arXiv:2601.03488v1 [math.CO] 7 Jan 2026

棱柱图的精确支配配置数：通过循环词按同余类枚举

Julian Allagan*

摘要

设 $G_n = C_n \square P_2$ 表示具有 $2n$个顶点的棱柱图（圆形梯子图）。通过将列配置编码为循环词，可将支配问题约化为相邻因子上的局部布尔约束。该框架给出了支配域 $\zeta(G_n)$ 的显式公式，并按模n 4 分层，其中例外情形 $n \in \{3, 6\}$ 已通过计算得到验证。结合已知的支配数 $\gamma(G_n)$，这些结果揭示了支配最优解所遵循的不同算术规律，其范围从严格的强制结构到高度的枚举灵活性，并促使人们为评估参数化图族中的结构稳健性提出定量参数。

关键词： 支配数、支配域、棱柱图、循环词

2020年数学主题分类： 05C69, 05C70, 68R15

1 引言

棱柱图（或称圆形梯子图） $G_n = C_n \square P_2$ 是一种基本的笛卡尔积，兼具循环对称性和固定的双层结构。它自然地作为二面体群的 Cayley 图出现，并长期以来一直是支配理论中的典型测试对象，其全局规则性与强烈的局部约束并存。

集合 $S \subseteq V(G)$ 是支配集，当且仅当每个顶点都位于该集合的闭邻域中 $N[S]$。支配数 $\gamma(G)$ 记录此类集合的最小规模，但无法区分刚性与灵活的最优支配。这一区别由支配域刻画，该概念由 [1]、 $\zeta(G) = |\{ S \subseteq V(G) \text{ 引入：} |S| = \gamma(G)，且 S \text{ 支配 } G \}|$，它统计最小支配配置的数量。

目前仅少数图族已有精确支配域公式，包括路径和环 [1], ，近期研究还将结果扩展到了网格图 [20]。更一般地，关于 $\zeta(G)$ 与 $\gamma(G)$ 之间关系的上界（例如 [8, 6]）表明，在广泛的图类中，指数增长不可避免，尽管具体图族往往呈现出更强的结构强制性。例如，Petr、Portier 和 Versteegen [19]证明，森林满足 $\zeta(F) \leq 5^{\gamma(F)}$，这说明即使在粗略的全局上界之下，刚性的局部结构仍可能存在。

对于棱柱图，其支配数已得到完整刻画。Grinstead 和 Slater [11]建立了以下同余类公式。

*伊丽莎白城州立大学数学、计算机科学与工程技术系，美国北卡罗来纳州伊丽莎白城 27909。电子邮箱: adallagan@ecsu.edu

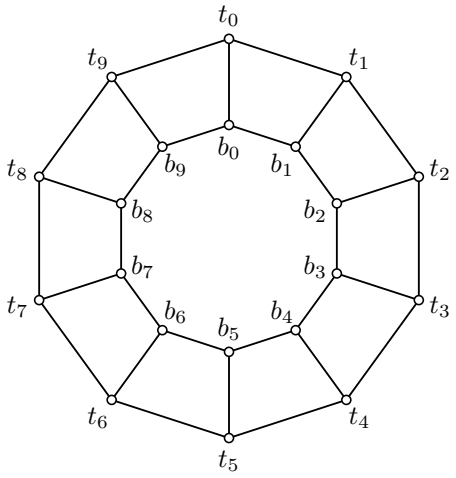

图 1：带有顶点标签 t_i、b_i 的棱柱图 $G_{10} = C_{10}\square P_2$。

定理 1.1 ([11])。 对于 $n \geq 3$,

$$\gamma(G_n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2}, & n \equiv 0 \pmod 4, \\ \dfrac{n+1}{2}, & n \equiv 1, 3 \pmod 4, \\ \dfrac{n}{2} + 1, & n \equiv 2 \pmod 4. \end{cases}$$

相比之下，支配域 $\zeta(G_n)$ 的显式公式似乎此前尚未得到确定。本文的主要结果是完整确定了所有 $n \geq 3$ 对应的 $\zeta(G_n)$。根据 $n \bmod 4$，这些公式分为三个性质迥异的情形——常数、线性和二次；在 $n = 3$ 和 $n = 6$ 处则有例外。这些情形反映了局部强制机制，而仅从 $\gamma(G_n)$ 的层面无法看出这些机制。

我们的方法具有结构性和组合性。我们将支配集编码为由四字母字母表构成的循环词，其中每个字母表示一种列配置，并将支配条件转化为相邻因子上的局部布尔约束。最小支配集对应于满足这些约束的最小权重词，从而将枚举问题归结为一种结构严格的语言学分类。在最微妙的情形 $n \equiv 2 \pmod 4$ 中，通过显式的轨道—锚点分解和构造性双射，得到了二次增长 $\zeta(G_n) = n(n+2)$。

本文结构安排如下。第2 节介绍记号和基于词的编码。第3节证明精确支配域公式。第4 节分析由枚举结果所启示的灵活性参数。第5 节概述后续研究方向，包括推广到其他笛卡尔积。附录 A中提供了小n值时的计算验证。

2 预备知识

全文中，指标均按模 n 计算，并记作 $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$。阶为 $n \geq 3$ 的棱柱图是笛卡尔积 $G_n = C_n\square P_2$，其顶点集为 $V(G_n) = \{(t, i), (b, i) : i \in \mathbb{Z}_n\}$；图 1 展示了 $n = 10$ 时的示意图。边连接 (t, i) 与 $(t, i \pm 1)$，以及 (b, i)，而

对称地，(b,i) 与 $(b,i\pm1)$ 相连，也与 (t,i) 相连。因此，G_n 由两个 n 环通过 n 个横档连接而成，包含 $2n$ 个顶点和 $3n$ 条边。

如果每个顶点都属于闭邻域 $N[S]$，则集合 $S\subseteq V(G_n)$ 是一个支配集。支配数 $\gamma(G_n)$ 是此类集合的最小规模，而支配域 $\zeta(G_n)$ 则统计所有规模达到该最小值的支配集。由于此处考虑的棱柱图均带有标号，因此 $V(G_n)$ 的不同子集会分别计数，即使它们之间仅相差一次循环旋转。

为了从组合角度研究支配问题，我们将支配集编码为循环词。集合 $S\subseteq V(G_n)$ 唯一对应于一个词

$$w=(w_0,w_1,\dots,w_{n-1})\in\{00,10,01,11\}^n,$$

w_i 中的两个比特分别记录 $(t,\ i)$ 和 $(b,\ i)$ 是否属于 S。为方便起见，我们使用字母表

$$\mathrm{C}=00,\qquad \mathrm{A}=10,\qquad \mathrm{B}=01,\qquad \mathrm{D}=11.$$

对于字母 $x\in\{\mathsf{C},\ \mathsf{A},\ \mathsf{B},\ \mathsf{D}\}$，我们用 $x_t,\ x_b\in\{0,1\}$ 表示其上层和下层比特，因此 $(w_i)_t,\ (w_i)_b$ 表示第 i 列中的选取情况。

词 w 的权重定义为

$$\mathrm{wt}(w)\coloneqq\#\{i:w_i=\mathrm{A}\}+\#\{i:w_i=\mathrm{B}\}+2\,\#\{i:w_i=\mathrm{D}\},$$

使得 $\mathsf{wt}(w)=|S|$。如果一个词编码了一个支配集，且满足 $\mathsf{wt}(w)=\gamma(G_n)$，则称其为最小支配词 。

Domi G_n 中的支配直接转化为对 w相邻字母的局部约束 .

引理2.1 (局部支配约束)。 设 $w\in\{\mathrm{C}、\mathrm{A}、\mathrm{B}、\mathrm{D}\}^n$ 编码集合 $S\subseteq V(G_n)$。那么S 支配 G_n ，当且仅当对每个 $i\in\mathbb{Z}_n$，以下两项均成立

$$(w_i)_t\vee(w_i)_b\vee(w_{i-1})_t\vee(w_{i+1})_t=1, \tag{1}$$

$$(w_i)_b\vee(w_i)_t\vee(w_{i-1})_b\vee(w_{i+1})_b=1 \tag{2}$$

成立。

证明。固定 $i\in\mathbb{Z}_n$。顶点(t,i)被支配，当且仅当以下情况至少有一种成立：$(t,i)\in S$、$(b,i)\in S$、$(t,i-1)\in S$或$(t,i+1)\in S$。将这四种情况转化为字词表示，便得到(1)。对(b,i)应用同样的论证，其邻点为(t,i)、$(b,i-1)$和$(b,i+1)$，便得到(2)。

□

这种编码将 G_n 中的支配问题化为一组有限的局部布尔约束。在接下来的章节中，我们将利用这些约束，对最小支配词施加强有力的结构限制，最终实现对支配域 $\zeta(G_n)$ 的精确枚举。

3 主要结果：精确支配域公式

定理 3.1 （棱柱图的精确支配域）。 对于 $n\geq3$ 和 $G_n=C_n\square P_2$,

$$\zeta(G_n)=\begin{cases}9, & n=3,\\ 4, & n\equiv0\pmod4,\\ 2n, & n\equiv1,3\pmod4,\\ 51, & n=6,\\ n(n+2), & n\equiv2\pmod4,\ n\geq10.\end{cases}$$

现在，我们将第 2 节中的局部支配约束转化为全局结构。全文中，我们使用第 2节中的词编码，其中支配集 $S \subseteq V(G_n)$ 对应于一个字$w = (w_0, \dots, w_{n-1}) \in \{\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C},\mathrm{D}\}^n$，其索引取自 $\mathbb{Z}_n$。根据引理 2.1，支配等价于每个索引处的两个逐行约束。一个 最小支配词 满足 $\mathrm{wt}(w) = \gamma(G_n)$。

以下所有论证均为结构性论证，且对 $n \geq 4$统一适用。其余两个较小的情况 $n \in \{3, 6\}$ 通过直接枚举单独处理（见附录A）。

3.1 强制与排除

在按同余类划分之前，我们先归纳出三条强制规则，它们能反复缩小搜索空间。第一条表明，连续空列与极小性不相容；接下来的两条则将局部空性转化为确定的邻列模式。

引理 3.2 (CC 强制出现双列)。 设 w 是一个支配字。若 $w_i = w_{i+1} =$C，则 $w_{i-1} = w_{i+2} =$ D。特别地， w_{i-1}、w_{i+2} 中至少有一个等于 D。

证明。 由于 $w_i = w_{i+1} =$ C，列 i、$i+1$ 中的四个位均为0。在索引2.1处应用顶行约束（引理 i:

$$(w_{i-1})_t \vee (w_i)_t \vee (w_i)_b \vee (w_{i+1})_t \;=\; (w_{i-1})_t \vee 0 \vee 0 \vee 0 \;=\; 1,$$

因此 $(w_{i-1})_t = 1$。在 i 处应用底行约束，同样可强制得到 $(w_{i-1})_b = 1$，从而 $w_{i-1} =$ D。在索引 $i+1$ 处重复相同论证，可得 $w_{i+2} =$ D。 □

引理 3.3 （空列迫使互补单例邻居）。 若 $w_i =$C，则

$$(w_{i-1})_t \vee (w_{i+1})_t = 1 \qquad and \qquad (w_{i-1})_b \vee (w_{i+1})_b = 1.$$

特别地，若 w_{i-1} 既不等于 w_{i+1} 也不等于D，则 $\{w_{i-1}, w_{i+1}\} = \{$A、B$\}$.

证明。 将 $(w_i)_t = (w_i)_b = 0$ 代入索引 i处的两个支配约束。若两个邻居都不是 D，则每个邻居恰好贡献一个 1 比特，因此所示的两个析取式迫使一个邻居提供高位，另一个提供低位。等价地，这两个邻居必须分别为 A 和 B。 □

引理 3.4 （最小D 支配词中不含 D）。 若 $n \geq 4$ 和 w 是 G_n的一个最小支配词，则 w 不含D。

证明。 假设对于某个 i， $w_i =$处为 D。我们构造一个支配词 w'，使得 $\mathrm{wt}(w') = \mathrm{wt}(w) - 1$，这与极小性矛盾。

令 $a = (w_{i-1})_t \vee (w_{i+1})_t$ 和 $b = (w_{i-1})_b \vee (w_{i+1})_b$。定义

$$w'_i := \begin{cases} \mathrm{A}, & a = 0, \\ \mathrm{B}, & a = 1 \text{ and } b = 0, \\ \mathrm{A}, & a = 1 \text{ and } b = 1, \end{cases} \qquad \text{and} \qquad w'_j := w_j \quad (j \neq i).$$

因此， w'_i是一个单元素集，且 $\mathrm{wt}(w') = \mathrm{wt}(w) - 1$。

只有指标 $i-1$、i、$i+1$处的约束可能受到影响。我们来验证这些约束。指标 i。 由于 w'_i 是单元素集，$(w'_i)_t \vee (w'_i)_b = 1$，因此 1）和（2）在 i 处都成立。

指标 $i-1$。在 1）中，$i-1$ 处唯一改变的文字是 $(w_i)_t$，它被替换为 $(w'_i)_t$。如果 $(w_{i-1})_t = 1$或 $(w_{i-2})_t = 1$，则该约束已满足。否则 $(w_{i-1})_t = (w_{i-2})_t = 0$，因此 $i-1$ 处的顶部约束化简为

$$(w_{i-1})_b \vee (w'_i)_t = 1.$$

若 $(w_{i-1})_b = 1$，则问题已解决；若 $(w_{i-1})_b = 0$，则 i 处的底部约束（在 w中，满足 $(w_i)_b = 1$ ）迫使 $b = 1$ 成立。根据构造（当 $b = 1$ 且 $i-1$ 处的顶行仍需补足时），我们确保 $(w'_i)_t = 1$。因此，(1) 在 $i-1$ 处成立。$i-1$ 处的底部约束 (2) 类似：若它尚未因 $(w_{i-1})_t$ 或 $(w_{i-2})_b$ 而满足，则可化为

$$(w_{i-1})_t \vee (w'_i)_b = 1,$$

而 w'_i 的选择保证了在需要时 $(w'_i)_b = 1$ 成立。

索引 $i+1$。验证过程与 $i-1$ 对称（交换 $i-2$ 和 $i+2$，并调换角色）。因此，在 $i+1$处，两个行约束都仍然成立。

因此，w' 是一个权重严格更小的支配对象，这与 w的极小性矛盾。 □

3.2 情形 $n \equiv 0$ (模 4)：完全刚性

我们从刚性最强的情形开始。当 n 是4的倍数时，第3.1 节中的局部强制机制几乎不给全局留下任何自由度：最小支配完全是周期性的。

引理 3.5 ($n \equiv 0$ (模 4)的分类)。设 $n = 4k \geq 4$，且 w 是 G_n的一个最小支配字。则 $w \in \{\mathrm{C}、\mathrm{A}、\mathrm{B}\}^n$，其中

$$\#\mathrm{C} = 2k \qquad and \qquad \#\{\mathrm{A},\mathrm{B}\} = 2k,$$

并且，除循环旋转外，

$$w \in \left\{(\mathrm{BCAC})^k,\ (\mathrm{ACBC})^k\right\}.$$

证明。由定理1.1，$\mathrm{wt}(w) = \gamma(G_{4k}) = 2k$。引理3.4 排除了D，因此所有权重都来自单元素列。因此，$\#\{\mathrm{A},\ \mathrm{B}\} = 2k$，其余的 $2k$ 列必须是C。

不可能出现一个CC 因子：引理3.2 否则将强制产生一个D，这同样与引理3.4矛盾。由于C的数量与单元素列的数量相同，因此整个环上的字必须在C 和一个单元素之间严格交替。

在每个 C处，根据引理3.3，相邻的两个单元素集必定互为补集。这将单元素集模式确定到全局行交换为止。由于 n 可被 4整除，交替模式能够一致闭合，从而恰好产生所展示的两个循环词。 □

推论 3.6。如果 $n \equiv 0$ (模 4)，则 $\zeta(G_n) = 4$。

证明。引理 3.5给出两个不同的循环模式。每种模式都恰好有两种带标号实现，可通过将字串平移一列得到，而全局行交换 $\mathrm{A} \leftrightarrow \mathrm{B}$ 不会产生除此之外的新模式。因此，恰有四个最小支配集。 □

3.3 情形 $n \equiv 1$，3（模 4）：线性情形

接下来我们讨论 n 的奇数取值，此时局部强制机制依然强大，但不再以周期性的方式闭合。相反，一个局部缺陷会沿着环传播，从而产生一个线性数量的最小支配集。

引理 3.7（奇数 n的分类）。设 $n = 2m + 1 \geq 5$ 为奇数，且设 w 为 G_n的最小支配词。则 $w \in \{$C、A、B$\}^n$ 满足

$$\#\mathrm{C} = m \qquad and \qquad \#\{\mathrm{A}, \mathrm{B}\} = m + 1,$$

并且存在唯一的索引 i使得

$$(w_{i-1}, w_i, w_{i+1}, w_{i+2}) = (\mathrm{C}, \mathrm{A}, \mathrm{A}, \mathrm{C}) \quad or \quad (\mathrm{C}, \mathrm{B}, \mathrm{B}, \mathrm{C}).$$

在这个唯一块之外，C 与单元素集字母交替出现，并且每个C 的两侧都是互补的单元素集。

证明。由定理 1.1，wt(w) $= \gamma(G_{2m+1}) = m + 1$。引理 3.4 排除了 D，因此 w 只由 C、A 和 B 组成。于是 #C $= (2m + 1) - (m + 1) = m$，且 #{A、B} $= m + 1$。

与偶数情形一样，CC不可能出现：引理 3.2和3.4 共同排除了相邻的空列。按循环顺序列出 m 个 C，并令 g_1、……、$g_m \geq 1$ 表示相邻 C之间连续单元素集的数量。由于总共有 $m + 1$ 个单元素集，

$$\sum_{j=1}^{m} g_j = m + 1, \qquad \text{so} \qquad \sum_{j=1}^{m} (g_j - 1) = 1.$$

因此，恰有一个间隙的大小为 2，从而得到唯一的因子 CxyC，其中 x，$y \in \{$A，B$\}$。

如果这对元素是混合的，例如 $(x,\ y) = (\mathrm{A},\ \mathrm{B})$，那么引理 3.3 就会严格地将 A/B 交替模式传播到每个大小为 1 的间隙中。由于环的长度为奇数，这种交替模式不可能首尾一致地闭合：回到起始列时，必然需要第二个大小为 2 的间隙，这与前面证明的唯一性矛盾。因此 $x = y$，且唯一的间隙必然是单色的。

固定此区块后，引理 3.3便会强制其余每个 C处的相邻项互补，因此其余部分由严格交替唯一确定。□

推论 3.8。如果 $n \geq 5$ 为奇数，则 $\zeta(G_n) = 2n$。

证明。由引理 3.7可知，一个最小支配词由以下信息唯一确定：(i) 大小为 2 的唯一间隙的位置，该间隙可以出现在 n 个环形位置中的任意一个；(ii) 其单色类型AA 或 BB。不同选择会产生不同的带标签支配集，因此得到 $\zeta(G_n) = 2n$。□

3.4 情形 $n \equiv 2$（模 4），$n \geq 10$：二次族

现在考虑剩下的同余类，其中两个局部缺陷共存，并沿着环相互作用。这种相互作用使支配域呈现二次增长。

始终假设 $n = 4t + 2$ 满足 $t \geq 2$。根据引理 3.4 和定理 1.1，每个最小支配词都属于 $\{$C、A、B$\}^n$，且权重为 $2t + 2$。因此，这样的词恰好包含 $2t$ 个 C 和 $2t + 2$ 个单例字母。

引理 3.9 (双间隙结构)。每个 G_{4t+2} 的最小支配词在相邻的 C 之间恰有两个大小为 2 的间隙，其余间隙的大小均为 1。

证明。 设 w 是一个最小支配词，并按循环顺序列出它的 $2t$ 个 C 出现位置。令$g_1, \ldots, g_{2t} \geq 1$表示相邻两个 C 之间连续单例字母的数量。由于单例字母总数为 $2t+2$,

$$\sum_{j=1}^{2t} g_j = 2t+2, \qquad \text{so} \qquad \sum_{j=1}^{2t} (g_j - 1) = 2.$$

因此，恰有两个间隙的大小为 2，其余间隙的大小均为 1。 □

下面的观察表明，这两个间隙受到严格约束。

引理 3.10 (单色大小为2的间隙)。 设 $n = 4t+2 \geq 10$，且 $w \in \{\mathrm{C,A,B}\}^n$ 是一个最小支配词。那么，每个大小为2 的间隙都具有以下形式

$$\mathrm{C}\,\varepsilon\,\varepsilon\,\mathrm{C} \qquad with\ \varepsilon \in \{\mathrm{A,B}\}.$$

证明。 反设存在一个混合间隙。根据对称性，不妨设

$$(w_i, w_{i+1}, w_{i+2}, w_{i+3}) = (\mathrm{C,A,B,C}).$$

应用引理 3.3 于 i 以及 $i+3$ 可得 $w_{i-1} = \mathrm{B}$ 和 $w_{i+4} = \mathrm{A}$，因此强制因子

$$w_{i-1} \cdots w_{i+4} = \mathrm{B\,C\,A\,B\,C\,A} \qquad (*)$$

出现。根据引理3.9，与（C）中两个 $*$相邻的间隙大小均为1。因此，这个因子位于一个极大区域内，在该区域中C 与单元素集严格交替。根据引理3.3 ，在全局交换下，单例字母被唯一确定，并且必须以周期2 交替。固定 w_{i-1} =B 便会强制形成模式 $\cdots$，B，A，B，A $\cdots$贯穿整个区域。

混合间隙CABC 在同一对 C之间放入两个类型相反的连续单元素集，从而打乱了这种强制奇偶性。在一个环上，单个奇偶性缺陷无法被吸收：要回到原来的奇偶类，别处必须再出现一个混合间隙。这与引理 3.9矛盾；该引理规定总共恰有两个大小为2 的间隙。因此，每个大小为2 的间隙都必须是单色的。

□

因此，分隔这两个间隙的区域完全是刚性的。

定义 3.11 （骨干）。 设 B := CACB。骨干区间 是指一个连续子字，等于 B^t，或在全局行交换 A $\leftrightarrow$B 后与之相等。

引理 3.12 （强制骨干段）。 设 w 是 G_{4t+2}的一个最小支配词。在一个大小为2 的间隙之后立即切开此环，接下来的 $4t$个字母构成一个骨干区间。

证明。 在两个大小为2 的间隔之间，所有间隔的大小均为1（引理3.9），因此C与单元素集沿着长度为 $4t$的线段严格交替出现。在这条线段内，引理3.3 确定单元素集中的字母按A、B 的顺序交替出现。经过一次可能的全局行交换后，该线段与B^t重合。

□

现在我们可以枚举所有最小支配词。

定理 3.13 （$n \equiv 2$ （模 4）下的二次支配域）。 若 $n = 4t+2 \geq 10$，则 $\zeta(G_n) = n(n+2)$。

证明。 令 $\mathcal{L}_n$ 表示 $\{\mathrm{C}, \mathrm{A}, \mathrm{B}\}^n$ 中关于 G_n 的最小支配词集合，因此 $|\mathcal{L}_n| = \zeta(G_n)$。对于 $w \in \mathcal{L}_n$，令 $\mathrm{end}(w) \subseteq \mathbb{Z}_n$ 表示满足下列条件的指标集合 j

$$(w_{j-4}, w_{j-3}, w_{j-2}, w_{j-1}) = (\mathrm{C}, \varepsilon, \varepsilon, \mathrm{C}) \quad \text{for some } \varepsilon \in \{\mathrm{A}, \mathrm{B}\}.$$

由引理 3.9 和 3.10， $|\mathrm{end}(w)| = 2$ 对每个 w均成立。

令 ρ 为循环移位（$\rho^k w$）$_i := w_{i+k}$ （模 n），并定义锚定集合

$$\mathcal{A}_n := \{w \in \mathcal{L}_n : \ 0 \in \mathrm{end}(w)\}.$$

引理 3.14 （平凡稳定子）。 若 $w \in \mathcal{L}_n$ 且 ρ^k（w） $= w$ 对某个 $k \in \mathbb{Z}_n$ 成立，则 $k \equiv 0$ （模 n）。

证明。 假设 $\rho^k(w) = w$。则 $\mathrm{end}(\rho^k w) = \mathrm{end}(w)$，但根据定义，$\mathrm{end}(\rho^k w) = \mathrm{end}(w) - k$ 在$\mathbb{Z}_n$中。因此

$$\mathrm{end}(w) = \mathrm{end}(w) - k. \tag{3}$$

写出 $\mathrm{end}(w) = \{e_1, e_2\}$，其中 $e_1 \neq e_2$ (回忆一下 $|\mathrm{end}(w)| = 2$)。根据 (3)，平移 $-k$ 置换$\{e_1, e_2\}$。因此，要么 $k \equiv 0$ (是恒等平移)，要么 $-k$ 交换两个端点，也就是说，

$$e_1 - k \equiv e_2 \quad \text{and} \quad e_2 - k \equiv e_1 \pmod{n},$$

这意味着 $2k \equiv 0$ (模 n)。由于 $n = 4t + 2$ 是偶数，因此唯一剩下的可能性是 $k \equiv n/2$ (模 n)。

假设 $k \equiv n/2$。那么 $\mathrm{end}(w) = \{a, a + n/2\}$ 对于某个 a。在末尾位于 2 的间隙之后立即切开这个环。根据引理 3.12，接下来的 $4t$个字母构成一个骨干区间，因此另一个 大小为 2 的间隙必须恰好在 $4t$ 步之后结束，也就是在模 $a + 4t$ 下 n。因此

$$a + 4t \equiv a + \frac{n}{2} \pmod{n}.$$

由 $n = 4t + 2$，可得 $4t \equiv 2t + 1$ (mod $4t + 2$)，等价地， $2t \equiv 1$ (mod $4t + 2$)；这对 $t \geq 2$ 不可能成立。因此 $k \not\equiv n/2$，从而 $k \equiv 0$。 □

引理 3.15 (轨道—锚点关系)。 $\mathcal{L}_n$ 中的每个旋转轨道大小均为 n，且恰好包含两个锚定词。因此，

$$|\mathcal{L}_n| = \frac{n}{2} |\mathcal{A}_n|. \tag{4}$$

证明。 由引理 3.14可知稳定子是平凡的，因此每个轨道的大小为 n。若 $\mathrm{end}(w)$ $=\{e_1, e_2\}$，那么恰好只有移位 $\rho^{e_1}(w)$ 和 $\rho^{e_2}(w)$ 会将一个端点移至 0，其他移位均不会。

□

第二个大小为 2 的间隙由长度为 4 的窗口的位置决定

$$(\mathrm{C}, \varepsilon, \varepsilon, \mathrm{C})$$

该窗口在最右侧的 C 处结束（等价地，由指标 j（w_{j-3}，w_{j-2}，w_{j-1}，w_j）=（C ε，ε，C）确定）。除了 $n-1$ 内部选项 $j \in \{1,2,\dots,n-1\}$ 外，恰好还有两种环绕选项，对应于跨越指标 $n-1$ 与 0 之间切口的窗口：

$$(\text{wrap } 1) \quad (w_{n-2}, w_{n-1}, w_0, w_1) = (\mathrm{C}, \varepsilon, \varepsilon, \mathrm{C}),$$

$$(\text{wrap } 2) \quad (w_{n-1}, w_0, w_1, w_2) = (\mathrm{C}, \varepsilon, \varepsilon, \mathrm{C}).$$

因此，相对于位于 0 的锚点，第二个间隔恰好有 $(n-1)+2 = n+1$ 个可行窗口位置。

第二个间隔可以放置在 $n-1$ 个内部位置中的任意一个 $\{1,2,\dots,n-1\}$，也可以通过两种不同的方式环绕循环边界，从而需要使用超出标准索引范围的位置。为了参数化第二个间隔的所有可能放置方式，包括其跨越线性边界的两种方式，引入扩展索引集

$$\widetilde{\mathbb{Z}}_n := \{1,2,\dots,n-1\} \cup \{n, n+1\}.$$

~的每个元素 $\mathbb{Z}_n$ 都编码了一个唯一的长度为4 的窗口，其中可以植入一个类型为ε 的第二个单色间隔。反之，根据引理3.10 和3.12，每个锚定最小词都唯一地来源于这样的一个选择。

因此，映射

$$(\varepsilon, r) \longmapsto \text{“implant a second } (\mathrm{C}, \varepsilon, \varepsilon, \mathrm{C}) \text{ gap at } r\text{”}$$

~定义了从 {A、B} $\times \mathbb{Z}_n$ 到 $\mathcal{A}_n$的双射。因此

$$|\mathcal{A}_n| = 2(n+2).$$

将其与（4）结合可得

$$\zeta(G_n) = |\mathcal{L}_n| = \frac{n}{2}\,|\mathcal{A}_n| = \frac{n}{2} \cdot 2(n+2) = n(n+2),$$

正如所声称的。 □

3.5 特殊情况与定理3.1的证明

命题 3.16。 我们有 $\zeta(G_3) = 9$ 且 $\zeta(G_6) = 51$。

证明。 这些值通过穷举枚举得到；参见附录A。 □

注 3.17（特殊行为的结构基础）。 在 $n \in \{3,6\}$ 处出现特殊取值，是因为这些较小的棱柱图无法支持支配较大情形的强制机制。对于$n=3$，环太短，无法强制满足引理 3.3所要求的交替模式，因此 D可以出现在最小词中，从而产生更高的重数（$\zeta(G_3) = 9 > 2n = 6$）。类似地，$n=6$ 满足 $n \equiv 2$ (模 4)，但由于 $t=1$，骨干长度 $4t=4$ 不足以刚性地分隔两个大小为 2 的间隙，因此允许出现奇偶性论证（引理 3.10）针对 $t \geq 2$所排除的构型。

定理*3.1*的证明。 对于 $n \equiv 0$ （模 4）以及奇数 $n \geq 5$，所述公式分别由推论 3.6 和 3.8得出。对于 $n \equiv 2$ （模 4）且 $n \geq 10$的情形，二次公式由定理 3.13确立。其余情形 $n=3$ 和 $n=6$ 则由命题 3.16解决。

□

4 灵活性分析

我们的主要结果明确给出了棱柱图族的 $\gamma(G)$以及支配域 $\zeta(G)$。为便于比较不同情形，宜将 $\zeta(G)$ 与 $\gamma(G)$ 及图阶进行归一化。所得参数不会为枚举增添额外结构，但能简洁概括定理 3.1 中的三种同余类行为。

4.1 归一化灵活性参数

定义 4.1（归一化灵活性）。对于具有 $\gamma(G)$ $\zeta(G) \geq 1$ 的图 G，定义

$$\eta(G) := \frac{\log_2 \zeta(G)}{\gamma(G)}, \qquad \mathcal{E}(G) := \zeta(G)^{1/\gamma(G)}, \qquad \rho(G) := \frac{\zeta(G)}{|V(G)|}.$$

这里，$\eta(G)$ 衡量对数尺度下每个支配者的支配域增长，$\mathcal{E}(G)$ 是其乘法类比，而 $\rho(G)$ 记录每个顶点的支配域密度。显然，$\eta(G) \geq 0$, $\mathcal{E}(G) \geq 1$，且 $\rho(G) \geq 0$。与 η 和 $\mathcal{E}$ 不同，ρ 通常不存在普适上界；即便仅限于棱柱图族，ρ 在不同同余类中也呈现趋于零、保持常数和无界增长的行为。

观察 4.2（棱柱三分情形）。令 $G_n = C_n \square P_2$。

（i）若 $n \equiv 0$（模 4），则 $\gamma(G_n) = n/2$ 且 $\zeta(G_n) = 4$，因此

$$\eta(G_n) = \frac{2}{n} \to 0, \qquad \mathcal{E}(G_n) = 4^{2/n} \to 1, \qquad \rho(G_n) = \frac{2}{n} \to 0.$$

(ii) 若 $n \equiv 13$（模 4），则 $\gamma(G_n) = (n+1)/2$ 且 $\zeta(G_n) = 2n$，因此

$$\eta(G_n) \sim \frac{2\log_2 n}{n} \to 0, \qquad \mathcal{E}(G_n) \sim n^{2/(n+1)} \to 1, \qquad \rho(G_n) = 1 \ \ \textit{for all odd } n.$$

(iii) 若 $n \equiv 2$（模 4）且 $n \geq 10$，则 $\gamma(G_n) = n/2 + 1$ 且 $\zeta(G_n) = n(n+2)$，因此

$$\eta(G_n) \sim \frac{4\log_2 n}{n} \to 0, \qquad \mathcal{E}(G_n) \sim n^{2/(n+2)} \to 1, \qquad \rho(G_n) = \frac{n+2}{2} \to \infty.$$

特别是，尽管 $\zeta(G_n)$ 随 n模 4 剧烈变化，每支配者归一化量$\eta(G_n)$ 和 $\mathcal{E}(G_n)$ 都分别趋向其刚性极限 0 和 1。这种差异体现在 $\rho(G_n)$ 的尺度上，它区分了仅随阶数增长的支配域增长与超越阶数增长的支配域增长。

4.2 复合稳健性参数

支配域 $\zeta(G)$ 用于量化最小支配集之间的冗余，但仅凭它无法揭示这种冗余是全局分布的，还是集中在少数关键顶点上。为将支配域计数与结构性及安全相关的韧性概念联系起来，我们将基于支配域的量与经典不变量结合使用。我们仅将 CRI、SFI、RRI 和 LDI 用作冗余、重叠和集中度的简洁诊断性代理指标，而不将其视为规范的图不变量。

首先，定义支配集密度

$$p_\gamma(G) \coloneqq \frac{\zeta(G)}{\binom{|V(G)|}{\gamma(G)}},$$

所有 $\gamma(G)$-子集中属于最小支配集的比例。该量有直接的操作性解释：从 $\gamma(G)$ 个监测点中均匀随机选取一组，达到最小支配的概率。关于支配的相关概率视角可参见标准参考文献，包括 [13] 和 [2]。

为纳入最坏情况下的结构容错性，令 $\kappa_v(G)$ 表示点连通度，并设

$$\mathrm{CRI}(G) \coloneqq \kappa_v(G)\, p_\gamma(G).$$

虽然这一特定乘积并不常见，但其各组成部分在韧性分析中十分重要；例如，关于连通性可参见 [16, 21] ，关于基于支配的视角可参见 [9] 。

对于凝聚力敏感场景（分布式控制、监测、同步），我们采用一种谱加权。令 $L(G) = D(G) - A(G)$ 为拉普拉斯矩阵，并记

$$0 = \lambda_1(G) \le \lambda_2(G) \le \cdots \le \lambda_{|V(G)|}(G)$$

其特征值。量 $\lambda_2(G)$ 是代数连通度（菲德勒值） [7, 4], ，我们定义

$$\mathrm{SFI}(G) \coloneqq \lambda_2(G)\, \eta(G) = \lambda_2(G)\, \frac{\log_2 \zeta(G)}{\gamma(G)}.$$

该指标同时奖励整体凝聚力（较大的 λ_2）和每个支配者对应的领地重数（较大的 η）。与可控性动机相一致的谱视角，在网络系统文献中已有充分论述；例如参见 [18]。

为量化可重构性，令

$$\omega(G) \coloneqq \min\Big\{ \frac{|S \cap T|}{\gamma(G)} : \ S, T \text{ are distinct minimum dominating sets} \Big\},$$

并定义重构韧性指数

$$\mathrm{RRI}(G) \coloneqq (1 - \omega(G))\, \mathcal{E}(G).$$

较大的 RRI 表示存在许多重叠度较低的最小支配集，这有助于在遭受受损后迅速重新分配角色。对重叠和重构敏感的支配现象，以不同形式出现在关于支配集重构图及相关模型的研究中 [12, 3]。

最后，为惩罚领地质量集中于较小顶点子集的情形，定义最大领地负载

$$\tau(G) \coloneqq \max_{v \in V(G)} \#\{S : \ S \text{ is a minimum dominating set and } v \in S\}, \qquad \mathrm{LDI}(G) \coloneqq \frac{\zeta(G)}{\tau(G)}.$$

这种对负载敏感的视角与支配临界性和顶点重要性的经典概念相一致；例如，参见 [5, 10]。

4.3 可验证的小规模案例

最小的笛卡尔积已经说明，支配域指标如何将刚性与稳健性区分开来，而这种区别超出了支配数所能体现的范围。梯子图 $L_3 = P_3 \square P_2$ 和棱柱图 $\mathrm{Pr}_3 = C_3 \square P_2$提供了一个清晰的比较对象：二者均有六个顶点，且均满足 $\gamma = 2$。

对于梯子图 L_3，可得 $\zeta = 3$， $\eta = \text{对数}_2{}^{2\,3} \approx 0.792$， $\mathcal{E} = \sqrt{3} \approx 1.732$， $\rho = \frac{1}{2}$， $\lambda_2 = 1$，因此

$$\mathrm{SFI} \approx 0.792, \quad \omega = 0, \quad \mathrm{RRI} \approx 1.732, \quad \tau = 1, \quad \mathrm{LDI} = 3.$$

这些数值体现了路径因子的边界效应所限制的有限重构能力。

对于棱柱图 Pr_2^3 $\lambda_2 = 2$ $_3$， $\eta =$ $\rho =$ ，相应的数值为 $\zeta = 9$，$\text{对数}_2{}^{2\,9} \approx 1.585$， $\mathcal{E} = 3$， ， ，因此

$$\mathrm{SFI} \approx 3.170, \quad \omega = 0, \quad \mathrm{RRI} = 3, \quad \tau = 3, \quad \mathrm{LDI} = 3.$$

在支配数相同的情况下，将梯子图闭合成一个环会使支配域增至三倍，并显著提高所有灵活性指标，从而凸显循环对称性的影响。

附录 A.3中列出的小规模图族也反复呈现相同现象。具有唯一最小支配集的图（例如这些阶数下的星图、轮图和扇图）有 $\zeta = 1$，因此 $\eta = \mathrm{SFI} = \mathrm{RRI} = 0$，这反映了完全刚性。在支配数相近的图中，支配域和重叠程度体现了重构质量的差异：环和梯子图具有多个重叠程度较低的最小支配集，而阶为 $n = 6$ 的棱柱图和完全二部图则支持大得多的 ζ，从而带来更高的 $\mathcal{E}$ 和SFI。基于负载的指标 LDI则进一步区分这种灵活性是均匀分布，还是集中在少数顶点上。

5 未来方向

为棱柱图开发的循环词编码可以自然地扩展到其他笛卡尔积，尤其是圆柱图 $P_m \square C_n$ 和环面图 $C_m \square C_n$ [15]。尽管已有小参数下的计算数据 [17]，，但这些图族尚无支配域的闭式公式。一个关键问题是确定棱柱图分析中的哪些结构性要素——例如骨架强制、局部间隙约束和模周期性——能够延续下来，并将其组织成一个通用的枚举框架。

更根本地说，棱柱图族表明，支配域增长并不单由支配数决定。在同一个图类中， $\zeta(G_n)$在不同同余类下呈现有界、线性和二次增长，尽管 $\gamma(G_n)$的行为相对稳定。这种分离现象表明，可以采用一种分类方法，按照 $\zeta(G)$的渐近阶，或按照适当归一化的支配域参数，对参数族进行分层，而不是孤立地依据 $\gamma(G)$。

本文引入的归一化灵活性参数引出了自然的阈值问题。熵密度 $\eta(G)$ 或支配域密度 $\rho(G)$ 的界限是否对应着定性的结构变化，例如最小支配集中的自同构出现，或刚性与灵活的枚举机制之间发生转变，目前仍不明确。棱柱图族已经表明，在同一个类别中， $\rho(G)$ 可能趋于零、趋于稳定或发散，这既凸显了普适界限的缺失，也突出了结构背景的决定性作用。

最后，纳入次级统计量的精细枚举——例如内部支配与边界支配，或排除指定列的约束——自然会导向多变量生成函数，以编码更精细的组合信息。棱柱图族中精确刚性、典范密度与无界增殖并存，这表明支配算术施加了强度出乎意料的全局约束。诸如 G_8 这样的孤立例外图，作为平衡点（$\gamma(G) = 4 = \zeta(G)$）出现，此时相互竞争的组合力恰好达到平衡；这表明，对此类不动点进行系统研究，或能揭示支配现象背后更深层的组织原理。

致谢

作者谨此致谢 Haynes、Hedetniemi 和 Slater 对支配理论作出的奠基性贡献 [13, 14]。

参考文献

[1] J. D. Allagan 和 B. Bobga，若干图的支配域，*Int. J. Math. Comput. Sci.* **16**(2021年)，第 4 期，1709–1720.[2] A. Bonato 和 R. Nowakowski，图上的警察与强盗游戏，美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，2011年。[3] M. Bonamy 和 N. Bousquet，无爪图中支配集的重构，图论杂志 **82**(2016年)，3–15.[4] F. R. K. Chung，谱图论，美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，1997年。[5] E. J. Cockayne、R. M. Dawes 和 S. T. Hedetniemi，图的全支配，*Networks* **10**(1980年)，211–219.[6] S. Connolly、Z. Gabor、A. Godbole 和 B. Kay，最小支配集最大数量的界，*Discrete Math.* **339** (2016年)，第 5 期，1537–1542.[7] M. Fiedler，图的代数连通度，捷克斯洛伐克数学杂志 **23** (1973年)，298–305.[8] A. Godbole、J. D. Jamieson 和 W. Jamieson，最小支配集和最小全支配集的最大数量，*Util. Math.* **94**(2014年)，269–274.[9] W. Goddard 和 M. A. Henning，图的独立支配：综述与最新结果，*Discrete Math.***313** (2013年)，839–854.[10] W. Goddard 和 M. A. Henning，具有唯一最小指定支配集的图，*Graphs Combin.* **39**(2023年)，第 5 期，文章 103.[11] D. L. Grinstead 和 P. J. Slater，关于具有最小交集的最小支配集，载于图论、组合学与应用，Y. Alavi 等编，第 1 卷，Wiley，纽约，1991年，第 563–584 页。

[12] R. Haas 和 K. Seyffarth，支配集的重构图，《离散数学》**305** (2005年)，93–107.[13] T. W. Haynes、S. T. Hedetniemi 和 P. J. Slater，《图支配基础》，Marcel Dekker，纽约，1998年。[14] T. W. Haynes、S. T. Hedetniemi 和 P. J. Slater，《图支配：高级专题》，Marcel Dekker，纽约，1998年。[15] W. Imrich、S. Klavžar 和 D. F. Rall，《图论专题：图及其笛卡尔积》，A K Peters，Wellesley，马萨诸塞州，2008年。[16] K. Menger，《关于一般曲线理论》，*Fundamenta Mathematicae* **10**(1927年)，96–115.[17] S. Mertens，网格图、圆柱图、环面图和王图的支配多项式，*arXiv* 预印本 arXiv:2408.08053，2024年。[18] S. Pequito、S. Kar 和 B. De Schutter，结构可控性最小输入选择的复杂性，《自动化》 **81**(2017年)，153–160.[19] J. Petr、J. Portier 和 O. Versteegen，森林中最小支配集和全支配集的数量，*J. Graph Theory* **107** (2024年)，第 4 期，829–845.[20] J. Su、J. Allagan、S. Gao、O. Malomo、W. Gao 和 E. Eyob，网格上的支配，《数学》**12** (2024年)，第 21 期，文章 3408.[21] D. B. West，《图论导论》，第 2 版，Prentice Hall，Upper Saddle River，新泽西州，2001年。

A 计算验证

本附录记录了用于验证定理1.1和3.1中闭式表达式的有限枚举。对于棱柱图 $G_n = C_n \square P_2$，顶点记作 $t_i = (t,\ i)$ 和 $b_i = (b,\ i)$，指标模 n计算。除非另有说明，以下列出的所有集合均为最小支配集。

A.1 棱柱图验证（3 ⩽ n ⩽ 10）

表 1：小型棱柱图 $\gamma(G_n)$ 的支配数和支配域 $\zeta(G_n)$ 。例外值 $G_n = C_n \square P_2$ $(3 \leq n \leq 10)$ 在 $n \in \{3, 6\}$ 处由显式枚举得到；其余条目均与定理1.1 和3.1中的公式一致。

n	3	4	5	6	7	8	9	10
$\gamma(G_n)$	2	2	3	4	4	4	5	6
$\zeta(G_n)$	9	4	10	51	14	4	18	120

A.2 部分小阶棱柱图的显式最小支配集

$n = 3$：$\gamma(G_3) = 2$，$\zeta(G_3) = 9$。

$$\{b_0, t_0\} \quad \{b_0, t_1\} \quad \{b_0, t_2\} \quad \{b_1, t_0\}$$
$$\{b_1, t_1\} \quad \{b_1, t_2\} \quad \{b_2, t_0\} \quad \{b_2, t_1\}$$
$$\{b_2, t_2\}$$

$n = 4$：$\gamma\ (G_4)\ = 2$，$\zeta\ (G_4)\ = 4$。

$$\{b_0, t_2\} \quad \{b_1, t_3\} \quad \{b_2, t_0\} \quad \{b_3, t_1\}$$

$n = 5$：$\gamma(G_5)\ = 3$, $\zeta(G_5)\ = 10$.

$$\{b_0, b_1, t_3\} \quad \{b_0, b_4, t_2\} \quad \{b_0, t_2, t_3\} \quad \{b_1, b_2, t_4\}$$
$$\{b_1, t_3, t_4\} \quad \{b_2, b_3, t_0\} \quad \{b_2, t_0, t_4\} \quad \{b_3, b_4, t_1\}$$
$$\{b_3, t_0, t_1\} \quad \{b_4, t_1, t_2\}$$

$n = 8$：$\gamma(G_8)\ = 4$，$\zeta(G_8)\ = 4$。

$$\{b_0, b_4, t_2, t_6\} \quad \{b_1, b_5, t_3, t_7\} \quad \{b_2, b_6, t_0, t_4\} \quad \{b_3, b_7, t_1, t_5\}$$

完整列表 $n \in \{6, 7, 9, 10\}$ 可向作者索取；这些列表与表 1 中的数值一致，从而验证了定理 3.1 中的闭公式。

A.3 关于 $n = 5$ 和 $n = 6$ 个顶点图的支配域鲁棒性表

此处列出第4.3节中提及的小图表。对于每个图 G，其支配域为 $\zeta(G)$，图 G 的拉普拉斯特征值为 $0 = \lambda_1(G) \le \lambda_2(G) \le \cdots$，而 $\lambda_2(G)$ 是代数连通度（菲德勒值）。我们报告归一化支配域参数

$$\eta(G) = \frac{\log_2 \zeta(G)}{\gamma(G)}, \qquad \mathcal{E}(G) = \zeta(G)^{1/\gamma(G)}, \qquad \rho(G) = \frac{\zeta(G)}{|V(G)|},$$

以及复合指标

$$\mathrm{SFI}(G) = \lambda_2(G)\,\eta(G), \qquad \mathrm{RRI}(G) = (1 - \omega(G))\,\mathcal{E}(G), \qquad \mathrm{LDI}(G) = \frac{\zeta(G)}{\tau(G)}.$$

Here

$$\omega(G) = \min\Big\{ \frac{|S \cap T|}{\gamma(G)} : \ S, T \text{ are distinct minimum dominating sets} \Big\},$$

and

$$\tau(G) = \max_{v \in V(G)} \#\{S : \ S \text{ is a minimum dominating set and } v \in S\}.$$

当 $\zeta(G) = 1$（唯一最小支配集）时，我们设定 $\omega(G) = 1$，使得 $\mathrm{RRI}(G) = 0$。房屋图是一个 5 个顶点的图，由一个 4-圈添加第五个顶点构成，该顶点与两个相邻的圈顶点相连（即“带屋顶的正方形”）。

A.4 小规模情形的比较观察

从表2 和3中可以看出若干一致的规律。首先，具有唯一最小支配集（$\zeta(G) = 1$）的图表现出完全刚性：熵密度为零，谱灵活性为零，并且按照约定 $\omega(G) = 1$，重构韧性会崩溃。在这些规模下，星图、轮图和扇图都呈现这一一致特征，反映出它们极度依赖单个关键顶点。

其次，在支配数相同的图中，支配域和重叠会显著区分重构质量。在六个顶点的情形下，P_6 和 C_6 都满足 $\gamma = 2$，但 P_6 有 $\zeta = 1$，而 C_6 有三个两两不相交的最小支配集。这种区别会传递到所有复合指标中，使环的 SFI、RRI 和 LDI 均严格为正，而路径的这些指标均为零。

第三，高支配域并不必然意味着韧性分布均匀。例如，图 Pr_3 and $K_{3,\,3}$ 的支配域同为 $\zeta = 9$ at $\gamma = 2$，但其较大的顶点负载 τ 表明，某些顶点在多个最小支配集中被反复使用。基于负载的指标 LDI 能够检测这种集中度，与 RRI 相辅相成，区分数量充足与分布均衡。

最后，谱加权会放大有意义的结构差异。即使 ζ and γ 相同，较高的代数连通度也会带来显著更大的 SFI，这表明在基于扩散或共识的支配解释中，韧性有所提升。这些观察证实，即使在最小的非平凡尺度上，基于支配域的复合指标也能对经典支配参数进行具有可解释性且不冗余的细化。

表2：含有 $n = 5$ 个顶点的连通图的基于支配数的鲁棒性汇总（数值四舍五入至小数点后三位）。

图	γ	ζ	η	$\mathcal{E}$	ρ	λ_2	SFI	ω	RRI	τ	LDI
K_5	1	5	2.322	5.000	1.000	5.000	11.610	0.000	5.000	1	5.000
P_5	2	3	0.792	1.732	0.600	0.382	0.303	0.000	1.732	2	1.500
C_5	2	5	1.161	2.236	1.000	1.382	1.604	0.000	2.236	2	2.500
F_5	1	1	0.000	1.000	0.200	1.586	0.000	1.000	0.000	1	1.000
W_5	1	1	0.000	1.000	0.200	3.000	0.000	1.000	0.000	1	1.000
$S_5 = K_{1,4}$	1	1	0.000	1.000	0.200	1.000	0.000	1.000	0.000	1	1.000
T_5^{bin}	2	2	0.500	1.414	0.400	0.519	0.259	0.500	0.707	2	1.000
房屋	2	7	1.404	2.646	1.400	1.382	1.940	0.000	2.646	3	2.333
$K_{2,3}$	2	7	1.404	2.646	1.400	2.000	2.807	0.000	2.646	4	1.750

表3： $n = 6$ 个顶点的连通图的基于支配数的鲁棒性汇总（数值四舍五入至小数点后三位）。

图	γ	ζ	η	$\mathcal{E}$	ρ	λ_2	SFI	ω	RRI	τ	LDI
K_6	1	6	2.585	6.000	1.000	6.000	15.510	0.000	6.000	1	6.000
P_6	2	1	0.000	1.000	0.167	0.268	0.000	1.000	0.000	1	1.000
C_6	2	3	0.792	1.732	0.500	1.000	0.792	0.000	1.732	1	3.000
F_6	1	1	0.000	1.000	0.167	1.382	0.000	1.000	0.000	1	1.000
W_6	1	1	0.000	1.000	0.167	2.382	0.000	1.000	0.000	1	1.000
$S_6 = K_{1,5}$	1	1	0.000	1.000	0.167	1.000	0.000	1.000	0.000	1	1.000
$T_6^{\text{二进制}}$	2	2	0.500	1.414	0.333	0.325	0.162	0.500	0.707	2	1.000
$L_3 = P_3 \square P_2$	2	3	0.792	1.732	0.500	1.000	0.792	0.000	1.732	1	3.000
概率$_3 = C_3 \square P_2$	2	9	1.585	3.000	1.500	2.000	3.170	0.000	3.000	3	3.000
$K_{3,3}$	2	9	1.585	3.000	1.500	3.000	4.755	0.000	3.000	3	3.000