arXiv:2601.03538v1 [math.CV] 7 Jan 2026

实解析映射的归一化米尔诺纤维化

´何塞·路易斯·西斯内罗斯-莫利纳和奥雷利奥·梅内贡

Abstract. Milnor 纤维化定理及其推广，在研究复解析和实解析映射的奇点时发挥着核心作用。在复解析情形中，球面上的米尔诺纤维化总是由归一化映射 $f/|f|$ 给出。相比之下，对于实解析映射，即使管上存在 Milnor–Lê 纤维化，这种归一化米尔诺纤维化通常也未必存在。

对于具有孤立临界值的局部满射实解析映射 $f\colon(\mathbb{R}^n,\,0)\to(\mathbb{R}^k,\,0)$，在横截条件下，管上的 Milnor–Lê 纤维化必定存在。然而，除非施加额外的正则性条件（d-正则性），否则球面上相应的纤维化未必由归一化映射 $f/\|f\|$ 给出。

本文证明，这种表面上的障碍并非本质。更确切地说，我们证明，对于任何满足横截性条件的此类映射，都存在目标空间的一个同胚$h\colon(\mathbb{R}^k,0)\to(\mathbb{R}^k,0)$，使得复合映射$h^{-1}\circ f$变为 d-正则。因此，归一化映射

$$\frac{h^{-1}\circ f}{\|h^{-1}\circ f\|}\colon \mathbb{S}^{n-1}_{\varepsilon}\setminus f^{-1}(0)\longrightarrow\mathbb{S}^{k-1}$$

定义了一个光滑局部平凡纤维化。该纤维化同时等价于管上的米尔诺–莱纤维化和球面上的米尔诺纤维化。

我们的结果揭示，实解析奇点与复解析奇点在拓扑上比以往所认识到的更为接近，同时不改变奇点的拓扑类型。

1. 引言

Milnor 纤维化定理在复解析函数奇点的研究中起着核心作用，例如，参见 [5]，了解其起源、推广及其与其他数学分支的联系。对于每个在原点处有临界点的全纯函数 $f\colon(\mathbb{C}^n,0)\to(\mathbb{C},0)$，它关联了一个局部平凡的 $0\in\mathbb{C}^n$

纤维化 [11, 定理 4.8], 称为 米尔诺纤维化，定义为

$$\frac{f}{|f|}\colon \mathbb{S}_\varepsilon \setminus f^{-1}(0) \to \mathbb{S}^1, \tag{1}$$

其中 $\mathbb{S}_\varepsilon$ 是围绕 $0 \in \mathbb{C}^n$的一个足够小的球面。

还有第二种局部平凡纤维化，称为米尔诺-莱纤维化，其全空间是一个米尔诺管

$$T_{\varepsilon,\delta}(f) := \mathbb{B}_\varepsilon \cap f^{-1}(\mathbb{S}^1_\delta),$$

其中 $\mathbb{B}_\varepsilon$ 是由球面 $\mathbb{S}_\varepsilon$ 围成的球， $\mathbb{S}^1_\delta$ 是以 $\mathbb{C}$的原点为圆心、半径为 δ 的圆，底空间为 $\mathbb{S}^1_\delta$，也就是说，当 $0 < \delta \ll \varepsilon$ 时，该限制

$$f\colon T_{\varepsilon,\delta}(f) \to \mathbb{S}^1_\delta \tag{2}$$

是一个局部平凡纤维化。当 f 在 $0 \in \mathbb{C}^n$ 处有孤立临界点时，其存在性由米尔诺通过 [11,定理 11.2] 证明；一般情形下，莱在 [9, 定理 (1.1)] 中证明了这一点。两者均使用了带边界流形的埃雷斯曼纤维化定理。

纤维化 (1) 和 (2) 是等价的，这一点通过一个定义在 $\mathbb{B}_\varepsilon \setminus f^{-1}(0)$ 上的光滑向量场得以证明，该向量场由米尔诺在 [11, 引理 5。4] 中构造，用来将米尔诺管“膨胀”至球面；也就是说，沿着向量场的流，可以得到米尔诺管与球面上链环某个邻域之补集之间的微分同胚。该向量场具有以下性质：

1. 它与包含在 $\mathbb{B}_\varepsilon$ 中、以原点为中心的球面横截；2. 它与米尔诺管横截；3. 给定此类向量场的一条积分曲线 $p(t)$， $^{f}{}_{(p\ (t)\ \|f\ (p\ (t)\ \|}$ 是一个常值点 $\theta \in \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$，也就是说， $p(t)$ 在 $\mathbb{C}$ 中投影到经过 $\theta \in \mathbb{S}^1$ 的射线 $\mathcal{L}_\theta$ 上，该射线由 0 出发。

参见 [1]，其中证明了米尔诺纤维化定理、米尔诺–莱纤维化定理以及这两种纤维化的等价性，并着重阐述其中涉及的微分拓扑思想。

米尔诺还证明了实解析映射的纤维化定理

$$f\colon (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^k, 0), \qquad 2 \le k \le n,$$

在 $0 \in \mathbb{R}^n$ 处具有孤立临界点。首先，他证明了在米尔诺管 $T_{\varepsilon,\ \delta}(f) := \mathbb{B}^n_\varepsilon \cap f^{-1}(\mathbb{S}^{k-1}_\delta)$（米尔诺–莱纤维化）[10, 定理 2] 或 [11, 定理 11。2]上存在局部平凡纤维化

$$f\colon T_{\varepsilon,\delta}(f) \to \mathbb{S}^{k-1}_\delta, \tag{3}$$

其中，$\mathbb{S}^{k-1}_\delta$ 是以 $0 \in \mathbb{R}^k$ 为中心、半径为 δ 的球面，且 $0 < \delta \ll \varepsilon$。随后，他证明了在球面 $\mathbb{S}^{n-1}_\varepsilon = \partial\mathbb{B}^n_\varepsilon$ 上存在一个局部平凡的

纤维化

$$\varphi_M : \mathbb{S}_\varepsilon^{n-1} \setminus f^{-1}(0) \longrightarrow \mathbb{S}^{k-1}, \tag{4}$$

在 $\mathbb{B}_\varepsilon^n \setminus f^{-1}(0)$ 上构造一个向量场，使其与以原点为中心、包含于 $\mathbb{B}_\varepsilon^n$ 中的球面横截，并且与米尔诺管横截，从而将米尔诺管“膨胀”至球面 [11,引理 11。3]。这些纤维化定理存在一些不足：具有孤立临界点的映射 f 高度非一般，因此很难找到实例；投影 φ_M 无法明确描述，而且一般而言，映射并不

$$\frac{f}{\|f\|} : \mathbb{S}_\varepsilon^{n-1} \setminus f^{-1}(0) \longrightarrow \mathbb{S}^{k-1} \tag{5}$$

是局部平凡纤维化的投影 [11, 页 99]，因为它一般不是下沉映射，而下沉映射是成为光滑纤维丛的必要条件。当映射 (5) 是局部平凡纤维化时，[12] 作者称 f 满足强米尔诺条件；他们给出了这类映射的实例，并研究了该条件在 f的扰动下的稳定性。当 (5) 是局部平凡纤维化时，我们称其为归一化米尔诺纤维化。

在 [6] 中，当 $f\colon (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^k, 0)$ 是一个在 $0 \in \mathbb{R}^k$ 处具有孤立临界值、且满足以下横截性条件的局部满射实解析映射时，米尔诺–莱纫化纤维化 (3) 得到了推广：存在一个实心米尔诺管 $\widehat{T}_{\varepsilon,\delta}(f) := \mathbb{B}_\varepsilon^n \cap f^{-1}(\mathbb{B}_\delta^k)$，其中$0 < \delta \ll \varepsilon$，使得管内的所有纤维都与 $\mathbb{S}_\varepsilon^{n-1}$ 横截，从而可以对带边界流形应用埃雷斯曼纤维化定理 [6, 定理 5.1, 注 5.7]。在管上得到纤维化后，可以使用米尔诺向量场将管扩张至球面，从而在球面上得到纤维化 (4)，但其投影不一定是 $\frac{f}{\|f\|}$。在 [6, 定义 2.4] 中引入了 d-正则性的概念，并在 [6, 命题 3.2(4)] 中证明，f 是 d-正则的，当且仅当映射 (5) 是一个下沉映射，因此 d-正则性是 (5) 成为纤维丛的必要条件。另一方面，在 [6, 2, 3]中也证明了，f 是 d-正则的，当且仅当存在一个定义在 $\mathbb{B}_\varepsilon^n \setminus f^{-1}(0)$ 上、满足性质 1 、 2 和 3 的向量场；这意味着将米尔诺管 “ 扩张 ” 至球面后，映射 (5) 是一个与纤维丛 (3) 等价的纤维丛。因此， d- 正则性是 f 具有归一化米尔诺纤维化 (5) 的充要条件。在这种情况下，我们也有纤维化 (4)，它与纤维化 (5) 等价，因为二者都与纤维化 (3) 等价。

然而，许多满足横截性且具有孤立临界值的局部满射实解析映射并不是 d-正则的。

本文的主要目的是说明，通过对目标空间进行适当的坐标变换，总能消除这一表面上的障碍。更确切地说，目标空间上总存在一个适当的同胚映射 h，使得复合映射 $f_h := h^{-1} \circ f$ 是d-正则的，即它具有如下形式的归一化米尔诺纤维化

$$\frac{f_h}{\|f_h\|} \colon \mathbb{S}^{n-1}_{\varepsilon} \setminus f^{-1}(0) \longrightarrow \mathbb{S}^{k-1}. \tag{6}$$

本工作的一个令人惊讶之处在于，它揭示了实情形与复情形之间的关系比以往预想的密切得多。在复解析情形中，米尔诺证明，球面上的纤维化（1）总是由归一化映射给出的$f/|f|$。相比之下，人们早已认识到，在实解析情形中，除非施加严格的正则性条件，否则通常无法得到如此简单的描述。我们的结果表明，这种差异实际上并不像表面上看起来那样根本。

值得强调的是，这种修改不会改变映射的奇点类型，因为映射 f_h 与 f 在拓扑意义下 $\mathcal{A}$ 等价；这是通过与目标空间上的一个同胚复合得到的。

本工作的主要创新在于指出，在实解析情形中，归一化米尔诺纤维化所面临的障碍并非内在的，而是总能通过对目标空间进行适当的拓扑坐标变换予以消除。从拓扑观点来看，这表明实解析映射的归一化米尔诺纤维化失效并非真正的障碍，而只是所选目标坐标造成的表象。因此，实解析米尔诺纤维化实际上比以往预想的更接近复情形。据我们所知，这是首个确保具有孤立临界值的实解析映射存在归一化米尔诺纤维化的一般性结果。

更确切地说，我们证明如下结果。

定理。设 $f\colon (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^k, 0)$，其中 $2 \le k \le n$ 是一个局部满射的实解析映射，并且在0处具有孤立临界值。此外，假设 f 满足横截性。则存在一个同胚

$$h\colon (\mathbb{R}^k, 0) \to (\mathbb{R}^k, 0)$$

使得该映射

$$\frac{h^{-1} \circ f}{\|h^{-1} \circ f\|} \colon \mathbb{S}^{n-1}_{\varepsilon} \setminus f^{-1}(0) \longrightarrow \mathbb{S}^{k-1},$$

是光滑局部平凡纤维化。此外，该纤维化既等价于管上的米尔诺–莱纤维化(3)，也等价于球面上的米尔诺纤维化(4)。

按照 [4], 定理1 的术语，这意味着上述每个解析映射芽都是 d_h-正则的，对于适当的锥形同胚 h而言。特别地，这为 [4,问题3。10]提供了肯定的回答。

2. The d_h-regularity for analytic maps with isolated critical value

本节中，我们回顾 [4] 中的一些定义和结果，这些内容扩展了 d-正则性的概念，使某些映射在目标空间上经过同胚后可以变为 d-正则。随后，我们将这些结果应用于具有孤立临界值的实解析映射。

给定 $\eta > 0$，对每个点 $\theta \in \mathbb{S}^{k-1}_\eta$，集合 $\mathcal{L}_\theta \subset \mathbb{R}^k$ 是从原点出发并以点 θ 为终点的直线开线段（但不包含这两个点）。

我们称一个同胚

$$h\colon (\mathbb{R}^k, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^k, 0)$$

是一个锥形同胚，如果存在 $\eta_0 > 0$ ，使得对每个满足 $0 < \eta < \eta_0$ 的 η，其限制

$$h\colon \mathbb{B}^k_\eta \to h(\mathbb{B}^k_\eta)\,,$$

满足以下条件：

(i) 对每个 $\theta \in \mathbb{S}^{k-1}_\eta$，像 $h(\mathcal{L}_\theta)$ 是 $\mathbb{R}^k$ 中的一条光滑路径 ；

(ii) h 的逆映射 h^{-1} 在原点之外是光滑的；(iii) 映射 h^{-1} 在原点之外是下沉映射。

为简化记号，我们令 $\mathcal{B}^k_\eta := h(\mathbb{B}^k_\eta)$， $\mathcal{S}^k_\eta := h(\mathbb{S}^k_\eta)$，

$$\mathcal{C}_\theta := h(\mathcal{L}_\theta), \quad \text{and} \quad E_\theta := f^{-1}(\mathcal{C}_\theta)$$

对每个 $\theta \in \mathbb{S}^{k-1}_\eta$。

现在设 $f\colon (\mathbb{R}^n,0) \to (\mathbb{R}^k,0)$，其中 $2 \le k \le n$，是一个具有孤立临界值且满足横截性性质的局部满射解析映射芽。根据 [6, 定理 5.1、注 5.7] ，存在 $0 < \delta \ll \varepsilon$ ，使得在一个米尔诺管上存在米尔诺–勒纤维化

$$f\colon T_{\varepsilon,\delta}(f) \to \mathbb{S}^{k-1}_\delta. \tag{7}$$

固定米尔诺管 $T_{\varepsilon,\,\delta}(f)$，并将 $\mathring{T}_{\varepsilon,\,\delta}(f) := \mathbb{B}^n_\varepsilon \cap f^{-1}(\mathring{\mathbb{B}}^k_\delta)$ 记为开实心米尔诺管。设 $h\colon \mathbb{B}^k_\eta \to \mathcal{B}^k_\eta$ 为锥形同胚，并令 $f_h := h^{-1}\circ f$。若 $\varepsilon > 0$ 足够小（且 $f(\mathbb{B}^n_\varepsilon) \subset \mathring{\mathcal{B}}^k_{\eta_0}$） ，使得对于每个满足 $0 < \varepsilon' \le \varepsilon$ 的 ε'

球面 $\mathbb{S}^{n-1}_{\varepsilon'}$ 与 E_θ 横截（只要这种交集非空），且对每个 $\theta \in \mathbb{S}^{k-1}_{\eta}$，在每个点 $p \in \mathbb{B}^n_\varepsilon \setminus \mathring{T}_{\varepsilon,\,\delta}(f)$ 处均如此。

在这种情况下，根据 [4, 定理 3。12] 映射

$$\frac{f_h}{\|f_h\|} \colon \mathbb{S}^{n-1}_{\varepsilon} \setminus f^{-1}(0) \to \mathbb{S}^{k-1} \tag{8}$$

是一个光滑局部平凡纤维化的投影。

注记 2.1。 注意，前面给出的 d_h-正则性定义略弱于 [4, §32]中的定义，因为我们只要求 E_θ 与球面 在 开实心米尔-$^\circ$诺管 $T_{\varepsilon\text{之外}\delta}(f)$ 的横截性，不过这足以证明米尔诺-莱纤维化（7）与归一化米尔诺纤维化（8）的等价性。 [4, 定理 2.16], 因为我们只需要在开实心米尔诺管之外定义向量场，将米尔诺管“膨胀”至球面。事实上，我们可以取一个稍小的开实心米尔诺管，这样米尔诺管的边界点 $T_{\varepsilon,\delta}(f)$ 就不会给向量场的定义带来任何麻烦。

现在来说明纤维化（8）等价于纤维化（3），也等价于上面的纤维化（4）。事实上，由（[4,定理 2。16]）可知，（8）等价于如下纤维化

$$f_h \colon \mathbb{B}^n_\varepsilon \cap f_h^{-1}(\mathbb{S}^{k-1}_{\delta'}) \to \mathbb{S}^{k-1}_{\delta'}\,.$$

但显然，这最后一个纤维化等价于

$$f \colon \mathbb{B}^n_\varepsilon \cap f^{-1}(\mathcal{S}^{k-1}_{\delta'}) \to \mathcal{S}^{k-1}_{\delta'}\,. \tag{9}$$

因此，只需证明纤维化（9）等价于该纤维化

$$f \colon \mathbb{B}^n_\varepsilon \cap f^{-1}(\mathbb{S}^{k-1}_{\delta''}) \to \mathbb{S}^{k-1}_{\delta''} \tag{10}$$

对某个充分小的球面，使得 $\mathbb{S}^{k-1}_{\delta''} \subset \mathbb{B}^k_\delta$。但这可由下一个引理推出，其中用到了实心米尔诺管 [6, 命题 5。1]:

引理 2.2。 考虑由 f 诱导的实心管上的纤维化

$$f| \colon \mathbb{B}^n_\varepsilon \cap f^{-1}(\mathring{\mathbb{B}}^k_\delta \setminus \{0\}) \to (\mathring{\mathbb{B}}^k_\delta \setminus \{0\})\,, \tag{11}$$

并注意到 $\pi_{k-1}\left(\mathring{\mathbb{B}}^k_\delta \setminus \{0\}\right) \cong \mathbb{Z}$。令 $\tilde{g}$、$\tilde{h}$: $\mathbb{S}^{k-1} \to \mathring{\mathbb{B}}^k_\delta \setminus \{0\}$ 为两个连续嵌入，使得二者都表示$\pi_{k-1}\left(\mathring{\mathbb{B}}^k_\delta \setminus \{0\}\right)$ 的生成元。于是限制

$$f| \colon \mathbb{B}^n_\varepsilon \cap f^{-1}\big(g(\mathbb{S}^{k-1})\big) \to g(\mathbb{S}^{k-1}) \tag{12}$$

and

$$f|\colon \mathbb{B}^n_\varepsilon \cap f^{-1}\big(h(\mathbb{S}^{k-1})\big) \to h(\mathbb{S}^{k-1}) \tag{13}$$

是等价纤维化。

证明。对于仿紧空间，局部平凡纤维化是同伦不变量；也就是说，同伦映射上的拉回给出等价的纤维丛（例如参见 [8, §4 定理 9。8] 再加上化归到˜主丛情形）。由于 $\tilde{g}$ 和 h同伦，纤维丛（11）沿 $\tilde{g}$ 和 h 的拉回彼此等价。由于 $\tilde{g}$ 和 h 是嵌入，这些拉回分别等价于限制（12）和（13）。□

因此，我们证明了以下结论：

命题 2.3。设 $f\colon (\mathbb{R}^n,0) \to (\mathbb{R}^k,0)$ 是一个具有孤立临界值且满足横截性条件的局部满射解析映射。若 $h\colon (\mathbb{R}^k,0) \to (\mathbb{R}^k,0)$ 是一个锥形同胚，使得f 是 d_h-正则的，则映射

$$\frac{h^{-1}\circ f}{\|h^{-1}\circ f\|}\colon \mathbb{S}^{n-1}_\varepsilon \setminus f^{-1}(0) \to \mathbb{S}^{k-1} \tag{14}$$

是一个光滑局部平凡纤维化的投影。此外，该纤维化与纤维化 (3) 以及纤维化 (4)拓扑等价。

由此立即得到：

推论 2.4. 命题(14) 中的局部平凡纤维化*2.3above* 不依赖于所选的锥形同胚 h*(*只要 f 是 d_h-正则的*)*，其纤维丛在拓扑等价意义下不变。

这意味着，通过寻找不同的锥形同胚 h 使得 f 是d_h-正则，我们无法得到球面上的不同纤维化。

我们以一个例子结束本节：

例 2.5. 考虑映射 $f\colon (\mathbb{R}^3,0) \to (\mathbb{R}^2,0)$，其定义如下

$$f(x,y,z) = (x^2z + y^3 - z, x)\,.$$

它具有一个孤立临界点，因此具有横截性。利用 [7], 的命题 3.8，可以验证 f 并非 d-正则。事实上，矩阵 M （定义见该命题）在每个形如 $(x,0,0)$ 的点处的秩都小于 2。因此，映射 $\mathbb{S}^{n-1}_\varepsilon \setminus f^{-1}(0) \to \mathbb{S}^1$由 $\phi(x) := \frac{f}{\|f\|}$ 并非管上与米尔诺–莱纤维化等价的纤维化的投影。

给定 $\eta > 0$，考虑由下式给出的锥形同胚 $h : \mathbb{B}^2_\eta \to \mathbb{B}^2_\eta$

$$h(y_1, y_2) = \begin{cases} \eta \left[\begin{array}{c} \frac{1}{\sqrt{1+(y_2/y_1)^2}} \exp\left(1 - \frac{\eta}{\sqrt{y_1^2+y_2^2}}\right) \\ \frac{y_2/y_1}{\sqrt{1+(y_2/y_1)^2}} \exp\left(\frac{1}{2} - \frac{\eta}{2\sqrt{y_1^2+y_2^2}}\right) \end{array} \right] & \text{if } y_1 \neq 0 \\ \eta \left[\begin{array}{c} \frac{y_1/y_2}{\sqrt{1+(y_1/y_2)^2}} \exp\left(1 - \frac{\eta}{\sqrt{y_1^2+y_2^2}}\right) \\ \frac{1}{\sqrt{1+(y_1/y_2)^2}} \exp\left(\frac{1}{2} - \frac{\eta}{2\sqrt{y_1^2+y_2^2}}\right) \end{array} \right] & \text{if } y_2 \neq 0 \end{cases}$$

其逆映射 $h^{-1} : \mathbb{B}^2_\eta \to \mathbb{B}^2_\eta$ 由下式给出

$$h^{-1}(y_1, y_2) = \xi(y_1, y_2) \cdot \left(2\eta y_1, y_2 \sqrt{2y_2^2 + 2\sqrt{y_2^4 + 4y_1^2\eta^2}}\right)$$

其中

$$\xi(y_1, y_2) := \frac{\eta}{\left[1 - \ln\left(\frac{y_2^2 + \sqrt{y_2^4+4y_1^2\eta^2}}{2\eta^2}\right)\right]\left[y_2^2 + \sqrt{y_2^4 + 4y_1^2\eta^2}\right]}.$$

3. Conic vector fields

本节的目标是通过适宜向量场的流，构造一族目标空间的锥形同胚。

我们先定义一些由向量 $\alpha \in \mathbb{R}^k$ 参数化、定义在 $\mathbb{R}^k$ 上的向量场 $\vec{v}_\alpha$: $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$。向量场 $\vec{v}_\alpha$ 是 $\mathbb{R}^k$ 中径向向量场的扰动，我们将看到它们会产生锥形同胚。

注 3.1. 为区分参数空间 $\mathbb{R}^k$ 与向量场 $\vec{v}_\alpha$ 所定义的空间$\mathbb{R}^k$，我们用下划线标出参数空间 $\mathbb{R}^k$ 或其中的任意一个球 $\mathring{\mathbb{B}}^k_r \subset \mathbb{R}^k$。

定义 3.2. 对于每个点 $\alpha \in \mathbb{R}^k$，定义$\mathbb{R}^k$中的向量场如下:

$$\vec{v}_\alpha(y) = y + \|y\|^2\alpha. \tag{15}$$

我们将由 α给出的 $\vec{v}_\alpha$ 锥向量场称为。

注 3.3. 注意到

(1) 对于每个 $\alpha \in \mathbb{R}^k$，都有 $v_\alpha(0) = 0$。(2) 向量场 $\vec{v}_0$ 就是径向向量场。

(3) 我们可以将向量场 v_α 视为径向向量场 $\vec{v}_0$的一个扰动。

命题 3.4。 设 $\alpha \in \mathbb{R}^k$。向量场 $\vec{v}_\alpha$ 恰有两个零点，一个位于原点，另一个位于点 $y_\alpha = -\frac{\alpha}{\|\alpha\|^2}$。

证明。 根据 $\vec{v}_\alpha$ 在（15）中给出的定义，显然原点是一个零点。现在设 $y \neq 0$ 是 $\vec{v}_\alpha$的一个零点，再由（15）可得

$$\alpha = -\frac{y}{\|y\|^2}. \tag{16}$$

因此，对16 取范数可得

$$\|y\| = \frac{1}{\|\alpha\|}. \tag{17}$$

此外，由（16）可得 $y = -\alpha\|y\|^2$，代入（17）可得 $y = -\frac{\alpha}{\|\alpha\|^2}$ 是 $\vec{v}_\alpha$的一个零点。 □

定义 3.5。 设 $\alpha \in \mathbb{R}^n$，由 y_α 锥向量场 $\vec{v}_\alpha$给出，并由 α 在命题 3.4 中给出，称其为非平凡零点。

图 1 显示了一个锥向量场的零点。

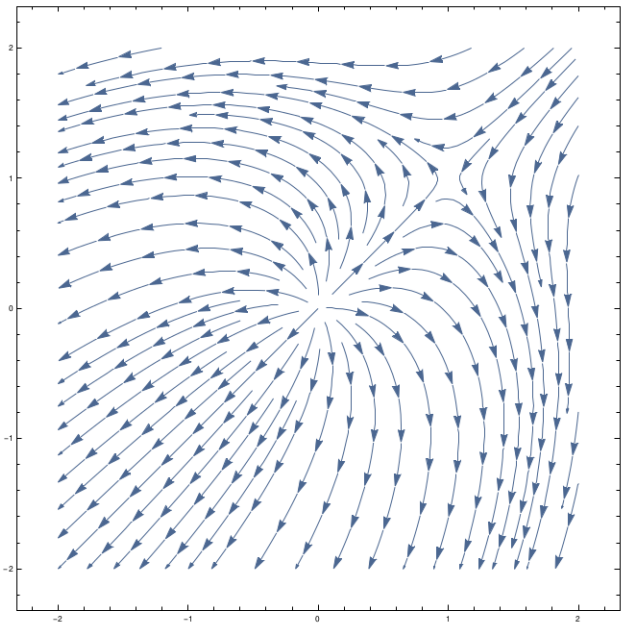

FIGURE 1. $\vec{v}_\alpha$ 由 $\alpha = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$给出的 $\mathbb{R}^2$中的锥向量场零点。

推论 3.6. 设 $\alpha \in \mathbb{R}^k$ 满足 $\|\alpha\| < 1$。那么在开单位球 $\mathring{\mathbb{B}}_1^k$ 中，原点是锥向量场 $\vec{v}_\alpha$的唯一零点。

证明。 根据 命题 3.4，的非平凡零点 $\vec{v}_\alpha$ 是点 $y_\alpha = -\frac{\alpha}{\|\alpha\|^2}$，由（17）$\|\overline{y_\alpha}\| = \frac{1}{\|\alpha\|}$，因此，若 $\|\alpha\| < 1$ 则 $\|y_\alpha\| > 1$，所以单位球内唯一的零点 $\mathbb{B}_1^k \subset \mathbb{R}^k$ 是原点。 □

对于 $\alpha \in \mathbb{R}^k$ 较小的情形， $\vec{v}_\alpha$ 是径向向量场 $\vec{v}_0$的小扰动，因此在 $0 \in \mathbb{R}^k$附近，向量场 $\vec{v}_\alpha$ 与以 0 为中心的球面横截，正如下述命题所证明的那样。

命题 3.7。 设 $\alpha \in \mathbb{R}^k$ 且满足 $\|\alpha\| < 1$。则由 α 给出的锥向量场 $\vec{v}_\alpha$ 与所有以0 为中心、半径为 $0 < \eta < 1$的球面 $\mathbb{S}_\eta^{k-1} \subset \mathbb{R}^k$ 横截。

证明。 向量 $\vec{v}_\alpha(y)$与经过y 的球面相切，当且仅当 $0 = \langle \vec{v}_\alpha(y)$ $y\rangle = \langle y + \|y\|^2\alpha,\ y\rangle = \|y\|^2(1 + \langle \alpha,\ y\rangle)$。因此，若 $y \neq 0$，则 $\langle \vec{v}_\alpha(y)$ $y\rangle = 0$ 当且仅当

$$\langle \alpha, y\rangle = -1. \tag{18}$$

显然， $\vec{v}_\alpha$ 的非平凡零点（它是 α的负倍数）满足（18）

$$\langle \alpha, y_\alpha\rangle = \langle \alpha, -\frac{\alpha}{\|\alpha\|^2}\rangle = -1.$$

令 H_α 为与由 α生成的直线正交的子空间，即

$$H_\alpha = \{w \in \mathbb{R}^k \,|\, \langle \alpha, w\rangle = 0\}.$$

因此，任意形如以下形式的向量

$$y_\alpha + w, \quad \text{with } w \in H_\alpha, \tag{19}$$

满足（18），因为 $\langle \alpha,\ y_\alpha + w\rangle = \langle \alpha,\ y_\alpha\rangle + \langle \alpha,\ w\rangle = -1$。这种形式中范数最小的向量恰为 y_α，根据推论 3.6 ，它位于闭单位球 $\mathbb{B}_1^k$ 之外，因为 $\|\alpha\| < 1$。因此，任何其他形如（19）的向量也位于球 $\mathbb{B}_1^k$ 之外，因此由 α 给出的锥向量场与所有以 0 为中心、半径为 $\mathbb{S}_\eta^{k-1}$的球面 $0 < \eta < 1$横截。 □

注 3.8。 鉴于推论 3.6和命题3.7，从现在起，我们只考虑 $\alpha \in \mathbb{R}^k$ 满足 $\|\alpha\| < 1$的情形，即我们只考虑参数空间中的开单位球 α 内的点 $\mathring{\mathbb{B}}_1^k$ ，并将锥向量场 $\vec{v}_\alpha$ 限制在开单位球 $\mathring{\mathbb{B}}_1^k \subset \mathbb{R}^k$内。

引理 3.9. 令 $\alpha \in \mathring{\mathbb{B}}_1^k$ ，并考虑锥向量场 $\vec{v}_\alpha(y)$。则有

$$\langle \vec{v}_\alpha(y), y\rangle > 0, \quad \textit{for every } y \in \mathring{\mathbb{B}}_1^k.$$

证明。 我们有

$$\langle \vec{v}_\alpha(y), y\rangle = \langle y + \|y\|^2\alpha, y\rangle = \|y\|^2\big(1+\langle \alpha, y\rangle\big) = \|y\|^2\big(1+\|\alpha\|\|y\|\cos\theta\big)$$

其中 θ 是 α 与 y 在 $\mathbb{R}^k$中的夹角。由于 $\|\alpha\| < 1$ 且 $\|y\| < 1$，我们有 $\big|\|\alpha\|\|y\|\cos\theta\big| < 1$，因此括号中的表达式始终为正。所以 $\langle \vec{v}_\alpha(y)\ y\rangle > 0$。□

注 3.10。引理3.9 指出，对于 $\alpha \in \mathring{\mathbb{B}}_1^k$ 向量 $\vec{v}_\alpha(y)$ 对所有 $0 \in \mathbb{R}^k$ 均指向远离 $y \in \mathring{\mathbb{B}}_1^k$的方向。

图2 展示了图1 中的锥向量场，但将其限制在球 $\mathring{\mathbb{B}}_1^k$ 内；该场在原点处只有一个零点，并且从该点向外指[2]。

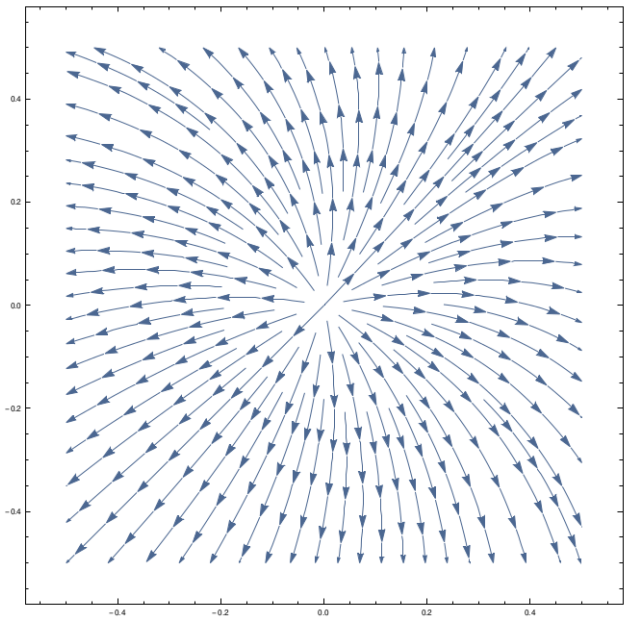

FIGURE 2. $\mathbb{R}^2$ 中的锥向量场 $\vec{v}_\alpha$ 由 $\alpha = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ 在 $\mathring{\mathbb{B}}_{\frac{1}{2}}^k$ 上给出。

现在我们来看看锥向量场 $\vec{v}_\alpha$ 定义了一个锥形同胚 $h_\alpha\colon \mathbb{B}_\eta^k \to \mathbb{B}_\eta^k$ 它作用于任意闭球$\mathbb{B}_\eta^k$，半径为 $0 < \eta < 1$，球心位于 $0 \in \mathbb{R}^k$ （比较 [11, 第 20]页）。

令 $\alpha \in \mathring{\mathbb{B}}_1^k$，并考虑定义在开单位球 $\mathring{\mathbb{B}}_1^k \subset \mathbb{R}^k$ 上的锥向量场 $\vec{v}_\alpha$。通过令 $\vec{v}_\alpha$，对其进行归一化

$$\hat{v}_\alpha(y) = \frac{\vec{v}_\alpha(y)}{\langle 2y, \vec{v}_\alpha(y)\rangle} \tag{20}$$

并考虑 $\hat{v}_\alpha$ 的积分曲线，也就是微分方程的光滑解曲线 $y = p(t)$；例如，定义在 $a < t < b$ 上的解

$$\frac{dp(t)}{dt} = \hat{v}_\alpha(p(t)). \tag{21}$$

令 $r\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ 为“范数平方函数” $r(y) = \|y\|^2$。给定任意解 $p(t)$，复合函数 $r \circ p\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ 的导数为

$$\frac{d(r \circ p)}{dt} = \langle 2y, \hat{v}_\alpha(y)\rangle = \frac{\langle 2y, \vec{v}_\alpha(y)\rangle}{\langle 2y, \vec{v}_\alpha(y)\rangle} = 1$$

其中 $y = p(t)$。因此我们有 $r(p(t)) = t +$为常数。因此，必要时从参数 t 中减去一个常数，我们可以假设

$$r(p(t)) = \|p(t)\|^2 = t. \tag{22}$$

此解可延拓至区间 $(0, \eta^2]$ （见 [11,第 20]页）。注意，积分曲线 $p(t)$ 由初值 $p(\eta^2)$ 唯一确定 $= \theta \in \mathbb{S}^{k-1}_\eta$。对于每个 $\theta \in \mathbb{S}^{k-1}_\eta$，记

$$P(\theta, t), \quad 0 < t \leq \eta^2,$$

满足初始条件的唯一积分曲线

$$P(\theta, \eta^2) = \theta.$$

令 $\mathcal{C}^\alpha_\theta = P\big(\theta, (0, \eta^2)\big)$，即积分曲线 $P(\theta, t)$ 的像。我们有函数

$$P\colon \mathbb{S}^{k-1}_\eta \times (0, \eta^2] \to \mathbb{B}^k_\eta \setminus \{0\}$$

是一个微分同胚。最后，注意到 $P(\theta, t)$ 一致趋于 $0 \in \mathbb{S}^{k-1}_\eta$当 $t \to 0$。因此，这个对应关系

$$t\theta \to P(\theta, t\eta^2)$$

定义在 $0 < t \leq 1$ 上，并唯一地延拓为一个锥形同胚

$$h_\alpha\colon \mathbb{B}^k_\eta \to \mathbb{B}^k_\eta \tag{23}$$

因为在原点之外是一个微分同胚，并将开区间$\mathcal{L}_\theta$ 映到曲线 $\mathcal{C}^\alpha_\theta$。

下一节将使用这些锥形同胚，证明对于满足横截性条件的任意映射，都存在适当参数。

4. Suitable vector fields

设 $f\colon(\mathbb{R}^n,\ 0)\ \to(\mathbb{R}^k,\ 0)$，其中 $2\le k\le n$，是一个在 $0\in\mathbb{R}^k$ 处具有孤立临界值且满足横截性条件的局部满射解析映射。

定义 4.1. 设 $x\in\mathbb{R}^n\setminus f^{-1}(0)$，令 $N_x(f^{-1}(f(x)))$ 为包含 x 的纤维 f 的切空间 $T_x(f^{-1}(f(x)))$ 的法子空间。给定 $\mathbb{R}^k\setminus\{0\}$ 中的向量场 $\vec{v}$，由同构给出的提升 $\vec{u}$

$$(Df_x)_|: N_x\big(f^{-1}(f(x))\big)\to T_{f(x)}\big(\mathbb{R}^k\big),$$

称为 $\vec{v}$的典范 f-提升。

对每个 $\alpha\in\overset{\circ}{\underline{\mathbb{B}}}{}^k_1$，令 $\vec{u}_\alpha$ 为锥向量场 $\vec{v}_\alpha$ 的典范 f-提升。

定义 4.2. 若向量场 $\vec{w}$ 定义在 $\mathbb{R}^n\setminus f^{-1}(0)$ 上，且对每个 $x\in\mathbb{R}^n\setminus f^{-1}(0)$，都有 $\vec{w}(x)\in T_x(f^{-1}(f(x)))$，则称其为 f-垂直向量场 。

定义 4.3. 设 $\vec{v}$ 是定义在 $\mathbb{R}^k\setminus\{0\}$ 上的向量场，$\vec{u}$ 是其典范 f-提升。给定定义在 $\mathbb{R}^n\setminus f^{-1}(0)$ 上的 f-垂直向量场 $\vec{w}$，由下式给出的向量场

$$\vec{u}^{\vec{w}}(x):=\vec{u}(x)+\vec{w}(x)$$

是 $\vec{v}$ 的 f 提升，我们称其为由 $\vec{w}$ 确定的 $\vec{v}$ f提升。

定义 4.4。 根据 [6, 定理 5.1，注 5。7] f 在米尔诺管 T_ε上有一个米尔诺–莱纤维化 (3) $\delta(f)$，其中 $0<\delta\ll\varepsilon$。

(*i*) 我们称 $\alpha\in\overset{\circ}{\mathbb{B}}{}^k_1$ 是 f 在点 $p\in\mathbb{R}^n$ 处的适当参数 f，如果存在 $\vec{v}_\alpha$ 的提升 $\vec{u}'_\alpha$，使得 $\langle\vec{u}'_\alpha(p)\ \overrightarrow{p}\rangle\neq 0$；(*ii*) 我们称 $\alpha\in\overset{\circ}{\mathbb{B}}{}^k_1$ 是 f 在子集 $W\subset\mathbb{R}^n$ 中的适当参数 f，如果在 W 上存在 $\vec{v}_\alpha$ 的提升 $\vec{u}'_\alpha$，使得对于每个 $p\in W$ 都有 $\langle\vec{u}'_\alpha(p)\ p\rangle\neq 0$，也就是说，对于关于同一提升 $\vec{u}'_\alpha$（$\vec{v}_\alpha$ 的提升），对每个满足 $p\in W$ 的 p，f 在 p 处都是 α 的适当参数;

(*iii*) 我们称 $\alpha\in\overset{\circ}{\mathbb{B}}{}^k_1$ 是的适当参数，若对每个 $p\in\mathbb{B}^n_\varepsilon\setminus T_{\varepsilon,\delta}(f)$，在开实心米尔诺管之外

$$\overset{\circ}{T}_{\varepsilon,\delta}(f):=\mathbb{B}^n_\varepsilon\cap f^{-1}(\overset{\circ}{\mathbb{B}}{}^k_\delta),$$

存在 p 的开邻域 W_p，使得 α 是 W_p 中 f 的适当参数。在这种情况下，我们称 $\mathbb{B}^k_\eta$ 中相应的向量场 $\vec{v}_\alpha$ 为 f 的适当向量场。

根据 f 适当参数的定义，我们有:

命题 4.5。 设 $f:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^k,0)$，其中 $2\le k\le n$ 是一个具有孤立临界值的解析映射芽。若 $\alpha\in\mathbb{R}^k$ 是 f 的适当参数，则相对于由锥向量场 $\vec{v}_\alpha$ 给出的锥形同胚 h_α，f 是 d_{h_α}-正则的（在 $T_{\varepsilon,\delta}(f)$ 之外）。

证明。 由于 $f:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^k,0)$ 在 $0\in\mathbb{R}^k$ 处具有孤立临界值，我们有集合

$$E_\theta := f^{-1}(\mathcal{C}_\theta^\alpha)$$

是 $\mathbb{R}^n\setminus f^{-1}(0)$ 的子流形。由于 $\alpha\in\mathbb{R}^k$ 是关于 f 的适当参数，对于每个 $p\in\mathbb{B}_\varepsilon^n\setminus T_{\varepsilon,\delta}(f)$，存在 p 的一个开邻域 W_p 以及 $\vec{v}_\alpha$ 在 W 上的一个提升 $\vec{u}'_\alpha$，使得对于每个 $p\in W$，$\langle\vec{u}'_\alpha(p),p\rangle\neq 0$。这意味着 E_θ 与球面 $\mathbb{S}_{\varepsilon'}^{n-1}$ 在 $\mathbb{B}_\varepsilon^n\setminus T_{\varepsilon,\delta}(f)$ 中横截相交，对于每个 $0<\varepsilon'\le\varepsilon$。换言之，$f$ 是 d_h-正则的。□

现在的目标是证明 f 总是存在适当参数。

引理 *4.6.* 设 $p\in\mathbb{B}_\varepsilon^n\setminus T_{\varepsilon,\delta}(f)$，且 $\vec{w}$ 是定义在 $\mathbb{B}_\varepsilon^n\setminus\mathring{T}_\varepsilon$ 中 p 的开邻域 W'_p 上的 f-垂直向量场。假设 $\tilde{\alpha}\in\mathring{\mathbb{B}}_1^k$ 满足：由 $\vec{w}$ 确定的 f-提升 $\vec{u}_{\tilde{\alpha}}^{\vec{w}}$ 在 p 处与 $\mathbb{S}_{\|p\|}^{n-1}$ 横截，且 $\langle\vec{u}_{\tilde{\alpha}}^{\vec{w}}(p),p\rangle>0$（分别为 $\langle\vec{u}_{\tilde{\alpha}}^{\vec{w}}(p),p\rangle<0$）。那么，存在 p 的一个小邻域 $W_p\subset W'_p$ 和一个实数 $\nu_p>0$，使得对于 $\mathring{\mathbb{B}}_1^k$ 中以 $\tilde{\alpha}$ 为中心、半径为 ν_p 的球 $\mathring{\mathbb{B}}_{\nu_p}^k(\tilde{\alpha})$ 内的每个 α，以及每个 $x\in W_p$，都有 $\langle\vec{u}_\alpha^{\vec{w}}(x),x\rangle>0$（分别为 $\langle\vec{u}_\alpha^{\vec{w}}(x),x\rangle<0$）。

证明。 定义映射

$$\begin{aligned} g_p:\, W'_p\times\mathring{\mathbb{B}}_1^k &\longrightarrow \mathbb{R},\\ (x,\alpha) &\longmapsto \langle\vec{u}_\alpha^{\vec{w}}(x),x\rangle. \end{aligned}$$

根据假设，$g_p(p,\tilde{\alpha})=\langle\vec{u}_{\tilde{\alpha}}^{\vec{w}}(p),p\rangle=c$，其中 $c>0$（分别为 $c<0$）。因此，集合 $U:=g_p^{-1}(]0,2c[)$（分别为 $U:=g_p^{-1}(]2c,0[)$）是 $W'_p\times\mathring{\mathbb{B}}_1^k$ 中的开集，且包含点 $(p,\tilde{\alpha})$。于是，存在 W'_p 中 p 的一个开邻域 $W_p(\tilde{\alpha})$，以及以 $\tilde{\alpha}\in\mathring{\mathbb{B}}_1^k$ 为中心的一个开球 $\mathring{\mathbb{B}}_{\nu_p}^k(\tilde{\alpha})(\tilde{\alpha})$，使得 $(p,\tilde{\alpha})\in W_p(\tilde{\alpha})\times\mathbb{B}_{\nu_p}^k(\tilde{\alpha})(\tilde{\alpha})\subset U$。因此，对于每个 $x\in W_p(\tilde{\alpha})$ 和每个 $\alpha\in\mathbb{B}_{\nu_p}(\tilde{\alpha})(\tilde{\alpha})$，都有 $\langle\vec{u}_\alpha(x),x\rangle>0$（分别有 $\langle\vec{u}_\alpha(x),x\rangle<0$）。□

注记 4.7。 注意，在引理 4.6 中，如果我们取垂直向量场 $\vec{w}$ 为零向量场，则该陈述特化为向量场 $\vec{u}_\alpha$ 的典范提升 $\vec{v}_\alpha$。

换言之，引理4.6指出：

推论 4.8。如果 $\tilde{\alpha}$ 是 f 在点 $p \in \mathbb{B}_\varepsilon^n \setminus T_{\varepsilon,\,\delta}(f)$ 处的适当参数，那么存在 p 在 $\mathbb{B}_\varepsilon^n \setminus T_{\varepsilon,\,\delta}(f)$ 中的一个邻域 $W_p(\tilde{\alpha})$ 以及一个半径 $\nu_p(\tilde{\alpha}) > 0$，使得每个 $\alpha \in \mathring{\mathbb{B}}^k_{\nu_p(\tilde{\alpha})}(\tilde{\alpha})$ 都是 f 在 $W_p(\tilde{\alpha})$ 中的适当参数。

我们有：

命题 4.9。设 $f:(\mathbb{R}^n,0) \to (\mathbb{R}^k,0)$ 是一个具有孤立临界值的局部满射解析映射芽，其中 $2 \leq k \leq n$。那么存在一个实数 ω，使得 $0 < \omega < 1$，从而每个 $\alpha \in \mathring{\mathbb{B}}^k_\omega \subset \mathring{\mathbb{B}}^k_1$ 都是 f 的适当参数。

证明。首先我们证明，对于每个 $p \in \mathbb{B}_\varepsilon^n \setminus T_{\varepsilon,\delta}(f)$，都存在 p 在 $\mathbb{B}_\varepsilon^n \setminus T_{\varepsilon,\delta}(f)$ 中的一个开邻域 W_p，以及单位球 $\mathring{\mathbb{B}}^k_1$ 中的一个开球 $\mathring{\mathbb{B}}^k_{\nu_p}$，使得每个 $\alpha \in \mathring{\mathbb{B}}^k_{\nu_p}$ 都是 W_p 中 f 的适当参数。

固定 $p \in \mathbb{B}_\varepsilon^n \setminus T_{\varepsilon,\delta}(f)$，并令 $\vec{u}_0(p)$ 为径向向量场 $\vec{v}_0(p)$ 的典范提升。我们分两种情况：

情形 1： 假设 $\langle \vec{u}_0(p)\ p\rangle \neq 0$。令 $\tilde{\alpha} = 0$ 并令 $\vec{w} = \vec{0}$ 为零向量场。于是由引理4.6 可知，存在一个邻域 W_p，它包含 p，且 $\nu_p > 0$ 使得 $\langle \vec{u}_\alpha(x)\ x\rangle \neq 0$ 对每个 $x \in W_p$ 以及每个 $\alpha \in \mathring{\mathbb{B}}^k_\nu$.

情形 2：假设 $\langle \vec{u}_0(p)\ p\rangle = 0$。这意味着向量 $\vec{u}_0(p)$ 与球面 $\mathbb{S}^{k-1}_{\|p\|}$ 相切。因此，包含 p 的纤维 $f^{-1}(f(p))$ 与球面 $\mathbb{S}^{k-1}_{\|p\|}$ 在 p 处横截。由于横截性是一个稳定条件，存在一个包含 p 的开邻域 W'_p，使得对所有 $x \in W'_p$，包含 x 的纤维 $f^{-1}(f(x))$ 与球面 $\mathbb{S}^{k-1}_{\|x\|}$ 在 x 处横截。我们如下构造一个 f-垂直向量场：对每个 $x \in W'_p$，令 $\vec{w}'(x) = x$ 为定义在 W'_p 上的径向向量场在 $\mathbb{R}^n$ 上的限制。令 $\vec{w}(x)$ 为 $\vec{w}'(x) = x \in T_x\mathbb{R}^n$ 在点 x 处投影到切空间 $T_x(f^{-1}(f(x)))$ 上的投影，其中该点属于包含 x 的纤维。由于 W'_p 中纤维与球面横截，且对每个 $x \in W'_p$，$\langle \vec{w}(x)\ x\rangle > 0$，因此 $\vec{w}$ 是一个非零的 f-垂直向量场。因此，由 $\vec{w}$ 确定的 $\vec{v}_0$ 的 f-提升 $\vec{u}_0^{\vec{w}}$ 满足 $\langle \vec{u}_0^{\vec{w}}(x)\ x\rangle > 0$，对每个 $x \in W'_p$ 均成立。于是由引理 4.6 可知，存在一个包含 p 的邻域 W_p 和 $\nu_p > 0$，使得 $\langle \vec{u}_\alpha^{\vec{w}}(x)\ x\rangle \neq 0$ 对每个 $x \in W_p$ 和每个 $\alpha \in \mathring{\mathbb{B}}^k_{\nu_p}$ 均成立。

这些开邻域 $\{W_p\}$ 构成紧集 $\mathbb{B}_\varepsilon^n \setminus T_{\varepsilon,\delta}(f)$ 的一个开覆盖，因此存在一个开子覆盖 $\{W_{p_1}, \ldots, W_{p_m}\}$。设 $\mathring{\mathbb{B}}^k_\omega = \bigcap_{i=1}^m \mathring{\mathbb{B}}^k_{\nu_{p_i}}$，即 $\omega = \min_{i=1}^m\{\nu_{p_i}\}$。因此，每个 $\alpha \in \mathring{\mathbb{B}}^k_\omega$ 都是 f 的适当参数。□

现在我们可以陈述主定理了。根据命题 4.9 $\vec{v}_\alpha$ 是 f 对每个 $\alpha \in \mathring{\mathbb{B}}^k_\omega$ 而言的适当向量场。根据命题 4.5 f 相对于由锥向量场d_h给出的锥形同胚 h_α 是 $\vec{v}_\alpha$-正则的。作为定理 2.3的直接推论，我们得到:

定理 4.10. 设 $f\colon(\mathbb{R}^n,0) \to (\mathbb{R}^k,0)$ 是一个 $2 \le k \le n$局部满射解析映射芽，在 $0 \in \mathbb{R}^k$ 处有一个满足横截性条件的孤立临界值。那么存在一个实数 $0 < \omega < 1$，使得对每个 $\alpha \in \mathring{\mathbb{B}}^k_\omega$，管中的米尔诺-莱纤维化

$$f\colon T_{\varepsilon,\delta}(f) \to \mathbb{S}^{k-1}_\delta,$$

都与球面上的米尔诺纤维化等价:

$$\frac{h_\alpha^{-1}\circ f}{\|h_\alpha^{-1}\circ f\|}\colon \mathbb{S}^{n-1}_\varepsilon \setminus f^{-1}(0) \to \mathbb{S}^{k-1}$$

其中 $h_\alpha:\ \mathbb{B}^k_\eta \to \mathbb{B}^k_\eta$ 是由锥向量场 $\vec{v}_\alpha$ 定义的锥形同胚。

引言中陈述的定理可由定理 4.10 得出。

Acknowledgments

我们感谢 Jos´e Seade 教授与我们进行了许多启发性的交谈。

References

[1] Hayd´ee Aguilar-Cabrera 和 Jos´e Luis Cisneros-Molina。Milnor 纤维化定理的几何视角。载于《奇点 Lipschitz 几何导论》，数学讲义第 2280 卷，第 1–43 页。Springer，Cham，[2020]©2020。 2[2] Jos´e Luis Cisneros-Molina 和 Aur´elio Menegon。实解析映射的米尔诺纤维化与米尔诺-Lê 纤维化的等价性。《国际数学杂志》，30(14):1950078，共 25 页，2019。 3[3]Jos´e Luis Cisneros-Molina 和 Aur´elio Menegon。关于实解析映射的米尔诺纤维化与米尔诺-Lê 纤维化等价性的勘误。《国际数学杂志》，32(10):论文编号 2150070，共 17 页，2021。 3[4] Jos´e Luis Cisneros-Molina、Aur´elio Menegon、Jos´e Seade 和 Jawad Snoussi。具有非孤立奇点的解析映射的 Milnor 式纤维化定理。《圣保罗数学科学杂志》，18(2):1178–1199，2024。 5, 6[5] Jos´e Luis Cisneros-Molina 和 Jos´e Seade。实奇点与复奇点的 Milnor 纤维化定理。载于《奇点几何与拓扑手册 II》，第 309–359 页。Springer，Cham，[2021]©2021。 1[6]Jos´e Luis Cisneros-Molina、Jos´e Seade 和 Jawad Snoussi。实解析奇点的米尔诺纤维化与 d-正则性。《国际数学杂志》，21(4):419–434，2010。 3, 5, 6, 13

[7] Jos´e Luis Cisneros-Molina、Jos´e Seade 和 Jawad Snoussi。实奇点与复奇点的米尔诺纤维化。载于 Jos´e Ignacio Cogolludo-Agust´ın 和 Eriko Hironaka（编），《代数簇与奇点的拓扑学》，当代数学第 538 卷，第 345–362 页。美国数学会，2011。 7[8] Dale Husemoller。《纤维丛》。数学研究生教材第 20 卷。Springer-Verlag，第三版，1993。 7[9] Dung Tr´ang Lê。关于相对单值化的一些评论。载于 P. Holm（编），《实与复奇点》（第九届北欧暑期学校/NAVF 数学专题讨论会论文集，奥斯陆，1976），第 397–403 页。Sijthoff and Noordhoff，阿尔芬 aan den Rijn，1977。 2[10] John Milnor。关于超曲面的孤立奇点。预印本，1966年6月。 2[11] John Milnor。《复超曲面的奇点》。数学年刊研究丛书第 61 号。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1968年。 2, 3, 11, 12[12] Maria Aparecida Soares Ruas、Jos´e Seade 和 Alberto Verjovsky。关于具有米尔诺纤维化的实奇点。载于 A. Libgober 和 M. Tibar（编），《奇点研究趋势》，Trends Math.，第 191–213 页。Birkh¨auser，巴塞尔，2002年。 3

Instituto de Matemáticas, Unidad Cuernavaca, Universidad Nacional Autónoma de México, Avenida Universidad s/n, Colonia Lomas de Chamilpa,Cuernavaca, Morelos, Mexico.
电子邮箱地址: jlcisneros@im.unam.mx

Mid Sweden University, Department of Engineering, Mathematics and Science Education, 85170 Sundsvall, Sweden电子邮箱地址: aurelio.menegon@miun.se