arXiv:2601.03503v1 [math.RA] 7 Jan 2026

分次矩阵代数的直极限

MIKHAIL KOCHETOV 和 FELIPE YASUMURA

Abstract. 有限维半单结合代数的直极限，是一类重要 C^*-代数的纯代数对应物。众所周知，在代数闭域 $\mathbb{F}$上，这类极限可通过其 K_0 群分类。近来，Hazrat 针对阿贝尔群 G发展了这一理论的 G-分次版本，引入了 $\mathbb{Z}G$-模 $K_0^{\rm gr}$，并证明它们可以对某些直极限进行分类。本文研究赋予有限阿贝尔群 G分次的 $\mathbb{F}$ 矩阵代数的直极限。具体而言，我们明确描述这类极限的 $K_0^{\rm gr}$ 模，给出矩阵代数带有初等分次的直极限"吸收"一个分次除代数的条件，并说明如何利用这一点对带有任意 G-分次的矩阵代数直极限进行分类。

1. Introduction

有限维代数的直极限与泛函分析中 C^*-代数的理论有着重要联系（例如参见 [5, 6]），也启发了纯代数方面的研究（例如参见 [4, 16]）。复半单结合代数的直极限情形（即 over$\mathbb{C}$ 上矩阵代数的有限直积）通过其群 K_0得到了很好的理解，这要归功于 Bratteli [5] 和 Elliott [9]的奠基性工作。在泛函分析的背景下，同态被要求保持作为 C^*-代数定义一部分的对合，但 [9] 中已经指出，对合在直极限的分类中并不起作用；事实上，在任意代数闭域上，该分类都是相同的。

考虑带有某种附加结构（如群作用或群分次）的代数的直接极限，也是很自然的。文献 [10], 根据作用所满足的某些技术性限制，用 K_0 群对带有紧群作用的有限维 C^*代数的直接极限进行了分类；后来，文献 [15]取消了这些限制，但代价是需要考虑更复杂的不变量（即一整族 K_0 群）。Hazrat 在文献 [11] 中为由阿贝尔群 G分次的结合代数 $\mathcal{A}$ 引入了 K_0 群的一种版本（另见文献 [12]，其中讨论了带有将度取反的对合的分次代数），其结构比未分次情形更丰富： $K_0^{\rm gr}$ （$\mathcal{A}$）不只是一个阿贝尔群，还是一个 $\mathbb{Z}G$-模。文献 [11, 第 5] 章证明，该模（配备偏序和序单位）能够分类系数取自固定分次域的矩阵代数有限直积的直接极限。本文关注的是配备 G-分次的有限维单结合代数的直接极限。

M.K. 得到了加拿大自然科学与工程研究委员会（NSERC）的 Discovery Grant 2018-04883 资助。F.Y. 得到了 Fapesp 资助项目 2024/14914-9 的支持。

不同类型的有限维代数（结合代数、李代数、Jordan 代数等）上的各种群分次已得到广泛研究，尤其是有限维单代数的情形；例如参见专著 [7] 及其中的参考文献。特别地，文献 [2]描述了代数闭域 $\mathbb{F}$ （特征为零）上矩阵代数 $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ 的分次。尽管无限维代数上的特定分次屡见不鲜（例如 Kac–Moody 李代数理论及其表示中的权格分次），但在无限维背景下，对任意群分次的分类尚未受到太多关注。值得一提的是，文献 [1], 对有限秩算子代数上的 G-分次进行了分类，例如有限支撑矩阵代数 $\mathrm{M}_\infty(\mathbb{F})$；该代数此前已在文献 [3] 中研究。该文还分类了相关的有限支撑单李代数上的分次。文献 [14], 则对某些可三角化算子代数上的 G-分次进行了分类。

我们希望研究定义在局部有限维单代数上的 G-分次，即满足以下条件的结合代数：其中每个有限生成子代数都包含于某个有限维单子代数中。这些分次自然地作为有限维单（结合）代数上分次的直接极限出现。本文将重点研究这类代数的含幺嵌入的直接极限；在某种意义上，这与 $M_\infty(\mathbb{F})$ 的情形正好相反，参见 Baranov 和 Zhilinskii [4]。根据韦德伯恩定理的分次版本，配备 G-分次的有限维单代数 $\mathcal{R}$ 同构于一个分次除代数 $\mathcal{D}$上的矩阵代数。由于 $\mathcal{D}$ 不一定是交换的，而且分次代数同态 $\mathcal{R} \to \mathcal{R}'$ 不一定保持相应的分次除代数，因此上文提到的 Hazrat 结果一般不适用，而仅适用于所谓的初等分次。我们的目标有两个：对于有限阿贝尔群 G，在同构意义下对这类分次代数的直接极限进行分类（见定理 22），并明确描述该分类中出现的分次 K_0 群。这样的描述之所以可能，是因为我们考虑的是有限维单 代数的直接极限：在无分次的情形下，该极限的 K_0 群是 $\mathbb{Q}$（带自然序）的一个加法子群；而在我们的情形中，我们证明它是某个商 G 的 $\mathbb{Z}G$- 子模，其中 G 是 G 的一个商（见 ?? 14?? 18 ）。这一描述使我们能够在当前框架下给出 Hazrat 结果的更明确形式（见定理 16），并给出判定哪些直接极限可由初等分次得到的判据（见定理 19）。

2. Preliminaries

设 $\mathbb{F}$ 为一个域， G 为一个阿贝尔群。本文所讨论的代数均为结合的、含幺的，且定义在 $\mathbb{F}$ 上。后文将假设 $\mathbb{F}$是代数闭的，且 G 是有限的，但本节的大多数结果并不需要这些假设。

2.1. 分次代数与分次模。 现在我们回顾一些关于分次代数的基本概念，例如可见于专著 [7]的第 1 章和第 2 章。代数 $\mathcal{A}$ 上的 G-分次 Γ 是将其分解为向量子空间 $\mathcal{A} = \bigoplus_{g\in G} \mathcal{A}_g$ 的直和，使得 $\mathcal{A}_g\mathcal{A}_h \subseteq \mathcal{A}_{gh}$对所有 $g,\ h \in G$都成立。 G-分次代数是带有固定 G-分次的代数，即一对 $(\mathcal{A},\ \Gamma)$；在不会引起混淆时，我们将其记为 $\mathcal{A}$ 。每个子空间 $\mathcal{A}_g$ 中的非零元素称为齐次元素，我们将 $a \in \mathcal{A}_g \setminus \{0\}$ 记作 $\deg a = g$ 。我们允许某些 $\mathcal{A}_g$ 为零，因此将分次的支撑 定义为

记作 Supp Γ 或 Supp $\mathcal{A}$的分次，是所有满足 $\mathcal{A}_g \neq 0$的 $g \in G$ 构成的集合。若子空间 $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{A}$ 的各交集 $\mathcal{B} \cap \mathcal{A}_g$、$g \in G$的直和，则称其为分次的。特别地，我们可以谈论分次子代数和分次理想。若分次代数 $\mathcal{A}$（其乘积非零）除 0 和 $\mathcal{A}$之外没有其他分次理想，则称其为分次单。

给定两个 G分次代数 $\mathcal{A} = \bigoplus_{g\in G} \mathcal{A}_g$ 和 $\mathcal{B} = \bigoplus_{g\in G} \mathcal{B}_g$，分次代数的同态 $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 是一个代数同态 $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$，满足$f(\mathcal{A}_g) \subseteq \mathcal{B}_g$，对每个 $g \in G$均成立。如果 f 是一个同构，则称 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 作为分次代数同构（或 G-分次同构），并记作 $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$。

如果 $\alpha : G \to H$ 是一个群同态，那么代数$\mathcal{A}$ 上的任意 G分次 Γ 都会在 $\mathcal{A}$ 上诱导出一个 H分次，其齐次分量定义为 $\mathcal{A}_h := \bigoplus_{g\in\alpha^{-1}(h)} \mathcal{A}_g$，对所有 $h \in H$ 均成立。这一分次记为 ${}^{\alpha}\Gamma$，而H分次代数 $(\mathcal{A}, {}^{\alpha}\Gamma)$ 记为 ${}^{\alpha}\mathcal{A}$。

分次除代数是一个 G 分次含幺代数，其中每个非零齐次元素都是可逆的。在代数闭域 $\mathbb{F}$ 上的有限维分次除代数 $\mathcal{D}$同构于扭群代数 $\mathbb{F}^{\sigma}T$，其自然的 T 分次视为 G 分次，其中 $T \leq G$ 是 $\mathcal{D}$ 的支撑，且 $\sigma : T \times T \to \mathbb{F}^{\times}$ 是关于 T 对基域乘法群 $\mathbb{F}^{\times}$ 的平凡作用的 2-余循环。因此，这些分次除代数的同构类由数对 $(T, [\sigma])$ 参数化，其中 $[\sigma]$ 是 σ 在 $H^2(T, \mathbb{F}^{\times})$ 中的上同调类。此外，$\mathcal{D}$ 作为未分次代数是单代数，当且仅当 σ 是非退化的；由于我们假设 G 是阿贝尔群，已知在此情形下，T 是若干循环群平方的直积。

一个 G-分次左 $\mathcal{A}$-模是一个左 $\mathcal{A}$-模 $\mathcal{V}$，并赋有一个分解$\mathcal{V} = \bigoplus_{g\in G} \mathcal{V}_g$，满足 $\mathcal{A}_g\mathcal{V}_h \subseteq \mathcal{V}_{gh}$，对所有 $g, h \in G$ 均成立。给定一个 G-分次左$\mathcal{A}$-模 $\mathcal{V}$ 和一个元素 $g \in G$，将 $\mathcal{V}$ 按 g进行（右）移位，记作 $\mathcal{V}^{[g]}$，所得左 $\mathcal{A}$-模 $\mathcal{V}$ 赋有如下 G-分次：$\mathcal{V}^{[g]}_h := \mathcal{V}_{hg^{-1}}$，对每个$h \in G$均成立。注意，$\mathcal{V}^{[g]}$ 也是一个 G-分次左 $\mathcal{A}$-模。分次右模及其移位的定义类似。任何分次除代数上的分次模都存在由齐次元素构成的基。

给定一个 G-分次代数 $\mathcal{A}$和一个 n-元组 $\gamma = (g_1, \ldots, g_n) \in G^n$，我们可在 $\mathrm{M}_n(\mathcal{A})$ 上定义一个G-分次，规定

$$\deg E_{ij}(a) := g_i(\deg a)g_j^{-1} \quad \text{for nonzero homogeneous } a \in \mathcal{A},$$

其中 $E_{ij}(a)$ 表示一个矩阵，其位置 (i, j) 处的元素为 a，其余元素均为 0。特别地，对于 $\mathcal{A} = \mathbb{F}$，我们可在 $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ 上定义分次，称为初等分次。

如果我们对 γ的元素进行置换，就会得到一个同构的 G-分次。因此，考虑 G 中与 γ对应的多重集是方便的，即映射$x_\gamma : G \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$，其中

$$x_\gamma(g) = |\{i \mid g_i = g\}|.$$

多重集 x 的大小为 $|x| := \sum_{g\in G} x(g)$。我们称 x 为有限的，如果这个和是有限的。G 中的有限多重集可以解释为群半环 $\mathbb{Z}_{\geq 0}G$ 的元素，这样我们就可以将它们相乘。更确切地说，有限多重集 x 与元素 $\sum_{g\in G} x(g)g \in \mathbb{Z}_{\geq 0}G$ 对应。例如，若对所有 $g \neq e$ 都有 $x(e) = n$ 和 $x(g) = 0$，则得到元素 ne。我们将其记为 n，因为 e 是半环 $\mathbb{Z}_{\geq 0}G$ 的单位元。

对于 G 中大小为 n 的任意多重集 x，我们可以选取一个相应的 n 元组 γ，并在 $\mathrm{M}_n(\mathcal{A})$ 上定义一个 G 分次。由于所有 γ 的选择都会得到同构的 G 分次代数，我们将略去记号上的区别，统一用 $\mathrm{M}_x(\mathcal{A})$ 表示它们。例如，按此记号，$\mathrm{M}_n(\mathcal{A})$ 指的是分次完全由 $\mathcal{A}$ 给出的情形；当 $\mathcal{A} = \mathbb{F}$ 时，这就给出了平凡分次。容易验证，对于任意非零的 $x, y \in \mathbb{Z}_{\geq 0}G$，都有

$$\mathrm{M}_x(\mathrm{M}_y(\mathcal{A})) \cong \mathrm{M}_{xy}(\mathcal{A}).$$

我们还应注意到，由于假设 G 是阿贝尔的，G 分次代数 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 在 $\mathbb{F}$ 上的张量积通过如下定义成为 G 分次的：

$$\deg(a \otimes b) := (\deg a)(\deg b) \quad \text{for nonzero homogeneous } a \in \mathcal{A} \text{ and } b \in \mathcal{B}.$$

于是我们有 $\mathrm{M}_x(\mathcal{A}) \cong \mathrm{M}_x \otimes \mathcal{A}$，其中 $\mathrm{M}_x := \mathrm{M}_x(\mathbb{F})$。因此，

$$\mathrm{M}_x(\mathcal{A}) \otimes \mathrm{M}_y(\mathcal{B}) \cong \mathrm{M}_{xy}(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}).$$

现在，韦德伯恩定理的一个分次版本表明，任意有限维分次单结合代数都与分次右模 $\mathcal{V}$ 在分次除代数 $\mathcal{D}$ 上的端同态代数 $\mathrm{End}_{\mathcal{D}}(\mathcal{V})$ G 分次同构。$\mathrm{End}_{\mathcal{D}}(\mathcal{V})$ 上的分次通过规定一个非零线性映射 $f\colon \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ 在 g 次齐次，当且仅当对所有 $h \in G$ 都有 $f(\mathcal{V}_h) \subseteq \mathcal{W}_{gh}$ 来定义。固定一个由齐次元素组成的 $\mathcal{V}$ 有序基，该代数可以写成 $\mathrm{M}_x(\mathcal{D})$，其中 x 是由该基的元素的度组成的元组所确定的多重集。此外，分次除代数 $\mathcal{D}$ 在同构意义下是唯一确定的，而 x 在 $\mathbb{Z}_{\geq 0}(G/T)$ 中的像在移位意义下是唯一确定的，其中 $T = \mathrm{Supp}\ \mathcal{D}$。相较之下，对于这类分次矩阵代数的直极限，不能指定唯一的分次除代数，下面的例子说明了这一点。

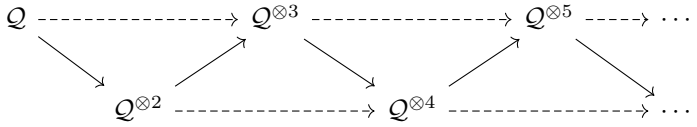
例 1。设 $\mathcal{Q} = \mathrm{M}_2(\mathbb{F})$ 配备如下由克莱因群 $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ 给出的分次。我们将矩阵

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ and } Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

分别赋予度 (1,0) 和 (0，1)，并且由于 $X^2 = I = Y^2$ 和 $XY = -YX$，此赋值在 $\mathcal{Q}$ 上定义了一个 $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$-分次，其分量为 $\mathcal{Q}_{(i,j)} =$ 张成空间$\{X^i Y^j\}$，对每个 $(i, j) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ 都成立。显然，这是一种除分次，因为它使 $\mathcal{Q}$ 成为分次除代数，其支撑为 $T = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$。于是，我们得到如下形式的含幺嵌入序列 $\mathcal{A} \to \mathcal{A} \otimes 1 \subseteq \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$，由 $a \mapsto a \otimes 1$ 给出：

$$\mathcal{Q} \longrightarrow \mathcal{Q} \otimes \mathcal{Q} \longrightarrow \mathcal{Q} \otimes \mathcal{Q} \otimes \mathcal{Q} \longrightarrow \cdots$$

记 $\mathcal{Q}^{\otimes n} = \mathcal{Q} \otimes \cdots \otimes \mathcal{Q}$（$n$ 个 $\mathcal{Q}$ 的张量积）。该序列有两个显然的子序列：



而该序列的直极限与这两个子序列各自的直极限同构。容易看出，$\mathcal{Q}^{\otimes 2} \cong \mathrm{M}_x(\mathbb{F})$，其中 x 是 $\mathbb{Z}_{\geq 0}T$ 中 T 各元素的和。因此，我们得到 $\mathcal{A} \otimes \mathcal{Q} \cong \mathcal{A}$，其中 $\mathcal{A}$ 是.....的直极限

$$\mathrm{M}_x(\mathbb{F}) \longrightarrow \mathrm{M}_x(\mathbb{F})^{\otimes 2} \longrightarrow \mathrm{M}_x(\mathbb{F})^{\otimes 3} \longrightarrow \cdots.$$

我们将在定理 19 中看到，在什么条件下，分次除法部分会在极限中“消失”。

2.2. **分次布劳尔群**。 固定一个阿贝尔群 G。与经典布劳尔群类似， $\mathbb{F}$的 G分次布劳尔群 （记作 $\mathrm{Br}_G(\mathbb{F})$）定义为（有限维）中心单 $\mathbb{F}$代数的等价类集合，这些代数现均赋予 G-分次，群运算由张量积诱导： $[\mathcal{A}][\mathcal{B}] := [\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}]$。等价关系定义如下：$\mathcal{A}\sim\mathcal{B}$ 当且仅当对于某个 $0\neq x,\ y\in\mathbb{Z}_{\geq 0}G$，有 $\mathrm{M}_x(\mathcal{A})\ \cong\ \mathrm{M}_y(\mathcal{B})$。特别地，单位元 $[\mathbb{F}]$由赋予初等分次的 $\mathbb{F}$上的矩阵代数组成。逆元的存在性可用通常的方法证明：若中心单代数 $\mathcal{A}$ 赋有 G-分次，则相同的齐次分量在反代数 $\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$上定义一个分次，并且作为分次代数有 $\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}^{\mathrm{op}}\cong\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{A})$，因此 $[\mathcal{A}^{\mathrm{op}}]$是 $\mathrm{Br}_G(\mathbb{F})$ 中 $[\mathcal{A}]$ 的逆元。

由分次 Wedderburn 定理可知，每个等价类都包含一个分次除代数，且该代数在同构意义下唯一。因此，$\mathrm{Br}_G(\mathbb{F})$ 使我们能够在计算张量积时追踪除法部分：若 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{A}'$ 是赋予了 G-分次的中心单代数，则 $\mathcal{A}\cong\mathrm{M}_x(\mathcal{D})$ 和 $\mathcal{A}'\cong\mathrm{M}_{x'}(\mathcal{D}')$，其中 $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{D}'$ 是分次除代数，并且有

$$\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}'=\mathrm{M}_{xx'y}(\mathcal{E}),$$

其中 $\mathcal{E}$ 是由 $[\mathcal{E}]=[\mathcal{D}][\mathcal{D}']$ 确定的分次除代数，而 $y\in\mathbb{Z}_{\geq 0}G$ 满足 $\mathcal{D}\otimes\mathcal{D}'\cong\mathrm{M}_y(\mathcal{E})$。

一般而言，分次布劳尔群 $\mathrm{Br}_G(\mathbb{F})$ 较为复杂，因为它包含经典布劳尔群 $\mathrm{Br}(\mathbb{F})$。若 $\mathbb{F}$ 是代数闭域且 G 有限，则 $\mathrm{Br}_G(\mathbb{F})\cong\mathrm{Hom}(\hat{}G\wedge 2,\ \mathbb{F}^\times)$（例如参见 [8]）。这里，$\hat{}G$ 是 G 的对偶群，可定义为 $\mathrm{Hom}(G,\ \mathbb{Q}/\mathbb{Z})\cong\mathrm{Hom}(G,\ \mathbb{C}^\times)$；而楔号表示阿贝尔群范畴（作为 $\mathbb{Z}$-模）中的外幂。我们还注意到，由于在此情形下，分次除代数 $\mathcal{D}$ 的非零分量是一维的，因此有

$$\mathcal{D}\otimes\mathcal{D}^{\mathrm{op}}\cong\mathrm{M}_{x_T}(\mathbb{F}),\tag{1}$$

其中 $T=\operatorname{Supp}\mathcal{D}$ 且 $x_T:=\sum_{t\in T}t\in\mathbb{Z}_{\geq 0}G$。

2.3. **分次 K_0 群**。现在我们将回顾 K_0群的分次版本的基础知识，记作 K_0^{gr} ；当需要指出分次群 G 时，则记作 K_0^G。以下内容依据 Hazrat [11] 的著作。设 $\mathcal{A}$ 是一个含幺的 G-分次代数。分次投射模是分次模范畴中的投射对象。众所周知，分次投射模等同于带有分次的投射模（例如，参见 [11, 命题 1.2.15]）。

我们考虑有限生成、投射且分次的（左） $\mathcal{A}$-模的同构类集合，记作 $K_0^{\mathrm{gr}}(\mathcal{A})^+$。给定 $[P],[Q]\in K_0^{\mathrm{gr}}(\mathcal{A})^+$，定义 $[P]+[Q]:=[P\oplus Q]$。该运算定义良好，并使 $K_0^{\mathrm{gr}}(\mathcal{A})^+$ 成为交换幺半群。将其群完备化（亦称格罗滕迪克群）记作 $K_0^{\mathrm{gr}}(\mathcal{A})$，即所有 $[P]-[Q]$ 关于$[P],[Q]\in K_0^{\mathrm{gr}}(\mathcal{A})^+$ 的等价类构成的集合（例如，参见 [11, 第 3.1 节1]）。于是，$(K_0^{\mathrm{gr}}(\mathcal{A})\ K_0^{\mathrm{gr}}(\mathcal{A})^+)$ 是一个偏序群，其中对 $x,y\in K_0^{\mathrm{gr}}(\mathcal{A})$，定义 $x\geq y$ 当且仅当 $x-y\in K_0^{\mathrm{gr}}(\mathcal{A})^+$ （例如，参见 [11, 例 3.6.3]）。

与普通的 K_0 群相比，新特性在于，通过令每个 $g\in G$充当移位： $g[P]:=[P^{[g]}]$， $K_0^{\mathrm{gr}}(\mathcal{A})$ 具有 $\mathbb{Z}G$-模结构。

此外， $K_0^{\mathrm{gr}}(\mathcal{A})^+$ 在 $\mathbb{Z}_{\geq 0}G$ 的作用下是不变量，因此 $K_0^{\mathrm{gr}}(\mathcal{A})$ 是一个部分有序 $\mathbb{Z}G$-模。

秩为 1 的自由模的等价类 $[\mathcal{A}]$ 是 $K_0^{\mathrm{gr}}(\mathcal{A})$ 中的一个特殊元素，称为 序单位。

我们将偏序、 $\mathbb{Z}G$-作用和序单位纳入 $K_0^{\mathrm{gr}}(\mathcal{A})$ 的定义中，该记号表示三元组 $(K_0^{\mathrm{gr}}(\mathcal{A})\ K_0^{\mathrm{gr}}(\mathcal{A})^+,\ [\mathcal{A}])$。从 $(K,\ K^+,\ x_0)$ 到 $(K',\ K'^+,\ x_0')$ 的态射是指一个 $\mathbb{Z}G$-模同态 $\varphi:\ K\to K'$，满足 $\varphi(K^+)\subseteq K'^+$ 且 $\varphi(x_0)= x_0'$。于是， K_0^{gr} 成为一个函子，并且已知它与直极限 [11, 定理 3.2.4] 交换。

事实证明，这个函子足以分类某些“分次矩阵代数”的直接极限，即形如以下形式的 G-分次代数

$$\mathrm{M}_{x_1}(\mathcal{C})\times\cdots\times\mathrm{M}_{x_t}(\mathcal{C}),$$

其中 x_1、.....、 $x_t\in\mathbb{Z}_{\geq 0}G$ 和 $\mathcal{C}$ 是一个固定的交换分次除代数。 G-分次超矩阵 $\mathcal{C}$-代数是含幺 $\mathcal{C}$-线性嵌入所构成的矩阵型 $\mathcal{C}$-代数的直极限（参见 [11, 定义 5.2.1]）。于是，根据 [11, 定理 5.2.4]，，两个 G-分次超矩阵 $\mathcal{C}$-代数 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{A}'$ 同构，当且仅当三元组 $(K_0^{\mathrm{gr}}(\mathcal{A})\ K_0^{\mathrm{gr}}(\mathcal{A})^+,\ [\mathcal{A}])$ 与 $(K_0^{\mathrm{gr}}(\mathcal{A}')\ K_0^{\mathrm{gr}}(\mathcal{A}')^+,\ [\mathcal{A}'])$ 同构。这可以视为 Elliot 结果的分次版本。

2.4. **分次矩阵代数直极限的预备知识**。我们从一个著名的直极限同构判据的分次代数版本开始（例如参见 [4, 命题 3.1]）：

引理 2. 考虑有限生成（分次）代数的直系 $(\mathcal{A}_j,\iota_{ji})$ 和 $(\mathcal{A}'_j,\iota'_{ji})$，其中 $j\in\mathbb{N}$，且 $\iota_{ji}:\ \mathcal{A}_i\to\mathcal{A}_j$ 和 $\iota'_{ji}:\ \mathcal{A}'_i\to\mathcal{A}'_j$ 是嵌入。那么，$\varinjlim(\mathcal{A}_j,\iota_{ji})\cong\varinjlim(\mathcal{A}'_j,\iota_{ji})$ 当且仅当存在子序列 $\{j_k\},\ \{j'_k\}$ 以及嵌入 $\varepsilon_k:\mathcal{A}_{j_k}\to\mathcal{A}'_{j'_k},\ \varepsilon'_k:\mathcal{A}'_{j'_k}\to\mathcal{A}_{j_{k+1}}$，使得

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathcal{A}_{j_1} & \xrightarrow{\iota_{j_2,j_1}} & \mathcal{A}_{j_2} & \xrightarrow{\iota_{j_3,j_2}} & \mathcal{A}_{j_3} & \xrightarrow{\iota_{j_4,j_3}} & \cdots \\
\downarrow{\scriptstyle\varepsilon_1} & \nearrow{\scriptstyle\varepsilon'_1} & \downarrow{\scriptstyle\varepsilon_2} & \nearrow{\scriptstyle\varepsilon'_2} & \downarrow{\scriptstyle\varepsilon_3} & \nearrow{\scriptstyle\varepsilon'_3} & \\
\mathcal{A}'_{j'_1} & \xrightarrow{\iota'_{j'_2,j'_1}} & \mathcal{A}'_{j'_2} & \xrightarrow{\iota'_{j'_3,j'_2}} & \mathcal{A}'_{j'_3} & \xrightarrow{\iota'_{j'_4,j'_3}} & \cdots
\end{array}$$

若两个嵌入 $\iota,\iota':\ \mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 是 G-分次代数的嵌入，则称它们等价，如果$\iota'=\mathrm{Int}(b)\iota$，其中 $b\in\mathcal{B}$ 是齐次可逆元，且$\mathrm{Int}(b):\ x\mapsto bxb^{-1}$是由 b定义的 $\mathcal{B}$ 的内自同构。（由于我们假设 G 是阿贝尔的，这个内自同构保持度。）

引理 3。 设 $(\mathcal{A}_j,\iota_{ji})$ 是一个分次结合含幺代数的直系，其中每个 ι_{ji} 都是含幺嵌入。给定 $(\mathcal{A}_j,\iota'_{ji})$，其中 ι'_{ji} 等价于 $\iota_{ji},\forall i,j\in\mathbb{N}$，则$\varinjlim(\mathcal{A},\iota_{ji})\cong\varinjlim(\mathcal{A},\iota'_{ji})$。

证明。 考虑齐次可逆元 $a_i\in\mathcal{A}_i,\ i\geq 2$，使得$\iota'_{i,i-1}=\mathrm{Int}(a_i)\iota_{i,i-1}$。我们递归地定义自同构 $\varphi_k:\ \mathcal{A}_k\to\mathcal{A}_k:\ \ \varphi_1=\mathrm{id}$，且 $\varphi_k=\mathrm{Int}(\prod_{i=2}^{k}\iota_{k,i}(a_i))$，其中 $k>1$。于是，$\iota'_{k+1,k}\varphi_k=\varphi_{k+1}\iota_{k+1,k},\ \forall k$。这立即推出 $\varinjlim(\mathcal{A},\iota_{ji})\cong\varinjlim(\mathcal{A},\iota'_{ji})$。□

回顾一下，诺特–斯科伦定理指出，中心单代数的每个自同构都是内自同构。在分次情形下，我们有 [13, 定理 2.1]:

如果 G 是一个阿贝尔群，并且 ψ 一个 G-分次单代数 $\mathcal{B}$的自同构是内自同构，那么对于某个齐次可逆 $b \in \mathcal{B}$，有 $\psi = \mathrm{Int}(b)$。这意味着诺特–斯科伦定理的分次版本：如果 $\mathcal{B}$ 是中心单的且为 G-分次的，那么 $\mathcal{B}$ 作为分次代数的任意自同构都具有 $\mathrm{Int}(b)$ 的形式，其中 b如上。

诺特–斯科伦定理的一个更一般的形式指出，中心单代数 $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 的所有含幺嵌入都通过 $\mathcal{B}$中的一个可逆元共轭。这在分次情形下并不成立。事实上，我们有

命题4. 设两个中心单代数 $\mathcal{A}$和 $\mathcal{B}$由阿贝尔群 G分次。设 $\iota\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$和 $\iota'\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$是分次代数的含幺嵌入。那么， ι 和 ι' 等价，当且仅当 中心化子$_{\mathcal{B}}(\iota(\mathcal{A}))$ $\cong$ 中心化子 $_{\mathcal{B}}(\iota'(\mathcal{A}))$ 作为分次代数同构。

证明。设 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{C}'$ 是上述中心化子，它们是$\mathcal{B}$ 的分次子代数（因为 G是阿贝尔的）。如果分次代数 $\mathcal{B}$ 的自同构 ψ 满足 $\iota' = \psi\iota$，那么它将 $\iota(\mathcal{A})$映到 $\iota'(\mathcal{A})$上，因此将 $\mathcal{C}$ 映到 $\mathcal{C}'$上，故 $\mathcal{C} \cong \mathcal{C}'$。反过来，设 $\theta\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ 是 G-分次代数的一个同构。根据双中心化子定理， $\mathcal{B}$ 的乘法给出一个同构$\tau\colon \iota(\mathcal{A}) \otimes \mathcal{C} \to \mathcal{B}$。显然，这是分次代数 G的一个同构。同理，我们得到 $\tau'\colon \iota'(\mathcal{A}) \otimes \mathcal{C}' \to \mathcal{B}$。设 $\eta\colon \iota(\mathcal{A}) \to \iota'(\mathcal{A})$是满足 $\iota' = \eta\iota$的唯一同构。那么， $\psi := \tau'(\eta \otimes \theta)\tau^{-1}$是 $\mathcal{B}$作为分次代数的一个自同构，并满足 $\iota' = \psi\iota$。最后，根据诺特–斯科伦定理的分次版本，对于某个齐次可逆元 $b \in \mathcal{B}$，有 $\psi = \mathrm{Int}(b)$。□

定义5. 设 $\mathcal{A}_i$ 是赋有 G-分次的中心单代数。保幺嵌入的直接极限

$$\mathcal{A}_0 \xrightarrow{\iota_1} \mathcal{A}_1 \xrightarrow{\iota_2} \mathcal{A}_2 \xrightarrow{\iota_3} \cdots,$$

记作 $\mathcal{A}_0 \otimes \bigotimes_{i=1}^{\infty} \mathcal{C}_i$，其中 $\mathcal{C}_i \cong \mathrm{Cent}_{\mathcal{A}_i}(\iota_{i-1}(\mathcal{A}_{i-1}))$。（鉴于定理 3 和定理 4，该极限仅取决于 $\mathcal{C}_i$的分次同构类。）

特别地，对于含幺嵌入 $\iota : \mathrm{M}_x(\mathbb{F}) \to \mathrm{M}_y(\mathbb{F})$，中心化子$\mathcal{C} = \mathrm{Cent}_{\mathrm{M}_y(\mathbb{F})}(\iota(\mathrm{M}_x(\mathbb{F})))$ 满足 $\mathrm{M}_y(\mathbb{F}) \cong \mathrm{M}_x(\mathbb{F}) \otimes \mathcal{C}$，因此代表 $\mathrm{Br}_G(\mathbb{F})$ 中的单位元： $\mathcal{C} \cong \mathrm{M}_a(\mathbb{F})$，其中某个元素 $a \in \mathbb{Z}_{\geq 0}G$ 将称为 ι 的标记。它在移位（即乘以 G 中的一个元素）意义下唯一确定，并且可选取使其满足 $xa = y$。反过来，任何满足 $xa = y$ 的元素 $a \in \mathbb{Z}_{\geq 0}G$都唯一确定一个嵌入 $\mathrm{M}_x(\mathbb{F}) \to \mathrm{M}_y(\mathbb{F})$，直至等价。

事实证明，函子 K_0^{gr} 恰好捕捉了嵌入的标签。为了说明这一点，我们需要以下关于分次矩阵代数的 K_0^{gr} 实现。

引理 6. 设 G 是一个阿贝尔群，且 $0 \neq x = \sum_{g \in G} x_g g \in \mathbb{Z}_{\geq 0}G$。那么，

$$K_0^{\mathrm{gr}}(\mathrm{M}_x(\mathbb{F})) \cong (\mathbb{Z}G, \mathbb{Z}_{\geq 0}G, \bar{x}),$$

其中 $\bar{x} := \sum_{g \in G} x_g g^{-1}$。此同构在移位意义下唯一。

证明。令 $n = |x|$，并取一个与 x 对应的 n 元组 $(g_1, \ldots, g_n)$。若我们通过将 g_i 赋给第 i 个标准基元素，在 $\mathbb{F}^n$ 上定义一个 G 分次，就得到一个分次 $\mathrm{M}_x(\mathbb{F})$-模，记作 $\mathcal{V} = \mathcal{V}_x$。事实上，在同构和移位意义下，这是唯一的分次简单 $\mathrm{M}_x(\mathbb{F})$-模。因此，任意有限生成的分次 $\mathrm{M}_x(\mathbb{F})$-模都是投射的，并且是若干个 $\mathcal{V}$ 的移位副本的有限直和。此外，当且仅当 $g = h$ 时， $\mathcal{V}^{[g]} \cong \mathcal{V}^{[h]}$。因此，存在一个同构

有序 $\mathbb{Z}G$-模 $\mathbb{Z}G \to K_0^{\mathrm{gr}}(\mathrm{M}_x(\mathbb{F}))$，它将 $1 \mapsto \mathcal{V}$ 映到相应元素。指定元素对应于正则表示 $\mathrm{M}_x(\mathbb{F})$，其

$$[\mathrm{M}_x(\mathbb{F})] = [\mathcal{V} \otimes \mathcal{V}^*] = [\bigoplus_{g \in G} x_g \mathcal{V}^{[g^{-1}]}] = \bar{x}[\mathcal{V}],$$

其中 $\mathcal{V}^* =$ 同态集$_{\mathbb{F}}(\mathcal{V},\ \mathbb{F})$。因此，$[\mathrm{M}_x(\mathbb{F})]$ 对应于 $\bar{x}$。 □

引理 7. 设 $\mathcal{A} = \mathrm{M}_x(\mathbb{F})$ 和 $\mathcal{B} = \mathrm{M}_y(\mathbb{F})$。若 $\iota\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 是一个标记为 a 的含幺嵌入，则三元组态射 $K_0^{\mathrm{gr}}(\iota) : K_0^{\mathrm{gr}}(\mathcal{A}) \to K_0^{\mathrm{gr}}(\mathcal{B})$ 对应于定理 6 的实现中乘以 $\bar{a}$。

证明。采用定理 6 的记号，我们有 $K_0^{\mathrm{gr}}(\mathcal{A}) \cong (\mathbb{Z}G,\ \mathbb{Z}_{\geq 0}G,\ \bar{x})$ 和$K_0^{\mathrm{gr}}(\mathcal{B}) \cong (\mathbb{Z}G,\ \mathbb{Z}_{\geq 0}G,\ \bar{y})$。现在，由于 $\mathcal{B} \cong \mathrm{M}_a(\mathbb{F}) \otimes \mathcal{A}$，我们得到

$$K_0^{\mathrm{gr}}(\iota)([\mathcal{V}_x]) := [\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{V}_x] = [\mathrm{M}_a(\mathbb{F}) \otimes \mathcal{V}_x] = [\mathcal{V}_a \otimes \mathcal{V}_a^* \otimes \mathcal{V}_x] = \bar{a}[\mathcal{V}_a \otimes \mathcal{V}_x] = \bar{a}[\mathcal{V}_y].$$

在定理 6 的实现中，这意味着 $K_0^{\mathrm{gr}}(\iota)(1) = \bar{a}$。 □

我们将用以下记号表示嵌入的标记：$\mathcal{A} \to \mathcal{B}$，它$a$ 诱导出 $K_0^{\mathrm{gr}}(\mathcal{A}) \xrightarrow{\bar{a}} K_0^{\mathrm{gr}}(\mathcal{B})$。

引理 8。设 $n \in \mathbb{N}$，且 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{A}'$ 是配备了 G-分次的矩阵代数序列的极限。那么 $\mathrm{M}_n \otimes \mathcal{A} \cong \mathrm{M}_n \otimes \mathcal{A}'$ 当且仅当 $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}'$。

证明。“若”方向显然。对于“唯若”方向，我们考虑一个嵌入 $\eta : \mathrm{M}_n \otimes \mathrm{M}_x(\mathcal{D}) \to \mathrm{M}_n \otimes \mathrm{M}_y(\mathcal{D}')$，其中 $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{D}'$ 是分次除代数。设 $\mathcal{C}$ 为 η像的中心化子。根据分次 Wedderburn 定理，对于某个 $a \in \mathbb{Z}_{\geq 0}G$ 及一个分次除代数 $\mathcal{E}$，有 $\mathcal{C} \cong \mathrm{M}_a(\mathcal{E})$。此外，元素 $[\mathcal{E}] \in \mathrm{Br}_G(\mathbb{F})$ 必须满足 $[\mathcal{D}'] = [\mathcal{D}][\mathcal{E}]$，即 $\mathcal{D} \otimes \mathcal{E} \cong \mathrm{M}_z(\mathcal{D}')$。由此可得 $\mathrm{M}_{ny}(\mathcal{D}') \cong \mathrm{M}_{nxaz}(\mathcal{D}')$，因此，如有必要，将 a 替换为其移位后，我们可以假设 $ny \equiv nxaz$ 模 $T' := \mathrm{Supp}\ \mathcal{D}'$。由于 $n \in \mathbb{N}$ 在 $\mathbb{Z}(G/T')$ 中不是零因子，因此有 $y \equiv xaz$ 模 T'，进而 $\mathrm{M}_y(\mathcal{D}') \cong \mathrm{M}_x(\mathcal{D}) \otimes \mathcal{C}$。令$\varepsilon : \mathrm{M}_x(\mathcal{D}) \to \mathrm{M}_y(\mathcal{D}')$ 为相应的嵌入。于是，根据定理 4，嵌入 η 等价于 $\mathrm{id}_{\mathrm{M}_n} \otimes \varepsilon$。

现在，令 $\mathcal{A} = \varinjlim(\mathcal{A}_j,\ \iota_{ji})$ 和 $\mathcal{A}' = \varinjlim(\mathcal{A}'_j,\ \iota'_{ji})$，并假设 $\mathrm{M}_n \otimes \mathcal{A} \cong \mathrm{M}_n \otimes \mathcal{A}'$。那么，根据定理 2，我们可以找到一系列嵌入

$$\mathrm{M}_n \otimes \mathcal{A}_{j_1} \xrightarrow{\eta_1} \mathrm{M}_n \otimes \mathcal{A}'_{j'_1} \xrightarrow{\eta'_1} \mathrm{M}_n \otimes \mathcal{A}_{j_2} \xrightarrow{\eta_2} \cdots$$

使得 $\eta'_k \eta_k = \mathrm{id} \otimes \iota_{j_{k+1}, j_k}$ and $\eta_{k+1} \eta'_k = \mathrm{id} \otimes \iota'_{j'_{k+1}, j'_k}$。第一段表明，对于某个齐次可逆元 $b'_1 \in \mathrm{M}_n \otimes \mathcal{A}'_{j'_1}$ 和一个嵌入$\varepsilon_1 : \mathcal{A}_{j_1} \to \mathcal{A}'_{j'_1}$，我们有 $\mathrm{id} \otimes \varepsilon_1 = \mathrm{Int}(b'_1)\eta_1$。然后，我们定义 $b'_k = (\mathrm{id} \otimes \iota'_{j'_k, j'_1})(b'_1), b_{k+1} = \eta'_k(b'_k)^{-1}$, $\mu'_k = \mathrm{Int}(b_{k+1})\eta'_k$ and $\mu_k = \mathrm{Int}(b'_k)\eta_k$。根据构造，我们有$\mu_1 = \mathrm{id} \otimes \varepsilon_1$, $\mu'_k \mu_k = \mathrm{id} \otimes \iota_{j_{k+1}, j_k}$ and $\mu_{k+1} \mu'_k = \mathrm{id} \otimes \iota'_{j'_{k+1}, j'_k}$。由归纳法可得 $\mu_k|_{\mathrm{M}_n} = \mathrm{id}$ 和 $\mu'_k|_{\mathrm{M}_n} = \mathrm{id}$，即对于某些嵌入 $\varepsilon_k : \mathcal{A}_{j_k} \to \mathcal{A}'_{j'_k}$ 和 $\varepsilon'_k : \mathcal{A}'_{j'_k} \to \mathcal{A}_{j_{k+1}}$，有 $\mu_k = \mathrm{id} \otimes \varepsilon_k$ and $\mu'_k = \mathrm{id} \otimes \varepsilon'_k$。因此 $\varepsilon'_k \varepsilon_k = \iota_{j_{k+1}, j_k}$and $\varepsilon_{k+1} \varepsilon'_k = \iota'_{j_{k+1}, j_k}$，故由定理 2 可知 $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}'$。□

3. Direct limits of matrix algebras with elementary gradings

本节中，我们考虑赋有初等 G-分次的矩阵代数的直接极限，其中 G是有限阿贝尔群；也就是说，这些是形如 $\mathcal{A} \cong \varinjlim \mathcal{A}_i$ 的 G-分次代数，其中 $\mathcal{A}_i = \mathrm{M}^{x_i}$。我们也可以将此极限写为 $\mathrm{M}_{x_0} \otimes \bigotimes_{i=1}^{\infty} \mathrm{M}^{a_i}$（见定理 5），其中 a_i 是 $\iota_i : \mathcal{A}_{i-1} \to \mathcal{A}_i$ 的一个标记。我们的目标是在 $\mathbb{Z}G$-模 $\mathbb{Q}G$ 中显式构造 $K_0^{\mathrm{gr}}(A)$，这有助于确定两个这样的直接极限何时同构（见定理 16）。此外，在下一节中，这一构造将帮助我们了解分次除代数何时被 $\mathcal{A}$“吸收”（如定理 1 所示）。

由于假设 G 是有限的，群环 $\mathbb{Q}G$ 是域的直积。更准确地说，$\mathbb{Q}G \cong \prod_j \mathbb{L}_j$，其中每个 $\mathbb{L}_j$ 都是$\mathbb{Q}$ 的一个（分圆）有限扩张，而 j 遍历由绝对伽罗瓦群 $\Gamma = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$通过后复合在$G \cong \mathrm{Hom}(G, \overline{\mathbb{Q}}^{\times})$上的作用所定义的轨道集 $\hat{G}/\Gamma$。事实上，$\mathbb{Q}G$ 可以视为代数中所有映射 $G \to \overline{\mathbb{Q}}$构成的代数在 Γ的通常作用下的不动点子代数，该作用由$(\sigma \cdot f)(\chi) := \sigma(f(\sigma^{-1} \cdot \chi))$给出，对所有 $\sigma \in \Gamma$、$\hat{} \hat{} f : G \to \overline{\mathbb{Q}}$以及 $\chi \in \hat{G}$均成立。

我们用 $e_j \in \mathbb{Q}G$和$\pi_j : \mathbb{Q}G \to \mathbb{L}_j$ 表示与这一直接积分解相对应的（本原）幂等元和投影。具体而言，对所有 $z \in \mathbb{Q}G$，有$\pi_j(z) = e_j z$，且$e_j = \sum_{\chi \in j} e_\chi$，其中$e_\chi = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g)^{-1} g$。此外，对于任意子集 $S \subseteq \hat{G}/\Gamma$，我们有 $\mathbb{Q}G$ 的一个理想 $\mathbb{L}_S := \prod_{j \in S} \mathbb{L}_j$ 以及相应的投影 $\pi_S : \mathbb{Q}G \to \mathbb{L}_S$。

对于任意 $z \in \mathbb{Q}G$，记 $\mathrm{supp}(z) := \{j \in \hat{G}/\Gamma \mid \pi_j(z) \neq 0\}$。

备注 9。 这里的 $\mathrm{supp}(z)$ 不应与群环 $\mathbb{Q}G$ 中元素 $z = \sum_{g \in G} z_g g$ 的通常支撑概念混淆，后者是集合 $\{g \in G \mid z_g \neq 0\}$。还应注意，$\mathrm{supp}(\bar{z}) = \mathrm{supp}(z)$，其中上横线表示在 $\mathbb{Q}G$ 上引入的自同构，该自同构见定理 6：$\bar{z} = \sum_{g \in G} z_g g^{-1}$。事实上，在 e_j 上，该自同构与复共轭的作用（复共轭是 Γ 的一个元素）一致，因此 $\bar{e}_j = e_j$。

定义 10。 如果一个极限 $\mathrm{M}_{x_0} \otimes \bigotimes_{i=1}^{\infty} \mathrm{M}^{a_i}$ 满足 $\mathrm{supp}\ a_i$ 是一个固定集合 S，与 i 无关，并且 $\mathrm{supp}\, x_0 \subseteq S$，则称其为标准形式 。

命题 11. 每个带有初等分次的矩阵代数的直极限，都同构于一个标准形式的极限。

证明. 考虑 $\mathrm{M}_{x_0} \otimes \bigotimes_{i=1}^{\infty} \mathrm{M}^{a_i}$，即以下序列的直极限：

$$\mathrm{M}_{x_0} \xrightarrow[a_1]{} \mathrm{M}_{x_1} \xrightarrow[a_2]{} \mathrm{M}_{x_2} \xrightarrow[a_3]{} \cdots,$$

其中 $x_i = x_0 \prod_{j=1}^{i} a_j$。令 $S_0 = \bigcap_{i=0}^{\infty} \mathrm{supp}(x_i)$，$S_n = \bigcap_{i=n}^{\infty} \mathrm{supp}(a_i)$，对于 $n \geq 1$，且 $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$。由于 $\mathrm{supp}\, x_i = \mathrm{supp}(x_0) \cap \bigcap_{j=1}^{i} \mathrm{supp}(a_j)$，因此我们有

$$S_0 = \mathrm{supp}(x_0) \cap S_1 \subseteq S_1 \subseteq S_2 \subseteq \cdots \subseteq S.$$

这些都是有限集，因此存在 N，使得对于所有 $n \geq N$，都有 $S_n = S$。在序列中略去 x_{N-1} 之前的项后，我们可以用 x_0' 替换 $x_0 := x_{N-1}$，并假设 $S_1 = S$。然后，对于每个 n，都存在 $m > n$，使得 $\mathrm{supp} \prod_{i=n+1}^{m} a_i = S$，因此我们可以取一个子序列

$$\mathrm{M}_{x_0'} \xrightarrow[a_1']{} \mathrm{M}_{x_{i_1}} \xrightarrow[a_2']{} \mathrm{M}_{x_{i_2}} \xrightarrow[a_3']{} \cdots$$

使得 $\mathrm{supp}(a_i') = S\ \forall i \geq 1$。 □

现在我们将看到，上文引入的集合 S 和 S_0 仅取决于该直极限的同构类。

命题 12. 如果 $\mathrm{M}_{x_0}\otimes\bigotimes_{i=1}^{\infty}\mathrm{M}_{a_i}\cong\mathrm{M}_{x_0'}\otimes\bigotimes_{i=1}^{\infty}\mathrm{M}^{a_i'}$，那么 $S_0=S_0'$ 和 $S=S'$。

证明。取子序列后，根据定理 2，我们可以假设

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathrm{M}_{x_0} & \longrightarrow & \mathrm{M}_{x_1} & \longrightarrow & \mathrm{M}_{x_2} & \longrightarrow & \cdots \\
\downarrow{\scriptstyle \varepsilon_0} & \nearrow{\scriptstyle \varepsilon_0'} & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon_1} & \nearrow{\scriptstyle \varepsilon_1'} & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon_2} & \nearrow{\scriptstyle \varepsilon_2'} & \\
\mathrm{M}_{x_0'} & \longrightarrow & \mathrm{M}_{x_1'} & \longrightarrow & \mathrm{M}_{x_2'} & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

由此可知，$\mathrm{M}_{x_0}\longrightarrow\mathrm{M}_{x_1}\longrightarrow\cdots$ 和 $\mathrm{M}^{x_0'}\longrightarrow\mathrm{M}^{x_1'}\longrightarrow\cdots$ 是 $\mathrm{M}_{x_0}\longrightarrow\mathrm{M}^{x_0'}\longrightarrow\mathrm{M}_{x_1}\longrightarrow\mathrm{M}^{x_1'}\longrightarrow\cdots$ 的子序列。从定理 11 的证明中可以清楚地看出，当我们取子序列时，S_0 和 S 不会改变，因此结论成立。□

现在，我们可以明确描述具有初等分次的矩阵代数直极限的 K_0^{gr} 群。

定义 13. 设 $\mathcal{A}=\mathrm{M}_{x_0}\otimes\bigotimes_{i=1}^{\infty}\mathrm{M}^{a_i}$ 处于标准形式。考虑 $\mathbb{L}_S:=\prod_{j\in S}\mathbb{L}_j$ 及其对应的投影 $\pi_S\colon\mathbb{Q}G\to\mathbb{L}_S$。记 $b_k=\prod_{k=1}^{i}\bar{a}_k$，并注意到，由于对所有 i 都有 $\mathrm{supp}(a_i)=S$，每个元素 $\pi_S(b_k)$ 在$\mathbb{L}_S$中都是可逆的。因此，我们可以定义 $\mathbb{L}_S$ 的以下子集：

$$K^+=K^+(\mathcal{A}):=\bigcup_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\pi_S(b_i)}\,\pi_S\left(\mathbb{Z}_{\geq 0}G\right),$$
$$K=K(\mathcal{A}):=\bigcup_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\pi_S(b_i)}\,\pi_S\left(\mathbb{Z}G\right).$$

命题 14. 设 $\mathcal{A}=\mathrm{M}_{x_0}\otimes\bigotimes_{i=1}^{\infty}\mathrm{M}^{a_i}$ 处于标准形式。那么

$$K_0^{\mathrm{gr}}(\mathcal{A})\cong(K(\mathcal{A}),K^+(\mathcal{A}),\pi_S(\bar{x}_0)).$$

证明. 由定理 6 可知，$K_0^{\mathrm{gr}}(\mathrm{M}_{x_i})\cong(\mathbb{Z}G,\ \mathbb{Z}_{\geq 0}G,\ \bar{x}_i)$。由于函子 K_0^{gr} 与直接极限相交换，定理 7 告诉我们，$K_0^{\mathrm{gr}}(\mathcal{A})$ 同构于以下序列的极限：

$$(\mathbb{Z}G,\mathbb{Z}_{\geq 0}G,\bar{x}_0)\xrightarrow{\bar{a}_1}(\mathbb{Z}G,\mathbb{Z}_{\geq 0}G,\bar{x}_1)\xrightarrow{\bar{a}_2}(\mathbb{Z}G,\mathbb{Z}_{\geq 0}G,\bar{x}_2)\xrightarrow{\bar{a}_3}\cdots$$

由于 π_S 是环同态，且 $a_i\in\mathbb{Z}_{\geq 0}G$，我们有

$$\frac{1}{\pi_S(b_i)}\,\pi_S(\mathbb{Z}_{\geq 0}G)=\frac{\pi_S(a_{i+1})}{\pi_S(b_{i+1})}\,\pi_S(\mathbb{Z}_{\geq 0}G)\subseteq\frac{1}{\pi_S(b_{i+1})}\,\pi_S(\mathbb{Z}_{\geq 0}G),$$

因此，K^+ 是 $\mathbb{L}_S$的加法子幺半群，并且在 π_S所定义的$\mathbb{Z}_{\geq 0}G$ 作用下是不变量。显然，K 是由 K^+ 生成的加法子群，并且在 $\mathbb{Z}G$作用下是不变量。现在，我们定义 $\psi_i:\mathbb{Z}G\to K$，使得 $\psi_i(z)=\pi_S(b_i)^{-1}\pi_S(z)$。于是，$\psi_i$ 是一个态射 $K_0^{\mathrm{gr}}(\mathrm{M}_{x_i})\to(K,K^+,\pi_S(\bar{x}_0))$，即一个保序并保序单位的 $\mathbb{Z}G$-模同态。此外，我们有交换图

$$\begin{array}{ccc}
(\mathbb{Z}G,\mathbb{Z}_{\geq 0}G,\bar{x}_i) & \xrightarrow{\bar{a}_{i+1}} & (\mathbb{Z}G,\mathbb{Z}_{\geq 0}G,\bar{x}_{i+1}) \\
& \searrow^{\psi_i} & \downarrow{\scriptstyle \psi_{i+1}} \\
& & (K,K^+,\pi_S(\bar{x}_0))
\end{array}$$

并由此得到一个态射 $\psi\colon K_0^{\mathrm{gr}}(\mathcal{A}) \to (K, K^+, \pi_S(\bar{x}_0))$。此外，对于每个$i \in \mathbb{N}$，我们都有交换图

$$\begin{array}{ccc} K_0^{\mathrm{gr}}(\mathrm{M}_{x_i}) & \xrightarrow{\varphi_i} & K_0^{\mathrm{gr}}(\mathcal{A}) \\ & \searrow^{\psi_i} & \downarrow \psi \\ & & (K, K^+, \pi_S(\bar{x}_0)), \end{array}$$

其中 $\varphi_i\colon K_0^{\mathrm{gr}}(\mathrm{M}_{x_i}) \to K_0^{\mathrm{gr}}(\mathcal{A})$ 是典范映射。根据构造，显然 ψ 是满射。令 $z \in \operatorname{Ker}\psi$。于是，存在 $z_i \in \mathbb{Z}G$ 使得$\varphi_i(z_i) = z$。因此，$\psi_i(z_i) = 0$，故 $\operatorname{supp} z_i \cap S = \emptyset$。由于该极限具有标准形式，且根据定理9，$\operatorname{supp}(\bar{a}) = \operatorname{supp}(a)$，这意味着 $\bar{a}_{i+1} z_i = 0$。因此，$z = \varphi_i(z_i) = \varphi_{i+1}(\bar{a}_{i+1} z_i) = 0$。所以，$\psi$ 是一个同构。□

注记 15。定理12的另一种证明方法是，对于 $\mathcal{A} = \varinjlim \mathrm{M}_{x_i}(\mathbb{F})$，用 $K_0^{\mathrm{gr}}(\mathcal{A})$ 表示 S 和 S_0。利用定理 14，可以很容易地验证以下内容:

- For each $j \in \hat{G}/\Gamma$, pick an integer $n_j > 0$ such that the multiple $e'_j := n_j e_j$ belongs to $\mathbb{Z}G$. Then, $S = \{j \in \hat{G}/\Gamma \mid e'_j K_0^{\mathrm{gr}}(\mathcal{A}) \neq 0\}$.
- $S_0 = \{j \in \hat{G}/\Gamma \mid e'_j[\mathcal{A}] \neq 0\}$.

现在，我们可以建立带初等分次的矩阵代数直极限的同构判据。

定理 16. 设 $\mathcal{A} = \mathrm{M}_{x_0} \otimes \bigotimes_{i=1}^{\infty} \mathrm{M}_{a_i}$ 和 $\mathcal{A}' = \mathrm{M}_{x'_0} \otimes \bigotimes_{i=1}^{\infty} \mathrm{M}_{a'_i}$ 为标准形式。那么 $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}'$ 当且仅当 $S = S'$，并且存在支撑为 S 的元素 b、$b' \in \mathbb{Z}_{\geq 0}G$，满足 $b\bar{x}_0 = b'\bar{x}'_0$ 和 $bK^+(\mathcal{A}) = b'K^+(\mathcal{A}')$。

证明. 如果取 M_{x_i} 的一个具有相同初始点 M_{x_0} 的子序列，三元组 $(K, K^+, \pi_S(\bar{x}_0))$ 不会改变；但如果从 M_{x_0} 而非 M_{x_k} 开始，它就会变为 $(b_k K, b_k K^+, \pi_S(b_k \bar{x}_0))$。若 $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}'$，则根据定理12有 $S = S'$。此外，由定理 2，我们可以假设有

$$\mathrm{M}_{x_0} \xrightarrow{\varepsilon_0} \mathrm{M}_{b'_{k'} x'_0} \xrightarrow{\varepsilon'_0} \mathrm{M}_{x_1} \xrightarrow{\varepsilon_1} \mathrm{M}_{x'_1} \xrightarrow{\varepsilon'_1} \cdots,$$

其中，x_0 和 x'_0 与之前相同，其余的 x_i、x'_i 是原序列的子序列，为简化记号，我们对它们重新命名。设 a 是 ε_0的一个标记。那么 a 在 $\mathbb{Z}_{\geq 0}G$中整除 a_1，因此 $\operatorname{supp} a \supseteq S$。跳过一步到 $\mathrm{M}_{x'_1}$，我们可以用 aa'_1替换 a，所以不妨假设 $\operatorname{supp} a = S$。重复此过程，我们得到一个标准形式的极限。在子序列 M_{x_i}上，我们得到 $(K,\ K^+,\ \pi_S(\bar{x}_0))$；而在 $\mathrm{M}_{x'_i}$上，我们得到 $(b'_{k'}K',\ b'_{k'}K'^+,\ \pi_S(b'_{k'}\bar{x}'_0))$，后者应当等于 $(\bar{a}K,\ \bar{a}K^+,\ \pi_S(\bar{a}\bar{x}_0))$。由于 $\operatorname{supp}(\bar{a}\bar{x}_0)$ 和 $\operatorname{supp}(b'_{k'}\bar{x}'_0)$ 都包含于 S，我们得到$\bar{a}\bar{x}_0 = b'_{k'}\bar{x}'_0$。

对于逆向结论，根据假设，$\pi_S(b)$ 和 $\pi_S(b')$ 在 $\mathbb{L}_S$ 中可逆，因此乘以 $\pi_S(b)\ \pi_S(b')$ 是 $\mathbb{L}_S$ 的加法群上的一个自同构，并将 $(K, K^+, \pi_S(\bar{x}_0))$ 映射到 $(K', K'^+, \pi_S(\bar{x}'_0))$。根据定理 14，这意味着$K_0^{\mathrm{gr}}(\mathcal{A}) \cong K_0^{\mathrm{gr}}(\mathcal{A}')$，因此由 [11, 定理 5.2.4] 可得结论。□

推论 17. 设 $\mathcal{A} = \mathrm{M}_{x_0} \otimes \bigotimes_{i=1}^{\infty} \mathrm{M}_{a_i}$，其中 $\operatorname{supp}(x_0) = \operatorname{supp}(a_i) = S$，并设 $c \in \mathbb{Z}_{\geq 0}G$。那么 $\mathcal{A} \otimes \mathrm{M}_c \cong \mathcal{A}$ 当且仅当 $\bar{c}K^+ = K^+$。

证明。 在这种情况下，使用定理 16 的记号，我们有 $x_0' = cx_0$ 且 $a_i' = a_i$，因此条件变为 $b\bar{x}_0 = b'\bar{c}\bar{x}_0$ 且 $bK^+ = b'K^+$。根据关于 supp(x_0) 的假设，这就变为 $b = b'\bar{c}$ 且 $\bar{c}K^+ = K^+$。□

4. Main results

与上一节一样，设 G 是一个有限阿贝尔群。我们还假设基域 $\mathbb{F}$ 是代数闭的。考虑以下有限维 G-分次单结合代数之间的保幺嵌入序列：

$$\mathcal{A}_0 \xrightarrow{\iota_1} \mathcal{A}_1 \xrightarrow{\iota_2} \mathcal{A}_2 \xrightarrow{\iota_3} \cdots$$

根据分次 Wedderburn 定理，我们有 $\mathcal{A}_i \cong \mathrm{M}_{x_i}(\mathcal{D}_i)$，其中存在某个 $x_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}G$ 和分次除代数 $\mathcal{D}_i$。由于 $\mathbb{F}$ 是代数闭的且 G 是有限的，基于 $\mathbb{F}$ 的 G-分次除代数只有有限多个同构类。因此，取一个子序列后，我们可以假设 $\mathcal{A}_i \cong \mathrm{M}_{x_i}(\mathcal{D})$，且$\mathcal{D}$ 为常数。令 $T = \operatorname{Supp}\mathcal{D}$。

从现在起，我们假设每个 $\mathcal{A}_i$ 都是作为代数的中心单代数。于是，根据定理 4，每个嵌入 $\iota_i\colon \mathcal{A}_{i-1} \to \mathcal{A}_i$ 在等价意义下由 $\mathcal{A}_i$ 中 $\iota_i(\mathcal{A}_{i-1})$ 的中心化子 $\mathcal{C}_i$ 的同构类确定。根据双中心化子定理，我们有 $\mathcal{A}_i \cong \mathcal{A}_{i-1} \otimes \mathcal{C}_i$，因此 $[\mathcal{A}_i] = [\mathcal{A}_{i-1}][\mathcal{C}_i]$ 属于 $\mathrm{Br}_G(\mathbb{F})$。由于 $[\mathcal{A}_{i-1}] = [\mathcal{A}_i] = [\mathcal{D}]$，我们看到 $[\mathcal{C}_i] = [\mathbb{F}]$，即 $\mathcal{C}_i$ 具有初等分次：$\mathcal{C}_i \cong \mathrm{M}_{a_i}$，其中某个 $a_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}G$。由于 $\mathcal{A}_{i-1} \cong \mathrm{M}_{x_{i-1}} \otimes \mathcal{D}$，我们得到 $\mathcal{A}_i \cong \mathrm{M}_{x_{i-1}} \otimes \mathcal{C}_i \otimes \mathcal{D}$。因此，$\iota_i$ 等价于嵌入 $\mathrm{M}_{x_{i-1}} \to \mathrm{M}_{x_{i-1}} \otimes \mathcal{C}_i$ 与 $\mathrm{id}_{\mathcal{D}}$ 的张量积，并且我们可以假设 $x_i = x_{i-1}a_i$。因此，根据定理 3，

$$\varinjlim \mathcal{A}_i \cong \left(\varinjlim \mathrm{M}_{x_i}\right) \otimes \mathcal{D},$$

其中，嵌入 $\mathrm{M}_{x_{i-1}} \to \mathrm{M}_{x_i}$ 的标记为 a_i。因此，为了分类带有 G-分次的矩阵代数的直极限，只需理解分次除代数 $\mathcal{D}$ 与带有初等分次的矩阵代数直极限的张量积。下述结果表明，对于此类张量积，K_0^{gr} 所携带的信息有限（另见下文定理 21）。

命题 18. 若 $\mathcal{D}$ 是一个支撑为 T 的 G-分次除代数，且 $\mathcal{A}$是定义在 $\mathbb{F}$ 上、带有初等分次的矩阵代数的直极限，则

$$K_0^G(\mathcal{A} \otimes \mathcal{D}) \cong K_0^{G/T}({}^{\alpha}\mathcal{A}),$$

其中 $\alpha\colon\ G \to G/T$ 是商映射。

证明. 设 $\mathcal{V}$ 为定理 6 证明中所述的分次 M_x-模。则 $\mathcal{V} \otimes \mathcal{D}$是一个分次简单的 $\mathrm{M}_x(\mathcal{D})$-模。它在同构和移位意义下唯一，并且 $(\mathcal{V} \otimes \mathcal{D})^{[g]} \cong (\mathcal{V} \otimes \mathcal{D})^{[h]}$ 当且仅当 $g \equiv h$ （模 T）。与定理 6 中一样，我们于是得到 $K_0^G(\mathrm{M}_x(\mathcal{D})) \cong (\mathbb{Z}(G/T)\ \mathbb{Z}_{\geq 0}(G/T)\ \alpha(\bar{x}))$，因此有 $K_0^G(\mathrm{M}_x \otimes \mathcal{D}) \cong K_0^{G/T}(\mathrm{M}_{\alpha(x)}) \cong K_0^{G/T}({}^{\alpha}\mathrm{M}_x)$。现在，若 $\mathcal{A} = \varinjlim \mathrm{M}_{x_i}$，则

$$\begin{aligned} K_0^G(\mathcal{A} \otimes \mathcal{D}) &\cong K_0^G\left(\varinjlim(\mathrm{M}_{x_i} \otimes \mathcal{D})\right) \cong \varinjlim K_0^G\left(\mathrm{M}_{x_i} \otimes \mathcal{D}\right) \\ &\cong \varinjlim K_0^{G/T}({}^{\alpha}\mathrm{M}_{x_i}) \cong K_0^{G/T}\left(\varinjlim {}^{\alpha}\mathrm{M}_{x_i}\right) \cong K_0^{G/T}({}^{\alpha}\mathcal{A}), \end{aligned}$$

正如所声称的。 □

下一个结果刻画了分次除代数何时可以被带有初等分次的矩阵代数的直极限“吸收”。

定理 19. 设 G 是有限阿贝尔群，$\mathbb{F}$ 是代数闭域。若 $\mathcal{A}$ 是带有初等分次的 $\mathbb{F}$ 上矩阵代数的直极限，且 $\mathcal{D}$ 是一个支撑为 T 的 G-分次除代数，并且作为代数是中心单的，则以下命题等价:

(i) $\mathcal{A}\otimes\mathcal{D}$ 是带有初等分次的矩阵代数的直极限，(ii) $x_T\cdot K_0^{\mathrm{gr}}(\mathcal{A})^+ = K_0^{\mathrm{gr}}(\mathcal{A})^+$，其中 $x_T=\sum_{t\in T}t$，(iii) $|T|\cdot K_0^{\mathrm{gr}}(\mathcal{A})^+ = K_0^{\mathrm{gr}}(\mathcal{A})^+$ 且 $\mathrm{supp}(x_T)\supseteq S$，其中 S 与定理 *15* 中相同。此外，若此条件成立，则 $\mathcal{A}\otimes\mathcal{D}\cong\mathcal{A}$。

证明。(i) $\Rightarrow$ (ii)：设 $\mathcal{A}=\varinjlim \mathrm{M}_{x_i}$，并假设 $\mathcal{A}\otimes\mathcal{D}\cong\varinjlim \mathrm{M}_{x_i'}$。取子序列后，根据定理 2，我们不妨假设有

$$\mathrm{M}_{x_0}\otimes\mathcal{D}\xrightarrow{\varepsilon_0}\mathrm{M}_{x_0'}\xrightarrow{\varepsilon_0'}\mathrm{M}_{x_1}\otimes\mathcal{D}\xrightarrow{\varepsilon_1}\cdots.$$

令 $\mathcal{C}_i=\mathrm{Cent}^{\mathrm{M}_{x_i'}}(\varepsilon_i(\mathrm{M}_{x_i}\otimes\mathcal{D}))$，于是 $\mathrm{M}_{x_i'}\cong\mathrm{M}_{x_i}\otimes\mathcal{D}\otimes\mathcal{C}_i$。由分次布劳尔群可得 $\mathcal{C}_i\cong\mathrm{M}_{c_i}(\mathcal{D}^{\mathrm{op}})$，因此我们可以将 ε_i 分解为

$$\mathrm{M}_{x_i}\otimes\mathcal{D}\longrightarrow\mathrm{M}_{x_i}\otimes\mathcal{D}\otimes\mathcal{D}^{\mathrm{op}}\xrightarrow{\varepsilon_i''}\mathrm{M}_{x_i'}.$$

令 $\mathcal{C}_i'=\mathrm{Cent}^{\mathrm{M}_{x_{i+1}}\otimes\mathcal{D}}(\varepsilon_i'\varepsilon_i''(\mathrm{M}_{x_i}\otimes\mathcal{D}\otimes\mathcal{D}^{\mathrm{op}}))$，于是 $\mathrm{M}_{x_{i+1}}\otimes\mathcal{D}\cong\mathrm{M}_{x_i}\otimes\mathcal{D}\otimes\mathcal{D}^{\mathrm{op}}\otimes\mathcal{C}_i'$。由分次布劳尔群可知，$\mathcal{C}_i'\cong\mathrm{M}_{c_i'}(\mathcal{D}')$，其中 $\mathcal{D}'\cong\mathcal{D}$。

略去项 $\mathrm{M}_{x_i'}$，并将范围限制为 $\mathcal{D}$ 的中心化子，我们得到

$$\cdots\longrightarrow\mathrm{M}_{x_i}\longrightarrow\mathrm{M}_{x_i}\otimes\mathcal{D}^{\mathrm{op}}\otimes\mathcal{D}'\xrightarrow[c_i']{}\mathrm{M}_{x_{i+1}}\longrightarrow\cdots$$

回顾公式（1），有 $\mathcal{D}^{\mathrm{op}}\otimes\mathcal{D}'\cong\mathrm{M}_{x_T}$，因此我们的序列变为

$$\mathrm{M}_{x_0}\xrightarrow[x_T]{}\mathrm{M}_{x_0x_T}\longrightarrow\mathrm{M}_{x_1}\xrightarrow[x_T]{}\mathrm{M}_{x_1x_T}\longrightarrow\cdots,$$

其中复合映射 $\mathrm{M}_{x_i}\to\mathrm{M}_{x_{i+1}}$ 是原来的嵌入。由此可得$x_TK_0^{\mathrm{gr}}(\mathcal{A})^+=K_0^{\mathrm{gr}}(\mathcal{A})^+$。事实上，由于 $K_0^{\mathrm{gr}}(\mathcal{A})$ 是上述序列中 K_0^{gr} 的直极限，对于任意元素 $z\in K_0^{\mathrm{gr}}(\mathcal{A})^+$，都存在 i，使得 z 是某个 $y\in\mathbb{Z}_{\geq0}G$ 在同态 $K_0^{\mathrm{gr}}(\mathrm{M}_{x_i})\to K_0^{\mathrm{gr}}(\mathcal{A})$ 下的像。但此时z 也是 x_Ty 在同态 $K_0^{\mathrm{gr}}(\mathrm{M}_{x_ix_T})\to K_0^{\mathrm{gr}}(\mathcal{A})$ 下的像。

(ii) $\Rightarrow$ (i)：将 $\mathcal{A}=\mathrm{M}_{x_0}\otimes\bigotimes_{i=1}^{\infty}\mathrm{M}_{a_i}$ 写成标准形式（参见定理 10 和定理 11），并令 $(K,K^+,\pi_S(\bar{x}_0))$ 为定理 14 中 $K_0^{\mathrm{gr}}(\mathcal{A})$ 的实现。回想一下,

$$K^+=\bigcup_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\pi_S(\bar{a}_1\cdots\bar{a}_i)}\,\pi_S(\mathbb{Z}_{\geq0}G).$$

现在，假设 $x_TK^+=K^+$。由于 $1\in K^+$，我们有

$$1=\frac{\pi_S(x_T)}{\pi_S(\bar{a}_1\cdots\bar{a}_{i_1})}\,\pi_S(c_1),$$

对于某些 $i_1\in\mathbb{N}$和 $c_1\in\mathbb{Z}_{\geq0}G$。于是 $\pi_S(\bar{a}_1\cdots\bar{a}_{i_1})=\pi_S(x_Tc_1)$，这意味着 $\mathrm{supp}(c_1)\supseteq S$，因为 $\mathrm{supp}(\bar{a}_i)=\mathrm{supp}(a_i)=S$。将两边乘以 $\bar{a}_{i_1+1}$，并用 $c_1\bar{a}_{i_1+1}$ 替换 c_1、用 i_1+1替换 i_1 后，我们可以假设 $\mathrm{supp}(c_1)=S$。于是 $\pi_S(\bar{a}_1\cdots\bar{a}_{i_1})=\pi_S(x_Tc_1)$ 蕴含 $\bar{a}_1\cdots\bar{a}_{i_1}=x_Tc_1$。因此，我们可以将嵌入 $\mathrm{M}_{x_0}\to\mathrm{M}_{x_{i_1}}$ 分解为

$$\mathrm{M}_{x_0}\longrightarrow\mathrm{M}_{x_0}\otimes\mathcal{D}\longrightarrow\mathrm{M}_{x_0}\otimes\mathcal{D}\otimes\mathcal{D}^{\mathrm{op}}\xrightarrow[\bar{c}_1]{}\mathrm{M}_{x_{i_1}}.\tag{2}$$

同理，存在 $i_2 > i_1$ 使得 $\bar{a}_{i_1+1} \cdots \bar{a}_{i_2} = x_T c_2$，因此我们可以将嵌入 $\mathrm{M}_{x_{i_1}} \to \mathrm{M}_{x_{i_2}}$ 分解为

$$\mathrm{M}_{x_{i_1}} \longrightarrow \mathrm{M}_{x_{i_1}} \otimes \mathcal{D} \longrightarrow \mathrm{M}_{x_{i_1}} \otimes \mathcal{D} \otimes \mathcal{D}^{\mathrm{op}} \xrightarrow[\bar{c}_2]{} \mathrm{M}_{x_{i_2}}, \tag{3}$$

由公式（2），我们有 $\mathrm{M}_{x_{i_1}} \cong \mathrm{M}_{x_0} \otimes \mathcal{D} \otimes \mathcal{C}$，其中 $\mathcal{C} \cong \mathrm{M}_{\bar{c}_1} \otimes \mathcal{D}^{\mathrm{op}}$。将其代入公式（3），并与公式（2）联立，得到

$$\mathrm{M}_{x_0} \longrightarrow \mathrm{M}_{x_0} \otimes \mathcal{D} \longrightarrow \mathrm{M}_{x_{i_1}} \cong \mathrm{M}_{x_0} \otimes \mathcal{D} \otimes \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{M}_{x_0} \otimes \mathcal{D} \otimes \mathcal{C} \otimes \mathcal{D} \cong \mathrm{M}_{x_{i_1}} \otimes \mathcal{D} \longrightarrow \mathrm{M}_{x_{i_2}},$$

其中，合成映射 $\mathrm{M}_{x_0} \to \mathrm{M}_{x_{i_1}}$ 和 $\mathrm{M}_{x_{i_1}} \to \mathrm{M}_{x_{i_2}}$ 仍是原来的嵌入，而 $\mathrm{M}_{x_0} \otimes \mathcal{D} \otimes \mathcal{C} \to \mathrm{M}_{x_0} \otimes \mathcal{D} \otimes \mathcal{C} \otimes \mathcal{D}$ 由 $b \otimes d \otimes c \mapsto b \otimes d \otimes c \otimes 1$ 给出。将其替换为 $b \otimes d \otimes c \mapsto b \otimes 1 \otimes c \otimes d$，并将同构 $\mathrm{M}_{x_0} \otimes \mathcal{D} \otimes \mathcal{C} \otimes \mathcal{D} \cong \mathrm{M}_{x_{i_1}} \otimes \mathcal{D}$ 与两个 $\mathcal{D}$ 副本的交换映射作前复合，得到

$$\mathrm{M}_{x_0} \xrightarrow{\varepsilon_0} \mathrm{M}_{x_{i_0}} \otimes \mathcal{D} \xrightarrow{\varepsilon_0'} \mathrm{M}_{x_{i_1}} \xrightarrow{\varepsilon_1} \mathrm{M}_{x_{i_1}} \otimes \mathcal{D} \xrightarrow{\varepsilon_1'} \mathrm{M}_{x_{i_2}},$$

其中，$\varepsilon_0'\varepsilon_0$ 和 $\varepsilon_1'\varepsilon_1$ 是原始嵌入，而 $\varepsilon_1\varepsilon_0'$ 是原始嵌入与 $\mathrm{id}_{\mathcal{D}}$ 张量积所得的嵌入。

继续这一过程并应用定理 2，可得 $\mathcal{A} \otimes \mathcal{D} \cong \mathcal{A}$。因此，条件（i）和（ii）彼此等价，且该定理的最后一个断言成立。

（ii）$\Rightarrow$（iii）：若 $x_T K^+ = K^+$，则显然有 $S \supseteq \mathrm{supp}\ x_T$。由于 $x_T^2 = |T| x_T$，我们还得到 $|T| K^+ = |T|(x_T K^+) = x_T^2 K^+ = K^+$。

（iii）$\Rightarrow$（ii）：注意，元素 $\frac{1}{|T|} x_T$ 是对所有 $j \in \mathrm{supp}(x_T)$ 的本原幂等元 $e_j \in \mathbb{Q}G$ 求和所得。由于 $S \subseteq \mathrm{supp}(x_T)$，可得 $\frac{1}{|T|} x_T \cdot K^+ = K^+$。但 $|T| K^+ = K^+$ 蕴含 $\frac{1}{|T|} K^+ = K^+$，所以得到 $x_T K^+ = K^+$。□

注记 20. 对于 G 的任意子群 T，我们有 $\mathrm{supp}(x_T) = T^\perp / \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}/\mathbb{Q})$，其中 $T^\perp$ 是由 $T^\perp = \{\chi \in \hat{G} \mid \chi(t) = 1, \forall t \in T\}$ 定义的 $\hat{G}$ 的子群。特别地，定理 19 中的条件 $\mathrm{supp}(x_T) \supseteq S$ 等价于 $T \subseteq S^\perp$，其中 $S^\perp$ 是由 $S^\perp = \{g \in G \mid \chi(g) = 1, \forall \chi \in j, j \in S\}$ 定义的 G 的子群。

下一个例子表明，K_0^{gr} 函子不足以区分具有 G-分次的中心单代数的直极限。

例 21. 设 $G = T = C_2 \times C_2$，并令 $\mathcal{D}$ 为定理 1 中定义、支撑为 T 的分次除代数 $\mathcal{Q}$。令 $\mathcal{A} = \mathrm{M}_2 \otimes \bigotimes_{i=1}^{\infty} \mathrm{M}_2$ 和 $\mathcal{A}' = \mathrm{M}_{x_T} \otimes \bigotimes_{i=1}^{\infty} \mathrm{M}_{x_T}$，并记 $R := \mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right]$。由定理 14 可得 $K_0^{\mathrm{gr}}(\mathcal{A}) \cong (RG, R_{\geq 0}G, 2)$ 以及 $K_0^{\mathrm{gr}}(\mathcal{A}') \cong (x_T RG, x_T R_{\geq 0} G, x_T) \cong (R(G/T), R_{\geq 0}(G/T), |T|) = (R, R_{\geq 0}, 4)$，因此 $\mathcal{A} \ncong \mathcal{A}'$。另一方面，定理 18 告诉我们，作为 $\mathbb{Z}T$-模，$K_0^{\mathrm{gr}}(\mathcal{A} \otimes \mathcal{D}) \cong (R, R_{\geq 0}, 2)$，其中 T 的每个元素都平凡作用。因此 $\mathcal{A} \otimes \mathcal{D} \ncong \mathcal{A}'$；否则，定理 19 将说明 $\mathcal{A} \cong \mathcal{A} \otimes \mathcal{D} \cong \mathcal{A}'$，这就产生矛盾。于是，$K_0^{\mathrm{gr}}(\mathcal{A} \otimes \mathcal{D}) \cong K_0^{\mathrm{gr}}(\mathcal{A}')$，但 $\mathcal{A} \otimes \mathcal{D} \ncong \mathcal{A}'$。

最后，我们可以给出一个同构判据：

定理 22。设 G为有限阿贝尔群，$\mathbb{F}$ 为代数闭域。设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{A}'$ 是 $\mathbb{F}$ 上的矩阵代数的直极限，并赋予初等G-分次。设 $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{D}'$ 是 G-分次除代数，且作为代数是中心单的，并记作 $\mathcal{D} \otimes \mathcal{D}'^{\mathrm{op}} \cong \mathrm{M}_y(\mathcal{E})$，其中 $y \in \mathbb{Z}_{\geq 0}G$ 和 $\mathcal{E}$ 是分次除代数。记 $T =$ 支撑 $\mathcal{D}$、$T' =$ 支撑 $\mathcal{D}'$、$E =$ 支撑 $\mathcal{E}$和 $x_H = \sum_{h \in H} h$ 为

任意 $H \leq G$。那么， $\mathcal{A}\otimes\mathcal{D}\cong\mathcal{A}'\otimes\mathcal{D}'$ 当且仅当 ***(i)*** $x_E\cdot K_0^{\mathrm{gr}}(\mathcal{A})^+ = K_0^{\mathrm{gr}}(\mathcal{A})^+$ 且 ***(ii)*** $\mathrm{M}_y\otimes\mathcal{A}\cong\mathrm{M}_{x_{T'}}\otimes\mathcal{A}'$。

证明。 假设 $\mathcal{A}\otimes\mathcal{D}\cong\mathcal{A}'\otimes\mathcal{D}'$。则我们有

$$\underbrace{\mathcal{A}\otimes\mathcal{D}\otimes\mathcal{D}'^{\mathrm{op}}}_{\cong\mathcal{A}\otimes\mathrm{M}_y\otimes\mathcal{E}}\cong\mathcal{A}'\otimes\mathcal{D}'\otimes\mathcal{D}'^{\mathrm{op}}.$$

由于 $\mathcal{A}'\otimes\mathcal{D}'\otimes\mathcal{D}'^{\mathrm{op}}$ 是具有初等分次的矩阵代数的直极限，根据定理 19，我们得到 $x_E\cdot K_0^{\mathrm{gr}}(\mathrm{M}_y\otimes\mathcal{A})^+ = K_0^{\mathrm{gr}}(\mathrm{M}_y\otimes\mathcal{A})^+$。但是， $K_0^{\mathrm{gr}}(\mathrm{M}_y\otimes\mathcal{A})$ 和 $K_0^{\mathrm{gr}}(\mathcal{A})$ 作为有序 $\mathbb{Z}G$-模是同构的，尽管它们的序单位可能不同（见 [11, 定理 5.2.5], 或定理 14 和定理 23），因此得到 (i)。为证明 (ii)，注意到，根据定理 19 有 $\mathcal{A}\cong\mathcal{E}\otimes\mathcal{A}$，因此

$$\mathrm{M}_y\otimes\mathcal{A}\cong\mathrm{M}_y(\mathcal{E})\otimes\mathcal{A}\cong\mathcal{D}'^{\mathrm{op}}\otimes\mathcal{D}\otimes\mathcal{A}\cong\mathcal{D}'^{\mathrm{op}}\otimes\mathcal{D}'\otimes\mathcal{A}'\cong\mathrm{M}_{x_{T'}}\otimes\mathcal{A}'.$$

反之，若 (i) 和 (ii) 成立，则根据定理 19 有 $\mathcal{A}\cong\mathcal{E}\otimes\mathcal{A}$，因此，

$$\mathcal{D}\otimes\mathcal{D}'^{\mathrm{op}}\otimes\mathcal{A}\cong\mathcal{E}\otimes\mathrm{M}_y\otimes\mathcal{A}\cong\mathrm{M}_y\otimes\mathcal{A}\cong\mathrm{M}_{x_{T'}}\otimes\mathcal{A}'.$$

与 $\mathcal{D}'$张量积后，我们得到

$$\mathrm{M}_{x_{T'}}\otimes\mathcal{D}\otimes\mathcal{A}\cong\mathrm{M}_{x_{T'}}\otimes\mathcal{D}'\otimes\mathcal{A}'\cong\mathrm{M}_{|T'|}\otimes\mathcal{D}'\otimes\mathcal{A}'.$$

另一方面，由于 $[\mathcal{E}] = [\mathcal{D}][\mathcal{D}']^{-1}$ 属于 $\mathrm{Br}_G(\mathbb{F})$，因此对于某个 $z\in\mathbb{Z}_{\geq 0}G$，我们有 $\mathcal{D}\otimes\mathcal{E}^{\mathrm{op}}\cong\mathrm{M}_z(\mathcal{D}')$。于是，

$$\begin{aligned}\mathrm{M}_{x_{T'}}\otimes\mathcal{D}\otimes\mathcal{A}&\cong\mathrm{M}_{x_{T'}}\otimes\mathcal{D}\otimes\mathcal{E}^{\mathrm{op}}\otimes\mathcal{A}\cong\mathrm{M}_{x_{T'}}\otimes\mathcal{D}'\otimes\mathrm{M}_z\otimes\mathcal{A}\\&\cong\mathrm{M}_{x_{T'}}(\mathcal{D}')\otimes\mathrm{M}_z\otimes\mathcal{A}\cong\mathrm{M}_{|T'|}(\mathcal{D}')\otimes\mathrm{M}_z\otimes\mathcal{A}\\&\cong\mathrm{M}_{|T'|}\otimes\mathcal{D}'\otimes\mathrm{M}_z\otimes\mathcal{A}\cong\mathrm{M}_{|T'|}\otimes\mathcal{D}\otimes\mathcal{E}^{\mathrm{op}}\otimes\mathcal{A}\cong\mathrm{M}_{|T'|}\otimes\mathcal{D}\otimes\mathcal{A}.\end{aligned}$$

我们已经证明 $\mathrm{M}_{|T'|}\otimes\mathcal{D}\otimes\mathcal{A}\cong\mathrm{M}_{|T'|}\otimes\mathcal{D}'\otimes\mathcal{A}'$，根据定理8，这意味着 $\mathcal{D}\otimes\mathcal{A}\cong\mathcal{D}'\otimes\mathcal{A}'$。□

注 23。值得一提的是，不仅条件 (i)，条件 (ii) 也可以利用定理 14 中给出的 K_0^{gr} 的实现来验证。事实上，将 $\mathcal{A}\cong\mathrm{M}_{x_0}\otimes\bigotimes_{i=1}^{\infty}\mathrm{M}_{a_i}$ 写成标准形式。于是，由于 $\mathrm{supp}(x_0)\subseteq S$ 蕴含 $\mathrm{supp}(x_0y)\subseteq S$，我们有 $\mathrm{M}_y\otimes\mathcal{A}\cong\mathrm{M}_{yx_0}\otimes\bigotimes_{i=1}^{\infty}\mathrm{M}_{a_i}$ 为标准形式。

推论24。$\mathcal{A}\otimes\mathcal{D}\cong\mathcal{A}'\otimes\mathcal{D}$ 当且仅当 $\mathcal{A}\otimes\mathrm{M}_{x_T}\cong\mathcal{A}'\otimes\mathrm{M}_{x_T}$。

定理 22 中的条件 (ii) 蕴含 $K_0^{\mathrm{gr}}(\mathcal{A})$ 与 $K_0^{\mathrm{gr}}(\mathcal{A}')$ 作为有序 $\mathbb{Z}G$-模同构（这对应于 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{A}'$ Morita等价，见 [11, 定理 5.2.5]）。为获得固定同构类 (K, K^+) 的 $K_0^{\mathrm{gr}}(\mathcal{A})$ 的同构类代表元，我们可以采用 $\mathrm{Br}_G(\mathbb{F})$ 的代表元，并考虑以下等价关系：$[\mathcal{D}]\sim[\mathcal{D}']$ 当且仅当条件 (i) 成立，即 $x_E\cdot K^+ = K^+$ 其中 $E=\mathrm{Supp}\,\mathcal{E}$ 和 $[\mathcal{E}] = [\mathcal{D}][\mathcal{D}']^{-1}$（等价地，$|E|\cdot K^+ = K^+$ 和 $E\subseteq S^{\perp}$，见定理20）。事实上，若 $[\mathcal{D}]\sim[\mathcal{D}']$，则可将 $\mathcal{A}\otimes\mathcal{D}'\cong\mathcal{A}\otimes\mathcal{E}\otimes\mathcal{D}'\cong\mathrm{M}_y(\mathcal{A})\otimes\mathcal{D}$ 改写。最后，对于固定的 $\mathcal{D}$，$\mathcal{A}\otimes\mathcal{D}\cong\mathcal{A}'\otimes\mathcal{D}$ 当且仅当 $\mathcal{A}\otimes\mathrm{M}_{x_T}\cong\mathcal{A}'\otimes\mathrm{M}_{x_T}$，而后者可利用定理 16 检验。

References

[1] Y. A. Bahturin、M. Breˇsar、M. Kochetov, *Group gradings on finitary simple Lie algebras*, 《代数与计算国际期刊》22（2012年），46页。[2] Y. A. Bahturin、S. K. Sehgal、M. Zaicev, *Group gradings on associative algebras*, 《代数杂志》241 (2)（2001年），677–698。[3] Y. A. Bahturin、M. Zaicev, *Gradings on simple algebras of finitary matrices*, 《代数杂志》324（2010年），1279–1289。[4] A. Baranov、A. Zhilinskii, *Diagonal direct limits of simple Lie algebras*, 《代数通讯》27（1999年），2749–2766。[5] O. Bratteli, *Inductive limits of finite dimensional C^*-algebras*, 《美国数学会汇刊》171（1972年），195–234。[6] J. Dixmier, *On some C^*-algebras considered by Glimm*, 《泛函分析杂志》1(2)（1967年），182–203。[7] A. Elduque、M. Kochetov, *Gradings on simple Lie algebras*, 《数学调查与专著》189。美国数学会（2013年）。[8] A. Elduque、M. Kochetov, *Graded modules over classical simple Lie algebras with a grading*, 《以色列数学杂志》207（2015年），229–280。[9] G. Elliott, *On the classification of inductive limits of sequences of semisimple finite-dimensional algebras* **38** 1976 29 44 , 《代数杂志》（），–。[10] D. Handelman、W. Rossmann, *Actions of compact groups on AF C^*-algebras*, 《伊利诺伊数学杂志》29（1985年），51–95。[11] R. Hazrat。《分次环与分次格罗滕迪克群》。第435卷。剑桥大学出版社，2016年。[12] R. Hazrat、L. Va˘s, *K-theory classification of graded ultramatricial algebras with involution*, 《数学论坛》31(2)（2019年），419–463。[13] A. Rodrigo-Escudero, *Fine gradings and automorphism groups on associative algebras*, 《线性与多线性代数》70（2022年），3402–3418。[14] W. Sch¨utzer、F. Yasumura, *Group gradings on infinite dimensional upper triangular matrices* **666** 2025 446 474 , 《代数杂志》（），-。[15] Q. Wang, *Classification of certain inductive limit actions of compact groups on AF algebras*, 《国际数学杂志》32（2021年），2050128。[16] A. Zalesskii, *Direct limits of finite dimensional algebras and finite groups*, 加拿大数学学会会议论文集 22（1998年）。

Department of Mathematics and Statistics, Memorial University of Newfoundland, St. John's, NL, A1C5S7, Canada.
Email address: mikhail@mun.ca

Department of Mathematics, Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, Universidade de São Paulo, SP, Brazil*Email address*: fyyasumura@ime.usp.br