neq 0$，我们可以利用 (34) 和 (28) 得到

$$|\nabla\lambda|^2 = \frac{1}{m(m-2)}\left[m^2(c-H^2)\lambda^2 + 2u(\lambda)\right]. \tag{36}$$

将 (36) 代入 (35)，得到

$$u'(\lambda) = -2\left[\frac{m^2+4}{m-2}H^2 + (m-2)c\right]\lambda + \frac{4}{m}\lambda^{-1}u(\lambda).$$

解这个一阶线性微分方程，得到

$$u(\lambda) = -m\left[\frac{m^2+4}{(m-2)^2}H^2 + c\right]\lambda^2 + C_0\lambda^{\frac{4}{m}}, \tag{37}$$

其中 C_0 为某个常数。将 (37) 代入 (36)，得到

$$|\nabla\lambda|^2 = \delta\,\lambda^2 + \frac{2C_0}{m(m-2)}\,\lambda^{\frac{4}{m}}, \tag{38}$$

这里 $\delta = -\frac{m^3-2m^2+4m+8}{(m-2)^3}H^2 + c$。将 (37)、(38) 代入 (34)，并求解 $\Delta\lambda$，得到 (31)，从而完成定理的证明。

□

作为定理 2.3 的一个应用，我们证明以下命题：空间形式中任何截面曲率非正的全脐共形双调和超曲面都是极小的。

命题 2.4。截面曲率为 $c \leq 0$ 且 $m \geq 4$ 的空间形式 $N^{m+1}(c)$ 中的非极小全脐超曲面的任何部分，都不能浸入其环境空间 $N^{m+1}(c)$ 成为双调和共形浸入。

证明。注意，如果共形因子为常数，那么双调和共形浸入实际上在相似变换意义下是等距浸入。众所周知，非正曲率空间形式中的任何全脐双调和超曲面都是极小的，这与我们的假设矛盾。因此，我们可以假设 $\phi: (U, g) \to (N^{m+1}(c), h)$ 是一个非极小全脐超曲面，并且存在一个非恒定正函数 λ，使得

超曲面 $\phi\colon (U, \bar{g} = \lambda^{-2} g) \to (N^{m+1}(c), h)$ 的共形浸入是双调和的。

不难验证，对于常截面曲率为 c 的空间形式中的全脐超曲面，有

$$\mathrm{Ric}^M(\nabla\lambda, \nabla\lambda) = (m-1)(H^2 + c)|\nabla\lambda|^2, \tag{39}$$

$$|\nabla\lambda|^2 = \alpha(\lambda) = \delta\,\lambda^2 + k\,\lambda^{\frac{4}{m}}, \tag{40}$$

$$\Delta\lambda = \beta(\lambda) = \frac{1}{4}\left[(m^2-8)\delta + m^2(H^2 - c)\right]\lambda + \frac{1}{4}(m^2-8)k\lambda^{-\frac{m-4}{m}}, \tag{41}$$

对于某个常数 k 和 $\delta = -\frac{m^3 - 2\,m^2 + 4\,m + 8}{(m-2)^3}$ $H^2 + c$。直接计算可得

$$\Delta|\nabla\lambda|^2 = \alpha'(\lambda)\beta(\lambda) + \alpha(\lambda)\alpha''(\lambda), \tag{42}$$

$$g(\nabla\lambda, \nabla\Delta\lambda) = \alpha(\lambda)\beta'(\lambda), \tag{43}$$

$$\mathrm{Ric}(\nabla\lambda, \nabla\lambda) = (m-1)(H^2 + c)\alpha(\lambda). \tag{44}$$

将（39）—（44）代入 Bochner-Weitzenb¨ock 公式

$$\frac{1}{2}\Delta|\nabla\lambda|^2 = |\mathrm{Hess}\,\lambda|^2 + g(\nabla\lambda, \nabla\Delta\lambda) + \mathrm{Ric}(\nabla\lambda, \nabla\lambda),$$

并利用牛顿不等式 $|\mathrm{Hess}\ \lambda|^2 \geq \frac{1}{m}(\Delta\lambda)^2$，可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\alpha'(\lambda)\beta(\lambda) &+ \frac{1}{2}\alpha(\lambda)\alpha''(\lambda) - \alpha(\lambda)\beta'(\lambda) - (m-1)(H^2+c)\alpha(\lambda) \\ &- \frac{1}{m}\beta(\lambda)^2 \geq 0. \end{aligned} \tag{45}$$

进一步利用（40）和（41）进行计算，可将（45）改写为

$$Ak^2\lambda^{-\frac{2(m-4)}{m}} + Bk\lambda^{\frac{4}{m}} + C\lambda^2 \geq 0, \tag{46}$$

其中， A、 B和 C 由下式给出

$$\begin{aligned} A &= -(m-4)(m-2)^6(m^4 - 8m^2 + 32), \\ B &= 8c(m-2)^6(m^4 - 2m^3 - 12m + 16) \\ &\quad -32(m-2)^3\left(m^4 + 10\,m^3 - 20\,m^2 - 8\,m + 32\right)H^2, \\ C &= -16\,c^2 m\,(m-2)^6\left(m^2 - 2\,m + 4\right) \\ &\quad -32\,mc\,(m-2)^3\left(m^4 - 4\,m^3 + 8\,m^2 - 32\right)H^2 \\ &\quad +256\left(m^6 - 2m^5 + 2m^4 + 8\,m^3 - 8\,m^2 - 16\,m\right)H^4. \end{aligned}$$

对于 $m \geq 4$，利用 $A \leq 0$ 和 (46)，可得

$$Bk\lambda^{\frac{4}{m}} + C\lambda^2 \geq 0. \tag{47}$$

另一方面，由于 λ 不是常数，我们可以假设在某个开集上 $|\nabla\lambda|^2 > 0$，由此以及 (30) 可得

$$k\,\lambda^{\frac{4}{m}} \geq -\delta\,\lambda^2,$$

即

$$k\,\lambda^{\frac{4}{m}} \geq \left(\frac{m^3-2\,m^2+4\,m+8}{(m-2)^3}H^2 - c\right)\lambda^2. \tag{48}$$

由于 $c \leq 0$，容易验证 $B \leq 0$。结合（47）和（48）可得 s

$$B\left(\frac{m^3-2\,m^2+4\,m+8}{(m-2)^3}H^2 - c\right) + C \geq 0. \tag{49}$$

将 B 和 C 的值代入（49），可得

$$\begin{aligned}
&-8\,c^2\,(m-2)^6\left(m^4-4\,m^2-4\,m+16\right)\\
&+8\,c\,(m-2)^3\left(m^7-4\,m^6+4\,m^5+8\,m^4+32\,m^3-160\,m^2+64\,m+256\right)H^2\\
&-32\left(m^7-20\,m^5+64\,m^4-16\,m^3-192\,m^2+192\,m+256\right)H^4 \geq 0.
\end{aligned}$$

这就产生了矛盾，因为三个被加项均为负数，这是由于 $m \geq 4$、 $c \leq 0$ 以及

$$\begin{aligned}
&m^4-4\,m^2-4\,m+16 \geq m^3(m-4)+4\,m(m-3) > 0,\\
&m^7-4\,m^6+4\,m^5+8\,m^4+32\,m^3-160\,m^2+64\,m+256\\
&\geq m^5(m-2)^2+8\,m^2(m-3)^2 > 0,\\
&m^7-20\,m^5+64\,m^4-16\,m^3-192\,m^2+192\,m+256\\
&\geq (m-3)\left[m^4(m^2-9)+m^4(m-2)\right] > 0.
\end{aligned}$$

矛盾证明了该命题。 □

与命题 2.4 不同，我们接下来的命题表明，当环境空间具有正截面曲率时，在 $\mathbb{S}^5$ 中确实存在非极大全脐双调和共形超曲面。

命题 *2.5.* 对于 $a, b \in \mathbb{R}$，其中 $a > 0$ 且 $a^2+b^2 = 1$。全脐超曲面 $\phi:\ \mathbb{S}^m(a) \to \mathbb{S}^{m+1}, \phi(v) = (v, b)$ 的一部分可以双调和共形浸入到 $\mathbb{S}^{m+1}$ 中，其中 $\lambda = (1+|x|^2)^{-1}$，当且仅当 $m = 4$ 且 $a = 1, b = 0$，或者 $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 且 $b = \pm\frac{1}{2}$；这里 $\underline{x} = (x_1, \cdots, x_m)$ 是 $S^m(a)$ 上的共形坐标。

证明。 可以验证（例如参见 [25]），该全脐超曲面

$$\phi : \mathbb{S}^m(a) \to \mathbb{S}^{m+1}, \phi(v) = (v, b)$$

的形算子和平均曲率分别为

$$A(X) = -\frac{b}{a}X, \quad \forall X \in \Gamma(TM), \quad H = -\frac{b}{a}.$$

还可以验证，利用由立体投影诱导的共形坐标，该全脐超曲面可以表示为

$$\begin{aligned} \phi : (\mathbb{R}^m, g = \frac{4a^2\delta_{ij}}{(1+|x|^2)^2}) &\to (\mathbb{S}^{m+1}, h = \frac{4\delta_{\alpha\beta}}{(1+|y|^2)^2}). \\ (x_1, ..., x_m) &\mapsto \frac{a}{1-b}\left(\frac{2x_1}{1+|x|^2}, ..., \frac{2x_m}{1+|x|^2}, \frac{-1+|x|^2}{1+|x|^2}\right). \end{aligned}$$

根据定义，该超曲面可以以共形因子 $\lambda = (1+|x|^2)^{-1}$ 双调和共形浸入到 S^{m+1} 中，这意味着共形浸入 $\phi : (\mathbb{R}^m, \lambda^{-2}g = 4a^2\delta_{ij}) \to (\mathbb{S}^{m+1}, h)$ 是双调和的。注意，除相似变换外，该映射是由逆立体投影$p^{-1}: \mathbb{R}^m \to S^m(a)$ 后接标准嵌入 $S^m(a) \hookrightarrow S^{m+1}, v \mapsto (v, b)$ 的复合。

还要注意（例如参见 [24]），逆立体投影 $p^{-1} : \mathbb{R}^m \to S^m(a)$ 作为共形映射，当且仅当 $m = 4$ 时是双调和的。另一方面， [26] 中已证明，双调和映射与全测地映射复合后仍然是双调和映射。由此，再结合以下观察：对应于情形 $m = 4, a = 1, b = 0$ 的映射是一个双调和共形映射与全测地嵌入的复合，我们得到该命题结论的第一部分。

现在我们将使用定理 2.3证明命题的第二部分。我们使用 $\lambda(x) = (1+|x|^2)^{-1}$ 并通过直接计算得到

$$\nabla\lambda = -\frac{1}{2a^2}\, x_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad |\nabla\lambda|^2 = \frac{1}{a^2}\,\frac{|x|^2}{(1+|x|^2)^2}, \quad \Delta\lambda = \frac{m}{2a^2}\frac{-1+|x|^2}{1+|x|^2}.$$

进一步计算可得

$$|\nabla\lambda|^2 = \frac{1}{a^2}(\lambda - \lambda^2), \quad \Delta\lambda = \frac{m}{2a^2}(1-2\lambda).$$

分别将这些结果与 (30) 和 (??) 比较，并利用 $c = 1$，可得

$$\begin{aligned} &\delta = -\frac{1}{a^2}, \quad m = 4, \quad \frac{2C_0}{m(m-2)} = \frac{1}{a^2}, \\ &\frac{1}{4}\left[(m^2-8)\delta + m^2(\frac{b^2}{a^2} - 1)\right] = -\frac{m}{a^2}, \quad \frac{m}{2a^2} = \frac{C_0(m^2-8)}{2m(m-2)}, \end{aligned}$$

解这些方程可得唯一解 $m = 4$、 $b = \pm\frac{1}{2}$ 和 $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$，从而完成命题的证明。

□

备注 2. 注意，忽略一个相似变换后，命题 2.5 给出的两个真双调和共形浸入可视为以下映射的复合

$$\mathbb{R}^4 \xrightarrow[projection]{inverse\ stereographic} S^4 \xrightarrow[embedding]{totally\ geodesic} S^5,$$
$$\mathbb{R}^4 \xrightarrow[projection]{inverse\ stereographic} S^4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \xrightarrow[embedding]{totally\ umbilical} S^5.$$

有趣的是，这种方法仅适用于维数为 $m = 4$ 的情形。

References

[1] A. M. Akyol 和 Y.-L. Ou，《双调和黎曼浸没》，Ann. Mat. Pura Appl. (4) 198 (2019)，第 2 期，559–570 页。[2] P. Baird，《应力-能量张量与 *Lichnerowicz* 拉普拉斯算子》，J. Geom. Phys. 58 (2008)，第 10 期，1329–1342 页。[3] P. Baird 和 D. Kamissoko，《关于构造双调和映射与度量》，Ann. Global Anal. Geom. 23 (2003)，第 1 期，65–75 页。[4] P. Baird、A. Fardoun 和 S. Ouakkas，《共形与半共形双调和映射》。Ann. Glob. Anal. Geom. 34，403–414 (2008)。[5] P. Baird、E. Loubeau 和 C. Oniciuc，《曲面上的调和映射与双调和映射》，Contemp. Math.，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，542 (2011)，223–230 页。[6] P. Baird 和 Y.-L. Ou，《四维中的双调和共形映射与 *Yamabe* 型方程》，J. Geom. Anal.，28(4) (2018)，3892–3905 页。[7] E. Ghandour 和 Y.-L. Ou，《广义调和态射与水平弱共形双调和映射》，J. Math. Anal. Appl. 464 (2018)，第 1 期，924–938 页。[8] G. Y. Jiang，《2-调和映射及其一阶和二阶变分公式》。Chinese Ann. Math. Ser. A，7 (1986)，389–402 页。[9] E. Loubeau 和 Y.-L. Ou，《双调和态射的刻画》，Diff. geom. and its appl.（奥帕瓦，2001），31–41 页，Math. Publ.，3，奥帕瓦西里西亚大学，奥帕瓦，2001。[10] E. Loubeau 和 Y.-L. Ou，《来自共形映射的双调和映射与态射》，Tohoku Math. J. (2) 62 (2010)，第 1 期，55–73 页。[11] S. Maeta 和 M. Shito，《具有常截面曲率的流形上的双调和黎曼浸没分类》，预印本 2025年，arXiv:2509.05939。[12] A. Mohammed Cherif、K. Mouffoki，p-爱因斯坦空间与共形平坦空间中的双调和超曲面》，Bull. Korean Math. Soc.，60 (3) (2023)，705–715 页。[13] C. Oniciuc，《黎曼流形之间的双调和映射》，An. Stii, Al. Univ. “Al. I. Cuza” Iasi，68 (2002)，237–248 页。[14]C. Oniciuc，《空间形式中的双调和子流形》，资格论文 (2012)，www.researchgate.net, https://doi.org/10.13140/2.1.4980.5605。[15] Y. -L. Ou，《黎曼流形之间的双调和态射》，子流形的几何与拓扑，X（北京/柏林，1999），231–239 页，World Sci. Publ.，新泽西州里弗埃奇，2000。[16] Y. -L. Ou，《关于共形双调和浸入》，Anal. Global Analysis and Geom. 36 (2009)，133–142 页。[17] Y. -L. Ou，《黎曼流形中的双调和超曲面》，Pacific J. of Math，248 (1) (2010)，217–232 页。

[18] Y. -L. Ou，《浸入三维流形的双调和共形浸入》，Mediterr. J. Math. 12，(2015)，541–554 页。[19] Y. -L. Ou，《双调和子流形的近期进展》。Contemp. Math.，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，674 (2016)，127–139 页。[20]Y. -L. Ou， f-双调和映射与 f-双调和子流形 *II*，J. Math. Anal. Appl.，455 (2017)，1285-1296 页。[21] Y. -L. Ou，《关于双调和共形映射的一些近期工作》，Contemp. Math.，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，756 (2020)，195-205 页。[22] Y. -L. Ou 和 B. -Y.Chen，《黎曼几何中的双调和子流形与双调和映射》，World Scientific Publishing Co Pte Ltd，2020年5月。[23] Y. -L. Ou，《双调和黎曼浸没简述》，Int. Electron. J. Geom. 17 (2024)，第 1 期，259–266 页。[24] Y. -L. Ou，《共形双调和映射与 *k*-多重调和映射的一些分类》。Front. Math. 18 (2023)，第 1 期，1–15 页。[25] O. Perdomo 和 A. Brasil Jr.，《球面的常平均曲率超曲面的稳定性指标跳跃》，Arch. Math. 99 (2012)，493–500 页。[26] H. Sun，《关于二调和映射的一个定理》，J. Math. (China)，12 (1) (1992)，103–106 页。[27] H. Urakawa，《主丛与扭曲积上的调和映射和双调和映射》，J. Korean Math. Soc.，55(3)，(2018)，553-574 页。[28] H. Urakawa，《调和映射与双调和黎曼浸没》，Note di Mate. 39 (1) (2019)，1–23 页。[29] Z. -P. Wang 和 X. -Y. Chen，《浸入三维共形平坦空间的双调和共形浸入》，预印本 2024年，arXiv:2408.10144。[30] Z. -P. Wang 和 Y. -L. Ou，《来自三维流形的双调和黎曼浸没》，Math. Zeitschrift，269 (3) (2011)，917-925 页。[31] Z. -P. Wang 和 Y. -L. Ou，《来自三维 *BCV* 空间的双调和黎曼浸没》，J Geom Anal 34，63 (2024)。https://doi.org/10.1007/s12220-023-01501-9[32]Z. -P. Wang 和 Y. -L. Ou，《浸入 和来自 $M^2 \times \mathbb{R}$的双调和等距浸入与双调和黎曼浸没》，J Geom. Anal. 35，20 (2025年)。https://doi.org/10.1007/s12220-024-01828-x

Faculty of Exact Sciences,
University Mustapha Stambouli,Mascara,
Algeria.
Email: a.mohammedcherif@univ-mascara.dz

Department of Mathematics,
East Texas A& M University,
Commerce, TX 75429, U S A.
E-mail:yelin.ou@etamu.edu