arXiv:2601.03485v1 [math.CO] 7 Jan 2026

树中的四种支配数增长机制：强制、斐波那契计数、周期性与稳定性

JulianAllagan[1],*,Erin Gray[1],Jennifer Sawyer[1],和 Gabrielle Morgan[1]

Elizabeth City State University，Elizabeth City，北卡罗来纳州，美国 数学、计算机科学与工程技术系

*电子邮箱：adallagan@ecsu.edu *通讯作者

摘要

我们研究图的支配域 $\zeta(G)$，其定义为图 G的最小支配集数量，并分析局部强制和边界效应如何控制树中最优支配的灵活性。对于基于路径的悬挂构造，我们确定了一个精确的强制阈值：为每个路径顶点连接一个悬挂顶点，会使各点完全独立$\zeta = 2^{\gamma}$；而连接两个或更多悬挂顶点，则会强制产生唯一的最小支配集。介于这两种极端情况之间，稀疏悬挂模式会呈现中间行为：删除端点悬挂顶点得到 $\zeta = 2^{\gamma-2}$，而交替悬挂连接则引发斐波那契增长 $\zeta \asymp \varphi^{\gamma}$，其中 φ 为黄金比例。对于完全二叉树 T_h，我们证明了严格的周期为 3 的规律 $\zeta(T_h) \in \{1, 3\}$，尽管 $|V(T_h)|$呈指数增长。我们还证明了叶节点删除下的精确稳定性界，$\zeta(T_h - X) \leq 2^{m_1(X)}\zeta(T_h)$，其中 $m_1(X)$表示恰好失去一个子节点的父节点数量；特别地，删除单个叶节点不会改变支配数，并会使支配域恰好翻倍。

1 引言

支配数 $\gamma(G)$ 衡量支配图 G 所需的最少顶点数；若集合 $D \subseteq V(G)$ 中包含每个顶点，或每个顶点都与 D 中的某个顶点相邻，则该集合为支配集。虽然 $\gamma(G)$ 刻画了最优成本，但无法区分僵化的 最优解与灵活的 最优解。这种区别由支配域

$$\zeta(G) = \#\{D \subseteq V(G) : |D| = \gamma(G) \text{ and } D \text{ dominates } G\},$$

它统计 G 的所有最小支配集。Allagan 和 Bobga [1], 首次以这种形式引入了支配域；支配域衡量最优解的自由度，并揭示局部结构约束如何在全局范围内传播。

支配集在网络设计与控制中自然出现，其中顶点代表设施、传感器或智能体，它们必须协同监控或影响整个系统 [13]。在此背景下，支配域 $\zeta(G)$ 量化了解的多样性，进而体现鲁棒性：具有$\zeta(G) > 1$ 的系统，在发生故障或需要重新配置时，能够采用其他最优配置。其应用包括无线传感器网络 [3, 20, 7], ，其中连通支配集构成高效路由骨干；物联网架构 [4, 14], ，其中基于支配的聚类支持自适应拓扑控制；分布式计算 [16], ，其中极小支配集充当领导者集合；以及网络安全 [2, 15], ，其中监控器部署可缓解协同攻击。除了通信网络，设施选址和资源分配模型 [5, 8] 还利用最优部署的多样性，评估系统在需求波动或站点故障情况下的韧性。

近期的扩展包括社交网络中的影响力最大化 [17] 和流行病控制 [9],，其中 $\zeta(G)$体现了干预策略的灵活性。

最小支配集的枚举研究沿着几条大体相互独立的路线展开。早期工作着重于特定图族的精确计数，包括路径、圈及相关构造 [1], ，之后又拓展到网格图 [19]。另一条互补的极值研究路线则探讨 $\zeta(G)$ 关于 $\gamma(G)$ 能有多大。Godbole、Jamieson 和 Jamieson [10],随后 Connolly 等人 [6], 建立了最小支配集数量的一般指数上界。

作为相反的极端情形，Goddard 和 Henning [11]刻画了具有唯一最小支配集的图，指出了使最优支配完全由结构决定的条件。关于森林，近期最具决定性的结果由 Petr、Portier 和 Verstee- gen [18],给出；他们证明每个森林 F都满足 $\zeta(F) \leq 5^{\gamma(F)}$，并构造了增长阶为 $5^{2\gamma(F)/5}$ 的图族，从而确定了正确的指数增长率（相差至多一个常数因子）。

本文研究一种互补的结构情形。我们不再是在所有具有固定 $\gamma(G)$的树中最大化$\zeta(G)$，而是确定典型树族的 γ 和 ζ 的精确值，并找出导致不同增长行为的局部强制机制。具体而言，我们识别出四种性质迥异的情形:

（i）指数自由度， $\zeta = 2^{\gamma}$，源于彼此独立的局部选择;

（ii）斐波那契增长， $\zeta \asymp \varphi^{\gamma}$，由耦合约束引起;

（iii）周期刚性：对于完全二叉树，尽管顶点数呈指数增长， $\zeta \in \{1, 3\}$ 仍成立；以及

（iv）完全强制：局部密度使支配域缩减至 $\zeta = 1$。

此外，我们量化了边界扰动下的稳定性，证明从完全二叉树中删除一个叶节点不会改变支配数，却会使支配域恰好翻倍；并进一步证明形如 $\zeta(T_h - X) \leq 2^{m_1(X)}\zeta(T_h)$的界，其中 $m_1(X)$表示恰好失去一个子节点的父节点数量。

备注1（结构性与极值情形）。Petr、Portier 和 Ver- steegen [18], 的极值界以及早期结果 [10, 6], 表明，森林的支配域可以随支配数呈指数增长，其底数至多为 5。我们的结果表明，由于强烈的局部强制和边界效应，许多自然的树族远低于这一包络。特别是，对于所有 h，完全二叉树都满足 $\zeta(T_h) \in \{1, 3\}$，尽管 $|V(T_h)|$ 呈指数增长。本文证明的稳定性结果精确描述了这种刚性行为在何种情况下、以何种方式会因微小扰动而被打破，从而为全局极值理论提供了结构性对应。

定义 2。若集合 $D \subseteq V(G)$ 中的每个顶点都属于 D，或在 D 中有一个邻点，则称其为支配集。支配数 $\gamma(G)$ 是支配集的最小大小。支配域 $\zeta(G)$ 是大小为 $\gamma(G)$ 的支配集数量。

全文中， P_n 表示顶点为 $v_1, \ldots, v_n$、边为 $v_i v_{i+1} (1 \leq i \leq n-1)$ 的路径。对于$r \geq 1$ 和 $1 \leq i \leq n$, 令

$$L_i = \{\ell_{i,1}, \ldots, \ell_{i,r}\}$$

表示在均匀附着模型中连接到 v_i 的 r 悬挂顶点集合。我们将 $(F_t)_{t\geq 1}$ 记为斐波那契数，其定义为 $F_1 = F_2 = 1$ 和 $F_{t+1} = F_t + F_{t-1}$。

2 悬挂路径结构

我们首先分析带有悬挂附加的基于路径的树。在这些树族中，支配由局部的双顶点（或 $(r+1)$-顶点）簇所决定，因此，灵活性与强制性之间的转换可以直接从附加模式中读出。

2.1 均匀附着：强制二分

定理 3（带悬挂顶点的路径的强制二分）。 固定整数 $n \geq 1$ 和 $r \geq 1$。令 $G(n,r)$ 为从 P_n 通过给每个 v_i附加 r 个悬挂顶点 $\ell_{i,1}, \ldots, \ell_{i,r}$ 得到的图。那么

$$\gamma(G(n,r)) = n, \qquad \zeta(G(n,r)) = \begin{cases} 2^n, & r = 1, \\ 1, & r \geq 2. \end{cases}$$

特别地，若 $r \geq 2$，则唯一的最小支配集为 $\{v_1, \ldots, v_n\}$；而若 $r = 1$，则每个最小支配集都可通过从每一对 $\{v_i, \ell_{i,1}\}$ 中独立选择一个顶点得到。

证明。 对于每个 i，每个悬挂顶点 $\ell \in L_i$ 都满足 $N[\ell] = \{\ell, v_i\}$。因此，任何支配集 D 都必须与局部簇相交

$$\{v_i\} \cup L_i \qquad (1 \leq i \leq n).$$

由于这些 n 簇两两不相交，每个支配集的大小至少为 n。又因为集合$\{v_1, \ldots, v_n\}$ 支配了 $G(n,r)$，所以 $\gamma(G(n,r)) = n$。

设 D 是一个最小支配集，因此 $|D| = n$。簇之间互不相交，因而必然

$$|D \cap (\{v_i\} \cup L_i)| = 1 \qquad (1 \leq i \leq n).$$

首先假设 $r \geq 2$。若 $v_i \notin D$，则 L_i 中的 r 个悬挂顶点都不与 $\{v_i\} \cup L_i$之外的任何顶点相邻，因此每个这样的悬挂顶点都必须支配自身。这迫使 $L_i \subseteq D$，与上述条件矛盾。因此，对所有 i都有 $v_i \in D$，且唯一的最小支配集为 $\{v_1, \ldots, v_n\}$，从而 $\zeta(G(n,r)) = 1$。

现在假设 $r = 1$，并记 $L_i = \{\ell_i\}$。上述条件意味着 D 从每一对 $\{v_i, \ell_i\}$中恰好选取一个顶点。反过来，任意这样的选法都支配 $G(n,1)$，因为所选顶点同时支配 v_i 和 ℓ_i，且每个路径顶点要么由自身支配，要么由其悬挂顶点支配。共有 2^n 种相互独立的选择，因此 $\zeta(G(n,1)) = 2^n = 2^{\gamma(G(n,1))}$。 □

对于 $n = 4$，图 1(a,b) 展示了这种二分情形。接下来的两个推论是直接的特例。

推论 4 (星图)。 对于星图 $K_{1,\,m}$ $(m \geq 1)$，

$$\gamma(K_{1,m}) = 1, \qquad \zeta(K_{1,m}) = \begin{cases} 2, & m = 1, \\ 1, & m \geq 2. \end{cases}$$

证明。 若 $m = 1$，则 $K_{1,\,1} \cong P_2$，且这两个顶点都占优。若 $m \geq 2$，则中心是唯一一个闭邻域等于 $V(K_{1,\,m})$ 的顶点。 □

推论 5 (全梳图)。 令 G_n 表示 n-梳图，即由 P_n 通过给每个 v_i 各附加一个悬挂顶点得到的图。于是 $\gamma(G_n) = n$ 且 $\zeta(G_n) = 2^n = 2^{\gamma(G_n)}$。

证明。 这是定理 3 在 $r = 1$ 下的情形。 □

请参见图 1(a)，其中展示了 G_4 的三个最小支配集示例。

2.2 内部悬挂点

均匀模型确定了一个密度阈值。下一个族表明，即使密度为 1，边界效应也会使两个自由度消失。

定理 6 (内部悬挂点**)。** 令 G_n' 由 P_n 通过对每个内部顶点 v_i 各连接一个悬挂顶点 ℓ_i得到，其中 $2 \le i \le n-1$。则

$$\gamma(G_n') = \max\{1, n-2\}, \qquad \zeta(G_n') = \begin{cases} 2, & n = 2, \\ 1, & n = 3, \\ 2^{\gamma(G_n')-2}, & n \ge 4. \end{cases}$$

证明。 对于 $2 \le i \le n-1$，令 $C_i = \{v_i, \ell_i\}$。由于 $N[\ell_i] = C_i$，每个支配集都与每个 C_i相交，因此对于 $n \ge 3$有 $|D| \ge n-2$。由于 $\{v_2, \dots, v_{n-1}\}$ 支配 G_n'，可得 $\gamma(G_n') = \max\{1, n-2\}$。情形 $n = 2$ (P_2) 和 $n = 3$ 显然成立。

设 $n \ge 4$，并令 D 为一个 γ-集，于是 $|D| = n-2$。簇强制给出对所有$2 \le i \le n-1$都有 $|D \cap C_i| = 1$。若 $\ell_2 \in D$，则 v_1 不受 ℓ_2 支配，必须由另一个顶点（必然是 v_1）支配，这与 $|D| = n-2$矛盾；因此 $v_2 \in D$。类似地， $v_{n-1} \in D$。所以每个 γ-集都具有如下形式

$$D = \{v_2, v_{n-1}\} \cup \{x_i : 3 \le i \le n-2\}, \qquad x_i \in \{v_i, \ell_i\}.$$

每种这样的选择都支配 G_n'，因为 v_2 支配 v_1， v_2， v_3 和 ℓ_2， v_{n-1} 支配 v_{n-2}， v_{n-1}， v_n和 ℓ_{n-1}，而对于 $3 \le i \le n-2$，选择 x_i 支配 v_i 和 ℓ_i。因此， $\zeta(G_n') = 2^{n-4} = 2^{\gamma(G_n')-2}$。 □

2.3 交替梳状图与斐波那契支配数

现在我们考虑一种稀疏附着模式，其中局部选择会在相邻簇之间相互作用。这种耦合产生斐波那契递推关系，并使 γ 呈现次指数增长。

定义 7. 对于 $n \ge 2$，设 E_n （分别为 O_n）是由 P_n 得到的图：在每个偶数（分别为奇数）顶点 v_i 上附加一个悬挂顶点 ℓ_i。

定理8 （交替梳状图的斐波那契支配数）。 令 $n \ge 2$ 并设 $k = \lfloor n/2 \rfloor$。则

$$\gamma(E_n) = k, \qquad \zeta(E_n) = \begin{cases} F_{k+1}, & n = 2k, \\ F_k, & n = 2k+1, \end{cases}$$

and

$$\gamma(O_n) = \lceil n/2 \rceil, \qquad \zeta(O_n) = \begin{cases} F_{k+1}, & n = 2k, \\ F_{k+3}, & n = 2k+1, \end{cases}$$

其中，$(F_t)_{t \ge 1}$ 表示由 $F_1 = F_2 = 1$ 和 $F_{t+1} = F_t + F_{t-1}$ 定义的斐波那契数列。

证明。 我们分别处理偶数和奇数附着模式。

支配数。 在 E_n 中，每个偶数索引 $2i$ 都贡献一个悬挂簇 $C_{2i} = \{v_{2i}, \ell_{2i}\}$，其中包含 $N[\ell_{2i}] = C_{2i}$。每个支配集都必须与每个 C_{2i} 相交，且这些簇两两不相交。因此 $\gamma(E_n) \ge k = \lfloor n/2 \rfloor$。选取所有偶数主节点 $\{v_2, v_4, \dots\}$ 即可支配 E_n，因此 $\gamma(E_n) = k$。对奇数索引应用相同论证，可得 $\gamma(O_n) = \lceil n/2 \rceil$。

偶数附着。对于 $t \geq 1$，令 H_t 为 E_{2t} 在路径顶点 $v_1, \ldots, v_{2t}$ 以及悬挂点 $\ell_2, \ell_4, \ldots, \ell_{2t}$ 上的导出子图，并记作 $a_t = \zeta(H_t)$。由于 H_t 恰好包含 t 个两两不相交的簇 $C_{2i} = \{v_{2i}, \ell_{2i}\}$，且 $\gamma(H_t) = t$，每个最小支配集与每个簇恰好相交于一个顶点。

初始值可通过观察得到。对于 $t = 1$，H_1 是路径 v_1v_2，并在 v_2处有一个悬挂顶点；唯一的最小支配集是 $\{v_2\}$，所以 $a_1 = 1$。对于 $t = 2$，H_2 是路径 $v_1v_2v_3v_4$，并在 v_2 和 v_4处有悬挂点。恰好存在两个最小支配集，即 $\{v_2, v_4\}$ 和 $\{v_2, \ell_4\}$，所以 $a_2 = 2$。

现在固定 $t \geq 3$，并令 D 为 H_t的一个最小支配集。考虑末端簇$C_{2t} = \{v_{2t}, \ell_{2t}\}$。

情形 *1*：$v_{2t} \in D$。移除顶点 $\{v_{2t-1}, v_{2t}, \ell_{2t}\}$，并将 D 限制在剩余的导出子图上，可得到 H_{t-1}的一个最小支配集。反过来，H_{t-1} 的任意一个最小支配集都能通过添加 v_{2t}，唯一地扩展为 H_t 的一个最小支配集。因此，这种情形贡献 a_{t-1} 种选择。

情形 *2*：$\ell_{2t} \in D$。于是 $v_{2t} \notin D$ 和 v_{2t-1} 必须由 D 中的一个邻点支配。由于 v_{2t-1} 仅与 v_{2t-2} 和 v_{2t} 相邻，因此可知 $v_{2t-2} \in D$ 是必选的。移除最后两个偶数簇，并将范围限制在 v_1、.....、v_{2t-4} 上的导出子图，可得到 H_{t-2}的一个最小支配集，而且这种对应是一一对应的。因此，此情形贡献 a_{t-2} 种选择。

合并两种情形可得递推关系 $a_t = a_{t-1} + a_{t-2}$，其中 $t \geq 3$，且 $a_1 = 1$ 和$a_2 = 2$，因此 $a_t = F_{t+1}$。若 $n = 2k$，则 $E_n = H_k$ 和 $\zeta(E_{2k}) = F_{k+1}$。若 $n = 2k + 1$，端点 v_{2k+1} 没有悬挂顶点，因此在每个最小支配集中都必须包含 v_{2k}，从而化简为 H_{k-1}，并得到 $\zeta(E_{2k+1}) = F_k$。

奇数附着。对于 $t \geq 0$，令 J_t 为 O_{2t+1} 在顶点 v_1、.....、v_{2t+1} 以及悬挂点 ℓ_1、ℓ_3、.....、ℓ_{2t+1} 上的导出子图，并记为 $b_t = \zeta(J_t)$。图 J_t 包含 $t + 1$ 个互不相交的簇 $\{v_{2i-1}, \ell_{2i-1}\}$，因此 $\gamma(J_t) = t + 1$。

对于 $t = 0$，J_0 由带有一个悬挂顶点 ℓ_1的 v_1 构成，其唯一的最小支配集为 $\{v_1\}$；因此 $b_0 = 1$。对于 $t = 1$，J_1 是在 v_1 和 v_3处带有悬挂点的路径 $v_1v_2v_3$。恰好存在三个最小支配集，即 $\{v_1, v_3\}$、$\{v_1, \ell_3\}$和 $\{\ell_1, v_3\}$，因此 $b_1 = 3$。

固定 $t \geq 2$，令 D 为 J_t的最小支配集。考虑末端簇 $\{v_{2t+1}, \ell_{2t+1}\}$。情形 *1*：$v_{2t+1} \in D$。移除 $\{v_{2t}, v_{2t+1}, \ell_{2t+1}\}$ 并限制 D，可得到 J_{t-1}的最小支配集，且该操作可逆。因此，此情形贡献 b_{t-1} 种选择。

情形 *2*：$\ell_{2t+1} \in D$。于是 $v_{2t+1} \notin D$，而对 v_{2t} 的支配迫使 $v_{2t-1} \in D$。固定这些顶点后，剩余选择双射地落在与 J_{t-2} 同构的导出子图中。因此，此情形贡献 b_{t-2} 种选择。

因此，对于 $t \geq 2$，$b_t = b_{t-1} + b_{t-2}$，其中 $b_0 = 1$ 和 $b_1 = 3$，所以 $b_t = F_{t+3}$。若 $n = 2k + 1$，则 $O_n = J_k$ 和 $\zeta(O_{2k+1}) = F_{k+3}$。若 $n = 2k$，未悬挂的端点 v_{2k} 会迫使每个最小支配集都包含 v_{2k-1}，从而归约为 J_{k-1}，并得到 $\zeta(O_{2k}) = F_{k+1}$。 □

表1列出了 γ和 ζ在 $2 \leq n \leq 10$时的取值，证实了定理8中奇数附着和偶数附着对应的斐波那契数列指标。

Co推论 9（交替梳状图的渐近行为）。对于交替梳状图 ，

$$\zeta(E_n) \asymp \varphi^{\gamma(E_n)} \quad and \quad \zeta(O_n) \asymp \varphi^{\gamma(O_n)},$$

其中 $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$ 是黄金比例。

证明。比内公式给出 $F_t = (\varphi^t - \psi^t)/\sqrt{5}$，其中 $\psi = (1 - \sqrt{5})/2$且 $|\psi| < 1$；参见 [12, 第 6] 章。因此 $F_t = \Theta(\varphi^t)$，所声称的渐近结论由定理8得出。 □

3 完全二叉树及叶节点删除下的稳定性

第2节中的基于路径的族呈现出三种由附着驱动的行为：独立选择、边界诱导的刚性，以及斐波那契耦合。现在我们转向一个真正具有层级结构的族。完全二叉树展现出一种性质截然不同的现象：对于 ζ，一种刚性的周期规律在 $|V|$ 指数增长的情况下仍然成立。随后，我们将量化这种刚性在受控边界扰动下如何减弱。

3.1 完全二叉树中的周期3 支配域

令 T_h 表示高度为 $h \geq 1$、根位于第 0 层且层集为 $L_i = \{v$ 的完全二叉树：dist(v,根) $= i\}$。那么 $|L_i| = 2^i$ 和 $|V(T_h)| = 2^{h+1} - 1$。

定理 10 (支配数 及完全二叉树的周期性支配域)。 对于 $h \geq 1$,

$$\gamma(T_h) = \left\lfloor \frac{2^{h+2}+3}{7} \right\rfloor, \qquad \zeta(T_h) = \begin{cases} 3, & h \equiv 0 \pmod 3 \text{ and } h \geq 3, \\ 1, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

证明。 $\gamma(T_h)$ 的公式是经典结果；例如，参见 Haynes–Hedetniemi–Slater [13]。因此，我们重点讨论支配域 $\zeta(T_h)$。

我们首先注意到，可以假设最小支配集避开叶节点。事实上，设 $h \geq 2$，并假设某个 γ-集 D 包含一个叶节点 $\ell \in L_h$，其父节点为 $p \in L_{h-1}$。由于 $N[\ell] \subseteq N[p]$，用 p 替换 ℓ可同时保持基数和支配性质。反复进行这种替换，可得到一个具有 γ-集 S，其中

$$S \cap L_h = \varnothing.$$

固定这样一个集合 S。如果某个顶点 $x \in L_{h-1}$ 有两个叶节点子节点 ℓ_1，$\ell_2 \in L_h$，那么对这两个叶节点的支配性要求 $x \in S$，因为 S不包含叶节点且 $N[\ell_i] = \{\ell_i, x\}$。因此，

$$L_{h-1} \subseteq S \quad \text{for every } \gamma\text{-set } S \text{ with } S \cap L_h = \varnothing.$$

现在假设 $h \geq 4$。令 T' 表示由第 0 层至 $h-3$ 层所诱导的子树，它同构于 T_{h-3}。由于 L_{h-1} 中的顶点支配第 $h-2$、$h-1$ 和 h 层中的所有顶点，因此 S 所需满足的剩余支配约束完全位于 T'内部。

考虑交集 $S \cap V(T')$。T'的每个顶点要么在内部受到支配，要么通过 T' 内的邻接关系受到支配，且其大小满足

$$|S \cap V(T')| = |S| - |L_{h-1}| = \gamma(T_h) - 2^{h-1} = \gamma(T_{h-3}),$$

其中，最后一个等式由 γ 的闭式公式得出。因此， $S \cap V(T')$ 是 T' 的一个最小支配集。

反过来，给定 T' 的任意一个 γ-集 S'，集合

$$S' \cup L_{h-1}$$

支配 T_h，因为 S' 支配了 T' 的所有顶点，而 L_{h-1} 支配了顶部三层中的每个顶点。此外，其基数为

$$|S'| + |L_{h-1}| = \gamma(T_{h-3}) + 2^{h-1} = \gamma(T_h),$$

因此，它是 T_h 的一个 a γ-集。

这两种构造互为逆构造，并在 T_h 的最小支配集与 T_{h-3} 的最小支配集之间建立了双射。因此，

$$\zeta(T_h) = \zeta(T_{h-3}) \qquad (h \geq 4).$$

直接检验可得 $\zeta(T_1) = \zeta(T_2) = 1$ 以及 $\zeta(T_3) = 3$。所述周期为 3 的行为可由对 h归纳立即得到。□

T_3 的三个最小支配集如图 1(d) 所示。

3.2 叶节点删除下支配域的包络

现在我们量化完全二叉树的边界结构受到扰动时所引入的灵活性。

对于 $X \subseteq L_h$，记 $T_h - X$ 为删除 X中的叶节点后得到的导出子树。令

$$m_1(X) = \#\{\text{parents in } L_{h-1} \text{ with exactly one deleted child}\}.$$

定理 11（叶节点删除下的支配域包络）。设 $h \geq 2$ 且设 $X \subseteq L_h$。则

$$\zeta(T_h - X) \leq 2^{m_1(X)}\, \zeta(T_h).$$

证明。令 D 为 $T_h - X$ 的一个最小支配集。由 D 构造集合 $\pi(D) \subseteq V(T_h)$ 如下：每当 D 包含一个叶节点 $u \in L_h \setminus X$ 时，就将 u 替换为其父节点 $p(u) \in L_{h-1}$；D 中的其他所有顶点保持不变。

由于 $N[u] \subseteq N[p(u)]$,，这一替换保持了支配性，因此 $\pi(D)$ 支配 T_h。此外，

$$|\pi(D)| \leq |D| = \gamma(T_h - X) \leq \gamma(T_h).$$

根据 $\gamma(T_h)$ 的极小性，可得 $|\pi(D)| = \gamma(T_h)$，因此 $\pi(D)$ 是 T_h 的一个最小支配集。

现在固定一个 γ-集 S，它属于 T_h。考虑顶点 $p \in L_{h-1}$，其两个子节点在 T_h 中均为叶节点。若两个子节点均未被删除，或均被删除，则 p 处的支配约束恰如 T_h 中那样被唯一确定。然而，若 p 的两个子节点中恰有一个被删除，则 D 作为 S 的原像，至多有两种方式在 p 处局部实现支配：或者 $p \in D$，或者（在允许的情况下）将 p 替换为其剩余的子节点。

每个这样的父节点至多贡献一个独立的二元选择，且没有其他顶点会带来额外的自由度。因此，对于固定的 S，$\pi^{-1}(S)$ 的原像的基数至多为$2^{m_1(X)}$。

对 T_h 的所有 $\zeta(T_h)$ 个最小支配集求和，得到

$$\zeta(T_h - X) \leq 2^{m_1(X)}\, \zeta(T_h),$$

如所述。□

推论 12 (包络界的紧确性)。设 $h \geq 2$ 并设 $\ell \in L_h$ 是 T_h的一个叶节点。那么

$$\gamma(T_h - \ell) = \gamma(T_h), \qquad \zeta(T_h - \ell) = 2\,\zeta(T_h).$$

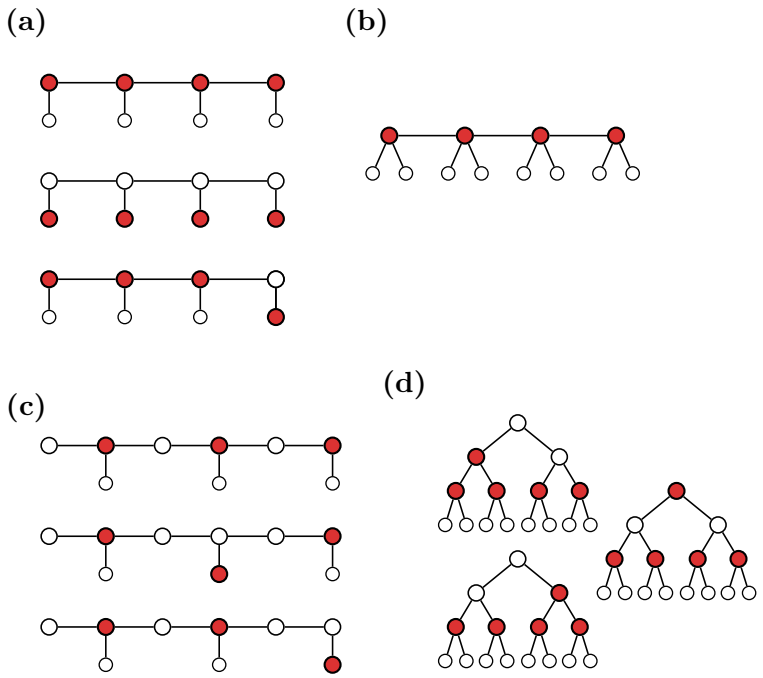

图 1：树中的四种支配行为。（a）全梳图 G_4：$\gamma = 4$、$\zeta = 2^4 = 16$（展示了三个示例）。（b）双悬挂树 $G(4,\ 2)$：$\gamma = 4$、$\zeta = 1$（唯一的集合）。（c）交替梳状树 E_6：$\gamma = 3$、$\zeta = F_4 = 3$（全部三个集合）。（d）二叉树 T_3：$\gamma = 5$、$\zeta = 3$（全部三个集合）。实心顶点属于支配集；空心顶点被支配。参见定理3、8和10。

证明。由于 L_{h-1} 中恰有一个父节点失去了一个子节点，因此有 $m_1(\{\ell\}) = 1$。由此，定理 11 给出了上界

$$\zeta(T_h - \ell) \le 2\,\zeta(T_h).$$

令 p 表示 ℓ 的父节点，并令 ℓ' 为其兄弟节点。在完全树 T_h 中，$\{\ell, \ell'\}$ 在每个最小支配集中都强制包含 p：若 $p \notin S$，则 ℓ 和 ℓ' 都必须属于 S，这与最小性矛盾。因此，p 属于每个 γ-集的 T_h。

固定 T_h 的一个最小支配集 S。在 $T_h - \ell$ 中，顶点 p 可以保留在支配集中，也可以由 ℓ' 替换；这两种选择都会得到大小相同的最小支配集。因此，T_h 的每个 γ- 集恰好对应 $T_h - \ell$ 的两个不同最小支配集，即

$$S \quad \text{and} \quad (S \setminus \{p\}) \cup \{\ell'\}.$$

这表明 $\zeta(T_h - \ell) \ge 2\,\zeta(T_h)$，等号由此成立。

最后，上述构造保持了基数不变，因此 $\gamma(T_h - \ell) \le \gamma(T_h)$。反向不等式显然成立，因为在 $T_h - \ell$ 的任意支配集中加入 ℓ，就会得到 T_h 的一个支配集。因此 $\gamma(T_h - \ell) = \gamma(T_h)$。

□

由于即使一次局部修改也可能在不改变 γ 的情况下使最优解的数量翻倍，因此需要高效算法来追踪扰动下的支配域；这促使我们在下一节中开发动态规划框架。

4 算法方面

上述结构性结果可直接转化为对支配数 γ 和支配域 ζ 进行高效求值的过程。在基于路径的族中，局部强制会导出闭式表达式或单一的斐波那契型递推关系。对于一般树，这两个参数都可以通过一种具有常数个局部状态的标准自底向上动态规划来计算。

4.1 基于路径的族：闭式与斐波那契递推

定理*13*（悬挂路径族的求值复杂度）。设 G 属于以下由含 n 个顶点的路径构造的族之一：$G(n,r)$、G'_n、E_n或 O_n 。那么，$\gamma(G)$和 $\zeta(G)$可在$O(n)$时间内计算。此外，对于 $G(n,r)$和 G'_n，其值可分别由(n,r)和 n 在 $O(1)$算术时间内得到；对于 E_n 和 O_n，求得 $\zeta(G)$的值需要计算长度为 $\Theta(n)$ 的斐波那契型递推。

证明。 定理3和定理6给出了 γ 和 ζ 在 $G(n,\ r)$及 G'_n上的显式公式，因此求值只需读取输入参数并应用这些公式。对于 E_n 和 O_n，定理8将 $\zeta(G)$表示为一个斐波那契数，其下标关于 n呈线性关系。通过递推关系$F_{t+1} = F_t + F_{t-1}$ 计算 F_t 需要 $O(t) = O(n)$时间，并使用常量辅助存储。 □

4.2 扰动下的树：线性时间动态规划

定理 14 (树上的线性时间动态规划)。 对于任意一棵有 N 个顶点的树 T，$\gamma(T)$ 以及 T 的最小支配集数量，都可以在 $O(N)$ 时间内计算出来。

证明。 以任意顶点 r 为根 T。对于每个顶点 v，令 T_v 为由 v 及其后代构成的导出子树。维护三种局部状态，用于描述 v 在 T_v 中的状态：v 被选中；或者 v 未被选中且被至少一个子节点支配；或者 v 未被选中且未在 T_v 内被支配（因此必须由 T_v 外部的父节点支配）。

对于 v 处的每个状态 s，存储一对数值 $(m_s(v)\ c_s(v))$，其中 $m_s(v)$ 是使 T_v 实现状态 s 的支配集的最小大小，而 $c_s(v)$ 统计达到该最小值的集合数量。按后序处理 v 时，每个子树独立贡献，而可行的子状态组合则由实现 v 处的 s 所需的邻接约束决定。通过在这些组合中取最小值来计算 $m_s(v)$；$c_s(v)$ 则通过将子节点对应的计数相乘，并对达到最小值的组合求和来得到。由于每条边只需检查常数次，且每个顶点只需用常数时间汇总状态，因此总运行时间为 $O(N)$。

在根 r 处，只允许 r 被支配的状态，因此 $\gamma(T)$ 是对应的 $m_s(r)$ 值中的最小值，而最小支配集的数量则是所有达到该最小值的状态所对应的 $c_s(r)$ 值之和。 □

注 15。 对于完全二叉树 T_h，定理 10 表明，$\zeta(T_h) \in \{1,3\}$ 仅取决于h 模 3 的值，因此给定 h 后，求值只需常数时间。定理 14 的动态规划旨在处理诸如 $T_h - X$ 这样的扰动实例，在这些实例中，这种精确的周期性未必成立。

5 结论

我们结合结构刻画与高效求值过程，确定了若干树族的支配数 γ 和支配域 ζ 的精确值。在这些

表1：定理8在小规模情形下的验证。

E_n (偶数附着)				O_n (奇数附着)			
n	k	γ	ζ	n	k	γ	ζ
2	1	1	$F_2 = 1$	2	1	1	$F_2 = 1$
3	1	1	$F_1 = 1$	3	1	2	$F_4 = 3$
4	2	2	$F_3 = 2$	4	2	2	$F_3 = 2$
5	2	2	$F_2 = 1$	5	2	3	$F_5 = 5$
6	3	3	$F_4 = 3$	6	3	3	$F_4 = 3$
7	3	3	$F_3 = 2$	7	3	4	$F_6 = 8$
8	4	4	$F_5 = 5$	8	4	4	$F_5 = 5$
9	4	4	$F_4 = 3$	9	4	5	$F_7 = 13$
10	5	5	$F_6 = 8$	10	5	5	$F_6 = 8$

表2：树族的支配行为。

结构	γ	ζ
全梳图 G_n	n	2^n
内部悬挂点 G'_n ($n \geq 4$)	$n-2$	2^{n-4}
偶交替梳状图 E_n	$\Theta(n)$	$F_{\Theta(n)}$
奇交替梳状图 O_n	$\Theta(n)$	$F_{\Theta(n)}$
多个悬挂点（每个顶点 $r \geq 2$ ）	n	1
二叉树 T_h	$\lfloor (2^{h+2}+3)/7 \rfloor$	h中的周期为3

树族中，出现了四种性质迥异的支配行为。悬挂点簇中的独立局部选择会带来指数增长，增长率为 $\zeta = 2^{\gamma}$。交替梳状图中的局部约束相互耦合，产生斐波那契增长，增长率为 $\zeta \asymp \varphi^{\gamma}$。完全二叉树则呈现严格的周期性行为：尽管顶点数量呈指数增长， ζ 仅取决于 h模 3。最后，足够高的悬挂点密度会带来完全刚性，使支配域收缩为唯一值 $\zeta = 1$。

这些结构性情形可以直接转化为算法解读。局部强制和有界交互可将 γ 和 ζ 的计算简化为闭式或线性时间动态规划，从而即使对于大型实例，也能高效完成计算。这与一般情形形成鲜明对比：在一般情形下，计算最小支配集的数量是#P-完全的。由此得到的算法可用于网络重构、不确定环境下的设施选址以及分布式共识；在这些应用中，支配域量化了结构灵活性和鲁棒性。

表2总结了本文所识别的四种支配行为，并突显了指数级、亚指数级、周期性和刚性枚举之间的转变。对于交替族E_n 和 O_n，斐波那契公式既有理论支持，也经计算验证，具体验证结果见表1。

仍有几个方向有待探索。将斐波那契型递推推广到更广泛的稀疏悬挂模式，或许能发现具有次指数支配增长的其他族。更精确地刻画近乎完全树中有界与无界支配域之间的界限，将有助于阐明局部强制如何扩展为全局刚性。从算法角度看，将线性时间框架推广到更广泛的图类，包括有界树宽图

或可进行局部分解的图，将扩大其适用范围。最后，研究边删除或更一般的局部修改（而不仅限于叶节点移除）对支配域行为的影响，或许能进一步揭示网络系统中基于支配的结构的稳定性与脆弱性。

参考文献

[1] J. D. Allagan 和 B. Bobga，某些图的支配域，Int. J. Math. Comput. Sci. 16 (2021)，第 4 期，1709–1720。[2] D. Angel，将图支配应用于防御医疗信息网络免受网络威胁，J. Ambient Intell. Humaniz. Comput. 13 (2022)，第 9 期，3765–3770。[3] V. S. Anitha 和 M. P. Sebastian，面向应用的基于连通支配集的无线传感器网络簇形成，J. Braz. Comput. Soc. 17 (2011)，第 1 期，3–18。[4] D. Bendouda、A. Rachedi 和 H. Haffaf，面向物联网、基于软件定义网络的可编程架构：连通支配集方法，Future Gener. Com- put. Syst. 80 (2018)，188–197。[5] R. L. Church 和 C. R. ReVelle，最大覆盖选址问题，Papers Reg. Sci. 32 (1974)，第 1 期，101–118。[6] S. Connolly、Z. Gabor、A. Godbole 和 B. Kay，最小支配集最大数量的界，Discrete Math. 339 (2016)，第 5 期，1537–1542。[7] F. Dai 和 J. Wu，一种用于自组无线网络连通支配集形成的扩展局部化算法，IEEE Trans. Parallel Distrib. Syst. 15 (2004)，第 10 期，908–920。[8] R. Z. Farahani、M. Steadieseifi 和 N. Asgari，多准则设施选址问题：综述，Appl. Math. Model. 34 (2010)，第 7 期，1689–1709。[9] S. Gao、J. Ma、Z. Chen、G. Wang 和 C. Xing，基于局部结构对复杂网络中节点的传播能力进行排名，Phys. A 403 (2014)，130–147。[10] A. Godbole、J. D. Jamieson 和 W. Jamieson，最小支配集和最小全支配集的最大数量，Util. Math. 94 (2014)，269–274。[11] W. Goddard 和 M. A. Henning，具有唯一最小指定支配集的图，Graphs Combin. 39 (2023)，第 5 期，文章 103。[12] R. L. Graham、D. E. Knuth 和 O. Patashnik，《具体数学》，第 2 版，Addison– Wesley，马萨诸塞州雷丁，1994。[13] T. W. Haynes、S. T. Hedetniemi 和 P. J. Slater，《图支配基础》，Marcel Dekker，纽约，1998。[14] J. Jia、J. Chen、G. Chang 和 Z. Tan，基于多目标遗传算法的无线传感器网络能效覆盖控制，Comput. Math. Appl. 57 (2009)，第 11- 12 期，1756–1766。[15] L. Kang、M. Y. Sohn 和 H. K. Kim，图中的支配相关参数：综述，Congr. Numer. 193 (2008)，65–91。

[16] F. Kuhn、T. Moscibroda 和 R. Wattenhofer，什么不能在本地计算！载于第 *23* 届 *ACM* 分布式计算原理年会研讨会论文集（*PODC 2004*），ACM，2004 年，第 300– 309 页。[17] Y. Li、W. Chen、Y. Wang 和 Z.-L. Zhang，具有朋友与敌对关系的社交网络中的影响扩散动力学与影响最大化，载于第 *6* 届 *ACM* 网络搜索与数据挖掘国际会议论文集（*WSDM 2013*），ACM，2013 年，第 657–666 页。[18] J. Petr、J. Portier 和 O. Versteegen，森林中最小支配集和全支配集的数量，*J. Graph Theory* **107** （2024），第 4 期，829–845。[19] J. Su、J. Allagan、S. Gao、O. Malomo、W. Gao 和 E. Eyob，网格上的支配，《数学》**12**（2024），第 21 期，3408。[20] J. Wu 和 H. Li，计算连通支配集以实现自组无线网络中的高效路由，载于第 *3* 届移动计算与通信离散算法和方法国际研讨会论文集，ACM，1999 年，第 7–14 页。