arXiv:2601.03491v1 [math.AC] 7 Jan 2026

有理双点与分次环的拟-F^∞-分裂高度和拟-F-正则高度

TEPPEI TAKAMATSU 和 SHOU YOSHIKAWA

ABSTRACT. 本文研究一种与拟-F-奇点有关的现象：在适当的假设下，拟-F^∞-分裂高度（ht^∞）有限意味着拟-F-正则性；此外，ht^∞ 与拟-F-正则高度（$\mathrm{ht}^{\mathrm{reg}}$）相等。我们对两类重要的孤立 Gorenstein 奇点证明了这一相等关系。首先，我们明确计算了所有有理双点的 ht^∞ 和 $\mathrm{ht}^{\mathrm{reg}}$，并表明每个非-$F$-纯有理双点都满足 $\mathrm{ht}^\infty = \mathrm{ht}^{\mathrm{reg}}$。其次，对于具有 F-有理穿孔谱的分次非-F-纯正规 Gorenstein 环的局部化，我们同样得到等式 $\mathrm{ht}^\infty = \mathrm{ht}^{\mathrm{reg}}$。

1. INTRODUCTION

拟-F^e-分裂高度的概念由 [Yob19] 和 [TWY24] 引入。在[TWY24], 中，作者证明，对于非普通 Calabi–Yau 簇，拟-F^e-分裂高度随 e 严格递增，尤其是其极限——拟-F^∞-分裂高度——为无穷大。受这一现象启发，一个自然的问题是：奇点的拟-F^∞-分裂高度何时有限，以及这种有限性意味着什么。

为准确表述这个问题，我们回顾准-F^e-分裂高度和准-F-正则高度的定义。

定义 1.1（参见 [TWY24，引理 3.10]）。设 $(R,\mathfrak{m})$ 是一个维数为 d的 Gorenstein F-有限局部环。

- 对于整数 $n, e \geq 1$ 以及一个元素 $c \in R$，我们定义同态 $\Phi^e_{R,n}$和 $\Phi^{e,R^c}_{,n}$ 以及 $W_n(R)$-模 $Q^e_{R,n}$ 和 $Q^{e,R^c}_{,n}$，如下图所示，其中每个方块都是一个推出：

$$\begin{array}{ccccc} W_n(R) & \xrightarrow{F^e} & F^e_* W_n(R) & \xrightarrow{\cdot[c]} & F^e_* W_n(R) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Res}} & & \downarrow & & \downarrow \\ R & \xrightarrow{\Phi^e_{R,n}} & Q^e_{R,n} & \longrightarrow & Q^{e,R^c}_{,n}. \end{array}$$

$$\Phi^{e,c}_{R,n}$$

- 对于 对于整数 $n, e \geq 1$，我们称 R为 n-准-F^e-分裂，如果同态

$$\Phi^e_{R,n} \colon H^d_{\mathfrak{m}}(R) \to H^d_{W_n(\mathfrak{m})}(Q^e_{R,n})$$

是单射。此外，我们将 R 的准-F^e-分裂高度 $\mathrm{ht}^e(R)$ 定义为

$$\mathrm{ht}^e(R) := \inf\{n \geq 1 \mid R \text{ is } n\text{-quasi-}F^e\text{-split}\}$$

如果对于某个 n'， R 是 n'-准-F^e-分裂的；否则 $\mathrm{ht}^e(R) := \infty$ 。我们将 ht^1 简记为 ht。此外，我们将准-F^∞-分裂高度定义为

$$\mathrm{ht}^\infty(R) := \sup\{\mathrm{ht}^e(R) \mid e \in \mathbb{Z}_{\geq 1}\} \in \mathbb{Z}_{>0} \sqcup \{\infty\}.$$

- 对于一个整数 $n \geq 1$，如果对每个 $c \in R^\circ$，都存在一个整数 $e \geq 1$ ，使得同态

$$\Phi_{R,n}^{e,c} \colon H^d_{\mathfrak{m}}(R) \to H^d_{W_n(\mathfrak{m})}(Q_{R,n}^{e,c})$$

是单射。此外，我们将 R 的准-F-正则高度 $\mathrm{ht}^{\mathrm{reg}}(R)$ 定义为

$$\mathrm{ht}^{\mathrm{reg}}(R) := \inf\{n \geq 1 \mid R \text{ is } n\text{-quasi-}F\text{-regular}\}$$

若 R 对某个 n' 是 n'-准-F-正则的；否则，$\mathrm{ht}^{\mathrm{reg}}(R) := \infty$ 。

注意到我们有

$$1 \leq \mathrm{ht}(R) \leq \mathrm{ht}^2(R) \leq \cdots \leq \mathrm{ht}^\infty(R) \leq \mathrm{ht}^{\mathrm{reg}}(R) \leq \infty.$$

下面这个自然问题询问：准-F^∞-分裂高度的有限性是否会迫使其具有准-F-正则性。

问题 1.2. 设 $(R, \mathfrak{m})$ 是特征为 $p > 0$ 的 *Gorenstein* 局部环，并假设 R 有孤立奇点且不是 F-纯的。如果 R 的准-F^∞-分裂高度有限，那么 R 是否准-F-正则？此外，我们是否有

$$\mathrm{ht}^\infty(R) = \mathrm{ht}^{\mathrm{reg}}(R)?$$

如果去掉非-F-纯的假设，那么这个问题的答案是否定的。事实上，若 E 是普通椭圆曲线，则其仿射锥 R 是 F-分裂的，但不是准-F-正则的（参见 [KTT+24b，定理 A]）。因此，$\mathrm{ht}^{\mathrm{reg}}(R) = \infty$ ，而 $\mathrm{ht}^\infty(R) = 1$。另一方面，对于超奇异椭圆曲线 E，根据 [TWY24，定理 7.1] ，其仿射锥的准-F^∞-高度是无限的。

本文旨在研究定理 1.2 中的两类重要奇点。我们的第一个主要结果为有理双点（RDPs）给出了完整且明确的答案。根据 [Har98] ，每个 taut 有理双点都是强-F-正则的，因此 $\mathrm{ht}^{\mathrm{reg}} = 1$。此外， [KTT+24b，定理 C] 表明，在任意特征下，每个有理双点都是准-F-正则的。因此，它们的准-F-正则高度总是有限的，而定理 1.2 对有理双点而言唯一非平凡的部分，就是等式 $\mathrm{ht}^\infty = \mathrm{ht}^{\mathrm{reg}}$ 是否成立。

下面的定理计算了正特征下每个有理双点的所有 quasi-F^e-split 高度、quasi-F^∞-split 高度和 quasi-F-regular 高度。在计算中，我们使用了 [Yos25b] 建立的 quasi-F^e-splitting 和 quasi-F-regularity 的 Fedder 型判别准则。请注意，非 taut 有理双点的 quasi-F-split 高度已在 [KTY25 的表 1] 中计算。

定理 A (定理 2.6)。 我们完全确定了非 *taut* 有理双点的准-F^e-分裂高度和准-F-正则高度，如下所示。

(1) 对于特征 2 下除类型 D 以外的类型，其高度见表 *1*。此外，对于每个非-F-纯有理双点，我们有

$$\mathrm{ht}^e = \mathrm{ht}^\infty \qquad (e \geq 2).$$

(2) 对于类型 D^0_{2n} 和 D^0_{2n+1}，我们有

$$\mathrm{ht}^e = \mathrm{ht}^\infty = \mathrm{ht}^{\mathrm{reg}} = \lceil \log_2 n \rceil + 1 \qquad (e \geq 1).$$

(3) 对于特征为 $p = 2$的类型 D^r_{2n}和 $D^r_{2n+1}(r = 1, \ldots, n-1)$，以下结论成立。

- 我们有
$$\mathrm{ht} = \lceil \log_2(n-r) \rceil + 1.$$
- 设 $n - r = 1$。那么
$$\mathrm{ht}^e = \mathrm{ht}^\infty = \mathrm{ht}^{\mathrm{reg}} = 1 \qquad (e \geq 1).$$
- 设 $n - r > 1$ 是2的幂。那么
$$\mathrm{ht}^e = \mathrm{ht}^\infty = \mathrm{ht}^{\mathrm{reg}} = \log_2(n-r) + 2 \qquad (e \geq 2).$$
- 假设 $n - r > 1$ 不是2的幂。定义
$$e_0 := \min\left\{ e \in \mathbb{Z}_{\geq 2} \;\middle|\; 2^{\lfloor \log_2(n-r) \rfloor + e} - (2^e - 1)(n-r) + (2^{e-1} - 1) < 0 \right\}.$$

于是我们有

$$\mathrm{ht}^e = \begin{cases} \lceil \log_2(n-r) \rceil + 1 & \text{if } e < e_0, \\ \min\{ \lceil \log_2(n-r) \rceil + 2,\ \lceil \log_2 n \rceil + 1 \} & \text{if } e \geq e_0. \end{cases}$$

此外，

$$\mathrm{ht}^\infty = \mathrm{ht}^{\mathrm{reg}} = \min\{ \lceil \log_2(n-r) \rceil + 2,\ \lceil \log_2 n \rceil + 1 \}.$$

我们的第二个主要结果对某些分次环的局部化给出了定理 1.2 的肯定答案。

定理 B (定理 3.1，参见 [TWY24，推论 4。19]). 设 S 是一个特征为 $p > 0$的 F-有限 *Noether* 正规 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-分次环，并令 $d :=$ 维数 S。假设$S_0 = k$ 是一个域，令 $\mathfrak{m} := S_+$ 且 $R := S_{\mathfrak{m}}$，并假设$\mathrm{Spec}(R) \setminus \{\mathfrak{m}\}$ 是F-有理的，且 R是 *Gorenstein*。若 R不是 F-纯的，则

$$\mathrm{ht}^\infty(R) = \mathrm{ht}^{\mathrm{reg}}(R).$$

致谢。 作者谨向 Christian Liedtke、Gebhard Martin、Yuya Matsumoto 和 Shunsuke Takagi 致以诚挚谢意，感谢他们富有价值的讨论。第一作者获得了 JSPS KAKENHI 资助项目编号 JP25K17228 的支持。第二作者获得了 JSPS KAKENHI 资助项目编号 JP24K16889 的支持。

2. Quasi-F^∞-split height and quasi-F-regular heights for RPDs

在本节中，我们计算有理双点的拟-F^∞-分裂高度和拟-F-正则高度。因此，对于非-F-纯有理双点 R，我们得到 $\mathrm{ht}^\infty(R) = \mathrm{ht}^{\mathrm{reg}}(R)$。

2.1. **拟-F^∞-分裂和拟-F-正则性**。 在本小节中，我们总结拟-F-分裂和拟-F-正则性的判据。

约定 2.1。 在本文中， k 是特征为 $p > 0$ 的完美域，而$R = k[[x_1, \dots, x_N]]$是 k 上的形式幂级数环。令 $\mathfrak{m} = (x_1, \dots, x_N)$ 表示由变量生成的 R 的极大理想。令 $A = W(k)[[x_1, \dots, x_N]]$ 表示 $W(k)$上的形式幂级数环，并令 $\pi\colon A \to R$ 为自然映射。滥用记号， A 中的理想（x_1，……， x_N）也记为 $\mathfrak{m}$。我们定义弗罗贝尼乌斯态射 ϕ 的一个提升为

$$\phi\colon A \to A \qquad x_i \mapsto x_i^p.$$

则 $\phi_* A$是一个自由 A-模，其基为

$$\{\phi_* x_1^{i_1} \cdots x_N^{i_N} \mid 0 \le i_j \le p-1\}.$$

相对于上述基，与 $\phi_*(x_1 \cdots x_N)^{p-1}$ 对应的对偶基元素记为 u。同样地，我们在 R 上定义相应的映射；滥用记号，也将其记为 u。

我们首先回顾 [Yos25b] 中建立的关于准-F^e-分裂和准-F-正则性的判据。

定理 2.2 ([Yos25b，定理 A、C]). 设 $n \ge 1$ 为一个整数，且 $f \in A/p^n$ 为一个非零因子。

(1) 设 $e \ge 1$ 为一个整数。当且仅当存在满足以下条件的 $g \in A$ 时，环 R/fR 是 n- 准 -F^e- 分裂的：（D1） $u^{e+r-1}(\phi_*^{e+r-1} g) \in (p^r)$ 对 $1 \le r \le n-1$ 成立；（D2） g 有一个分解

$$g = g_0 + p g_1 + \cdots + p^{n-1} g_{n-1}$$

$such\ that\ u^r(\phi_*^r g_r) \in (f^{p^{e+n-r-1}-1})\ for\ 0 \le r \le n-1;$

(D3) $u^{e+n-2}(\phi_*^{e+n-2} g) \notin (\mathfrak{m}^{[p]}, p^n)$.

(2) 设 $\tau(R/fR)$为 R/fR 的测试理想，并设 $t \in \tau(R, fR)$ 和 $c \in A$ 为元素，使得 c 在 $A \to R/fR$ 下的像包含于

$$(t^A) \cap (R/fR)^\circ.$$

那么， R/fR是 n-拟-F-正则的，当且仅当存在 $g \in A$和一个整数$e \ge 1$，使得 g 满足条件 （D2），且 gc^{p^n-1} 满足 ***(1)*** 中的条件 （D1）和（D3）。

推论 2.3 （[Yos25b，定理 B]）。 设 n、 $e \ge 1$ 为整数，且 $f \in A/p^n$ 为非零因子。我们定义一个 R-模同态 θ 如下：

$$\theta\colon \mathrm{Ker}(u) \to R \qquad F_* a \mapsto u(F_*(\Delta_1(f^{p-1}) a)).$$

(1) 如果存在满足条件 （D1）和（D3）的 $g \in f^{p^{e+n-1}-1} A/p^n$ ，那么R/fR是 n-拟-F^e-分裂的。

(2)设 $\tau(R/fR)$ 为 R/fR 的测试理想，并设 $t \in \tau(R/fR)$ 和 $c \in A$ 为元素，使得 c 在 $A \to R/fR$ 下的像包含于

$$(t^4) \cap (R/fR)^\circ.$$

若存在 $g \in f^{p^{e+n-1}-1}A/p^n$，使得 gc^{p^n-1} 满足条件及 (D3)，则 R/fR是 (D1) n- 拟 -F- 正则的。

(3) 如下归纳定义 R 的理想序列 $\{I_n^e\}$。令

$$I_1^e := f^{p-1}u^{e-1}(F_*^{e-1}f^{p^{e-1}-1}R),$$

并对每个 $n \geq 1$，定义

$$I_{n+1}^e := \theta\left(F_*(I_n^e \cap \mathrm{Ker}(u))\right) + f^{p-1}R.$$

若 R/fR 是 n-拟-F^e-分裂的，则 $I_n^e \not\subseteq \mathfrak{m}^{[p]}$。

(4) 如下定义 R 的另一个理想序列 $\{I_n'\}$。令

$$I_1' := f^{p-1}\mathfrak{m},$$

并对每个 $n \geq 1$，定义

$$I_{n+1}' := \theta\left(F_*(I_n' \cap \mathrm{Ker}(u))\right) + f^{p-1}R.$$

若 R/fR不是 F-纯的且满足 $I_n' \subseteq \mathfrak{m}^{[p]}$，则 R不是 n-拟-F^2-分裂的。

注 2.4。设 n，$e \geq 1$ 为整数，且 $f \in A/p^n$ 为非零因子。若$g \in f^{p^{e+n-1}-1}A/p^n$，则根据 [Yos25b 的断言 5.5]，$g$ 满足条件 (D2)。因此，定理 2.3（1）和（2）由定理 2.2 得出。

引理 2.5。设 $a, f \in A$ 满足 $f \notin pA$，并设 $h \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$。对每个整数 $m \geq 0$，记 $f_m := f^{p^m-1}$。则以下条件等价：

(i) $u^{e+r-1}(f_{e+h-1}a) \in (p^r)$ *for* $1 \leq r \leq h-1$;
(ii) $u^{e+r-1}(f_{e+r-1}a) \in (p^r)$ *for* $1 \leq r \leq h-1$; *and*
(iii) $u^{e+r-1-s}(f_{e+r-1}a) \in (p^{r-s})$ *for* $0 \leq s \leq r$ *and* $1 \leq r \leq h-1$.

证明。我们使用 [Yos25a 定理 3.6]中引入的记号 Δ_m。根据 [Yos25a 公式 (3.1)]，有

$$a^{p^m} = \sum_{l=0}^{m} p^m \phi^{m-l}(\Delta_l(a)). \tag{2.1}$$

我们对 h 进行归纳法来证明引理。因此，我们可以假设 $r \leq h-2$ 满足条件 (i)–(iii)。剩下只需验证 $r = h-1$ 满足这些条件。

首先，我们证明 $s \neq 0$ 满足条件（iii）。事实上，由 (2.1) 及

$$f_{e+h-2} = f_s^{p^{e+h-2-s}} f_{e+h-2-s},$$

我们有

$$u^{e+h-2-s}\left(\phi_*^{e+h-2-s}(f_{e+h-2}a)\right) = \sum_{t=0}^{e+h-2-s} p^t u^t \Big(\phi_*^t\big(\Delta_t(f_s)\, u^{e+h-2-s-t}\big(\phi_*^{e+h-2-s-t}(f_{e+h-2-s}a)\big)\big)\Big).$$

令 $r = h-1-s \le h-2$ 和 $s = t$，应用归纳假设 (iii)，得到如下结果：

$$p^t u^{e+h-2-s-t}\big(\phi_*^{e+h-2-s-t}(f_{e+h-2-s}a)\big) \in (p^{h-1-s}).$$

接下来，我们证明条件（i）等价于条件（ii）。事实上，由 (2.1) 可得

$$\begin{aligned} u^{e+h-2}\big(\phi_*^{e+h-2}(f_{e+h-1}a)\big) &= \sum_{s=0}^{e+h-2} p^s u^s \Big(\phi_*^s\big(\Delta_s(f_1)\, u^{e+h-2-s}\big(\phi_*^{e+h-2-s}(f_{e+h-2}a)\big)\big)\Big) \\ &\equiv f_1\, u^{e+h-2}\big(\phi_*^{e+h-2}(f_{e+h-2}a)\big) \bmod p^{h-1}. \end{aligned}$$

此外， $s = 0$ 的条件（iii）与条件（ii）一致。证毕。□

2.2. 准-F^∞-分裂与准-F-正则高度（有理双点）。在本小节中，我们计算有理双点的准-F^e-分裂高度和准-F-正则高度。众所周知，挠性有理双点是强 F-正则的，因此由 [Har98]，对每个 $e \ge 1$，都有 $\mathrm{ht}^e = \mathrm{ht}^{\mathrm{reg}} = 1$。

定理 2.6 (定理 A)。我们完全确定如下非 *taut* 有理双点的准-F^e-分裂高度和准-F-正则高度。

(1) 对于特征2下除类型 D 以外的类型，其高度见表 *1*。此外，对每个非-F-纯有理双点，都有

$$\mathrm{ht}^e = \mathrm{ht}^\infty \qquad (e \ge 2).$$

(2) 对于类型 D_{2n}^0 和 D_{2n+1}^0，有

$$\mathrm{ht}^e = \mathrm{ht}^\infty = \mathrm{ht}^{\mathrm{reg}} = \lceil \log_2 n \rceil + 1 \qquad (e \ge 1).$$

(3) 对于特征为 $p = 2$的类型 D_{2n}^r和 $D_{2n+1}^r (r = 1, \dots, n-1)$，下列结论成立。

- 有

$$\mathrm{ht} = \lceil \log_2(n-r) \rceil + 1.$$

- 假设 $n - r = 1$。则

$$\mathrm{ht}^e = \mathrm{ht}^\infty = \mathrm{ht}^{\mathrm{reg}} = 1 \qquad (e = 1).$$

- 假设 $n - r > 1$ 是 2的幂。则

$$\mathrm{ht}^e = \mathrm{ht}^\infty = \mathrm{ht}^{\mathrm{reg}} = \log_2(n-r) + 2 \qquad (e \ge 2).$$

- 假设 $n - r > 1$ 不是 2的幂。定义

$$e_0 := \min\Big\{ e \in \mathbb{Z}_{\ge 2} \;\Big|\; 2^{\lfloor \log_2(n-r) \rfloor + e} - (2^e - 1)(n-r) + (2^{e-1} - 1) < 0 \Big\}.$$

于是我们有

$$\mathrm{ht}^e = \begin{cases} \lceil \log_2(n-r) \rceil + 1 & \text{if } e < e_0, \\ \min\{ \lceil \log_2(n-r) \rceil + 2,\ \lceil \log_2 n \rceil + 1 \} & \text{if } e \ge e_0. \end{cases} \tag{2.2}$$

此外，

$$\mathrm{ht}^\infty = \mathrm{ht}^{\mathrm{reg}} = \min\{\lceil \log_2(n-r)\rceil + 2,\ \lceil \log_2 n\rceil + 1\}.$$

注 2.7. e_0 的定义中出现的集合非空。事实上，我们有

$$\lim_{e\to\infty}\left(2^{\lfloor \log_2(n-r)\rfloor} - \frac{2^e-1}{2^e}(n-r) + \frac{2^{e-1}-1}{2^e}\right) = 2^{\lfloor \log_2(n-r)\rfloor} - (n-r) + \frac{1}{2} < 0,$$

其中，最后一个不等式由假设 $n-r$ 不是 2 的幂得出。此外，直接计算可得

$$2^{\lfloor \log_2(n-r)\rfloor + e} - (2^e-1)(n-r) + (2^{e-1}-1) < 0$$

对任意 $e \geq e_0$均成立。

定理 *2.6* 的证明。令 $R := k[[x,y,z]]$ 且 $\mathfrak{m} := (x,y,z)$.

首先，我们证明 (1)。设 $f \in R$ 是表 1 中列出的元素之一。准-F-分裂高度见 [KTY22，表 1]。

如果有序对 $(p,\ \mathrm{Dyn}(R/f))$ 属于以下情况之一

$$(2,E_7^1),\ (2,E_7^2),\ (2,E_8^2),\ (2,E_8^3),\ (3,E_8^1),$$

那么根据定理 2.3 (4)， R/f 不是 ht(R)-quasi-F^2-split 的。特别地，

$$\mathrm{ht}^2(R/f) \geq \mathrm{ht}(R/f) + 1.$$

在此情况下，根据定理 2.3 (2)， R/f 是 (ht(R) $+1$)-quasi-F-regular 的，因此

$$\mathrm{ht}^{\mathrm{reg}}(R/f) = \mathrm{ht}^2(R/f).$$

事实上，取表 2 中的 e、 a 和 c，并令 n:=ht(R) $+1$ 以及 g:= $af^{p^{e+n-1}}$。那么，gc^{p^n-1} 满足定理 2.2 中的条件 （D1） 和 （D3）。

另一方面，如果有序对 $(p,\ \mathrm{Dyn}(R/f))$ 属于以下情况之一

$$(2,E_6^0),\ (2,E_7^0),\ (2,E_8^0),\ (2,E_8^1),\ (3,E_6^0),\ (3,E_7^0),\ (3,E_8^0),\ (5,E_8^0),$$

那么 R/f 是 ht(R)-quasi-F-regular 的。事实上，取表 2 中的 e、 a 和 c ，并令n := ht(R) 以及 g := $af^{p^{e+n-1}}$。那么 gc^{p^n-1} 满足定理 2.2 中的条件 （D1） 和 （D3）。

若对 $(p,\ \mathrm{Dyn}(R/f))$ 而言，它属于以下情形之一

$$(2,E_6^1),\ (3,E_6^1),\ (3,E_7^1),\ (3,E_8^2),\ (5,E_8^1),$$

则 R/f 是 F-纯的，因此 ht^e(R/f) =ht$^\infty$(R/f) $=1$。此外，根据定理 2.3 (2)， R/f 是 2-quasi-F- 正则的，特别地，

$$\mathrm{ht}^{\mathrm{reg}}(R/f) = 2.$$

事实上，取表 2 中的 e、 a 和 c ，并令 $n := 2$ 和 $g := af^{p^{e+n-1}}$。那么 gc^{p^n-1} 满足定理 2.2 中的条件 (D1) 和 (D3)。

最后，假设对 $(p,\ \mathrm{Dyn}(R/f))$ 而言，它属于以下情形之一

$$(2,E_7^3),\ (2,E_8^4).$$

那么 R/f 是 3-拟-F-正则的。事实上，取表 2 中的 e、 a 和 c ，并设 $n := 3$和 g := $af^{p^{e+n-1}}$。那么 gc^{p^n-1} 满足定理 2.2 中的条件 (D1) 和 (D3)。

我们证明类型 $(2,\ E_7^3)$ 不是 2-拟-F-正则的。假设 $(R/f)_{\mathfrak{m}}$ 是 2-拟-F-正则的，其中 $f = z^2 + x^3 + xy^3 + xyz$。取 $c := x^4 \in A$。根据定理 2.2，存在 $g \in A$ 和一个整数 $e \geq 1$，使得 g 满足条件 (D2)，且 gc^3 满足条件 (D1) 和 (D3)。根据条件 (D2)，我们可以写成

$$g = g_0 + pg_1$$

从而 $g_0 \in (f^{2^{e+1}-1})$ 和 $u(\phi_* g_1) \in (f^{2^e-1})$。由于

$$\begin{aligned} f^{2^{e+1}-1} &= f^{2^e} f^{2^{e-1}} \cdots f^2 f \\ &\equiv \Big((xyz)^{2^e} + 2\big((x^3z^2)^{2^{e-1}} + (xy^3z^2)^{2^{e-1}} + (xyz^3)^{2^{e-1}}\big)\Big) f^{2^{e-1}} \cdots f^2 f \pmod{(\mathfrak{m}^{[2^{e+1}]}, 4)} \\ &\equiv (xyz)^{2^e} f^{2^{e-1}} \cdots f^2 f \pmod{(\mathfrak{m}^{[2^{e+1}]}, 4)}, \end{aligned}$$

其中最后一个同余关系由

$$\big((x^3z^2)^{2^{e-1}} + (xy^3z^2)^{2^{e-1}} + (xyz^3)^{2^{e-1}}\big) f^{2^{e-1}} \in (\mathfrak{m}^{[2^{e+1}]}, 2),$$

我们得到

$$f^{2^{e+1}-1} \equiv (xyz)^{2^{e+1}-1} \pmod{(\mathfrak{m}^{[2^{e+1}]}, 4)}. \tag{2.3}$$

此外，我们有

$$f^{2^e-1} \equiv (xyz)^{2^e-1} \pmod{(\mathfrak{m}^{[2^e]}, 2)}. \tag{2.4}$$

因此，

$$u^e(\phi_*^e(c^3 g_0)) \in (\mathfrak{m}^{[2]}, 4)$$

由 (2.3)，并且

$$u^e(\phi_*^e(pc^3 g_1)) = pu^{e-1}\big(\phi_*^{e-1}(x^6 u(\phi_*(g_1)))\big) \in (\mathfrak{m}^{[2^e]}, 4)$$

by (2.4)。同样的论证也表明，情形 $(2, E_8^4)$ 不是 2-quasi-F-regular .

接下来，我们证明 (3)。我们先讨论类型 D_{2n}^r 的情形。令

$$f = x^2 y + xy^n + xy^{n-r} z + z^2 \in R.$$

设 $J_e := u^{e-1}(F_*^{e-1} f^{p^{e-1}-1} R)$ 是 R 的一个理想。那么，对于每个 $e \geq 1$，都有 $I_e = f^{p-1} J_e$。

$\mathrm{ht}(R/f)$ 的计算由 [KTY22] 得出。此外，情形 $n - r = 1$ 由经典的 Fedder 判据得出。以下我们固定 n、r，以及一个整数 $e \geq 2$，使得 $n - r > 1$。

首先，我们计算 $\mathrm{ht}^e(R/f)$。如果 $n - r$ 是 2 的幂，则记 $\log_2(n-r) + 2$（若 $n - r$ 不是 2 的幂，则记 (2.2) 的右端）为 h_e。我们证明 $\mathrm{ht}^e(R/f) = h_e$。

证明 $\mathrm{ht}^e(R/f) \geq h_e$。注意到，$h_e$ 等于 $\lceil \log_2(n-r) \rceil + 1$ 或 $\lceil \log_2(n-r) \rceil + 2$。由于 $\mathrm{ht}^e \geq \mathrm{ht}^1 = \lceil \log_2(n-r) \rceil + 1$，我们可以假设 $h_e = \lceil \log_2(n-r) \rceil + 2$，也就是说，或者 $n - r$ 是 2 的幂，或者 $e \geq e_0$ 成立。反设 R/f 在 $h_e - 1$ 处是 quasi-F^e-split。由定理 2.3，我们有

$$\theta^{h_e - 2}(F_*^{h_e - 2} I_1^e) \not\subseteq \mathfrak{m}^{[p]}.$$

因此，只需证明

$$f \Delta_1(f)^{1 + 2 + \cdots 2^{h_e - 3}} J_e \subset \mathfrak{m}^{[2^{h_e - 1}]}.$$

注意， $h_e \geq 3$。 $f\Delta_1(f)^{1+2+\cdots 2^{h_e-3}}$的每一项都是通过将 f中的 $2^{h_e-1}-1$项相乘得到的，允许重复。因此，每一项都可以写成

$$(x^2y)^A(xy^n)^B(xy^{n-r}z)^C(z^2)^D,$$

其中 A,B,C,D 是满足 $A+B+C+D=2^{h_e-1}-1$ 的非负整数。若这样的单项式不属于 $\mathfrak{m}^{[2^{h_e-1}]}$，则有

$$2A+C \leq 2^{h_e-1}-1, \quad A+nB+(n-r)C \leq 2^{h_e-1}-1, \quad B+C+2D \leq 2^{h_e-1}-1. \tag{2.5}$$

由于 $h_e = \lceil \log_2(n-r) \rceil + 2$，我们有

$$2(n-r) \leq 2^{h_e-1} < 4(n-r). \tag{2.6}$$

由 (2.5) 和 (2.6) 的第二个不等式可得 $B+C \leq 3$。

假设 $2 \leq B+C$。那么，由 (2.5) 的第三个不等式可得

$$D \leq 2^{h_e-2}-2.$$

此外，由 (2.5) 和 (2.6) 的第二个不等式可得

$$A \leq 2^{h_e-1}-1-2(n-r) < 2^{h_e-2}-1.$$

因此，

$$A+B+C+D \leq (2^{h_e-2}-2)+3+(2^{h_e-2}-2) = 2^{h_e-1}-1.$$

由于等号成立，我们有 $A=2^{h_e-2}-2$, $B+C=3$ 和 $D=2^{h_e-2}-2$。再次由 (2.5) 和 (2.6) 的第二个不等式可得

$$2^{h_e-3}(B+C) < (n-r)(B+C) \leq 2^{h_e-2}+1,$$

这意味着 $B+C<3$，矛盾。因此，我们必有 $B+C=1$。

在这种情况下，由 (2.5) 可得

$$A \leq 2^{h_e-2}-1, \quad D \leq 2^{h_e-2}-1.$$

与前面一样，两个不等式中都必须取等号，因此有两种可能：

$$(A,B,C,D) = (2^{h_e-2}-1,1,0,2^{h_e-2}-1), \quad (2^{h_e-2}-1,0,1,2^{h_e-2}-1).$$

在第一种情况下，由 (2.5) 的第二个不等式可得 $n \leq 2^{h_e-2} = 2^{\lceil \log_2(n-r) \rceil}$，这意味着 $\lceil \log_2(n-r) \rceil = \lceil \log_2 n \rceil$。由于在这种情况下， h_e 由 (2.2) 右端定义，因此这种情况不会发生。因此，我们必有

$$(A,B,C,D) = (2^{h_e-2}-1,0,1,2^{h_e-2}-1),$$

且相应的项为

$$x^{2A+C}y^{A+nB+(n-r)C}z^{B+C+2D} = x^{2^{h_e-1}-1}y^{2^{h_e-2}-1+(n-r)}z^{2^{h_e-1}-1}.$$

因此，只需证明

$$J_e \subset (x, y^{2^{h_e-2}-(n-r)+1}, z) = (x, y^{2^{\lceil \log_2(n-r) \rceil}-(n-r)+1}, z).$$

为此，我们证明以下引理。

引理 2.8. 对于任意的 n、 r 和 $m \geq 2$，我们有

$$J_m = (x, y^{\alpha_m}, y^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}, z), \tag{2.7}$$

其中 α_m 由 $\alpha_2 = \lfloor \frac{n-r}{2} \rfloor$ 定义，并且

$$\alpha_{m+1} = \lfloor \frac{n-r+\alpha_m}{2} \rfloor.$$

证明。注意，对于任意 m，都有 $\alpha_m \leq n-r$，因此

$$\alpha_{m+1} \geq \left\lfloor \frac{2\alpha_m}{2} \right\rfloor = \alpha_m.$$

回顾 $J_1 = (1)$ 和 $J_{m+1} = u(F_*(fJ_m))$。通过直接计算，我们得到 $J_2 = (x, y^{\lfloor \frac{n-r}{2} \rfloor}, z)$，因此 (2.7) 对 $m = 2$成立。假设 (2.7) 对 m成立，我们证明其对 $m+1$也成立。

首先，注意到

$$u(F_*(xf)) = (x, z), \quad u(F_*(zf)) = (x, y^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}, z).$$

此外，我们得到

$$u(F_*(y^{\alpha_m} f)) + (x, z) = (x, y^{\lfloor \frac{n-r+\alpha_m}{2} \rfloor}, z).$$

因此，当 $\alpha_m \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$时， $m+1$ 的 (2.7) 成立。

假设$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor < \alpha_m$。那么存在一个整数 $m_0 \geq 3$，使得 $\alpha_{m_0-1} \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ 且$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor < \alpha_{m_0}$。由于

$$u(F_*(y^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} f)) + (x, z) = (x, y^{\lfloor \frac{n-r+\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{2} \rfloor}, z)$$

and

$$\lfloor \frac{n-r+\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{2} \rfloor \geq \lfloor \frac{n-r+\alpha_{m_0-1}}{2} \rfloor = \alpha_{m_0} > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor,$$

我们得到

$$J_{m+1} = (x, y^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}, z),$$

如所需。 □

根据引理 2.8，要证明 $\mathrm{ht}^e(R/f) \geq h_e$，只需证明

$$\alpha_e \geq 2^{\lceil \log_2(n-r) \rceil} - (n-r) + 1 \tag{2.8}$$

and

$$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \geq 2^{\lceil \log_2(n-r) \rceil} - (n-r) + 1. \tag{2.9}$$

若 $n-r>1$ 是 2 的幂，则这些不等式显然成立。因此，我们可以假设 $n-r>1$ 不是 2 的幂。

由于我们假设 $h_e = \lceil \log_2(n-r) \rceil + 2$，因此有 $e \geq e_0$ and

$$\lceil \log_2 n \rceil \geq \lceil \log_2(n-r) \rceil + 1. \tag{2.10}$$

由于

$$2^{\lceil \log_2(n-r) \rceil - 1} < n - r \leq 2^{\lceil \log_2(n-r) \rceil}$$

以及 $2^{\lceil \log_2(n-r)\rceil} < n$ （由 (2.10) 推出），我们得到

$$2^{\lceil \log_2(n-r)\rceil} - (n-r) + 1 < 2^{\lceil \log_2(n-r)\rceil} - 2^{\lceil \log_2(n-r)\rceil - 1} + 1 < \frac{n}{2} + 1.$$

这意味着 (2.9)。因此，只需证明 (2.8)。

由于 $e \geq e_0$，注 2.7 表明

$$2^{\lceil \log_2(n-r)\rceil + e - 1} - (2^e - 1)(n-r) + (2^{e-1} - 1) < 0.$$

因此

$$2^{\lceil \log_2(n-r)\rceil} - (n-r) + 1 < \Big(\frac{2^{e-1}-1}{2^{e-1}}\Big)(n-r) + \frac{1}{2^{e-1}}.$$

引理 2.9. 对于任意 $m \geq 2$，写作 $n - r = 2^{m-1}M_m + N_m$，其中 $0 \leq N_m \leq 2^{m-1} - 1$。那么

$$\alpha_m = (2^{m-1} - 1)M_m + \begin{cases} 0 & \text{if } 0 \leq N_m \leq 1, \\ N_m - 1 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{2.11}$$

证明. 我们对 m 使用归纳法证明 (2.11)。由于 $\alpha_2 = \lfloor \frac{n-r}{2} \rfloor = M_2$，情形 $m = 2$ 成立。假设 (2.11) 对 m 成立。

如果 $0 \leq N_{m+1} \leq 2^{m-1} - 1$ （分别地， $2^{m-1} \leq N_{m+1} \leq 2^m - 1$），那么 $M_m = 2M_{m+1}$ （分别地，$M_m = 2M_{m+1} + 1$）且 $N_m = N_{m+1}$ （分别地， $N_m = N_{m+1} - 2^{m-1}$）。因此，由于 m，根据 (2.11)，我们有

$$\alpha_m = \begin{cases} (2^m - 2)M_{m+1} & \text{if } 0 \leq N_{m+1} \leq 1, \\ (2^m - 2)M_{m+1} + N_{m+1} - 1 & \text{if } 2 \leq N_{m+1} \leq 2^{m-1} - 1, \\ (2^{m-1} - 1)(2M_{m+1} + 1) & \text{if } 2^{m-1} \leq N_{m+1} \leq 2^{m-1} + 1, \\ (2^{m-1} - 1)(2M_{m+1} + 1) + (N_{m+1} - 2^{m-1} - 1) & \text{if } 2^{m-1} + 2 \leq N_{m+1} \leq 2^m - 1. \end{cases}$$

将此与 $\alpha_{m+1} = \lfloor \frac{n-r+\alpha_m}{2} \rfloor$ 结合，我们得到对 $m+1$ 成立的 (2.11)。 □

由于 $n - r = 2^{e-1}M_e + N_e$，我们有

$$2^{\lceil \log_2(n-r)\rceil} - (n-r) + 1 < (2^{e-1} - 1)M_e + \Big(\frac{2^{e-1}-1}{2^{e-1}}\Big)N_e + \frac{1}{2^{e-1}}.$$

由引理 2.9，这意味着 (2.8)。这证明了 $\mathrm{ht}^e(R/f) \geq h_e$。

证明 $\mathrm{ht}^e(R/f) \leq h_e$。 在下文中，我们也将该多项式记为 l

$$x^2y + xy^n + xy^{n-r}z + z^2 \in W(k)[x, y, z]$$

记作 f，并写作 $f_m := f^{p^m - 1}$。

情形（1）。假设以下条件之一成立：

- $n - r \geq 2$ 是 2 的幂；
- $n - r \geq 2$ 不是 2 的幂，且 $e < e_0$。

在此情形下， $h_e = \lfloor \log_2(n-r) \rfloor + 2$。令

$$g := f_{e+h_e-1}y^{2^{\lfloor \log_2(n-r)\rfloor + e} - (2^e-1)(n-r) + (2^{e-1}-1)}. \tag{2.12}$$

注意，根据假设， g 是良定义的。我们证明 g 满足定理 2.2 中的条件 (D1) 和 (D3)，因此由定理 2.3（1）， R/f 是 h_e-准-F^e-分裂的。

由引理 2.5，要证明（D1），只需证明

$$u^{e+s-1}\big(\phi_*^{e+s-1}(f_{e+s-1}y^{2^{\lfloor\log_2(n-r)\rfloor+e}-(2^e-1)(n-r)+(2^{e-1}-1)})\big)\in(p^s)$$

对于 $1\le s\le h_e-1$。我们计算.....的项

$$f_{e+s-1}y^{2^{\lfloor\log_2(n-r)\rfloor+e}-(2^e-1)(n-r)+(2^{e-1}-1)}$$

其在 u^{e+s-1} 下的像非零。忽略系数，这样一项可以写成

$$(x^2y)^A(xy^n)^B(xy^{n-r}z)^C(z^2)^Dy^{2^{\lfloor\log_2(n-r)\rfloor+e}-(2^e-1)(n-r)+(2^{e-1}-1)},\tag{2.13}$$

其中 A，B，C，D 是非负整数，且 $A+B+C+D=2^{e+s-1}-1$，并且

$$2A+B+C\equiv A+nB+(n-r)C-(2^e-1)(n-r)+(2^{e-1}-1)\equiv C+2D\equiv -1 \bmod 2^{e+s-1}.$$

模 2^{e+s-1} 下，同余式 $A+B+C+D\equiv 2A+B+C$ 推出 $D\equiv A$。同余式 $C+2D\equiv -1$ 推出 $D\equiv -1-2A$，而 $2A+B+C\equiv -1$ 推出 $B\equiv 0$。此外，由于

$$A+nB+(n-r)C-(2^e-1)(n-r)+(2^{e-1}-1)\equiv(1-2(n-r))(A+2^{e-1})-1\equiv -1 \text{模 } 2^{e+s-1},$$

我们得到

$$A\equiv -2^{e-1} \bmod 2^{e+s-1}.$$

因此 $A=2^{e+s-1}-2^{e-1}$，并且 $C=2^{e+s-1}-2^{e-1}$，因为 $A\equiv C$ 模 2^{e+s-1}。于是

$$A+C=2^{e+s}-2^e>2^{e+s-1}-1=A+B+C+D,$$

矛盾。因此，不存在这样的项，（D1）得证。

接下来，为了验证（D3），我们计算 $u^{e+h_e-1}(\phi_*^{e+h_e-1}g)$。按照上述相同的论证，忽略系数，$g$ 中任何在 u^{e+h_e-1} 下的像非零的项都可以写成 (2.13) 的形式，其中 $A+B+C+D=2^{e+h_e-1}-1$ 且

$$2A+B+C\equiv C+2D\equiv -1 \bmod 2^{e+h_e-1},$$

$$A+nB+(n-r)C+2^{e+h_e-2}-(2^e-1)(n-r)+(2^{e-1}-1)\equiv -1 \bmod 2^{e+h_e-1}.$$

如前所述，我们得到 $A\equiv D$、$D\equiv -1-2A$，以及 $B\equiv 0$ 模 2^{e+h_e-1}。此外，

$$\begin{aligned}&A+nB+(n-r)C+2^{e+h_e-2}-(2^e-1)(n-r)+(2^{e-1}-1)\\&\equiv(1-2(n-r))(A+2^{e-1})+2^{e+h_e-2}-1\\&\equiv -1 \bmod 2^{e+h_e-1}.\end{aligned}$$

因此

$$A\equiv -2^{e-1} \bmod 2^{e+h_e-2}.$$

由于 $A=D$ 和 $A+B+C+D=2^{e+h_e-1}-1<2^{e+h_e}-2^e$，我们得到 $A=2^{e+h_e-2}-2^{e-1}=D$。因此，

$$(A,B,C,D)=(2^{e+h_e-2}-2^{e-1},0,2^e-1,2^{e+h_e-2}-2^{e-1}).$$

此外，该项的系数为

$$\binom{2^{e+h_e-1}-1}{A\ C\ D}=\binom{2^{e+h_e-1}-1}{2^e-1}\binom{2^e(2^{h_e-1}-1)}{2^{e-1}(2^{h_e-1}-1)}.$$

根据Kummer定理，该系数的2阶为 h_e-1。因此 e,

$$2^{-(h_e-1)}u^{e+h_e-1}(\phi_*^{e+h_e-1}g)\notin(\mathfrak{m},2),$$

如所需。

情形（2）。令 $h'=\lceil\log_2 n\rceil+1$，并定义

$$g:=f_{e+h'-1}x^{2^{e-1}-1}y^{(2^{\lceil\log_2 n\rceil}-n)2^{e-1}+2^{e-1}-1}z. \tag{2.14}$$

若 g 满足定理 2.2 中的（D1）和（D3）（对于 h'），则由定理 2.3（1）可得 $\mathrm{ht}\le h'$。特别地，当 $\lceil\log_2 n\rceil=\lceil\log_2(n-r)\rceil$ 时，我们得到 $\mathrm{ht}(R/f)\le h_e$。

为验证（D1），只需证明像

$$f_{e+s-1}x^{2^{e-1}-1}y^{(2^{\lceil\log_2 n\rceil}-n)2^{e-1}+2^{e-1}-1}z \tag{2.15}$$

在 u^{e+s-1} 作用下包含于 (p^s)，对每个 $1\le s\le h'-1$ 都成立。忽略系数后，式（2.15）中像在 u^{e+s-1} 作用下非零的项可写为

$$(x^2y)^A(xy^n)^B(xy^{n-r}z)^C(z^2)^Dx^{2^{e-1}-1}y^{(2^{\lceil\log_2 n\rceil}-n)2^{e-1}+2^{e-1}-1}z, \tag{2.16}$$

其中 A，B，C，D 是非负整数，且 $A+B+C+D=2^{e+s-1}-1$ 和

$$\begin{aligned}&2A+B+C+2^{e-1}-1\\ \equiv\ &A+nB+(n-r)C-n2^{e-1}+2^{e-1}-1\\ \equiv\ &C+2D+1\equiv-1 \bmod 2^{e+s-1}.\end{aligned}$$

与情形（1）一样，我们得到 $D\equiv A+2^{e-1}-1$、$C\equiv-2A-2^e$ 和 $B\equiv 2^{e-1}$ 模 2^{e+s-1}。此外，由于

$$A+nB+(n-r)C-n2^{e-1}+2^{e-1}-1\equiv(1-2(n-r))(A+2^{e-1})-1\equiv-1,$$

我们得到 $A\equiv-2^{e-1}$ 模 2^{e+s-1}。因此 $A=2^{e+s-1}-2^{e-1}$ 和 $D=2^{e+s-1}-1$，这与.....矛盾

$$A+B+C+D=2^{e+s-1}-1<2^{e+s}-2^{e-1}-1.$$

因此，不存在这样的项，且（D1）成立。

接下来，我们验证（D3）。与情形（1）一样，g 中在 $u^{e+h'-1}$ 下的像非零的项可以写成（2.16），其中 $A+B+C+D=2^{e+h'-1}-1$ 且

$$2A+B+C+2^{e-1}-1\equiv C+2D+1\equiv-1 \bmod 2^{e+h'-1},$$

$$A+nB+(n-r)C+2^{e+h'-2}-n2^{e-1}+2^{e-1}-1\equiv-1 \bmod 2^{e+h'-1}.$$

如前所述，我们得到 $D\equiv A+2^{e-1}-1$、$C\equiv-2A-2^e$ 和 $B\equiv 2^{e-1}$ 模 $2^{e+h'-1}$。此外，我们有 $A\equiv-2^{e-1}$ 模 $2^{e+h'-2}$。由于 $D=A+2^{e-1}-1$ 并且

$$A+B+C+D=2^{e+h'-1}-1<2^{e+h'}-2^{e-1}-1,$$

我们得到 $A=2^{e+h'-2}-2^{e-1}$。因此，

$$(A,B,C,D)=(2^{e+h'-2}-2^{e-1},2^{e-1},0,2^{e+h'-2}-1).$$

该项的系数为

$$\binom{2^{e+h'-1}-1}{A\ C\ D}=\binom{2^{e+h'-1}-1}{2^{e+h'-2}-1}\binom{2^{e+h'-2}}{2^{e-1}}.$$

根据Kummer定理，该系数的2阶为 $h'-1$。这证明了（D3）。**情形（3）**。令 $h'':=\lceil \log_2(n-r)\rceil+2$，并定义

$$g:=f_{e+h''-1}y^{2^{\lfloor \log_2(n-r)\rfloor+e+1}-(2^e-1)(n-r)+(2^{e-1}-1)}. \tag{2.17}$$

在这种情况下，定理 2.2 中的条件 (D1) 和 (D3)（对于 h''）可以用与情形（1）相同的方式验证。因此，根据定理 2.3（1），$\mathrm{ht}(R/f)\le h''$，于是当 $n-r\ge 2$ 不是 2 的幂且 $e\ge e_0$ 时，$\mathrm{ht}(R/f)\le h_e$。

由情形（1）–（3），我们得到在所有情况下 $\mathrm{ht}^e(R/f)\le h_e$。因此，$\mathrm{ht}^e(R/f)=h_e$。**ht() 的证明**$\mathrm{ht}^{\mathrm{reg}}(R/f)$。取满足 $\mathrm{ht}^e(R/f)=\mathrm{ht}^\infty(R/f)$ 的 $e\gg 0$。只需证明 $\mathrm{ht}^{\mathrm{reg}}(R/f)=\mathrm{ht}^\infty(R/f)$。令 $\tau\subset R/f$ 为测试理想。我们有

$$\partial_x f=y^n+y^{n-r}z,\quad \partial_y f=x^2+nxy^{n-1}+(n-r)xy^{n-r-1}z,\quad \partial_z f=xy^{n-r}.$$

Let

$$u\colon F_*R\to R$$

是由下式给出的 R-模同态

$$x^iy^jz^k\mapsto\begin{cases}x^{\frac{i-1}{2}}y^{\frac{j-1}{2}}z^{\frac{k-1}{2}} & \text{if } i,j,k \text{ are odd},\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

那么，$-\mapsto u(F_*(f-))$定义了一个生成元

$$\mathrm{Hom}_{(R/f)_{\mathfrak{m}}}(F_*((R/f)_{\mathfrak{m}}),(R/f)_{\mathfrak{m}}).$$

当 $n-r$ 为偶数（分别为奇数）时，令 $\alpha=1$（分别为 0）。于是

$$u(F_*(fxy^{n-r}y^\alpha z))=y^{\lfloor\frac{n-r}{2}\rfloor}z\in\tau.$$

由于 $\partial_x f\in\tau$，我们有 $y^n\in\tau$。令 $c:=y^{4n}$。

首先，假设 $n-r\ge 2$ 是 2 的幂。那么，(2.12) 中定义的 g 满足

$$\frac{g}{c^{2^{h_e-1}}}\in(f_{e+h_e-1})\subset W(k)[x,y,z]$$

对于 $e\gg 0$。注意，$h_e=\mathrm{ht}^e(R/f)$。因此，$\frac{g}{c^{2^{h_e-1}}}$ 和 c 满足定理 2.2（2）中的条件，从而

$$\mathrm{ht}^{\mathrm{reg}}(R/f)=\mathrm{ht}^e(R/f)=\mathrm{ht}^\infty(R/f).$$

当 $n-r$ 不是 2 的幂时，使用(2.17)中定义的 g 可以采用相同的论证。这就完成了类型 D^r_{2n} 的证明。

类型 D^r_{2n+1} 的证明类似。这里我们仅指出需要作出的修改。与之前一样，我们可以假设 $n-r\ge 2$，并令

$$f:=z^2+x^2y+y^nz+xy^{n-r}z.$$

$\mathrm{ht}^e(R/f)\ge h_e$ 的证明相同。对于 $\mathrm{ht}^e(R/f)\le h_e$ 的证明，在情形（1）和（3）中，g 的定义（2.12）和（2.17）同样适用。在情形（2）中，我们使用以下内容代替（2.14）：

$$g=f_{e+h'-1}xy^{(2^{\lceil\log_2 n\rceil}-n)2^{e-1}}z^{2^{e-1}-1}.$$

然后，通过类似的计算，我们得到 $\mathrm{ht}^e(R/f) \leq h'$。对于测试理想的计算，我们有：

$$u(F_*(f(\partial_x f)xy^{1-\alpha})) = xy^{\lfloor \frac{n-r+1}{2} \rfloor} \in \tau.$$

由于 $\partial_z f = y^n + xy^{n-r} \in \tau$，我们得到 $y^n \in \tau$。因此，同理可得 $\mathrm{ht}^\infty(R/f) = \mathrm{ht}^{\mathrm{reg}}(R/f)$。这就完成了 (3) 的证明。

最后，我们证明 (2)。由于根据 KTY22，$\mathrm{ht} = \lceil \log_2 n \rceil + 1$ by [，表 1]，，只需证明 $\mathrm{ht}^{\mathrm{reg}} \leq \lceil \log_2 n \rceil + 1$。

首先，考虑类型 D^0_{2n} 并令

$$f := z^2 + x^2 y + xy^n.$$

那么，对于任意 $e \geq 2$，元素

$$g := zy^{2^{\lceil \log_2 n \rceil + e - 1} - n} f^{2^{\lceil \log_2 n \rceil + e - 1}} \tag{2.18}$$

根据与 (3) 相同的论证，它满足定理 2.2 中的条件（D1）和（D3）。因此，$\mathrm{ht}^e(R/f) \leq \lceil \log_2 n \rceil + 1$。此外，由于 $\partial_x f = y^n \in \tau$，且 $c := y^{4n}$ 满足

$$\frac{g}{c^{2^{\lceil \log_2 n \rceil + 1} - 1}} \in (f_{e + \lceil \log_2 n \rceil})$$

对于 $e \gg 0$，我们看到 $\frac{g}{c^{2^{\lceil \log_2 n \rceil + 1} - 1}}$ 和 c 满足定理 2.2（2）中的条件。因此 $\mathrm{ht}^{\mathrm{reg}}(R/f) \leq \lceil \log_2 n \rceil + 1$。

类型为 D^0_{2n+1} 的情形证明相同，只需使用

$$g := xy^{2^{\lceil \log_2 n \rceil + e - 1} - n} f^{2^{\lceil \log_2 n \rceil + e - 1}}$$

对于 $f := z^2 + x^2 y + y^n z$ 和 $c = y^{4n}$。证明完毕。 □

备注 2.10。Liedtke、Martin 和 Matsumoto [LMM25, 命题 6.2]研究了有理双点的 Witt 环的最高局部上同调结构。尽管在 [LMM25], 的分析中并未明确计算准-F^∞-分裂高度，但经过适当论证，其分析结果使我们能够确定该高度。更具体地，对于非-F-纯 RDP R，可以从他们的结果推知

$\mathrm{ht}^\infty(R) - 1 = \max\{ l \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \mid f^{(l)}$ 是 [LMM25, 表 3] $\}$.中列出的生成元之一

我们强调，这一计算是通过与本文所用方法截然不同的论证得到的。

3. On Theorem 1.2 in the graded case

本节将对具有 F-有理去心谱的分次非 F-纯正规 Gorenstein 环的局部化，给出定理 1.2 的肯定回答。

定理 *3.1*（定理 ***B***，参见 [***TWY24***，推论 ***4.***19]）。设 S 是一个特征为 $p > 0$ 的 F-有限诺特正规 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 分次环，并令 $d := \dim S$。假设 S_0 是一个域，并设 $\mathfrak{m} := S_+$ 且 $R := S_{\mathfrak{m}}$。假设 $\mathrm{Spec}(R) \setminus \{\mathfrak{m}\}$ 是 F-有理的，且 R 是 ***Gorenstein***。若 R 不是 F-纯的，则 $\mathrm{ht}^\infty(R) = \mathrm{ht}^{\mathrm{reg}}(R)$。

TABLE 1. 非 taut 有理双点的高度

p	type	f	$\mathrm{ht}(R/f)$	$\mathrm{ht}^{\infty}(R/f)$	$\mathrm{ht}^{\mathrm{reg}}(R/f)$
2	D^0_{2n}	$z^2+x^2y+xy^n$	$\lceil \log_2 n \rceil + 1$	$\lceil$日志$_2\, n\rceil+1$	$\lceil$日志$_2\, n\rceil+1$
2	D^r_{2n}	$z^2+x^2y+xy^n+xy^{n-r}z$	$\lceil$日志$_2(n-r)\rceil+1$	$(*)$	$(*)$
2	D^0_{2n+1}	$z^2+x^2y+y^nz$	$\lceil$日志$_2\, n\rceil+1$	$\lceil$日志$_2\, n\rceil+1$	$\lceil$日志$_2\, n\rceil+1$
2	D^r_{2n+1}	$z^2+x^2y+y^nz+xy^{n-r}z$	$\lceil \log_2(n-r)\rceil+1$	$(*)$	$(*)$
2	E^0_6	$z^2+x^3+y^2z$	2	2	2
2	E^1_6	$z^2+x^3+y^2z+xyz$	1	1	2
2	E^0_7	$z^2+x^3+xy^3$	4	4	4
2	E^1_7	$z^2+x^3+xy^3+x^2yz$	3	4	4
2	E^2_7	$z^2+x^3+xy^3+y^3z$	2	3	3
2	E^3_7	$z^2+x^3+xy^3+xyz$	1	1	3
2	E^0_8	$z^2+x^3+y^5$	4	4	4
2	E^1_8	$z^2+x^3+y^5+xy^3z$	4	4	4
2	E^2_8	$z^2+x^3+y^5+xy^2z$	3	4	4
2	E^3_8	$z^2+x^3+y^5+y^3z$	2	4	4
2	E^4_8	$z^2+x^3+y^5+xyz$	1	1	3
3	E^0_6	$z^2+x^3+y^4$	2	2	2
3	E^1_6	$z^2+x^3+y^4+x^2y^2$	1	1	2
3	E^0_7	$z^2+x^3+xy^3$	2	2	2
3	E^1_7	$z^2+x^3+xy^3+x^2y^2$	1	1	2
3	E^0_8	$z^2+x^3+y^5$	3	3	3
3	E^1_8	$z^2+x^3+y^5+x^2y^3$	2	3	3
3	E^2_8	$z^2+x^3+y^5+x^2y^2$	1	1	2
5	E^0_8	$z^2+x^3+y^5$	2	2	2
5	E^1_8	$z^2+x^3+y^5+xy^4$	1	1	2

证明。对于每个整数 $n\geq 1$ 以及每个 $W_n(R)$-模 M，我们记

$$H^d_{\mathfrak{m}}(M) := H^d_{W_n(\mathfrak{m})}(M).$$

对于整数 $e,n\geq 1$，我们令 $B^e_{R,n} := \mathrm{Coker}(R \to Q^e_{R,n})$，并以相同方式定义 $B^e_{S,n}$。由于 S 具有分次结构，环 $W_n(S)$ 以及 $W_n(S)$-模 $Q^e_{S,n}$ 和 $B^e_{S,n}$ 对所有 $e,n\geq 1$ 都带有自然的分次结构；参见 [KTT+24a，第 7] 节。因此，$H^i_{\mathfrak{m}}(W_n(R))$、$H^i_{\mathfrak{m}}(Q^e_{R,n})$ 和 $H^i_{\mathfrak{m}}(B^e_{R,n})$ 对所有 $i,e,n\geq 1$ 都继承自然的分次结构。不妨设 $h := \mathrm{ht}^{\infty}(R) < \infty$。置

$$a(S) := \max\{m\in\mathbb{Z} \mid H^d_{\mathfrak{m}}(S)_m \neq 0\}.$$

我们首先证明 $a(S) < 0$。反设 $a(S)\geq 0$。由正合序列

$$F_*H^d_{\mathfrak{m}}(W_{n-1}(R)) \xrightarrow{V} H^d_{\mathfrak{m}}(W_n(R)) \xrightarrow{\mathrm{Res}} H^d_{\mathfrak{m}}(R) \to 0,$$

TABLE 2.

p	Type	f	$\mathrm{ht}^{\mathrm{reg}}(R/f)$	e	a	c	$\tau(R/f)$
2	E_6^0	$z^2+x^3+y^2z$	2	5	x^3y	x^4	$(x,\ y,\ z)$
2	E_6^1	$z^2+x^3+y^2z+xyz$	2	5	x^3y	x^4	$(x,\ y,\ z)$
2	E_7^0	$z^2+x^3+xy^3$	4	7	$x^{127}y^3z$	y^4	$(x,\ y,\ z)$
2	E_7^1	$z^2+x^3+xy^3+x^2yz$	4	6	$x^3y^{31}z$	x^4	$(x,\ y,\ z)$
2	E_7^2	$z^2+x^3+xy^3+y^3z$	3	7	$x^3y^{31}z$	x^4	$(x,\ y,\ z)$
2	E_7^3	$z^2+x^3+xy^3+xyz$	3	6	$x^{16}y^4$	y^4	$(x,\ y,\ z)$
2	E_8^0	$z^2+x^3+y^5$	4	7	$x^3y^{63}z$	x^4	$(x,\ y^2,\ z)$
2	E_8^1	$z^2+x^3+y^5+xy^3z$	4	7	$x^3y^{63}z$	x^4	$(x,\ y^2,\ z)$
2	E_8^2	$z^2+x^3+y^5+xy^2z$	4	7	$x^3y^{63}z$	x^4	$(x,\ y^2,\ z)$
2	E_8^3	$z^2+x^3+y^5+y^3z$	4	7	$x^3y^{63}z$	x^4	$(x,\ y,\ z)$
2	E_8^4	$z^2+x^3+y^5+xyz$	3	8	$x^{31}y^3z$	y^4	$(x,\ y,\ z)$
3	E_6^0	$z^2+x^3+y^4$	2	5	$x^2y^{48}z^{80}$	y^4	$(x,\ y,\ z)$
3	E_6^1	$z^2+x^3+y^4+x^2y^2$	2	6	$x^{83}y^{48}z^{80}$	y^4	$(x,\ y,\ z)$
3	E_7^0	$z^2+x^3+xy^3$	2	5	y^2z^{48}	z^4	$(x,\ y,\ z)$
3	E_7^1	$z^2+x^3+xy^3+x^2y^2$	2	4	y^6z^8	y^4	$(x,\ y,\ z)$
3	E_8^0	$z^2+x^3+y^5$	3	5	$x^2y^{57}z^{80}$	y^4	$(x,\ y,\ z)$
3	E_8^1	$z^2+x^3+y^5+x^2y^3$	3	4	$x^8y^{35}z^8$	y^4	$(x,\ y,\ z)$
3	E_8^2	$z^2+x^3+y^5+x^2y^2$	2	6	$x^2y^{48}z^{80}$	y^4	$(x,\ y,\ z)$
5	E_8^0	$z^2+x^3+y^5$	2	4	$x^{28}y^4z^{124}$	x^4	$(x,\ y,\ z)$
5	E_8^1	$z^2+x^3+y^5+xy^4$	2	5	$x^{28}y^4z^{124}$	x^4	$(x,\ y,\ z)$

可得，对于所有 $m > p^h a(S)$，均有 $H^d_{\mathfrak{m}}(W_h(R))_m = 0$。特别地，取满足 $p^e > p^h a(S)$ 的 $e \geq 1$，则同态

$$H^d_{\mathfrak{m}}(W_h(R))_m \xrightarrow{F^e} F^e_* H^d_{\mathfrak{m}}(W_h(R))_{p^e m}$$

对所有 $m \geq 1$ 均为零。由于 R 是 h-准-F^e-分裂的，限制映射

$$\mathrm{Res}\colon H^d_{\mathfrak{m}}(W_h(R))_m \to H^d_{\mathfrak{m}}(R)_m$$

对所有 $m \geq 1$ 均为零。由于限制映射

$$\mathrm{Res}\colon H^d_{\mathfrak{m}}(W_n(R)) \to H^d_{\mathfrak{m}}(R)$$

是满射，我们得出对所有 $m \geq 1$，$H^d_{\mathfrak{m}}(R)_m = 0$，从而 $a(S) = 0$。

由于 R 不是 F-纯的，因此我们有 $h \geq 2$。由于 $\mathrm{ht}^\infty(R) = h$，存在一个正整数$e$，使得 R 不是 $(h-1)$- 准 -F^e- 分裂的。取一个包含于底中的非零元素 $\eta \in H^d_{\mathfrak{m}}(R)$；则 $\deg(\eta) = 0$。

For 对于每个正整数 e'，我们有如下具有正合行的交换图：

$$\begin{array}{ccccc} H^{d-1}_{\mathfrak{m}}(B^{e'}_{R,h}) & \xrightarrow{\alpha^{e'}_{h}} & H^{d}_{\mathfrak{m}}(R) & \xrightarrow{\Phi^{e'}_{R,h}} & H^{d}_{\mathfrak{m}}(Q^{e'}_{R,h}) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Res}} & & \| & & \downarrow \\ H^{d-1}_{\mathfrak{m}}(B^{e'}_{R,h-1}) & \xrightarrow{\alpha^{e'}_{h-1}} & H^{d}_{\mathfrak{m}}(R) & \xrightarrow{\Phi^{e'}_{R,h-1}} & H^{d}_{\mathfrak{m}}(Q^{e'}_{R,h-1}) \end{array} \tag{3.1}$$

对于 $e' = e$，由于 R is not $(h-1)$-quasi-F^e-split，因此存在一个次数为 0 的齐次元$\tau \in H^{d-1}_{\mathfrak{m}}(B^{e}_{R,\ h-1})$，使得 $\alpha^{e}_{h-1}(\tau) = \eta$。

我们还有如下正合行组成的交换图：

$$\begin{array}{ccccc} H^{d-1}_{\mathfrak{m}}(B^{e}_{R,h}) & \longrightarrow & H^{d-1}_{\mathfrak{m}}(B^{e}_{R,h-1}) & \longrightarrow & F^{h-1}_{*}H^{d}_{\mathfrak{m}}(B^{e}_{R,1}) \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \beta} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma} \\ H^{d-1}_{\mathfrak{m}}(B^{e+1}_{R,h}) & \xrightarrow{\mathrm{Res}} & H^{d-1}_{\mathfrak{m}}(B^{e+1}_{R,h-1}) & \longrightarrow & F^{h-1}_{*}H^{d}_{\mathfrak{m}}(B^{e+1}_{R,1}) \end{array}$$

要证明 $\beta(\tau) \in \mathrm{Im}(\mathrm{Res})$，只需证明 γ 在次数 0 时为零。考虑交换图

$$\begin{array}{ccc} F^{e}_{*}H^{d}_{\mathfrak{m}}(R) & \twoheadrightarrow & H^{d}_{\mathfrak{m}}(B^{e}_{R,1}) \\ \downarrow{\scriptstyle F} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma} \\ F^{e+1}_{*}H^{d}_{\mathfrak{m}}(R) & \twoheadrightarrow & H^{d}_{\mathfrak{m}}(B^{e+1}_{R,1}) \end{array} \tag{3.2}$$

由于 R 是 Gorenstein 且不是 F-纯的，(3.2) 中的左侧竖直映射在次数 0 时为零。由于水平映射均为满射，因此 γ 在次数 0 时为零。

因此存在 $\tau' \in H^{d-1}_{\mathfrak{m}}(B^{e+1}_{R\,h\,,}\ )$，使得 $\beta(\tau) = \mathrm{Res}(\tau')$。特别地，

$$\alpha^{e+1}_{h}(\tau') = \mathrm{Res} \circ \alpha^{e+1}_{h-1}(\tau) = \eta$$

由 (3.1) 得。因此 $\Phi^{e+1}_{R\,h\,,}(\tau') = 0$，这与 R 是 h-拟-F^{e+1}-分裂的事实矛盾。因此，我们得出 $a(S) < 0$。

接下来我们证明 $\mathrm{ht}^{\infty}(R) = h = \mathrm{ht}^{\mathrm{reg}}(R)$。由于 $h \le \mathrm{ht}^{\mathrm{reg}}(R)$ 显然成立，只需证明反向不等式。对每个 $m \ge 1$，设

$$t_m := \inf\{\, l \in \mathbb{Z} \mid (\widetilde{0^*_m})_l \neq 0 \,\}.$$

由于 $a(S) < 0$，且 $\mathrm{Spec}(R) \setminus \{\mathfrak{m}\}$ 是 F-有理的，我们有 $-\infty < t_1 < 0$。我们声称对所有 $m \ge 1$，$t_m = p^{m-1}t_1$ 成立。$m = 1$ 的情形显然。假设该结论对$m-1$成立。由 [KTT+24b、命题 3.20(2)], ，我们有

$$V^{-(m-1)}(\widetilde{0^*_m}) = F^{m-1}_{*}0^*,$$

其中

$$V^{m-1}\colon F^{m-1}_{*}H^{d}_{\mathfrak{m}}(R) \longrightarrow H^{d}_{\mathfrak{m}}(W_m(R)).$$

由于 R 是 Cohen–Macaulay，映射 V^{m-1} 是单射，因此 $t_m \ge p^{m-1}t_1$。

现在假设 $\alpha \in \widetilde{0^*_m}$ 是次数为 $l < p^{m-1}t_1$的齐次元素。那么，根据[KTT+24b，命题 3.20]，

$$\mathrm{Res}(\alpha) \in (\widetilde{0^*_{m-1}})_l = 0,$$

因为 $t_{m-1} > l$。因此，存在 $\beta \in H^d_{\mathfrak{m}}(R)$，使得 $V^{m-1}(\beta) = \alpha$。由于 β 的次数为 $l/p^{m-1} < t_1$，我们有 $\beta = 0$，从而得到 $\alpha = 0$。因此， $t_m = p^{m-1}t_1$。

现在假设 $0^*_h \neq 0$，并选取一个齐次元 $\alpha \in (0^*_h)_s$。于是$a(S) \geq s$。选取 $e \geq 1$，使得 $p^{h-1}t_1 > p^e a(S)$。由 [KTT+24b 定理 3.25]，选取一个 $\alpha_h \in H^d_{\mathfrak{m}}(W_h(R))$ 的提升 α，使得 $\alpha_h \in \widetilde{0^*_h}$。由 [KTT+24b 命题 3.23]，元素 $F^e(\alpha_h)$ 是次数为 $p^e s \leq p^e a(S)$ 的齐次元。由于 $t_h = p^{h-1}t_1 > p^e a(S)$，我们有 $F^e(\alpha_h) = 0$。因为 R 是 h-拟-F^e-分裂的，这意味着 $\alpha = 0$，矛盾。

因此 $0^*_h = 0$，证明完成。 □

References

[Har98] N. Hara，《二维 F-正则与 F-纯奇点的分类》，Adv. Math. 133 (1998)，第 1 期，33–53 页。MR1492785[KTT+24a] T. Kawakami、T. Takamatsu、H. Tanaka、J. Witaszek、F. Yobuko 和 S. Yoshikawa，《双有理几何中的准-F-分裂 II》，Proc. Lond. Math. Soc. (3) 128 (2024)，第 4 期，论文编号 e12593，共 81 页。MR4731853[KTT+24b] ，《双有理几何中的准-F-分裂 III》，arXiv 预印本 arXiv:2408.01921 (2024)。[KTY22] T. Kawakami、T. Takamatsu 和 S. Yoshikawa，《准-F-分裂的 Fedder 型判据 I》，arXiv 预印本 arXiv:2204.10076 (2022，即将在 Amer. J. Math. 发表)。[KTY25] ，《准-F-分裂的 Fedder 型判据 II》，arXiv 预印本 arXiv:2511.17270 (2025)。[LMM25] C. Liedtke、G. Martin 和 Y. Matsumoto，《特征 p 下有理双点上的主齐性空间》，《正特征下的孤立商奇点》，2025 年，第 75–152 页。[TWY24] H. Tanaka、J. Witaszek 和 F. Yobuko，《准-F^e-分裂与准-F-正则性》，arXiv:2404.06788 (2024)。[Yob19] F. Yobuko，《特征p下 Calabi-Yau 簇的准-Frobenius 分裂与提升》，Math. Z. 292 (2019)，第 1–2 期，307–316 页。MR3968903[Yos25a] S. Yoshikawa，《完美拟纯性与完美拟 BCM-正则性的计算方法》，arXiv 预印本 arXiv:2502.06108 (2025)。[Yos25b] ，《准-F^e-分裂与准-F-正则性的 Fedder 型判别准则》，arXiv 预印本 (2025)。

Department of Mathematics, Faculty of Science, Saitama University, 255 Shimo-Okubo, Sakura-ku, Saitama-shi, Saitama 338-8570, Japan电子邮件地址: teppeitakamatsu.math@gmail.com

Institute of Science Tokyo, Tokyo 152-8551, Japan电子邮件地址: yoshikawa.s.9fe9@m.isct.ac.jp