arXiv:2601.03529v1 [math.CV] 7 Jan 2026

非紧致复流形上的 Bott–Chern 与 Aeppli 上同调之间的对偶

Xiaojun Wu

2026年1月8日

摘要

本文在适当的伪凸性假设下，建立了非紧致复流形上 Bott–Chern 上同调与 Aeppli 上同调之间的对偶定理，涵盖有紧支撑和无紧支撑两种情形。特别地，在 Stein 流形上，我们获得了完整的 Bott–Chern–Aeppli 对偶，从而推广了 Dolbeault 上同调的 Serre 对偶。我们还通过在非紧致复曲面上构造显式反例，证明了在一般情况下，如果没有伪凸性假设，这些结果并不成立。

2020年数学主题分类。主要分类 32C37；次要分类 32C35、32L10。

关键词与短语。Serre 对偶，Bott–Chern 上同调，Aeppli 上同调，Fr´echet 空间。

1 引言

上同调对偶在几何学中发挥着核心作用，因为它为计算和联系与给定流形相关的上同调群提供了有效框架。反过来，对偶性的失效往往反映了底层空间固有的几何或解析特征。Hodge 对偶是一个经典例子：它的失效意味着紧复流形不具有 K¨ahler 结构。

在光滑流形上，庞加莱对偶体现了一种自然的对偶关系，它联系着次数互补的上同调群。然而，当底流形是非紧致的，这类对偶陈述便会变得更加微妙，若无额外假设，通常也不再成立。这自然引出了带紧

支撑的上同调理论，旨在恢复非紧致情形下有意义的对偶陈述。

在复流形上，de Rham 上同调可通过 Dolbeault 上同调加以细化。Dolbeault 上同调群 $H^{p,q}_{\bar\partial}(X)$ 编码了流形的复结构；当 n 维复流形 X 是紧致的时，它们与 Serre 对偶相契合，从而在 $H^{p,q}_{\bar\partial}(X)$ 和 $H^{n-p,n-q}_{\bar\partial}(X)$ 之间给出完美配对。在非紧情形下，情况则更为微妙。正如 Serre [Ser55, Section 14]，所示，即使考虑紧支撑上同调，Serre 对偶在一般的非紧致复流形上也可能失效。事实上，Serre 证明，只有在额外的泛函分析假设下，对偶才成立。

Bott–Chern 上同调和 Aeppli 上同调是 Dolbeault 上同调的细化形式，能够揭示复流形上更精细的解析信息。为完整起见，我们简要回顾其定义（例如参见 [Aep62, BC65, agbook, Sch07]）。

定义 1.1. 设 X 是一个复流形。X 的*Bott–Chern* 上同调定义为

$$H^{p,q}_{BC}(X) := \frac{\mathrm{Ker}\partial \cap \mathrm{Ker}\bar\partial \subset \mathcal{A}^{p,q}(X)}{\mathrm{Im}\ \partial\bar\partial \subset \mathcal{A}^{p,q}(X)}.$$

紧支撑*Bott–Chern* 上同调定义为

$$H^{p,q}_{BC,c}(X) := \frac{\mathrm{Ker}\partial \cap \mathrm{Ker}\bar\partial \subset \mathcal{A}^{p,q}_c(X)}{\mathrm{Im}\ \partial\bar\partial \subset \mathcal{A}^{p,q}_c(X)},$$

其中 $\mathcal{A}^{p,q}_c(X)$ 表示 X 上具有紧支撑的光滑 (p,q)-微分形式空间。

定义 1.2. 设 X 是一个复流形。X 的*Aeppli* 上同调 定义为

$$H^{p,q}_{A}(X) := \frac{\mathrm{Ker}\partial\bar\partial \subset \mathcal{A}^{p,q}(X)}{\mathrm{Im}\ \partial + \mathrm{Im}\ \bar\partial}.$$

紧支撑*Aeppli* 上同调定义为

$$H^{p,q}_{A,c}(X) := \frac{\mathrm{Ker}\partial\bar\partial \subset \mathcal{A}^{p,q}_c(X)}{\mathrm{Im}\ \partial + \mathrm{Im}\ \bar\partial}.$$

在紧致复流形上，Bott–Chern 与 Aeppli 上同调群是有限维的，并且彼此构成完美对偶（例如参见,

[Sch07，第 16] 页），从而推广了 Dolbeault 上同调中的 Serre 对偶。相比之下，非紧情形的研究远不充分。尽管带紧支撑的 Dolbeault 上同调为推广 Serre 对偶提供了自然框架，但 Bott–Chern 与 Aeppli 上同调是否存在类似的对偶关系，无论是否带紧支撑，先验上都不明确。由于 Bott–Chern 与 Aeppli 上同调所编码的解析信息比 Dolbeault 上同调更精细，理解它们在非紧致复流形上的对偶性质，是一个自然且微妙的问题。

本文在适当的伪凸性和有限性假设下探讨这一问题。利用 Andreotti–Grauert有限性定理 [AG62]以及 Serre 关于对偶的泛函分析判据 [Ser55], , 我们建立了强 q凸复流形（见定义 2.1）上 Bott–Chern 与 Aeppli 上同调群之间的对偶结果（见定理 3.3、3.4）。我们还发现，预期的对偶关系适用于 theta 环面群。通过重新考察 Serre [Ser55 第 14], 节中的上同调计算，我们表明，一般而言，当上述伪凸性和有限性假设不成立时，非紧致复流形上的预期 Bott–Chern–Aeppli 对偶并不成立。复维数为 2 时便已有这样的例子。相比之下，复维数为 1 时则不会出现这种失效。事实上，根据 Behnke–Stein 定理，任意非紧致黎曼曲面都是 Stein 流形，而我们的主定理表明，相关的对偶关系在 Stein 流形上成立。

本文结构安排如下。第 2 节回顾后文将用到的基本概念和经典结果。第 3 节致力于证明伪凸性假设下的对偶结果。第 4 节构造具体反例，以说明缺少此类假设时 Bott–Chern–Aeppli 对偶不成立。

致谢。我要感谢我的博士后导师 Takayuki Koike 教授和 Jinichiro Tanaka 博士，他们就本研究开展了多次富有启发且颇有助益的讨论。本研究得到日本学术振兴会日本研究博士后奖学金（标准类别）的资助。我也感谢大阪公立大学和大阪中央高级数学研究所（OCAMI）提供了优良的研究环境。

2 Andreotti–Grauert有限性、Serre判据与层论描述

本节汇总一些后续章节将用到的著名结果。

以下有限性定理归功于 Andreotti 和 Grauert [AG62]。全文中，我们采用 Demailly [agbook, Chap. IX] 中的记号。

定义 2.1。若复流形 X （维数为n ）上的光滑函数在点 $x \in X$ 处的 $\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\psi(x)$ 至少有 $n-q+1$ 个严格正特征值，或者等价地，存在一个 ($n-q+1$) 维子空间 $F \subset T_xX$，使得复Hessian在其上正定，则称该函数在点 $x \in X$ 处是强 q凸的。若复流形 X 存在一个光滑穷竭函数 ψ，使其在某个例外紧集 $K \subset X$之外是强 q凸的，则称该复流形是强 q凸的。若可选取 ψ 使得 $K = \varnothing$，则称 X 是强 q完备的。

定理 2.2 ([agbook，第 IX 章，定理 4。10])。设 $\mathcal{F}$ 是强 q-凸复流形 X 上的相干解析层。则对所有 $k \geq q$， $H^k(X, \mathcal{F})$ 均为 ***Hausdorff*** 且有限维。

将整体形式层次的对偶转化为上同调层次的对偶所需的判据，由 Serre 的以下经典结果给出。回顾一下，局部凸拓扑向量空间之间的同态是一个连续线性映射 $u : X \to Y$，其诱导映射 $u : X \to \mathrm{Im}\ u$ 是开映射，其中 $\mathrm{Im}\, u$ 赋予由 Y诱导的子空间拓扑。

命题 2.3 ([Ser55，引理 1])。设 L、M、N 是 ***Fr´echet*** 空间，并设

$$L \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} N$$

它们是两个线性连续同态，满足 $v \circ u = 0$。设 L^*、M^*、N^*是拓扑对偶，并以 ${}^t u : M^* \to L^*$和 ${}^t v : N^* \to M^*$表示转置映射。令

$$C = v^{-1}(0), \quad B = u(L), \quad H = C/B,$$

$$C' = ({}^t v)^{-1}(0), \quad B' = {}^t u(N^*), \quad H' = C'/B'.$$

那么， H 是一个弗雷歇空间，其拓扑对偶与 H'同构。

命题 2.4 ([Ser55，引理 2])**.** 设 u 是从弗雷歇空间 L 到弗雷歇空间 M的连续线性映射。若 $u(L)$ 是 M的有限余维子空间，则 u 是一个同态。

现在我们回顾 Demailly 提出的 Bott–Chern 上同调的层论解释（参见 [agbook，第 VI 章，§12.1],[Sch07]）。这种层论描述为将 Bott–Chern 上同调和 Aeppli 上同调与 Dolbeault 上同调及 de Rham 上同调联系起来提供了自然框架。

命题 2.5。 定义 *1.1* 中定义的 *Bott–Chern* 上同调群是以下超上同调群

$$H^{p,q}_{BC}(X) = \mathbb{H}^{p+q}(X, \mathcal{B}^{\bullet}_{p,q})$$

对应于 *Bott–Chern* 复形

$$\mathcal{B}^{\bullet}_{p,q} : (2\pi\sqrt{-1})^p\mathbb{C} \xrightarrow{\Delta} \mathcal{O}\oplus\mathcal{O} \to \Omega^1\oplus\Omega^1 \to \cdots \to \Omega^{p-1}\oplus\Omega^{p-1} \to \Omega^p \to \cdots \to \Omega^{q-1} \to 0,$$

其中 Δ 表示在第一个分量上乘以1 ，在第二个分量上乘以 -1 。

此外，定义 *1.2* 中定义的 *Aeppli* 上同调群是以下超上同调群

$$H^{p,q}_{A}(X) = \mathbb{H}^{p+q+1}(X, \mathcal{B}^{\bullet}_{p+1,q+1}).$$

第二个结论由 Schweitzer [Sch07，第 4.d 节]指出。

Bott–Chern 复形与复形 $\mathcal{L}^{\bullet}_{p,\ q}$拟同构，该复形定义见 [agbook，第六章第12节。1] 如下。

对于 $k \le p+q-2$，设

$$\mathcal{L}^k_{p,q} = \bigoplus_{\substack{r+s=k\\ r<p,\ s<q}} \mathcal{E}^{r,s},$$

而对于 $k \ge p+q$，设

$$\mathcal{L}^{k-1}_{p-1,q-1} = \bigoplus_{\substack{r+s=k\\ r\ge p,\ s\ge q}} \mathcal{E}^{r,s}.$$

$\mathcal{L}^{\bullet}_{p,\ q}$ 的微分定义为

$$\mathcal{L}^0 \xrightarrow{\mathrm{pr}_{\mathcal{L}^1}\circ d} \mathcal{L}^1 \xrightarrow{\mathrm{pr}_{\mathcal{L}^2}\circ d} \cdots \to \mathcal{L}^{k-2} \xrightarrow{\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar\partial} \mathcal{L}^{k-1} \xrightarrow{d} \mathcal{L}^k \xrightarrow{d} \cdots .$$

这里 $\mathcal{E}^{r,s}$ 表示 X 上光滑的 (r,s)-形式层。

注 2.6。 注意，可以将复形 $\mathcal{L}^\bullet$ 中的光滑微分形式层替换为流层。由于光滑形式层和流层都是软层，相应的整体截面复形可以计算 *Bott–Chern* 与 *Aeppli* 上同调群（无论是否具有紧支撑）。光滑形式到流的典范包含定义了相应层复形之间的拟同构，因此在复向量空间层面诱导出超上同调的同构。

下文中，我们赋予 *Bott–Chern* 上同调和 *Aeppli* 上同调由光滑微分形式空间上的自然 *Fr´echet* 拓扑诱导的拓扑。复形中的所有微分均由 d、∂ 和 ∂ 诱导，它们定义了光滑形式 *Fr´echet* 空间之间的连续线性算子。然而，仅有连续性并不意味着这些算子是 *Serre* 意义下的同态，因为它们的像未必是闭的。

对于具有紧支撑的 *Bott–Chern* 上同调和 *Aeppli* 上同调，我们则赋予上同调群由紧支撑流空间诱导的自然局部凸拓扑。尽管光滑形式到流的典范包含在复向量空间范畴中诱导出超上同调上的同构，但当上同调群是无限维时，这个同构一般并非拓扑向量空间之间的同构。正是这种差异，构成了我们在下文中特别选择这些拓扑的原因。

3 有限性与对偶结果

本节陈述本文的主要结果。首先，我们建立几个预备引理。

引理 3.1。 设 X 是一个强 r-凸复流形，并设 $\mathcal{A}_p^\bullet$ 是从以下次数开始的复形

$$\mathcal{O} \to \Omega^1 \to \cdots \to \Omega^{p-1} \to 0$$

0。那么，对所有 $k \geq p + r - 1$，$H^k(X, \mathcal{A}_p^\bullet)$ 都是有限维的。

证明。 根据 Andreotti–Grauert 有限性定理（定理 2.2），X 上任意凝聚层的上同调群在大于或等于 r 的次数上均为有限维。特别是，由于 $\mathcal{A}_1^\bullet \simeq \mathcal{O}_X$，该结论对 $p = 1$ 成立。

现在我们对 p 进行归纳。假设该结论对 $\mathcal{A}_p^\bullet$ 成立。考虑复形的短正合列

$$0 \longrightarrow \Omega^p[p] \longrightarrow \mathcal{A}_{p+1}^\bullet \longrightarrow \mathcal{A}_p^\bullet \longrightarrow 0,$$

其中，$\Omega^p[p]$ 表示置于上同调次数 p的层 Ω^p 。超上同调中的相应长正合列给出，对每个 $k \geq p+r$,

$$H^{k-p}(X, \Omega^p) \longrightarrow \mathbb{H}^k(X, \mathcal{A}_{p+1}^\bullet) \longrightarrow \mathbb{H}^k(X, \mathcal{A}_p^\bullet).$$

由于 Ω^p 是一个凝聚层，因此当$k-p \geq r$时，群 $H^{k-p}(X, \Omega^p)$ 是有限维的；根据归纳假设，当 $k \geq p+r$时， $\mathbb{H}^k(X, \mathcal{A}_p^\bullet)$ 是有限维的。由此可得，对所有$k \geq p+r$， $\mathbb{H}^k(X, \mathcal{A}_{p+1}^\bullet)$ 都是有限维的，从而完成归纳并证明结论。□

引理 3.2. 设 X 是一个强 r-凸复流形。假设 X 的贝蒂数有限。那么，对所有 $k \geq \max(p, q) + r$， $\mathbb{H}^k(X, \mathcal{B}_{p,q}^\bullet)$ 都是有限维的。

证明。 对于 $k \geq \max(p, q) + r$，我们考虑超上同调中的长正合列

$$\mathbb{H}^{k-1}\left(X, \mathcal{A}_p^\bullet \oplus \overline{\mathcal{A}_q^\bullet}\right) \longrightarrow \mathbb{H}^k\left(X, \mathcal{B}_{p,q}^\bullet\right) \longrightarrow \mathbb{H}^k(X, \mathbb{C}(p)), \tag{1}$$

与复形的短正合列相关

$$0 \longrightarrow \left(\mathcal{A}_p^\bullet \oplus \overline{\mathcal{A}_q^\bullet}\right)[1] \longrightarrow \mathcal{B}_{p,q}^\bullet \longrightarrow \mathbb{C}(p) := (2\pi\sqrt{-1})^p\mathbb{C} \longrightarrow 0.$$

由于 $\mathcal{A}_p^\bullet$ 和 $\overline{\mathcal{A}_q^\bullet}$ 满足引理 3.1中确立的有限性条件，因此对于 $k \geq \max(p, q) + r$，群 $\mathbb{H}^{k-1}\left(X, \mathcal{A}_p^\bullet \oplus \overline{\mathcal{A}_q^\bullet}\right)$ 是有限维的。此外，根据关于 X的拓扑假设， $\mathbb{H}^k(X, \mathbb{C}(p)) \simeq H^k(X, \mathbb{C})$是有限维的。因此，对于所有$k \geq \max(p, q) + r$， $\mathbb{H}^k\left(X, \mathcal{B}_{p,q}^\bullet\right)$ 都是有限维的，从而证明完成。□

我们强调，关于贝蒂数有限性的假设并非平凡。例如，任意非紧黎曼曲面都是Stein流形，因而是强1-凸的；然而，其第一贝蒂数可能是无限的。一个具体例子是从复平面 $\mathbb{C}$ 中去掉一个无限离散点集所得的空间。另一方面，根据 [Hor90, Theorem 5.2.7]，， n维Stein流形的贝蒂数满足 $b_k = 0$ 对所有$k \geq n+1$。

现在我们可以陈述主要结果了。

定理 3.3. 设 X 是一个维数为n 、具有有限贝蒂数的强 r-凸复流形，并假设 $p, q \geq r$。那么，*Bott–Chern* 上同调群 $H^{p,q}_{BC}(X)$ 是有限维的，并且与 $H^{n-p,n-q}_{A^c}(X)$ 的拓扑对偶典范同构。类似地，*Aeppli* 上同调群 $H^{p,q}_{A}(X)$ 是有限维的，并且与 $H^{n-p,n-q}_{BC^c}(X)$的拓扑对偶典范同构。

证明。 我们证明 Bott–Chern 陈述；Aeppli 情形类似。根据命题 2.5 和注 2.6， $H^{p,q}_{BC}(X)$ 可计算为$\mathcal{L}^{\bullet}_{p,q}$的整体截面复形的上同调，其中该复形是一个带有连续微分的 Fr´echet 空间复形。由引理 3.2，在假设p, $q \geq r$下，上同调群 $H^{p,q}_{BC}(X)$ 是有限维的。因此，前一个微分的像在其核中具有有限余维。由于 Fr´echet 空间之间连续线性映射的核是闭的，命题 2.4 表明，该微分是 Serre 意义下的同态。因此，命题 2.3 的假设对于 $\mathcal{L}^{\bullet}_{p,q}(X)$ 的相关三项子复形成立，并且 $H^{p,q}_{BC}(X)$ 的拓扑对偶与相应的对偶上同调群典范地同构。在微分形式与流之间的积分配对下，该对偶群为 $H^{n-p,n-q}_{A^c}(X)$。注意，在此情形下，上同调群是有限维的；因此，光滑形式到流的典范包含不仅诱导出复向量空间的同构，也诱导出拓扑向量空间的同构。

□

在 $r = 1$ 情形下，可以得到如下更强的对偶结论。

定理 3.4。 设 X 是一个维数为 n 的强1-凸复流形。假设 X 的贝蒂数是有限的。那么，对于所有 p、q、$H^{p,q}_{BC}$（X）是 $H^{n-p,n-q}_{A^c}$、（X）的拓扑对偶，而 $H^{p,q}_{A}$（X）是 $H^{n-p,n-q}_{BC^c}$、（X）的拓扑对偶。

证明。 根据定理 3.3，唯一剩下的情形是 $p = 0$ 或 $q = 0$。由复共轭对称性，只需考虑 $q = 0$。

在 Bott–Chern 情形下，引理 3.2 蕴含 $\mathbb{H}^{p+1}(X, \mathcal{B}^{\bullet}_{p,0})$ 是有限维的。为了应用命题 2.3，还需验证复形 $\mathcal{L}^{\bullet}$ 中的相关态射是一个同态。在此情形下，该态射化为

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}^{p,0}(X),$$

这是零映射，因此显然是一个同态，因为其到像的诱导映射是开映射（因为像是 $\{0\}$）。

在 Aeppli 情形下，对于 $p \geq 1$，引理 3.2 表明 $\mathbb{H}^{p+2}(X, \mathcal{B}^{\bullet}_{p+1,1})$ 是有限维的。为了应用命题 2.3，还需验证复形 $\mathcal{L}^{\bullet}$ 中相关的态射是一个同态。在这种情况下，该态射化简为

$$\mathcal{E}^{p-1,0}(X) \xrightarrow{\partial} \mathcal{E}^{p,0}(X).$$

考虑复形

$$\mathcal{E}^{p-1,0}(X) \xrightarrow{\partial} \mathcal{E}^{p,0}(X) \xrightarrow{\partial} \mathcal{E}^{p+1,0}(X).$$

通过复共轭得到的中间项处的上同调为

$$H^{p,0}_{\partial}(X) = \overline{H^{0,p}_{\bar{\partial}}(X)} = \overline{H^{p}(X, \mathcal{O}_X)},$$

根据定理 2.2，该上同调群对于 $p \geq 1$ 是有限维的。因此，该上同调群的有限维性意味着 Im(∂) 在 Ker(∂) $\subset \mathcal{E}^{p,0}(X)$ 中具有有限余维。由于 Ker(∂) 在 $\mathcal{E}^{p,0}(X)$ 中是闭的，因此它是一个 Fr´echet 空间。此外，对于 $p \geq 1$，像 Im(∂) 在 $\mathcal{E}^{p,0}(X)$ 中具有有限余维，因此它也是一个带有从 $\mathcal{E}^{p,0}(X)$ 诱导的拓扑的 Fr´echet 空间。因此，∂ 定义了 Serre 意义下的同态，命题 2.3 得以应用，从而完成了情形$p \geq 1$的证明。

在满足 $p = 0$ 的 Aeppli 情形中，为应用命题 2.3 而需要验证的复形 $\mathcal{L}^{\bullet}$ 中的态射归结为零映射，显然它是一个同态。

□

注 3.5。 根据 *[Ume93]* 和 *[Kaz84],* 的研究，*theta* 环面群的所有 *de Rham* 上同调和 *Dolbeault* 上同调都是有限维的。通过与上述相同的论证可以证明，紧支撑 *Bott–Chern* 上同调与 *Aeppli* 上同调之间的拓扑对偶，以及紧支撑 *Aeppli* 上同调与 *Bott–Chern* 上同调之间的拓扑对偶均成立，因为所有相关的 *Fr´echet* 映射都是同态，这是由于所涉及的所有上同调群都是有限维的。

正如 [Ser55 第 14], 节中已经指出的那样，一般而言，Dolbeault 上同调与紧支撑 Dolbeault 上同调之间不存在对偶关系。我们预期 Bott–Chern 上同调与 Aeppli 上同调也有类似现象。下文通过细化 Serre 的计算，给出两个反例，分别表明紧支撑 Bott–Chern 上同调与 Aeppli 上同调之间不存在对偶关系，以及

Bott–Chern 上同调与紧支撑 Aeppli 上同调之间不存在对偶关系。这一构造基于 Bott–Chern 上同调和 Aeppli 上同调的超上同调描述，以及对 Hodge–de Rham 谱序列的详细分析，并细化了 [Ser55 第 14]节中的论证。为方便读者，我们比 [Ser55 第 14]，节提供了更多细节，尽管这些考量对专家而言早已熟知。

4 反例

我们回顾 Serre 关于 Dolbeault 上同调（包括紧支撑与非紧支撑情形）的如下计算。同样的论证也适用于 X $\mathbb{C}^2$ 中任意非紧致连通闭子集的补集，只要该闭子集不是全纯域，且不含二维紧致不可约分支。下文中，我们选择同伦类型较简单的不同闭子集，以便分析 Hodge–de Rham谱序列，并展示对偶失效的两种不同类型。

我们先讨论通常的 Dolbeault 上同调。由于全纯微分形式的层是局部自由的，只需确定以下上同调群

$$H^1(X, \mathcal{O}_X) \quad \text{and} \quad H^2(X, \mathcal{O}_X).$$

首先，根据 Malgrange 的一个定理（例如参见 [agbook，第 IX 章，推论 (4.15)]），有

$$H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0.$$

我们还回顾 [Gun90，第 G 节，定理 14] 中关于全纯域的如下拓扑判据定理。

如果 D 是 $\mathbb{C}^n$ 的开子集，且 $H^{0,\,q}(D) = 0$ 对于 $1 \leq q \leq n-1$ 成立，那么 D 是一个全纯域。

在当前情形下，该定理意味着 $H^1(X,\ \mathcal{O}_X) \neq 0$。

现在我们来确定紧支撑 Dolbeault 上同调。由于 X 非紧，我们有

$$H^0_c(X, \mathcal{O}_X) = H^0_c(X, \Omega^1_X) = H^0_c(X, \Omega^2_X) = 0.$$

按照 [Ser55]，，考虑由分解 $\mathbb{C}^2 = X \cup (\mathbb{C}^2 \setminus X)$ 所关联的紧支撑上同调长正合列：

$$H^0_c(\mathbb{C}^2 \setminus X, \mathcal{O}) \longrightarrow H^1_c(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow H^1_c(\mathbb{C}^2, \mathcal{O}).$$

由于 $\mathbb{C}^2 \setminus X$ 是非紧连通的，我们有 $H_c^0(\mathbb{C}^2 \setminus X, \mathcal{O}) = 0$；又由于 $\mathbb{C}^2$ 是 Stein,

$$H_c^1(\mathbb{C}^2, \mathcal{O}) = 0,$$

根据 [Ser55，定理 3]。由此可得

$$H_c^1(X, \mathcal{O}_X) = 0.$$

同样的结论也适用于全纯微分形式，因此

$$H_c^1(X, \mathcal{O}_X) = H_c^1(X, \Omega_X^1) = H_c^1(X, \Omega_X^2) = 0.$$

现在我们选取两个不同的闭子集，以展示两种不同类型的对偶失效。

4.1 实直线的补集

设 $X \subset \mathbb{C}^2$ 为实直线的补集。那么 X 与 S^2同伦等价。特别地，其贝蒂数为

$$b_0 = 1, \qquad b_1 = 0, \qquad b_2 = 1, \qquad b_3 = 0, \qquad b_4 = 0.$$

根据庞加莱对偶，相应的紧支撑贝蒂数也由此确定。

现在我们验证 X 不是全纯域。事实上，由于 Serre 对偶对 X 不成立，$H^1(X, \mathcal{O}_X)$ 是无限维的（参见 [Ser55，第 ′ 定理 2、命题 6、节 14]）。

根据莱维问题的解（例如，参见 [agbook，第一章定理 (6.11)、(7.2) 以及第八章定理 (9.11)]），伪凸性等价于为全纯域。因此，要证明 X 不是全纯域，只需考察定义性耗尽函数的 Levi 形式。在此情形下，我们考虑到边界的距离函数,

$$\phi(z_1, z_2) = -\log\bigl(x_1^2 + |z_2|^2\bigr), \qquad z_1 = x_1 + \sqrt{-1}y_1,\ z_2 \in \mathbb{C},$$

并令

$$\rho := x_1^2 + |z_2|^2$$

使得实直线由 $\{x_1 = z_2 = 0\}$ 定义。回顾一下,

$$\frac{\partial}{\partial z_1} = \tfrac{1}{2}\Bigl(\frac{\partial}{\partial x_1} - \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y_1}\Bigr), \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} = \tfrac{1}{2}\Bigl(\frac{\partial}{\partial x_1} + \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y_1}\Bigr).$$

由于 ρ 与 y_1 独立,

$$\partial_{z_1}\rho = \partial_{\bar{z}_1}\rho = x_1, \qquad \partial_{z_2}\rho = \bar{z}_2, \quad \partial_{\bar{z}_2}\rho = z_2.$$

ϕ的一阶导数为

$$\partial_{z_1}\phi = -\frac{x_1}{\rho}, \qquad \partial_{z_2}\phi = -\frac{\bar{z}_2}{\rho}.$$

二阶导数计算如下:

$$\begin{aligned}
\phi_{1\bar{1}} &= \partial_{\bar{z}_1}\left(-\frac{x_1}{\rho}\right) = -\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{\rho} - \frac{2x_1^2}{\rho^2}\Big) = \frac{x_1^2 - |z_2|^2}{2\rho^2},\\
\phi_{1\bar{2}} &= \partial_{\bar{z}_2}\left(-\frac{x_1}{\rho}\right) = \frac{x_1 z_2}{\rho^2},\\
\phi_{2\bar{1}} &= \partial_{\bar{z}_1}\left(-\frac{\bar{z}_2}{\rho}\right) = \frac{x_1 \bar{z}_2}{\rho^2},\\
\phi_{2\bar{2}} &= \partial_{\bar{z}_2}\left(-\frac{\bar{z}_2}{\rho}\right) = -\frac{1}{\rho} + \frac{|z_2|^2}{\rho^2} = -\frac{x_1^2}{\rho^2}.
\end{aligned}$$

因此，复 Hessian 矩阵（$\phi_{j\bar{k}}$）为

$$(\phi_{j\bar{k}}) = \frac{1}{\rho^2}\begin{pmatrix} \dfrac{x_1^2 - |z_2|^2}{2} & x_1 z_2 \\ x_1 \bar{z}_2 & -x_1^2 \end{pmatrix}$$

其行列式 $\det(\phi_{j\bar{k}}) = -\frac{x_1^2}{2\rho^3} \circ$ 特别地，Levi 形式并非处处半正定；因此，X 不是伪凸的，也就不是全纯映射域。

现在我们回到 Bott–Chern 和 Aeppli 上同调的计算。特别地，我们关注以下群

$$H^{1,1}_{A,c}(X) \quad \text{and} \quad H^{1,1}_{BC}(X).$$

根据将 Bott–Chern 上同调与 de Rham 上同调和 Dolbeault 上同调联系起来的长正合序列 (1),

$$H^1(X,\mathbb{C}) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X \oplus \overline{\mathcal{O}}_X) \longrightarrow H^{1,1}_{BC}(X) \longrightarrow H^2(X,\mathbb{C}) \longrightarrow H^2(X, \mathcal{O}_X \oplus \overline{\mathcal{O}}_X),$$

并利用

$$H^1(X,\mathbb{C}) = 0, \qquad H^2(X,\mathcal{O}_X) = 0,$$

由此可得

$$\dim H^{1,1}_{BC}(X) \geq \dim H^2(X,\mathbb{C}) = 1,$$

事实上

$$\dim H^{1,1}_{BC}(X) \geq 3,$$

因为 $H^1(X,\mathcal{O}_X) \neq 0$（它事实上是无限维的）。

接下来，考虑紧支撑 Aeppli 上同调。由长正合列

$$\mathbb{H}^2_c(X,\mathcal{O}_X \to \Omega^1_X) \oplus \mathbb{H}^2_c(X,\overline{\mathcal{O}}_X \to \overline{\Omega}^1_X) \longrightarrow H^{1,1}_{A,c}(X) \longrightarrow H^3_c(X,\mathbb{C}),$$

并且由于 $H^3_c(X,\mathbb{C}) = 0$，我们得到一个满射，映到 $H^{1,1}_{A,c}(X)$。

为了估计超上同调项，考虑正合序列

$$H^1_c(X,\Omega^1_X) \longrightarrow \mathbb{H}^2_c(X,\mathcal{O}_X \to \Omega^1_X) \longrightarrow H^2_c(X,\mathcal{O}_X) \longrightarrow H^2_c(X,\Omega^1_X).$$

由于 $H^1_c(X,\Omega^1_X) = 0$，因此得到

$$\mathbb{H}^2_c(X,\mathcal{O}_X \to \Omega^1_X) = \mathrm{Ker}\big(H^2_c(X,\mathcal{O}_X) \to H^2_c(X,\Omega^1_X)\big).$$

现在考虑带紧支撑的 Hodge–de Rham谱序列。由双次数可知，对于 $r \geq 3$，所有微分 d_r 都消失，因为 $\dim X = 2$。特别地，影响 $E^{0,2}$ 的唯一可能非零微分是 d_2。此外，

$$\mathbb{H}^2_c(X,\mathcal{O}_X \to \Omega^1_X) = E_2^{0,2}.$$

由于

$$E_1^{2,1} = H^1_c(X,\Omega^2_X) = 0,$$

我们有 $E^{2,1}_2 = 0$，因此微分

$$d_2 \colon E_2^{0,2} \to E_2^{2,1}$$

消失。因此，

$$E_2^{0,2} = E_\infty^{0,2}$$

嵌入 $H^2_c(X,\mathbb{C})$ 中，而后者是一维的。由此可得

$$\dim H^{1,1}_{A,c}(X) \leq 2.$$

比较维数后，我们得出结论： $H^{1,1}_{A,c}(X)$ 和 $H^{1,1}_{BC}(X)$ 不能互为拓扑对偶。

4.2 全实平面的补集

现在我们给出 Serre 的例子的一个变体，以补充前面的讨论。在上一段中，我们考察了无紧支撑的 Bott–Chern 上同调和具有紧支撑的 Aeppli 上同调，而当前的例子则展示了相反的现象。

设 $X = \mathbb{C}^2 \setminus \mathbb{R}^2$，其中 $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{C}^2$ 是标准的全实平面。则 X 与 S^1 同伦等价，因此其贝蒂数为

$$b_0 = 1, \qquad b_1 = 1, \qquad b_2 = b_3 = b_4 = 0.$$

该区域可以写成管状区域

$$X = (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) + \sqrt{-1}\mathbb{R}^2.$$

由于 $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ 不是凸集，Bochner 管状定理（例如参见 [Hor90，定理 2.5。10]）推出 X 不是全纯域。

与前面的例子相反，我们发现，具有紧支撑的 Bott–Chern 上同调在双次数 (1，1) 中消失，而相应的不带紧支撑的 Aeppli 上同调则非平凡。

事实上，由长正合列

$$\cdots \to H^1_c(X, \mathcal{O}_X \oplus \overline{\mathcal{O}}_X) \to H^{1,1}_{BC,c}(X) \to H^2_c(X, \mathbb{C}) \to \cdots,$$

再结合其消失

$$H^1_c(X, \mathcal{O}_X) = 0, \qquad H^2_c(X, \mathbb{C}) = 0,$$

我们推得

$$H^{1,1}_{BC,c}(X) = 0.$$

另一方面，如前一段所述，Aeppli 上同调可以用复形 $\mathcal{O}_X \to \Omega^1_X$ 的超上同调来描述。

由 Aeppli 上同调所对应的长正合列可得，

$$H^2(X, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{H}^2(X, \mathcal{O}_X \to \Omega^1_X) \oplus \mathbb{H}^2(X, \overline{\mathcal{O}}_X \to \overline{\Omega}^1_X) \longrightarrow H^{1,1}_A(X) \longrightarrow H^3(X, \mathbb{C}),$$

并利用以下事实

$$H^2(X, \mathbb{C}) = 0, \qquad H^3(X, \mathbb{C}) = 0,$$

我们得到一个同构

$$H^{1,1}_A(X) \simeq \mathbb{H}^2(X, \mathcal{O}_X \to \Omega^1_X) \oplus \mathbb{H}^2(X, \overline{\mathcal{O}}_X \to \overline{\Omega}^1_X).$$

接下来，考虑与复形 $\mathcal{O}_X \to \Omega_X^1$ 相关的超上同调长正合列：

$$H^1(X,\mathcal{O}_X) \longrightarrow H^1(X,\Omega_X^1) \longrightarrow \mathbb{H}^2(X,\mathcal{O}_X \to \Omega_X^1) \longrightarrow H^2(X,\mathcal{O}_X).$$

由于 $H^2(X,\ \mathcal{O}_X) = 0$，因此

$$\mathbb{H}^2(X,\mathcal{O}_X \to \Omega_X^1) = \mathrm{Coker}\big(H^1(X,\mathcal{O}_X) \to H^1(X,\Omega_X^1)\big).$$

现在考虑与 X 的多尔博复形相关联的 Hodge–de Rham谱序列。由双次数的原因，对于 $r \geq 3$，所有微分 d_r 均为零，因此该谱序列在第 E_3 页退化。此外，$E^{1,\ 1}_2 = E^{1,\ \infty}_1$，并且该群作为子空间嵌入 $H^2(X,\ \mathbb{C})$。由于 $H^2(X,\ \mathbb{C}) = 0$，因此

$$E_2^{1,1} = E_\infty^{1,1} = 0.$$

由此得到如下同一关系

$$\mathrm{Im}\big(H^1(X,\mathcal{O}_X) \to H^1(X,\Omega_X^1)\big) = \mathrm{Ker}\big(H^1(X,\Omega_X^1) \to H^1(X,\Omega_X^2)\big).$$

因此，

$$\begin{aligned}\mathrm{Coker}\big(H^1(X,\mathcal{O}_X) \to H^1(X,\Omega_X^1)\big) &= H^1(X,\Omega_X^1)\Big/\mathrm{Ker}\big(H^1(X,\Omega_X^1) \to H^1(X,\Omega_X^2)\big)\\ &\simeq \mathrm{Im}\big(H^1(X,\Omega_X^1) \to H^1(X,\Omega_X^2)\big).\end{aligned}$$

另一方面，根据第 E_1 页的定义，

$$E_1^{0,2} = H^2(X,\mathcal{O}_X) = 0,$$

因此 $E^{0,\ 2}_2 = 0$. 故微分

$$d_2 \colon E_2^{0,2} \longrightarrow E_2^{2,1}$$

恒等于零，因此我们得到

$$E_2^{2,1} = E_3^{2,1} = E_\infty^{2,1} = 0.$$

最后，由于

$$E_1^{2,1} = H^1(X,\Omega_X^2) \neq 0,$$

并且由于没有进一步的微分可以消去这一项，我们有

$$\mathrm{Im}\big(H^1(X,\Omega_X^1) \to H^1(X,\Omega_X^2)\big) = \mathrm{Ker}\big(H^1(X,\Omega_X^2) \to H^1(X,\Omega_X^3)\big) = H^1(X,\Omega_X^2) \neq 0.$$

因此，

$$H_A^{1,1}(X) \neq 0.$$

参考文献

[Aep62] Alfred Aeppli, 《Stein 流形的上同调结构》, 《复分析会议论文集》, 第114卷。施普林格, 柏林、海德堡, 58–70页。[agbook] Jean-Pierre Demailly, 《复分析与微分几何》, 在线著作, https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/ demailly/manuscripts/agbook.pdf[AG62] Aldo Andreotti、Hans Grauert, 《复空间上同调的有限性定理》, 《法国数学会公报》, 90（1962）, 193–259页。[BC65] Raoul Bott、陈省身, 《厄米向量丛及其全纯截面的零点等分布》, 《数学学报》, 114（1965）, 71–112页。[Gun90] Robert Clifford Gunning, 《多变量全纯函数导论》, 第I卷, Wadsworth and Brooks/Cole, 加利福尼亚（1990）。[Hor90] Lars H¨ormander, 《多变量复分析导论》, 第1版, Elsevier Science Pub., 纽约, 1966; 第3次修订版, 《North-Holland数学图书馆》第7卷, 阿姆斯特丹（1990）。[Kaz84] Hadeaki Kazama, (H,C)-群的∂-上同调, 《数学科学研究所刊物》, 20（1984）, 297–317页。[Sch07]Michel Schweitzer, 《关于Bott–Chern上同调》, arXiv:math.AG/0709.3528, （2007）, 28页, 博士研究项目的一部分。[Ser55] Jean-Pierre Serre, 《一个对偶定理》, 《海尔维第数学评论》, 29（1955）, 9–26页。[Ume93]Takashi Umeno, 《环面群的 de Rham 上同调与复线丛的陈类》, 《釜山庆南数学杂志》, 9 (1993）, 第2期, 295–311页。日本大阪公立大学理学研究生院数学系, 大阪市杉本3-3-138, 邮编558-8585。电子邮箱: xiaojun.wu@univ-cotedazur.fr; y25161q@omu.ac.jp。