arXiv:2601.03501v1 [math.DS] 7 Jan 2026

SFT 的强拓扑 Rokhlin 性质与 Medvedev 度

NICANOR CARRASCO-VARGAS

Abstract. 我们证明，如果一个递归呈示群具有一个具有非零 Medvedev 度的（非空）有限型子移位，那么它不具有强拓扑 Rokhlin 性质。该结果简化了一个已知判据，并为不具有这一性质的递归呈示群提供了新的例子。

1. Introduction

如果一个可数群在康托尔空间上具有一个泛连续作用，则称其具有强拓扑 Rokhlin 性质（STRP）。这意味着，在赋予一致拓扑的康托尔空间上的连续作用空间中，存在一个元素，其拓扑共轭类包含一个稠密的 G_δ 集。

本文关注刻画具有 STRP 的可数群这一开放问题，以及一个足以判定不具有 STRP 的条件。现在让我们提及这一背景下的关键工作。在奠基性工作 [12]Kechris 和 Rosendal 证明了 $\mathbb{Z}$具有 STRP。Hochman[10] 证明了 $\mathbb{Z}^d$ 不具有 STRP， $d \geq 2$而 Doucha [8] 通过证明有限群的自由积和循环群具有 STRP，以及并非几乎 $\mathbb{Z}$ 幂零的几乎幂零群不具有 STRP（其他一些群类也如此），推广了这些结果。

Hochman 的工作中一个关键观察是，为了证明 $\mathbb{Z}^d$ $(d \geq 2)$ 不满足 STRP，只需构造一个有限型子移位（SFT），使其拥有一个具备以下性质的 sofic 因子：该因子的 Medvedev 度非零；它等于其所有极小子系统的并集；并且这些极小子系统都不是孤立的，见 [10, §5.1]。Doucha 的论文中也给出了一个相关判据，见 [8,§5.1]。

集合的 Medvedev 度衡量的是，从递归论的角度而言，计算出该集合至少一个元素有多困难。其基本思想是，将一个数学问题与它的解集等同起来，因此问题的难度对应于计算出至少一个解的难度。在符号动力系统以及有限生成群上的子移位背景下，Medvedev 度是一种尤为稳健的概念。根据 Curtis-Lyndon-Hedlund 定理，子移位态射自动是可计算的；由此可知，Medvedev 度在拓扑共轭下保持不变，并且在因子映射下不会增加，而且无需假设群是可 amenable 的，见 [15, 3]。

我们的主要结果是以下关于递归呈示群不具备 STRP 的充分条件。

定理 1.1。 *一个具有非零 Medvedev 度的（非空）SFT 的递归呈示群不具备 STRP。*

这一条件比 Hochman 的工作中所确立的条件容易验证得多 [10]。事实上，对于 $\mathbb{Z}^d$ $(d \geq 2)$，自 20 世纪 70 年代以来，人们就已知存在具有非零 Medvedev 度的有限型子移位 [9, 13]。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 37B10（主类），37A55，37B05，03D30（次类） .

作为定理 1.1以及关于有限型子移位的 Medvedev 度的已有结果的推论，我们得到了若干新的递归呈示群实例，它们不具有 STRP。这些群包括 Baumslag-Solitar 群 [2], 灯笼群 [5], 与双曲平面准等距的群 [3], 分枝群 [3], 两个无限群的直积 [3, 定理 5。8] （此前已知三个无限群的直积具有这一性质 [8, 定理 C]），以及满足模拟定理的群 [3, §5。5]。

定理 1.1 的证明在很大程度上依赖于 Doucha 的结果 [8, 定理 A], ，该结果表明，对于每个有限字母表 $\mathcal{A}$ ，有限生成群具有 STRP，当且仅当射影孤立子移位在字母表 $\mathcal{A}$ 上的子移位空间中稠密。射影孤立子移位是一类 sofic 子移位，定义见 [8], 定义 2.2。我们证明，若一个 SFT 具有非零 Medvedev 度，则在这个拓扑空间中存在一个邻域，其中不含射影孤立子移位。论证的技术实现依赖于 [4]中的一些结果。

2. Preliminaries

当 A 有限且 $A \subset B$ 时，我们记 $A \Subset B$ ，并用 A^B 表示从 B 到 A 的函数集合。

2.1. 有限生成群。 设 G 是一个有限生成的无限群，其单位元为 1_G，设 S 是一个在取逆下封闭的有限生成集。 S 上的词集合记为 S^*。给定 $w \in S^*$ ，我们用 w 表示相应的群元素。设 $F(S)$ 为由 S 生成的自由群，并设 $\pi\colon F(S) \twoheadrightarrow G$ 是群同态，它将约化词 w 映射为 w。

令 $W_n \Subset S^*$ 为长度至多为 n 的词集，并令 $B_n \Subset G$ 为集合 $\{w\colon\ w \in W_n\}$，$n \geqq 1$。我们将 $gF = \{gf\colon\ f \in F\}$ 记作 $g \in G$ 和 $F \Subset G$。

在大多数论述中，我们将假设 G 是递归呈现的，也就是说，字问题 $\{w \in S^*\colon\ w = 1_G\}$ 是递归可枚举的。我们还回顾一下，当 $\{w \in S^*\colon\ w = 1_G\}$ 可判定时， G 具有可判定字问题。

2.2. 子移位。我们沿用 [7]。令 $\mathcal{A}$ 为一个称为字母表的有限集，并在 $\mathcal{A}^G$ 上赋予度量

$$d(x,y) = \inf\{2^{-n} : x|_{B_n} = y|_{B_n}\}, \quad x, y \in \mathcal{A}^G.$$

$\mathcal{A}^G$ 中的元素称为构型。我们考虑由 $gx(h) = x(g^{-1}h)$ 给出的移位作用 $G \curvearrowright \mathcal{A}^G$ 。子移位是 $\mathcal{A}^G$ 的一个非空、闭且移位不变的子集。

给定两个子移位 $X \subset \mathcal{A}^G$ 和 $Y \subset \mathcal{B}^G$，若函数 $\phi\colon Y \to X$ 连续，且对所有 $g \in G$ 和 $x \in Y$，都有 $g\phi(x) = \phi(gx)$，则称其为态射。Curtis-Lyndon-Hedlund 定理指出，这等价于存在一个有限集 $F \Subset G$ 和一个局部函数 $\ell\colon \mathcal{B}^F \to \mathcal{A}$，使得对每个 $x \in X$ 和 $g \in G$，都有 $\phi(x)(g) = \ell((g^{-1}x)|_F)$。若 ϕ 是满射，则称其为因子映射，并称 X 是 Y的因子。

支撑为 $F \Subset G$ 的图样是一个函数 $p\colon F \to \mathcal{A}$。若 $x|_F = p$，则我们用 $p \sqsubset x$ 表示 $x \in \mathcal{A}^G$。对于子移位 X ，我们记 $\mathcal{L}_F(X) = \{p \in \mathcal{A}^F\colon\ p \sqsubset x$ ，其中某个 $x \in X\}$成立。 X 的语言是$\mathcal{L}(X) = \bigcup_{F \Subset G} \mathcal{L}_F(X)$。我们还记作 $\mathcal{L}^c(X) = \mathcal{L}(\mathcal{A}^G) \setminus \mathcal{L}(X)$。

我们称图样 p 在构型 $x \in \mathcal{A}^G$ 中出现，当且仅当对于某个 $g \in G$，有 $p \sqsubset gx$ 。A sub移位可以通过禁止一组图样 $\mathcal{F} \subset \mathcal{L}(\mathcal{A}^G)$ 来定义，如下:

$$X_{\mathcal{F}} = \{x \in \mathcal{A}^G\colon\ \text{no pattern from } \mathcal{F} \text{ appears in } x\}$$

有限型子移位（SFT）是指可以用有限个禁用图样定义的子移位，而当一个子移位是某个 SFT 的因子时，它就是 Sofic 子移位。

2.3. **子移位的度量空间**。我们考虑子移位空间

$$S(\mathcal{A}^G) = \{X \subset \mathcal{A}^G : X \text{ subshift } \}$$

赋予度量

$$D(X,Y) = \inf\{2^{-n} : \mathcal{L}_{B_n}(X) = \mathcal{L}_{B_n}(Y)\}, \quad X, Y \in S(\mathcal{A}^G).$$

容易验证， D 是与 d相关的豪斯多夫距离。

注 2.1。 有限型子移位在 $(S(\mathcal{A}^G)\ D)$ 中稠密。

定义 2.2 ([8])。 若存在一个字母表 $X \in S(\mathcal{A}^G)$，一个开集 $\mathcal{B}$，它属于 U 中的 $S(\mathcal{B}^G)$，以及一个子移位态射 $\phi: \mathcal{B}^G \to \mathcal{A}^G$，使得 $\phi(Y) = X$ 对每个$Y \in U$都成立，则称子移位 $X \in S(\mathcal{A}^G)$ 为射影孤立的。

注 2.3。 射影孤立子移位是 *Sofic* 的。事实上，由于有限型子移位在 $S(\mathcal{B}^G)$中稠密，我们可以在前述定义中取 $Y \in U$ 为一个 *SFT*，而关系 $\phi(Y) = X$表明 X 是一个 *SFT* 的因子。

2.4. **可计算性**。 如果存在一台图灵机，使其在输入 $n \in \mathbb{N}$ 时当且仅当 $n \in P$ 成立时停机，那么整数集 $P \subset \mathbb{N}$ 就是递归可枚举的。这等价于存在一台图灵机，输出一个无限列表，且其值域为 P。若 $\mathbb{N} \setminus P$ 是递归可枚举的，我们称 P 为余递归可枚举；若 P 同时满足这两个条件，则称其为可判定的。这些概念可通过可计算枚举推广到词集、有限集的集合、模式表示集（定义如下）以及可数集的其他子集。

为了定义有限生成群上的子移位的可计算性概念，而不假设这些群具有可判定字问题，我们引入以下构造。支撑为 $F \Subset S^*$ 的模式表示是一个函数 $p: F \to \mathcal{A}$。对于一个构型$x \in \mathcal{A}^G$，如果对每个 $w \in F$ 都有 $x(w) = p(w)$，我们记作 $p \sqsubset x$；当对某个 $g \in G$ 有 $p \sqsubset gx$ 时，我们称 p 出现在 x 中。若对每个 u，$v \in F$（其中 $u = v$）都有 $p(u) = p(v)$，则称 p 相容。只要 p 相容，我们就可以通过关系 $q(w) = p(w)$ 定义一个支撑为 $\{w$ 的实际图样 q。在这种情况下，我们称 p 是 q的一个表示。 $\overline{\quad}$ $\overline{\quad}$ $\overline{\quad}$

对于子移位 X 和 $F \Subset S^*$，我们记 $\mathscr{L}_F(X) = \{p \in \mathcal{A}^F : \ p \sqsubset x$，其中某个 $x \in X\}$。我们定义 $\mathscr{L}(X) = \bigcup_{F \Subset S^*} \mathscr{L}_F(X)$，并且 $\mathscr{L}^c(X) = \mathscr{L}(\mathcal{A}^G) \setminus \mathscr{L}(X)$。因此， $\mathscr{L}(X)$ 是语言 $\mathcal{L}(X)$ 中图样的呈现集合，而该语言属于 X。

我们称子移位 X 是有效的，如果 $\mathscr{L}^c(X)$ 是递归可枚举的；若相应的呈现集合 $\mathscr{L}(X)$ 是可判定的，则称 X 的语言 $\mathcal{L}(X)$ 是可判定的。有效子移位在因子映射下封闭。如果该群是递归呈示的，那么有限型子移位和 sofic 子移位都是有效的。

我们注意到，文献中对有效子移位有几种定义，但对于递归呈示群，它们都一致。这里给出的定义是限制最严格的定义，并且等价于如下要求：移位作用 $G \curvearrowright X$ 是一个有效动力系统，也就是说，它与递归紧子集 $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$上的可计算同胚作用共轭。关于有效子移位的更多细节，请读者参见 [4, §7] 。

我们还提到，对于字问题可判定的群，可以通过计算将 $\mathcal{L}(\mathcal{A}^G)$ 与 $\mathbb{N}$ 识别起来，并直接使用图案，而不是模式表示。在这种情况下，当 $\mathcal{L}^c(X)$ 递归可枚举时，子移位是有效的；当 $\mathcal{L}(X)$ 可判定时，其语言是可判定的。

零 Medvedev 度记作 $0_{\mathfrak{M}}$，子移位的 Medvedev 度 X 记作 $m(X)$。Medvedev 度随包含关系单调不减，即 $X \subset Y$蕴含 $m(X) \geq m(Y)$。子移位 X 满足 $m(X) = 0_{\mathfrak{M}}$ 当且仅当它含有一个可计算构型。所谓可计算构型，是指一个元素 $x \in \mathcal{A}^G$，存在一台图灵机，在输入 $w \in S^*$ 后停机，并输出 $x(w) \in \mathcal{A}$。 $\overline{\quad}$

定义 Medvedev 度需要引入 $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$上的可计算函数，因此我们省略完整定义，并请读者参阅 [3, §3]，以了解更详细的说明。我们只需要用到上一段中提及的性质。

3. Proof of Theorem 1.1

命题 3.1. 递归呈现群上的射影孤立子移位具有可判定语言。

证明。设 $X \subset \mathcal{A}^G$ 是一个射影孤立子移位。我们的目标是证明 $\mathscr{L}(X)$ 是可判定的。由于射影孤立子移位是 sofic 的，且 sofic 子移位是有效的，因此 $\mathscr{L}^c(X)$ 是递归可枚举的。现在我们证明 $\mathscr{L}(X)$ 也是递归可枚举的。

固定一个有限字母表 $\mathcal{B}$、一个开集 $U \subset S(\mathcal{B}^G)$，以及一个态射 $\phi\colon \mathcal{B}^G \to \mathcal{A}^G$，如与 X 相关联的射影孤立子移位定义中所述。由于 U 是开集，且 SFT 在 $S(\mathcal{B}^G)$ 中稠密，我们可以选取一个 SFT $Y \in U$。由于 U 是开集，我们可以找到一个半径 ϵ，使得度量 D 中以 Y 为中心、半径为 ϵ 的球包含于 U 中。固定 $k \in \mathbb{N}$，使得 $2^{-k} < \epsilon$。由 D 的定义可知，满足 $\mathcal{L}_{B_k}(Z) = \mathcal{L}_{B_k}(Y)$ 的每个子移位 $Z \in S(\mathcal{B}^G)$ 都满足 $Z \in U$。

为了证明 $\mathscr{L}(X)$ 是递归可枚举的，我们考虑一个支撑为 $F \Subset S^*$ 的模式表示$p\colon F \to \mathcal{A}$，并描述一个算法过程：当且仅当$p \in \mathscr{L}(X)$ 时，该过程会终止。为此，我们定义两个依赖于 p 的子移位 X_p 和 Y_p。

$$X_p = \{x \in X : p \text{ does not appear in } x\},$$
$$Y_p = \{y \in Y : \phi(y) \in X_p\}.$$

注意到 $Y_p \subset Y$，因此 $\mathscr{L}_{W_k}(Y_p) \subset \mathscr{L}_{W_k}(Y)$。数值 k 取决于 X，而不取决于 p，所以我们可以在接下来的算法中将它“硬编码”，并一并写入有限集 $\mathscr{L}_{W_k}(Y)$。

关键的观察是，p 属于 $\mathscr{L}(X)$，当且仅当 $\mathscr{L}_{W_k}(Y_p)$ 真包含于 $\mathscr{L}_{W_k}(Y)$。这等价于断言 ($p \notin \mathscr{L}(X)$) $\iff$ ($\mathscr{L}_{W_k}(Y_p) = \mathscr{L}_{W_k}(Y)$)。下面证明这一等价关系。

- ($\Rightarrow$)。假设 $p \notin \mathscr{L}(X)$。根据 X_p 的定义可知 $X_p = X$，这意味着 $Y_p = Y$，因此 $\mathscr{L}_{W_k}(Y_p) = \mathscr{L}_{W_k}(Y)$。
- ($\Leftarrow$)。假设 $\mathscr{L}_{W_k}(Y_p) = \mathscr{L}_{W_k}(Y)$。这一假设意味着我们还有$\mathcal{L}_{B_k}(Y_p) = \mathcal{L}_{B_k}(Y)$。

  我们先证明 $\phi(Y_p) = X$。这里用到 X 是射影孤立的，以及我们对 k的选择。等式 $\mathcal{L}_{B_k}(Y_p) = \mathcal{L}_{B_k}(Y)$ 意味着 Y_p属于 U。于是根据 U的定义，$\phi(Y_p) = X$。

  接下来证明 $\phi(Y_p) = X_p$。令 $\psi\colon Y \to X$ 为 ϕ的限制。因此 ψ 是一个满射。显然，$\psi(Y_p) = \phi(Y_p)$，所以只需证明 $\psi(Y_p) = X_p$。根据满射函数的一个初等性质，我们还有 $\psi(\psi^{-1}(X_p)) = X_p$。但由于 $\psi^{-1}(X_p) = Y_p$，可得 $\psi(Y_p) = X_p$，如所声称。

  我们证明了 $\phi(Y_p) = X$，并且还证明了 $\phi(Y_p) = X_p$，因此可以得出$X = X_p$。最后一个等式意味着 $p \notin \mathscr{L}(X)$。

我们已经证明了所要论证的结论：$p \in \mathscr{L}(X)$ 当且仅当 $\mathscr{L}_{W_k}(Y_p) \subsetneq \mathscr{L}_{W_k}(Y)$。

为了完成证明，只需证明关系 $\mathscr{L}_{W_k}(Y_p) \subsetneq \mathscr{L}_{W_k}(Y)$ 是递归可枚举的。为此，我们将利用这样一个事实：Y_p 在 p上是一致有效的，这意味着存在一种算法，给定 $p\colon F \to \mathcal{A}$ ($F \Subset S^*$) 和 $q\colon E \to \mathcal{B}$ ($E \Subset S^*$)，当且仅当 $q \in \mathscr{L}^c(Y_p)$ 时，该算法才会停机。我们将在下文的引理 3.2 中单独证明这一点。我们还将利用这样一个事实：$\mathscr{L}_{W_k}(Y)$ 是有限的，且不依赖于 p。设 $\{q_1, \ldots, q_m\} = \mathscr{L}_{W_k}(Y)$。为了确定 $\mathscr{L}_{W_k}(Y_p) \subsetneq \mathscr{L}_{W_k}(Y)$ 是否成立，只需同时运行上一段中的 m 个算法实例，每个实例分别对应一个 q_i, $i = 1, \ldots, m$。如果这些 m

进程中有一个停机，从而得出 $q_i \in \mathscr{L}^c_{W_k}(Y_p)$，那么我们就停止整个过程，并得出$\mathscr{L}_{W_k}(Y_p) \subsetneq \mathscr{L}_{W_k}(Y)$，进而得出 $p \in \mathscr{L}(X)$。□

引理 3.2。设 G 为有限生成群，且设 $\phi\colon \mathcal{B}^G \to \mathcal{A}^G$ 为一个态射。设$X \subset \mathcal{A}^G$和 $Y \subset \mathcal{B}^G$为满足 $X = \phi(Y)$的有效子移位。设 $p\colon F \to \mathcal{A}$为一个支撑为 $F \Subset S^*$的模式表示，并定义

$$X_p = \{x \in X : p \ does\ not\ appear\ in\ x\},$$
$$Y_p = \{y \in Y : \phi(y) \in X_p\}.$$

则 $\mathscr{L}^c(Y_p)$在 p上一致地递归可枚举。也就是说，$\{(q, p) : q \in \mathscr{L}^c(Y_p)\}$是递归可枚举的。

证明。回顾一下，$\pi\colon F(S) \to G$是将约化词 w映射到w的群同态。给定 $z \in \mathcal{A}^G$，我们通过 $\hat{z} \in \mathcal{A}^{F(S)}$定义 $\hat{z}(g) = z(\pi(g))$，$g \in F(S)$。给定一个子移位 $Z \subset \mathcal{A}^{G\hat{}\,\hat{}}$，我们定义 $Z = \{\hat{z} : z \in Z\}$。注意到我们有集合论等式 $\mathscr{L}(Z) = \mathscr{L}(Z)$。此外，关联 $Z \to \hat{Z}$ 保持了[1] 为有效子移位 [4,§3.3 和 §7]的性质。由这些事实可知，只需对有限生成自由群证明该命题即可。

对于接下来的论证，我们只需假设群 G 具有可判定字问题（自由群具有可判定字问题）。因此，我们可以直接处理图案，而不必使用模式表示。我们证明，存在一个算法：给定 $p\colon F \to \mathcal{A}(F \Subset S^*)$ 和 $q\colon E \to \mathcal{B}\,(E \Subset G)$，当且仅当 $q \in \mathcal{L}^c(Y_p)$ 时该算法停机。

我们需要定义图案的平移。给定 $g \in G$，图案 q 的平移 gq 定义为支撑为 gE 且满足 $gq(h) = q(g^{-1}h)$，$h \in gE$的图案。接下来，我们定义 ϕ 在图案上的自然扩展，并将其记为 Φ。根据 Curtis-Lyndon-Hedlund 定理，我们可以找到一个有限集 $T \Subset G$ 和一个局部函数 $\ell\colon \mathcal{B}^T \to \mathcal{A}$，使得对于 $g \in G$ 和 $x \in \mathcal{B}^G$，$\phi(x)(g) = \ell((g^{-1}x)|_T)$。我们将 $\Phi(q)$定义为支撑为$\{g \in G : T \subset g^{-1}E\}$且满足 $\Phi(q)(g) = \ell((g^{-1}q)|_T)$的图案。显然，$\Phi\colon \mathcal{L}(\mathcal{B}^G) \to \mathcal{L}(\mathcal{A}^G)$是一个可计算函数。

利用群 G 的紧致性，一个标准论证表明以下两个条件等价。

(1) $q \in \mathcal{L}^c(Y_p)$ (2) 存在包含 E 的 $R \Subset G$，使得 $(\forall r \in \{s \in \mathcal{B}^R : s|_E = q\})(r \in \mathcal{L}^c(Y)$ 或$\Phi(r) \in \mathcal{L}^c(X_p))$。

要完成论证，只需注意到 (2) 作为 p 和 q 的谓词是递归可枚举的。这是因为 $\mathcal{L}^c(Y)$ 是递归可枚举的，$\mathcal{L}^c(X_p)$ 在 p 上是一致递归可枚举的（见 [1] 中命题 2.1 的证明），而且 Φ 是可计算的。因此，我们已经证明了字问题可判定的群这一特殊情形下的命题。

我们用可计算波兰度量空间的语言，为字问题可判定的群这一情形提供另一种更抽象的证明。首先，我们论证 $\phi^{-1}(X_p)$ 是一个有效子移位。我们将使用以下基本事实，这些事实可见于 [4]（另见 [3, 6]）。

- 一个全移位 $\mathcal{C}^G$ 可以自然地赋予可计算度量空间结构。
- 两个可计算度量空间之间的函数是可计算的，当且仅当每个有效闭集的原像都是有效闭集（有效闭集是闭集的有效对应概念，它们不需要是移位不变的）。
- $\phi\colon \mathcal{B}^G \to \mathcal{A}^G$ 根据 Curtis-Lyndon-Hedlund 定理，这是一个可计算函数。

[1]我们指出，如果采用限制较少的定义，这对于任意有限生成群并不成立。 n of e有效子移位 [4, 命题 7.1], 但按照此处使用的定义，这一般都成立。

- 子移位 $Z \subset \mathcal{C}^G$ 是有效的，当且仅当它是 $\mathcal{C}^G$ 的有效闭子集。

因此，我们可以如下推理：由于 X_p 是有效子移位，它是一个有效闭集，因而其可计算原像 $\phi^{-1}(X_p)$ 是有效闭集，所以它是一个有效子移位。但显然 $Y_p = Y \cap \phi^{-1}(X_p)$，而两个有效子移位的交仍然有效，因此我们得出结论：Y_p 是一个有效子移位。最后，所有中间步骤都以可计算的方式依赖于 p，因此我们得到一个算法：给定 q 和 p，当且仅当 $q \in \mathscr{L}^c(Y_p)$ 时，该算法才会停机。□

众所周知，具有可判定语言是一种比具有零 Medvedev 度更强的性质。这是 Π_1^0 类背景下的一个经典结果。我们没有在文献中找到一种可直接应用于递归呈示群上的子移位的表述，因此为完整起见，我们给出一个一般性论证。

命题 3.3。 *具有可判定语言的子移位在每个有限生成群上都具有零 Medvedev 度。*

证明。 令 $X \subset \mathcal{A}^G$ 为一个子移位，并令 $\hat{X} \subset \mathcal{A}^{F(S)}$ 为引理ˆ证明第一段中定义的子移位3.2。那么 $m(X) = m(X)$ 根据定义 [3, §3], 因此只需证明 $\hat{m}(X) = 0_{\mathfrak{M}}$。

给定一个图样 $p\colon F \to \mathcal{A}$ 其支撑为 $F \Subset F(S)$，记 $[p]$ 为柱集$\{x \in \mathcal{A}^{F(S)}\colon p \sqsubset x\}$。 $\mathscr{L}(X)$ 可判定这一假设，等价于如下陈述：给定一个图样 $p \in \mathcal{L}(\mathcal{A}^{F(S)})$，关系 $[p] \cap \hat{X} \neq \emptyset$ 是可判定的。于是，[11] 中的命题 2.3.2 证明了 $\hat{X}$ 具有一个由可计算构型组成的稠密子集（应用该结果时，首先要赋予 $\mathcal{A}^{F(S)}$ 以 [4, §3]中定义的可计算度量空间结构）。因此，$\hat{X}$ 至少有一个可计算构型，从而 $m(X) = 0_{\mathfrak{M}}$。□

命题 3.4。 *设 G是一个递归呈示群， $\mathcal{A}$是一个有限字母表。 $S(\mathcal{A}^G)$ 中的每个具有非零 Medvedev 度的 SFT 都有一个不含射影孤立子移位的邻域。*

证明。设 $S(X) = \{Y \in S(\mathcal{A}^G)\colon Y \subset X\}$。 X 是 SFT 这一事实意味着， $S(X)$ 是 $S(\mathcal{A}^G)$ 的开子集。参见 [6] 中的命题 6.3 或 [14]中的引理 2.3。由于 Medvedev 度在包含关系下非递减，根据命题 3.1], , 每个子移位 $Y \in S(X)$ 都满足$m(Y) \geq m(X)$，特别地， $m(Y) > 0_{\mathfrak{M}}$。另一方面，由命题 3.1 和命题 3.3 可知，射影孤立子移位具有零 Medvedev 度。因此，$S(X)$ 不包含射影孤立子移位。□

定理 *1.1*的证明。 由 [8, 定理 A] 可知， G 具有 STRP，当且仅当射影孤立子移位在 $S(\mathcal{A}^G)$ 上对每个有限字母表 $\mathcal{A}$ 都是稠密的。如果 G 存在一个 SFTX，其 $m(X) > 0_{\mathfrak{M}}$ 定义在字母表 $\mathcal{A}$上，则由命题 3.4 可知， $S(\mathcal{A}^G)$ 具有一个不含射影孤立子移位的开集。□

4. Further remarks and questions

Medvedev 度与 STRP 之间的联系乍看之下颇为引人入胜。然而，这一事实有一个相当简单的解释，它与 Medvedev 度的抽象性质有关：

（1）Medvedev 度在包含关系下不会增加。（2）射影孤立子移位具有最小的 Medvedev 度（假设该群是递归呈现的）。

任何定义在 $S(\mathcal{A}^G)$ 上且具有这些性质的函数，都足以证明定理 1.1。事实上，我们来陈述一个更精确的结果。

命题 4.1。 设 G 是一个有限生成群，并设 $\mathcal{A}$ 满足 $|\mathcal{A}|\geq 2$。设 $(\mathcal{P},\leq)$ 是一个具有极小元 $0_{\mathcal{P}}$ 的偏序集，并设 $\mathcal{I}\colon S(\mathcal{A}^G)\to\mathcal{P}$ 是一个满足以下两个性质的函数。

(1) $\mathcal{I}$ 在包含关系下单调不减。也就是说， $X\subset Y\Rightarrow\mathcal{I}(X)\geq\mathcal{I}(Y)$ 对于 $X,Y\in S(\mathcal{A}^G)$成立。

(2) $\mathcal{I}(X)=0_{\mathcal{P}}$ 对于每个射影孤立的 $X\in S(\mathcal{A}^G)$均成立。

如果存在一个 *SFT* $X\in S(\mathcal{A}^G)$ 使得 $\mathcal{I}(X)\neq 0_{\mathcal{P}}$，那么 $S(X)=\{Y\in S(\mathcal{A}^G):Y\subset X\}$ 是 X 的一个邻域，其中不含射影孤立子移位，并且 G 不具有 *STRP*。

证明。 这由 [8, 定理 A] 以及命题 3 中使用的相同推理可得。 4. □

这一观察解释了为什么 Medvedev 度已被证明是研究 STRP 时的有用工具。至少对于可 amenable 群而言，拓扑熵及其他相关的常用不变量在包含关系下呈现出相反的行为。

自然会想到，本文所使用的技术是否能够应用于递归呈示群之外的情形。作为一个测试案例，我们提出以下问题。

问题 4.2。 是否每个两个有限生成无限群的直积都不具有 *STRP*?

一个自然的方向是定义 Medvedev 度的相对化版本，其中将该群的字问题用作预言机，然后重复 [3, 定理 5.6] 的证明，以获得相对于该群字问题的 Medvedev 度非平凡的 SFT。

Acknowledgements

感谢 Michal Doucha 通过富有成果的通信交流促成了定理 1.1 的证明，也感谢 Sebastián Barbieri 慷慨地校对了本文的初稿。作者ได้รับ了来自雅盖隆大学战略计划卓越倡议下优先研究领域 SciMat 的资助。

References

[1] N. Aubrun、S. Barbieri 和 M. Sablik。有限生成群上子移位的有效性概念。*Theoretical Computer Science*，661：35–55，2017。[2] N. Aubrun 和 J. Kari。Baumslag-Solitar 群上的铺砌问题。*Electronic Proceedings in Theoretical Computer Science* 128 35 46, 2013，：–9 月。。[3] S. Barbieri 和 N. Carrasco-Vargas。群上子移位的梅德韦杰夫度，2024 年 6 月。[4] S. Barbieri 、 N. Carrasco-Vargas 和 C. Rojas。超越零维的有效动力系统与 SFT 的因子。 *Ergodic Theory and Dynamical Systems*，45(5)：1329–1369，2025年5月。[5] L. Bartholdi 和 V. Salo。灯笼群上的移位，2024年2月。[6] N. Carrasco-Vargas。 *Subshifts on groups and computable analysis*。博士论文，智利宗座天主教大学，2024年。arXiv:2505.14247。[7] T. Ceccherini-Silberstein 和 M. Coornaert。元胞自动机与群。载于 *Cellular automata*，第221–238页。纽约：Springer，第2版，2018年。[8] M. Doucha。强拓扑 Rokhlin 性质、跟踪性质与可数群的符号动力系统。*Journal of the European Mathematical Society*，2024年12月。[9] W. Hanf。平面的非递归铺砌 I。 *The Journal of Symbolic Logic*，39(2)：283–285，1974年。[10] M. Hochman。康托尔集上 $\mathbb{Z}^d$ *Transactions of the American Mathematical* 作用 *Society* 364 3 1127 1143, 2012 的 Rohlin 性质。，（）：–3月。。[11] M. Hoyrup。弱可计算对象的泛性。 *Theory of Computing Systems*，60(3)：396–420，2017年4月。[12] A. S. Kechris 和 C. Rosendal。齐性结构的湍流、amalgamation 与泛自同构。 *Proceedings of the London Mathematical Society*，94(2)：302–350，2007年3月。[13] D. Myers。平面的非递归铺砌 II。 *Journal of Symbolic Logic*，39(2)：286–294，1974年6月。[14] R. Pavlov 和 S. Schmieding。泛子移位的结构。 *Nonlinearity*，36(9)：4904–4953，2023年9月。

[15] S. G. Simpson。二维有限型子移位的梅德韦杰夫度。 *Ergodic Theory and Dynamical Systems* 34 2 679 688, 2014 , () : –。

Faculty of Mathematics and Computer Science, Jagiellonian University, Kraków, Poland
Email address: nicanor.vargas@uj.edu.pl