arXiv:2601.03541v1 [math.PR] 7 Jan 2026

高阶（逆）随机占优的矩不等式

孟冠* 邹振锋† 胡太忠‡

2026年1月8日

摘要

随机占优已得到广泛研究，尤其是在金融学和经济学文献中。本文得到两个结果。首先，我们推导出高阶逆随机占优的必要条件。这些条件涉及最小次序统计量的矩不等式，与Fishburn(1980b)针对通常的高阶随机占优所得到的条件类似。其次，我们研究背景风险变量如何影响通常的高阶随机占优。主要结果将Pomatto 等人(2020年)的结果从一阶和二阶随机占优推广到了高阶情形。

MSC2000主题分类：60E15、91B06、91B30

关键词：随机占优；逆随机占优；矩不等式；渐近线；背景风险；次序统计量

1 引言

随机占优已在经济学、金融学、概率论和统计学等诸多领域得到广泛研究。相关文献近年来迅速增长。关于随机占优理论的全面综述，读者可参阅专著 M¨uller 和 Stoyan (2002）、Shaked 和 Shanthikumar (2007）、Levy (2016）以及 Whang (2019）。

一阶随机占优（FSD）和二阶随机占优（SSD）是最常见的随机占优准则。为了更精细地刻画决策者的风险行为或风险偏好，高阶随机占优研究受到了广泛关注。高阶随机占优有两种类型。第一种记为 n-SD，基于 n 阶积分分布函数定义。对于两个随机变量 X 和 Y，其分布分别为 F_X 和F_Y，如果对于所有 $x \in \mathbb{R}$，都有 $F_X^{[n]}(x) \geq F_Y^{[n]}(x)$，则称 X在 n-SD 意义下被 Y占优，记为 $X \leq_n Y$；参见 Rolski（1976）、Fishburn（1976, 1980a）、Kaas 等人（1994）以及 Ogryczak 和 Ruszczy´nski（2001）。第二种记为 n-ISD，基于 n 阶积分分位数函数定义。在 X 被 Y 占优的意义下

*中国科学技术大学管理学院，中国。电子邮箱： gm123123@mail.ustc.edu.cn
†中国科学技术大学公共事务学院，中国。电子邮箱： zfzou@ustc.edu.cn
‡中国科学技术大学管理学院，中国。电子邮箱： thu@ustc.edu.cn

属于 n-ISD，记为 $X \leq_n^- Y$，如果对于所有 $x \in \mathbb{R}$，都有 $F_X^{[-n]}(x) \leq F_Y^{[-n]}(x)$，其中 $n \geq 1$，且 $F_X^{[-n]}$ 是 F_X的 n 阶积分分位数函数，定义见（2.7）；参见 Muliere and Scarsini（1989）、Wang 和 Young（1998）、Maccheroni 等人（2005）以及 De La Cal 和 C´arcamo（2010）。n-SD 和 n-ISD 的正式定义及其基本性质见第 2 节。

探索高阶随机占优的充分条件和/或必要条件，一直是该领域研究的重点；例如，参见 Jean and Helms (1988a,b,c)、Fishburn (1980b)、Thistle (1993)、Carlettiand Pellerey (1998)，以及 Wang and Wu (2025)。人们已经提出了大量关于随机占优的必要条件，其中最著名的两项必要条件，是通常由 n-SD 满足的矩不等式（定理 2.1 和 2.2），由Fishburn (1980b给出。

对于 X，$Y \in L^1$，若 $X <_1 Y$，则 $\mathbb{E}[X] < \mathbb{E}[Y]$。对于 X，$Y \in L^2$，若 $X <_2 Y$且 $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y]$，则$\mathbb{E}[X^2] > \mathbb{E}[Y^2]$，因此 Var($X$) > Var($Y$)。当我们考察两个风险变量 X 和 Y之间的随机占优时，会将 X 和 Y 与其所处环境中其他不可避免的背景风险变量的影响隔离开来。这些背景风险通常是经济学和金融学中的不确定性。Pomatto 等人（2020年）研究了背景噪声变量如何影响一阶随机占优和二阶随机占优。他们证明：(i) 若对于 X，$Y \in L^1$，有 $\mathbb{E}[X] < \mathbb{E}[Y]$，则存在一个随机变量 Z，它与 X和 Y相互独立，使得$X + Z <_1 Y + Z$；(ii) 若对于 X，$Y \in L^2$，有 $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y]$ 和 $\mathbb{E}[X^2] > \mathbb{E}[Y^2]$，则存在一个随机变量 Z，它与 X和 Y相互独立，使得 $X + Z <_2 Y + Z$。

本文将进一步研究 n-SD 和 n-ISD 关于 $n > 2$ 的性质。本文的主要贡献如下：

1. 受定理2.1和2.2的启发，我们建立了 n-ISD 在 $n > 2$ 条件下的最小次序统计量矩不等式（定理3.4 和 3.8）。

2. 与上述 Pomatto 等人 (2020年 的结果类似，我们研究背景风险变量如何影响 n-SD 关于 $n > 2$。主要结果（定理 4.2）表明，即使两个变量按照其关于 n-SD 的矩排序，背景风险也足以强化它们之间的排序关系，其中 $n > 2$。

3. 通过更加突出积分分布函数上渐近线和下渐近线这一思想，我们给出了 2.1 和2.2 定理中关于 n-SD 的矩不等式的另一种证明。

我们相信，本文的主要结果有助于更好地理解 n-SD 和 n-ISD 的含义。

本文组织如下。在第2节中，我们回顾通常的 n-随机占优和n-积分随机占优的基本概念，其中 $n > 2$，并介绍这两类随机占优的辅助结果，旨在于第 n3节推导 n-积分随机占优下最小次序统计量的矩不等式。第4节研究了独立噪声变量下的通常 n-随机占优，其中 $n > 2$ 。在附录B中，我们给出了 n-随机占优矩不等式的其他证明。

2 预备知识

2.1 n阶随机占优

对于 $r \geq 0$，令 L^r 表示无原子概率空间（Ω $\mathscr{F}$，$\mathbb{P}$）上所有具有有限r阶矩的随机变量构成的集合。对于分布函数为 F_X 的 $X \in L^0$，令 $F_X^{[1]}(x) = F_X(x)$，并递归定义 n阶积分分布函数 $F_X^{[n]}$ 如下：

$$F_X^{[n]}(x) = \int_{-\infty}^{x} F_X^{[n-1]}(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in \mathbb{R},\ n \geq 2, \tag{2.1}$$

也称为高阶累积分布函数。众所周知（例如，参见 Ogryczak 和 Ruszczy´nski，2001，命题1）

$$F_X^{[n]}(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_{-\infty}^{x}(x-y)^{n-1}\,\mathrm{d}F_X(y) = \frac{1}{(n-1)!}\,\mathbb{E}[(x-X)_+^{n-1}], \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2.2}$$

与 n 阶积分分布函数类似，我们可以定义 n 阶积分生存函数$\widetilde{F}_X^{[n]}(x)$如下。记 $\widetilde{F}_X^{[1]}(x) = S_X(x) = 1 - F_X(x)$ 为 X 的生存函数，并递归地定义 n 阶积分生存函数 $\widetilde{F}_X^{[n]}$：

$$\widetilde{F}_X^{[n]}(x) = \int_{x}^{\infty} \widetilde{F}_X^{[n-1]}(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in \mathbb{R} \text{ and } n \geq 2.$$

对于 $X \in L^{n-1}$，$n \geq 1$，根据 Ogryczak 和 Ruszczy´nski (2001) 中命题1的证明进行类似推导，可得

$$\widetilde{F}_X^{[n]}(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_{x}^{\infty}(y-x)^{n-1}\,\mathrm{d}F_X(y) = \frac{1}{(n-1)!}\,\mathbb{E}[(X-x)_+^{n-1}], \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2.3}$$

由（2.2）和（2.3），$F_X^{[n]}(x)$ 和 $\widetilde{F}_X^{[n]}(x)$ 对任意 $x \in \mathbb{R}$ 在 $X \in L^{n-1}$ 且 $n \geq 1$ 时均为有限值。

我们回顾 Fishburn (1976, 1980a) 提出的 n 阶随机占优 (n-SD）的概念。对于 X，$Y \in L^{n-1}$ 和 $n \geq 1$，X 称被 Y 以 n-SD 的意义支配，记作 $X \leq_n Y$，若

$$F_X^{[n]}(x) \geq F_Y^{[n]}(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2.4}$$

如果 $X \leq_n Y$ 且不等式（2.4）在至少一个点 $t_0 \in \mathbb{R}$处严格成立，则称 X 被 Y严格支配，记作 $X <_n Y$。也就是说，$X <_n Y$ 当且仅当 $X \leq_n Y$ 但 $Y \not\leq_n X$。对于 $n = 1$ 和 2，n-SD 分别退化为一阶随机占优和二阶随机占优。显然，$X \leq_n Y$ 蕴含 $X \leq_{n+1} Y$，且 $X <_n Y$ 蕴含 $X <_{n+1} Y$。

由 (2.4) 定义的 n-SD 只是以 $\mathbb{R}$ 为参考区间的高阶随机占优的一种表述。高阶随机占优还有另一种表述，最初由 Jean (1980) 提出，并已广泛应用于决策理论（例如，参见 Eeckhoudt 等，2009）。该表述适用于区间 $[a,b]$ 有界的所有分布。该判据要求对于所有 $x \in [a,b]$，$F_X^{[n]}(x) \geq F_Y^{[n]}(x)$，且对于 $k = 1$，$F_X^{[k]}(b) \geq F_Y^{[k]}(b)$，……，$n-1$。关于这两类高阶随机占优的差异，以及它们基于某些效用函数集合的期望效用刻画，请参见 Wang and Wu (2025)。本文聚焦于以 $\mathbb{R}$ 为参考区间的第一种高阶随机占优表述。

Fishburn (1980b) 在假设 X 和 Y 均为非负随机变量的条件下证明了定理 2.1 和 2.2。O'Brien (1984) 通过建立 $G^{[n]}(x) - F^{[n]}(x)$ 在较大的 x 下的行为与涉及 F 和 G 的矩的某些不等式之间的关系，证明了适用于一般随机变量的定理 2.1 和 2.2。我们将在附录 B 中给出这两个定理的证明。尽管我们的证明方法与 O'Brien (1984) 的方法相似，但我们更加侧重于 $F_X^{[n]}(x)$ 和 $F_Y^{[n]}(x)$ 的上渐近线和下渐近线这一思路。

定理 2.1。(Fishburn，1980b；O'Brien，1984)。设 X 和 Y 是两个随机变量（不必非负），满足 $X \geq_n Y$ 且 X，$Y \in L^{n-1}$ 对 $n \geq 2$成立。若 $\mathbb{E}[X^j] = \mathbb{E}[Y^j]$ 对 $j = 0$，1，...，k，$0 \leq k < n-1$，则

$$(-1)^k \mathbb{E}[X^{k+1}] \geq (-1)^k \mathbb{E}[Y^{k+1}]. \tag{2.5}$$

定理 2.2。(Fishburn，1980b；O'Brien，1984)。设 X 和 Y 是两个随机变量（不必非负），满足 $X >_n Y$ 且 X，$Y \in L^n$，其中 $n \geq 1$成立。若 $\mathbb{E}[X^k] = \mathbb{E}[Y^k]$ 对 $k = 0$，1，...，$n-1$，则

$$(-1)^{n-1}\mathbb{E}[X^n] > (-1)^{n-1}\mathbb{E}[Y^n]. \tag{2.6}$$

由定理 2.1可知，$X \geq_n Y$ 总是蕴含 $\mathbb{E}[X] \geq \mathbb{E}[Y]$ 对 $n \geq 1$成立。Schmid（2005）给出了 $n = 3$ 的一个简短证明。定理 2.2意味着，当 $X >_n Y$时，$(\mathbb{E}[X], \ldots, \mathbb{E}[X^n]) = (\mathbb{E}[Y], \ldots, \mathbb{E}[Y^n])$ 不可能成立，前提是涉及的矩均有限。由于 $X \geq_m Y$ 蕴含$X \geq_{m+1} Y$ 对 $m \geq 1$成立，定理 2.1的一个直接推论如下：若 X 在非严格意义上随机支配 Y，且该支配对任意有限阶数均成立，并且 $\mathbb{E}[X^k] = \mathbb{E}[Y^k]$ 对$k = 0$、1、...、n成立，则 $\mathbb{E}[X^{n+1}] \geq \mathbb{E}[Y^{n+1}]$ 对偶数 n 成立，而 $\mathbb{E}[X^{n+1}] \leq \mathbb{E}[Y^{n+1}]$ 对奇数 n成立。

推论 2.3. 设 X 和 Y 是两个随机变量（不一定非负），满足 $X \geq_m Y$ *for*$m \geq 1$。若 X、$Y \in L^{n+1}$、$n \geq 0$，且 $\mathbb{E}[X^k] = \mathbb{E}[Y^k]$ *for* $k = 0$，1，...，n，则

$$(-1)^n \mathbb{E}[X^{n+1}] \geq (-1)^n \mathbb{E}[Y^{n+1}].$$

2.2 第 n阶随机占优

For $X \in L^0$ 的分布函数为 F_X，其左连续逆函数 F_X 定义为

$$F_X^{-1}(p) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \geq p\}, \quad p \in (0, 1],$$

其中 $F_X^{-1}(0) = \inf\{x \in \mathbb{R}: F_X(x) > 0\}$。全文中，我们在随机变量空间 L^1内进行讨论。对于$X \in L^1$，从 $F_X^{[-1]}(p) = F_X^{-1}(p)$出发，我们递归地定义 n阶分位数函数 $F_X^{[-n]}$

$$F_X^{[-n]}(p) = \int_0^p F_X^{[-n+1]}(u)\,\mathrm{d}u, \quad p \in [0, 1],\ n \geq 2. \tag{2.7}$$

首先，我们回顾Muliereand Scarsini (1989）提出的 n阶逆随机占优（n-ISD）。如果随机变量 X 被 Y 按照 n-ISD支配，记作 $X \leq_n^- Y$，则

$$F_X^{[-n]}(p) \leq F_Y^{[-n]}(p), \quad p \in (0, 1),\ n \geq 1. \tag{2.8}$$

如果 $X \leq_n^- Y$ 且不等式（2.8）在至少一个点 $p_0 \in (0,1)$ 处严格成立，我们称 X 按照 n-ISD 严格支配 Y，记作 $X <_n^- Y$。已知，对于 $n=1$，2，n-ISD 与 n-SD 是等价的。当 $n \geq 3$时，Shorrocks 和 Foster (1987) 给出了一个反例，说明这种等价关系不成立。$n=1$，2 与 $n \geq 3$ 之间的差异，正是 De La Cal 和 C´arcamo (2010) 所讨论的关键问题之一；该文还根据均值次序统计量向量的弱 n-主序，给出了 n-ISD 次序的一个等价刻画。在 Aaberge 等（2021）中，n-ISD 也被称为 n阶向上逆随机占优（向上 n-ISD）。

由于 $F_X^{[-n]}(p)$ 和 $F_Y^{[-n]}(p)$ 递归地对区间 $(0,p]$ 上的分位数函数进行积分，因此 n-ISD 比较的是分布中最低的部分。这就是 n-ISD 在社会不平等和社会福利研究中受到关注的原因，因为这些研究领域关注的是资源较少的阶层。例如，可参见 Zoli (1999, 2002), Andreoli (2018), Aaberge 等人 (2021), 以及 Jiang 等人 (2024) 及其中引用的文献。

命题 2.4。对于 $X \in L^1$ 和 $n \geq 2$，有

$$F_X^{[-n]}(p) = \frac{1}{(n-2)!} \int_0^1 F_X^{-1}(u)(p-u)_+^{n-2} \, \mathrm{d}u, \quad p \in [0,1]. \tag{2.9}$$

此外，若 F_X 连续，则

$$F_X^{[-n]}(p) = \frac{1}{(n-2)!} \int_{\mathbb{R}} x\big(p - F_X(x)\big)_+^{n-2} \, \mathrm{d}F_X(x), \quad p \in [0,1]. \tag{2.10}$$

证明。我们通过对 n进行归纳法证明该命题。式（2.9）也见于Andreoli(2018)。为完整起见，我们给出其证明。对于 $n=2$，（2.9）显然成立。假设它对 $n=k \geq 2$成立，我们将证明它对 $k+1$也成立。我们有

$$\begin{aligned} F_X^{[-k-1]}(p) &= \frac{1}{(k-2)!} \int_0^p \left(\int_0^v F_X^{-1}(u)(v-u)^{k-2} \, \mathrm{d}u \right) \mathrm{d}v \\ &= \frac{1}{(k-2)!} \int_0^p \left(\int_u^p F_X^{-1}(u)(v-u)^{k-2} \, \mathrm{d}v \right) \mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{(k-1)!} \int_0^p F_X^{-1}(u)(p-u)^{k-1} \, \mathrm{d}u, \end{aligned}$$

其中积分的阶 数可由 Fubini 定理改变。因此，（2.9）由归纳法得证 .

接下来，我们着手证明（2.10）。首先注意到，存在一个标准均匀随机变量 U_X定义在空间（Ω $\mathscr{F}$， $\mathbb{P}$）上，使得 $X = F_X^{-1}$（U_X）几乎处处成立。关于 U_X的存在性，见 F¨ollmer 和 Schied （2011）；另见 Delbaen （2012）。由于 F_X 连续，因此可知F_X^{-1}（u）在 $u \in$（0，1）上严格递增。于是，对于 $n=2$，有

$$\begin{aligned} F_X^{[-2]}(p) &= \mathbb{E}\left[F_X^{-1}(U_X)\mathbb{1}_{\{U_X<p\}}\right] = \mathbb{E}\left[F_X^{-1}(U_X)\mathbb{1}_{\{F_X^{-1}(U_X)<F_X^{-1}(p)\}}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[X\mathbb{1}_{\{X<F_X^{-1}(p)\}}\right] = \mathbb{E}\left[X\mathbb{1}_{\{F_X(X)<p\}}\right], \end{aligned}$$

从而得到（2.10），其中 $n=2$。假设（2.10）对 $n=k \geq 2$ 成立，我们将证明它对 $k+1$ 也成立。我们有

$$F_X^{[-k-1]}(p) = \frac{1}{(k-2)!} \int_0^p \left(\int_{\mathbb{R}} x\big(u - F_X(x)\big)_+^{k-2} \, \mathrm{d}F_X(x) \right) \mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{(k-2)!}\int_{\mathbb{R}} x\left(\int_0^p (u-F_X(x))_+^{k-2}\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}F_X(x)$$
$$= \frac{1}{(k-1)!}\int_{\mathbb{R}} x(p-F_X(x))_+^{k-1}\,\mathrm{d}F_X(x),$$

其中，积分次序可以根据 Fubini 定理交换。因此，由归纳法可得（2.10）成立。 □

由命题 2.4可知， $F_X^{[-n]}(p)$ 定义良好，并且 $|F_X^{[-n]}(p)| \le \mathbb{E}|X|/(n-2)!$ 对于 $n \ge 2$以及 $p \in [0,1]$ 当 $X \in L^1$时成立。与 n-SD 相比，这是 n-ISD 的优势之一，因为在考虑 n-SD 时，我们需要假设随机变量具有有限的（$n-1$）阶矩。

如果 F_X 不连续，则（2.10）可能不成立，以下反例说明了这一点。设 F_X在点 $x_0 \neq 0$处有跳跃，使得 $p_0 = F_X(x_0-) < F_X(x_0) = p_1$。那么，对于 $p \in (p_0, p_1)$，

$$F_X^{[-2]}(p) = \int_0^p F_X^{-1}(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^{p_0} F_X^{-1}(u)\,\mathrm{d}u + x_0(p-p_0),$$

且（2.10）的右端为

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} x\mathbb{1}_{\{F_X(x)<p\}}\,\mathrm{d}F_X(x) &= \int_{\mathbb{R}} x\mathbb{1}_{\{x<x_0\}}\,\mathrm{d}F_X(x) = \mathbb{E}\left[X\mathbb{1}_{\{X<x_0\}}\right]\\ &= \mathbb{E}\left[F_X^{-1}(U_X)\mathbb{1}_{\{F_X^{-1}(U_X)<x_0\}}\right]\\ &= \mathbb{E}\left[F_X^{-1}(U_X)\mathbb{1}_{\{U_X<p_0\}}\right]\\ &= \int_0^{p_0} F_X^{-1}(u)\,\mathrm{d}u \neq F_X^{[-2]}(p),\end{aligned}$$

这意味着在这种情况下（2.10）不成立。

类似地，记 $\widetilde{F}_X^{[-1]}(p)$ 为 $= F_X^{-1}(p)$，并递归定义

$$\widetilde{F}_X^{[-k]}(p) = \int_p^1 \widetilde{F}_X^{[-k+1]}(u)\,\mathrm{d}u, \quad p \in [0,1],\ k \ge 2.$$

通过比较 $\widetilde{F}_X^{[-k]}(p)$ 和 $\widetilde{F}_Y^{[-k]}(p)$ 对所有 $p \in [0,1]$的取值，我们可以定义另一种序关系，Wang and Young（*1998*）将其称为对偶随机占优，而 Aaberge 等人(2021) 将其称为 n 阶向下逆随机占优 (向下 n-ISD)。下文将考察由（2.8）定义的 n-ISD 序关系，因为 n-ISD 的结果可以相应地转换为向下n-ISD 情形。

类似地，我们有如下命题，其中（2.11）是 Zou and Hu (2024) 中的（4.3）。公式（2.11）和（2.9）将在定理 3.4 的证明中使用。

命题 2.5。对于 $X \in L^1$ 和 $n \ge 2$，有

$$\widetilde{F}_X^{[-n]}(p) = \frac{1}{(n-2)!}\int_0^1 F_X^{-1}(u)(u-p)_+^{n-2}\,\mathrm{d}u, \quad p \in [0,1]. \tag{2.11}$$

此外，若 F_X 连续，则

$$\widetilde{F}_X^{[-n]}(p) = \frac{1}{(n-2)!}\int_{\mathbb{R}} x(F_X(x)-p)_+^{n-2}\,\mathrm{d}F_X(x), \quad p \in [0,1].$$

下一个命题给出了 $F_X^{[-n]}(p)$ 和 $\widetilde{F}_X^{[-n]}(p)$ 的另一种积分表示。对于非负随机变量 $X \in L^1$，(2.13) 见 Wang and Young (1998) 的引理 4.5。

命题 2.6。 对于 $X \in L^1$, $p \in (0,1)$ 和 $n \geq 2$，有

$$F_X^{[-n]}(p) = \frac{1}{(n-1)!}\left[\int_0^\infty (p - F_X(t))_+^{n-1}\,\mathrm{d}t - \int_{-\infty}^0 \left(p^{n-1} - (p - F_X(t))_+^{n-1}\right)\mathrm{d}t\right], \tag{2.12}$$

$$\widetilde{F}_X^{[-n]}(p) = \frac{1}{(n-1)!}\left[\int_0^\infty \left((1-p)^{n-1} - (F_X(t) - p)_+^{n-1}\right)\mathrm{d}t - \int_{-\infty}^0 (F_X(t) - p)_+^{n-1}\,\mathrm{d}t\right]. \tag{2.13}$$

证明。 我们通过对 n 作归纳法来证明该命题。对于 $n = 2$,

$$F_X^{[-2]}(p) = \int_0^\infty (p - F_X(t))_+\,\mathrm{d}t - \int_{-\infty}^0 \left(p - (p - F_X(t))_+\right)\mathrm{d}t,$$

$$\widetilde{F}_X^{[-2]}(p) = \int_0^\infty \left(1 - p - (F_X(t) - p)_+\right)\mathrm{d}t - \int_{-\infty}^0 (F_X(t) - p)_+\,\mathrm{d}t,$$

如图 1所示。这意味着，对于 $n = 2$，(2.12) 和

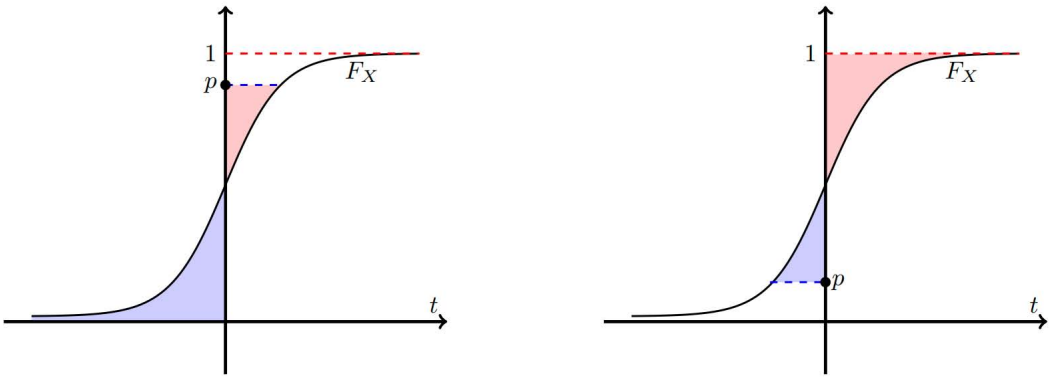

图 1： $F_X^{[-2]}(p)$ 和 $\widetilde{F}_X^{[-2]}(p)$ 的表示

(2.13) 成立。对于 $n = k + 1$，我们有

$$\begin{aligned} k!F_X^{[-k-1]}(p) &= \int_0^p k!F_X^{[-k]}(u)\,\mathrm{d}u \\ &= k\int_0^\infty \left[\int_0^p (u - F_X(t))_+^{k-1}\,\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}t - k\int_{-\infty}^0 \left[\int_0^p \left(u^{k-1} - (u - F_X(t))_+^{k-1}\right)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\infty (p - F_X(t))_+^k\,\mathrm{d}t - k\int_{-\infty}^0 \left(p^k - (p - F_X(t))_+^k\right)\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} k!\widetilde{F}_X^{[-k-1]}(p) &= \int_p^1 k!\widetilde{F}_X^{[-k]}(u)\,\mathrm{d}u \\ &= k\int_0^\infty \left[\int_p^1 \left((1-u)^{k-1} - (F_X(t) - u)_+^{k-1}\right)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}t - k\int_{-\infty}^0 \left[\int_p^1 (F_X(t) - u)_+^{k-1}\,\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\infty \left((1-p)^k - (F_X(t) - p)_+^k\right)\mathrm{d}t - \int_{-\infty}^0 (F_X(t) - p)_+^k\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Th因此，2.12和（2.13）对 $n = k + 1$成立。这通过归纳法证明了该命题 . □

3 针对 n-ISD 的矩不等式

众所周知，当$X \leq_2^- Y$时， $\mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[Y]$。以下两个例子表明，无论 $\mathbb{E}[X] > \mathbb{E}[Y]$ 还是 $\mathbb{E}[X] < \mathbb{E}[Y]$, 关系$X \leq_3^- Y$都可能成立。

例 3.1。 ($X \leq_3^- Y$ 和 $\mathbb{E}[X] > \mathbb{E}[Y]$) 考虑两个随机变量 X 和 Y，其概率质量函数分别为 $\mathbb{P}(X = 0) = 0.5 = 1 - \mathbb{P}(X = 10)$ 和 $\mathbb{P}(Y = 4) = 0.9 = 1 - \mathbb{P}(Y = 4.1)$。于是$\mathbb{E}[X] = 5 > 4.01 = \mathbb{E}[Y]$，且

$$F_X^{-1}(p) = \begin{cases} 0, & p \in [0, 0.5], \\ 10, & p \in (0.5, 1], \end{cases} \qquad F_Y^{-1}(p) = \begin{cases} 4, & p \in [0, 0.9], \\ 4.1, & p \in (0.9, 1]. \end{cases}$$

根据命题2.4，我们有

$$F_X^{[-3]}(p) = \int_0^p F_X^{-1}(u)(p-u)\,\mathrm{d}u = \begin{cases} 0, & p \in [0, 0.5], \\ 5(p-0.5)^2, & p \in (0.5, 1], \end{cases}$$

and

$$F_Y^{[-3]}(p) = \int_0^p F_Y^{-1}(u)(p-u)\,\mathrm{d}u = \begin{cases} 2p^2, & p \in [0, 0.9], \\ (p-0.9)^2/20 + 2p^2, & p \in (0.9, 1], \end{cases}$$

容易验证，对于所有 $p \in [0, 1]$，都有 $F_X^{[-3]}(p) \leq F_Y^{[-3]}(p)$。因此， $X \leq_3^- Y$。

中的例 1 和例 2 De La Cal 和 C´arcamo (2010) 也满足 $X \leq_3^{-1} Y$和 $\mathbb{E}[X] > \mathbb{E}[Y]$。

例 3.2。 ($X \leq_3^- Y$ 和 $\mathbb{E}[X] < \mathbb{E}[Y]$) 考虑两个随机变量 X 和 Y，其 $\mathbb{P}(X = 1) = 0.5 = 1 - \mathbb{P}(X = 3)$ 和 $\mathbb{P}(Y = 2.5) = 1$。于是 $\mathbb{E}[X] = 2 < 2.5 = \mathbb{E}[Y]$，且

$$F_X^{-1}(p) = \begin{cases} 1, & p \in [0, 0.5], \\ 3, & p \in (0.5, 1], \end{cases} \qquad F_Y^{-1}(p) = 2.5.$$

因此,

$$F_X^{[-3]}(p) = \int_0^p F_X^{-1}(u)(p-u)\,\mathrm{d}u = \begin{cases} 0.5p^2, & p \in [0, 0.5], \\ 1.5p^2 - p + 0.25, & p \in (0.5, 1], \end{cases}$$

and

$$F_Y^{[-3]}(p) = \int_0^p F_Y^{-1}(u)(p-u)\,\mathrm{d}u = 1.25p^2, \quad p \in [0, 1].$$

很容易验证，对于所有 $p \in [0, 1]$， $F_X^{[-3]}(p) \leq F_Y^{[-3]}(p)$。因此， $X \leq_3^- Y$。

设 $\{X_n, n \geq 1\}$ 是一列独立同分布的随机变量，其共同分布为 F_X，并令 $X_{1:k} = \min\{X_1, \ldots, X_k\}$, 其中 $k \geq 1$。为方便起见，记 $\mu_{1:k}^X = \mathbb{E}[X_{1:k}]$。由于 $F_{X_{1:k}}(x) = 1 - [S_X(x)]^k$，可得，对于 $p \in (0, 1)$, $F_{X_{1:k}}^{-1}(p) = F_X^{-1}(1 - (1-p)^{1/k})$。因此,

$$\mu_{1:k}^X = \int_0^1 F_X^{-1}(1 - (1-p)^{1/k})\,\mathrm{d}p = k \int_0^1 F_X^{-1}(u)(1-u)^{k-1}\,\mathrm{d}u = k! F_X^{[-k-1]}(1). \tag{3.1}$$

$\mu_{1:k}^X$ 还有另外两种表达方式如下:

$$\mu_{1:k}^X = k \int_{\mathbb{R}} x[S_X(x)]^{k-1}\,\mathrm{d}F_X(x)$$

$$= \int_0^\infty [S_X(x)]^k \, \mathrm{d}x - \int_{-\infty}^0 \left(1 - [S_X(x)]^k\right) \mathrm{d}x.$$

下一个命题给出了 n-ISD 的必要条件；对于非负随机变量，其特殊情形即为Muliere and Scarsini （1989）中的定理1。

命题 3.3. 若 $X \leq_n^- Y$ *for* $n > 2$，其中 $X, Y \in L^1$，则对所有 $k \geq n-1$，$\mu_{1:k}^X \leq \mu_{1:k}^Y$。

证明。由于 $X \leq_n^- Y$ 蕴含 $X \leq_{n+1}^- Y$，只需证明 $\mu_{1:(n-1)}^X \leq \mu_{1:(n-1)}^Y$ 当 $X \leq_n^- Y$ 时成立。由此，所需结果可由（3.1）以及 n-ISD 的定义得出。 □

定理 3.4. 设 $X, Y \in L^1$ 满足 $X \leq_n^- Y$ *for* $n > 2$。若

$$\mu_{1:(n-1-j)}^X = \mu_{1:(n-1-j)}^Y \; \textit{for } j = 0, \ldots, k, \; 0 \leq k < n-2. \tag{3.2}$$

then

$$(-1)^{k+1} \mu_{1:(n-2-k)}^X \leq (-1)^{k+1} \mu_{1:(n-2-k)}^Y. \tag{3.3}$$

证明。我们将用反证法证明所需结果（3.3）。反设（3.3）不成立，即

$$(-1)^{k+1} \mu_{1:(n-2-k)}^X > (-1)^{k+1} \mu_{1:(n-2-k)}^Y. \tag{3.4}$$

我们根据 n 是奇数还是偶数分两种情况讨论。

首先，假设 $n = 2m+1 > 2$ 是奇数。由（2.9）和（2.11），可得

$$\begin{aligned}
A_n^X(p) &:= F_X^{[-n]}(p) - \widetilde{F}_X^{[-n]}(p) \\
&= \frac{1}{(n-2)!} \int_0^1 F_X^{-1}(u) \left[(p-u)_+^{n-2} - (u-p)_+^{n-2}\right] \mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{(n-2)!} \int_0^1 F_X^{-1}(u) \left[\left((p-u)^{n-2}\right)_+ - \left((p-u)^{n-2}\right)_-\right] \mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{(n-2)!} \int_0^1 F_X^{-1}(u)(p-u)^{n-2} \, \mathrm{d}u \\
&= \frac{(1-p)^{n-2}}{(n-2)!} \sum_{j=0}^{n-2} (-1)^{j+1} \binom{n-2}{j} (1-p)^{-j} \int_0^1 F_X^{-1}(u)(1-u)^j \, \mathrm{d}u \\
&= \frac{(1-p)^{n-2}}{(n-1)!} \sum_{j=0}^{n-2} (-1)^{j+1} \binom{n-1}{j+1} (1-p)^{-j} \int_0^1 (j+1) F_X^{-1}(u)(1-u)^j \, \mathrm{d}u \\
&= \frac{(1-p)^{n-2}}{(n-1)!} \sum_{j=0}^{n-2} (-1)^{j+1} \binom{n-1}{j+1} (1-p)^{-j} \mu_{1:(j+1)}^X \\
&= \frac{(1-p)^{n-1}}{(n-1)!} \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j \binom{n-1}{j} (1-p)^{-j} \mu_{1:j}^X.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

因此，由（3.2）和（3.4），

$$\frac{(n-1)!}{(1-p)^{n-2}} \left(A_n^X(p) - A_n^Y(p)\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= (1-p)\sum_{j=1}^{n-2-k}(-1)^j\binom{n-1}{j}(1-p)^{-j}\left(\mu^X_{1:j}-\mu^Y_{1:j}\right)\\
&= \binom{n-1}{n-2-k}(-1)^{k+1}\left(\mu^X_{1:(n-2-k)}-\mu^Y_{1:(n-2-k)}\right)(1-p)^{-(n-3-k)}[1+o(1)]\\
&\longrightarrow \delta_k, \quad p\to 1,
\end{aligned}
$$

其中 $\delta_k = \binom{n-1}{n-2-k}(-1)^{k+1}\left(\mu^X_{1:(n-2-k)}-\mu^Y_{1:(n-2-k)}\right) > 0$ 对于 $k = n-3$，且 $\delta_k = +\infty$ 对于 $k < n-3$。另一方面，由于 $p\to 1$,

$$
\frac{\left|\widetilde{F}_X^{[-n]}(p)\right|}{(1-p)^{n-2}} \le \frac{1}{(n-2)!}\int_p^1 \left|F_X^{-1}(u)\right|\left(\frac{u-p}{1-p}\right)^{n-2}\mathrm{d}u \le \frac{1}{(n-2)!}\int_p^1 \left|F_X^{-1}(u)\right|\mathrm{d}u \to 0.
$$

类似地，当 $p\to 1$ 时，$\left|\widetilde{F}_Y^{[-n]}(p)\right|/(1-p)^{n-2}\to 0$。因此，我们得到

$$
\frac{(n-1)!}{(1-p)^{n-2}}\left(F_X^{[-n]}(p)-F_Y^{[-n]}(p)\right)\longrightarrow \delta_k > 0, \quad p\to 1, \tag{3.6}
$$

这意味着存在 $p_0\in(0,1)$，使得当 $p > p_0$ 时，$F_X^{[-n]}(p) > F_Y^{[-n]}(p)$。这是一个矛盾。接下来，假设 $n = 2m > 2$。那么

$$
\begin{aligned}
B_n^X(p) &:= F_X^{[-n]}(p) + \widetilde{F}_X^{[-n]}(p)\\
&= \frac{1}{(n-2)!}\int_0^1 F_X^{-1}(u)(p-u)^{n-2}\,\mathrm{d}u\\
&= \frac{(1-p)^{n-2}}{(n-2)!}\sum_{j=0}^{n-2}(-1)^j\binom{n-2}{j}(1-p)^{-j}\int_0^1 F_X^{-1}(u)(1-u)^j\,\mathrm{d}u\\
&= \frac{(1-p)^{n-2}}{(n-1)!}\sum_{j=0}^{n-2}(-1)^j\binom{n-1}{j+1}(1-p)^{-j}\int_0^1 (j+1)F_X^{-1}(u)(1-u)^j\,\mathrm{d}u\\
&= \frac{(1-p)^{n-2}}{(n-1)!}\sum_{j=0}^{n-2}(-1)^j\binom{n-1}{j+1}(1-p)^{-j}\mu^X_{1:(j+1)}\\
&= -\frac{(1-p)^{n-1}}{(n-1)!}\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^j\binom{n-1}{j}(1-p)^{-j}\mu^X_{1:j}.
\end{aligned}\tag{3.7}
$$

再次，由（3.2）和（3.4），可得

$$
\begin{aligned}
&\frac{(n-1)!}{(1-p)^{n-2}}\left(B_n^X(p)-B_n^Y(p)\right)\\
&\quad= -(1-p)\sum_{j=1}^{n-2-k}(-1)^j\binom{n-1}{j}(1-p)^{-j}\left(\mu^X_{1:j}-\mu^Y_{1:j}\right)\\
&\quad= -\binom{n-1}{n-2-k}(-1)^{n-2-k}\left(\mu^X_{1:(n-2-k)}-\mu^Y_{1:(n-2-k)}\right)(1-p)^{-(n-3-k)}[1+o(1)]\\
&\quad= \binom{n-1}{n-2-k}(-1)^{k+1}\left(\mu^X_{1:(n-2-k)}-\mu^Y_{1:(n-2-k)}\right)(1-p)^{-(n-3-k)}[1+o(1)]\\
&\quad\longrightarrow \delta_k, \quad p\to 1.
\end{aligned}
$$

同理，我们得出（3.6），这与矛盾。因此，定理的证明至此完成。 □

定理 3.4 可通过使用（2.12）和（2.13），而非（2.9）和（2.11）来证明。根据定理3.4，若 $X \leq_n^- Y$ 且 $\mu_{1:(n-1)}^X = \mu_{1:(n-1)}^Y$，则 $\mu_{1:(n-2)}^X \geq \mu_{1:(n-2)}^Y$。然而，以下两个例子表明，当去掉条件 $\mu_{1:(n-1)}^X = \mu_{1:(n-1)}^Y$ 时，$\mu_{1:(n-2)}^X$ 与 $\mu_{1:(n-2)}^Y$ 之间的关系并不确定——可能是 $\mu_{1:(n-2)}^X \geq \mu_{1:(n-2)}^Y$，也可能是 $\mu_{1:(n-2)}^X < \mu_{1:(n-2)}^Y$。

例 3.5。考虑满足 $\mathbb{P}(X = \pm a) = 0.5$ 且 $a > 0$ 的随机变量 X，并令 $Y = 0$。则 $\mathbb{E}[X] = 0 = \mathbb{E}[Y]$，$F_Y^{-1}(p) = 0$，且

$$F_X^{-1}(p) = \begin{cases} -a, & p \in [0, 0.5], \\ a, & p \in (0.5, 1], \end{cases}$$

根据（2.9），可得

$$F_X^{[-4]}(p) = \frac{1}{2}\int_0^p F_X^{-1}(u)(p-u)^2 \, \mathrm{d}u = \begin{cases} -ap^3/6, & p \in [0, 0.5], \\ a(2(p-0.5)^3 - p^3)/6, & p \in (0.5, 1], \end{cases}$$

且对于 $p \in [0, 1]$，$F_Y^{[-4]}(p) = 0$。容易看出，对于所有 $p \in [0, 1]$，$F_X^{[-4]}(p) \leq 0 = F_Y^{[-4]}(p)$。因此，$X \leq_4^- Y$。经过计算，我们得到 $\mu_{1:2}^X = -a/2 < 0 = \mu_{1:2}^Y$ 和 $\mu_{1:3}^X = -3a/4 < \mu_{1:3}^Y$。

例 3.6。考虑两个随机变量 X 和 Y，满足 $\mathbb{P}(X = 0) = 0.2, \mathbb{P}(X = 4) = 0.5, \mathbb{P}(X = 5) =$**0**。3 且 $\mathbb{P}(Y = 1) = 0.2, \mathbb{P}(Y = 3) = 0.5, \mathbb{P}(Y = 6) = 0.3$。则 $\mathbb{E}[X] = 3.5 = \mathbb{E}[Y]$，且

$$F_X^{-1}(p) = \begin{cases} 0, & p \in [0, 0.2], \\ 4, & p \in (0.2, 0.7], \\ 5, & p \in (0.7, 1], \end{cases} \qquad F_Y^{-1}(p) = \begin{cases} 1, & p \in [0, 0.2], \\ 3, & p \in (0.2, 0.7], \\ 6, & p \in (0.7, 1]. \end{cases}$$

由（2.9），可得

$$6F_X^{[-4]}(p) = \begin{cases} 0, & p \in [0, 0.2], \\ 4(p-0.2)^3, & p \in (0.2, 0.7], \\ (p-0.7)^3 + 4(p-0.2)^3, & p \in [0.7, 1], \end{cases}$$

and

$$6F_Y^{[-4]}(p) = \begin{cases} p^3, & p \in [0, 0.2], \\ 2(p-0.2)^3 + p^3, & p \in (0.2, 0.7], \\ (p-0.7)^3 + 2(p-0.2)^3 + p^3, & p \in (0.7, 1]. \end{cases}$$

不难验证，对所有 $p \in [0, 1]$，$F_X^{[-4]}(p) \leq F_Y^{[-4]}(p)$，即 $X \leq_4^- Y$。经计算可得 $\mu_{1:2}^X = 2.65 > 2.55 = \mu_{1:2}^Y$ 和 $\mu_{1:3}^X = 2.075 < 2.105 = \mu_{1:3}^Y$。

De La Cal 和 C´arcamo（2010）引入了一种称为强 n-ISD 的新随机序，该序关系可以通过均值次序统计量向量的 n-主序来刻画。若 X且 $\mu_{1:j}^X = \mu_{1:j}^Y$对于 $j = 1, \ldots, n-1$成立，则称 X在强 n-ISD 下被 Y 支配，记为 $X \leq_n^{-*} Y$。类似地，若 $X <_n^- Y$ 且 $\mu_{1:j}^X = \mu_{1:j}^Y$ 对于 $j = 1, \ldots, n-1$ 成立，则称 X 在强 n-ISD 下被 Y严格支配，记为$X <_n^{-*} Y$。下面给出一个 $X <_3^{-*} Y$ 的例子。

例 3.7. ($X <_3^{-*} Y$) 考虑两个随机变量 X 和 Y，其中 $\mathbb{P}(X=0)=0.2, \mathbb{P}(X=4)=0.5, \mathbb{P}(X=5)=0.3$，且 $\mathbb{P}(Y=1)=0.2, \mathbb{P}(Y=13/4)=0.5, \mathbb{P}(Y=67/12)=0.3$。于是 $\mathbb{E}[X]=3.5=\mathbb{E}[Y]$, $\mu_{1:2}^X=2.65=\mu_{1:2}^Y$，并且

$$F_X^{-1}(p)=\begin{cases}0, & p\in[0,0.2],\\ 4, & p\in(0.2,0.7],\\ 5, & p\in(0.7,1],\end{cases} \qquad F_Y^{-1}(p)=\begin{cases}1, & p\in[0,0.2],\\ 13/4, & p\in(0.2,0.7],\\ 67/12, & p\in(0.7,1].\end{cases}$$

由（2.9），我们得到

$$F_X^{[-3]}(p)=\begin{cases}0, & p\in[0,0.2],\\ 2(p-0.2)^2, & p\in(0.2,0.7],\\ \frac{1}{2}+2(p-0.7)+\frac{5}{2}(p-0.7)^2, & p\in[0.7,1],\end{cases}$$

and

$$F_Y^{[-3]}(p)=\begin{cases}\frac{1}{2}p^2, & p\in[0,0.2],\\ \frac{1}{50}+\frac{1}{5}(p-0.2)+\frac{13}{8}(p-0.2)^2, & p\in(0.2,0.7],\\ \frac{421}{800}+\frac{73}{40}(p-0.7)+\frac{67}{24}(p-0.7)^2, & p\in(0.7,1].\end{cases}$$

对于 $p\in(0.2,0.7]$，令 $s=p-0.2\in(0,0.5]$。那么

$$F_Y^{[-3]}(p)-F_X^{[-3]}(p)=\frac{1}{50}+\frac{1}{5}s-\frac{3}{8}s^2=:d_1(s)\geq\min\{d_1(0),d_1(0.5)\}>0.$$

对于 $p\in(0.7,1]$，令 $t=p-0.7\in(0,0.3]$，那么

$$F_Y^{[-3]}(p)-F_X^{[-3]}(p)=\frac{21}{800}-\frac{7}{40}t+\frac{7}{24}t^2=:d_2(t)\geq d_2(0.3)=0.$$

因此，对于所有 $p\in[0,1]$，$F_X^{[-3]}(p)\leq F_Y^{[-3]}(p)$，即 $X<_3^{-*}Y$。

下一个定理指出，若 $X<_n^{-*}Y$对于 $n>2$，则 $\mu_{1:n}^X>\mu_{1:n}^Y$。

定理 3.8. 设 $X,Y\in L^1$ 满足 $X<_n^{-}Y$对于 $n>2$。

(i) 若 $\mu_{1:k}^X=\mu_{1:k}^Y$对 $k=1,\ldots,n-1$成立，则 $\mu_{1:n}^X>\mu_{1:n}^Y$。(ii) 若 $\mu_{1:k}^X=\mu_{1:k}^Y$对 $k=2,\ldots,n$成立，则 $(-1)^n\mathbb{E}[X]<(-1)^n\mathbb{E}[Y]$。

证明。由于 $X<_n^{-}Y$，可得对所有 $p\in(0,1)$，$F_X^{[-n]}(p)\leq F_Y^{[-n]}(p)$，且存在一点 $p_0\in(0,1)$ 和 $\alpha>0$，使得 $F_Y^{[-n]}(p_0)-F_X^{[-n]}(p_0)=2\alpha>0$。由于 $F_X^{[-n]}(p)$ 在 $p\in(0,1)$ 上连续，因此存在一个区间 $[p_0,p_1]\subset(0,1)$ $p_0<p_1$，使得对所有 $p\in[p_0,p_1]$，$F_Y^{[-n]}(p)\geq F_X^{[-n]}(p)+\alpha$。因此，对于 $p>p_1$，

$$F_Y^{[-n-1]}(p)-F_X^{[-n-1]}(p)\geq\int_{p_0}^{p_1}\left[F_Y^{[-n]}(u)-F_X^{[-n]}(u)\right]\mathrm{d}u\geq\alpha(p_0-p_1)>0. \tag{3.8}$$

现在我们通过矛盾证明第（i）部分。反过来假设 $\mu_{1:n}^X\leq\mu_{1:n}^Y$。考虑以下两种情况。

首先，假设 n是奇数。由（3.5），可得

$$A_{n+1}^X(p)=\frac{(1-p)^n}{n!}\sum_{j=1}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}(1-p)^{-j}\mu_{1:j}^X$$

$$= -\frac{1}{n!}\mu_{1:n}^X + \frac{(1-p)^n}{n!}\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^j\binom{n}{j}(1-p)^{-j}\mu_{1:j}^X$$
$$\geq -\frac{1}{n!}\mu_{1:n}^Y + \frac{(1-p)^n}{n!}\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^j\binom{n}{j}(1-p)^{-j}\mu_{1:j}^Y = A_{n+1}^Y(p).$$

由于当 $n>2$ 时， $\widetilde{F}_Y^{[-n-1]}(p) \to 0$ 趋于 $p \to 1$，因此对任意 $0<\epsilon<\alpha(p_0-p_1)/2$,

$$F_X^{[-n-1]}(p) \geq A_{n+1}^X(p) - \epsilon \geq A_{n+1}^Y(p) - \epsilon > F_Y^{[-n-1]}(p) - 2\epsilon$$

当 $p \to 1$ 时。这与（3.8）矛盾，从而推出 $\mu_{1:n}^X > \mu_{1:n}^Y$ 对于奇数 $n>2$。

接下来，假设 n 为偶数。根据（3.7），我们有

$$B_{n+1}^X(p) = -\frac{(1-p)^n}{n!}\sum_{j=1}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}(1-p)^{-j}\mu_{1:j}^X$$
$$= -\frac{1}{n!}\mu_{1:n}^X - \frac{(1-p)^n}{n!}\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^j\binom{n}{j}(1-p)^{-j}\mu_{1:j}^X$$
$$\geq -\frac{1}{n!}\mu_{1:n}^Y - \frac{(1-p)^n}{n!}\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^j\binom{n}{j}(1-p)^{-j}\mu_{1:j}^Y = B_{n+1}^Y(p).$$

类似地，对于任意 $0<\epsilon<\alpha$（p_0-p_1）/2，我们有 $F_X^{[-n-1]}$（p）$> B_{n+1}^X$（p）$-\epsilon \geq B_{n+1}^Y$（p）$-\epsilon \geq F_Y^{[-n-1]}$（$p$）$-2\epsilon$当 $p \to 1$ 时。这同样与（3.8）矛盾，从而推出 $\mu_{1:n}^X > \mu_{1:n}^Y$ 对于偶数 $n>2$。

（ii）证明与第（i）部分类似，故略去。 □

在定理 3.8中，当 $n=1$ 时，结论不正确，2。

4 n-SD 下的独立噪声

用 $\mathcal{P}_n$ 表示 $\mathbb{R}$ 上所有具有有限 n阶矩的博雷尔概率测度的集合，用$\mathcal{M}_n$ 表示 $\mathbb{R}$ 上所有具有有限 n阶矩的有界博雷尔符号测度的集合。回顾一下，若符号测度 μ 的绝对值 $|\mu|$ 是有限测度，则称其有界。对于 μ_1, $\mu_2 \in \mathcal{M}_n$，用 $\mu_1 * \mu_2$表示 μ_1 与 μ_2的卷积。

以下引理将在主要结果（定理4.2）的证明中使用。该引理指出，总质量为一的 $\mathbb{R}$ 上的符号测度，可以通过与另一个适当选取的概率测度进行卷积，平滑为一个概率测度。

引理 4.1。（Rachev 和 Stoyanov， 2008年； Mattner， 2004年； Pomatto 等人， 2020年）对于任意 $\nu \in \mathcal{M}_n$ 满足$\nu(\mathbb{R}) = 1$ 以及 $n \in \{0,1,\ldots,\infty\}$，存在一个 $\mu \in \mathcal{P}_n$ 使得 $\mu * \nu \in \mathcal{P}_n$。

定理 4.2. 令 $X, Y \in L^n$ 对于 $n \geq 1$。若 $\mathbb{E}[X^k] = \mathbb{E}[Y^k]$ 对于 $k = 0, \ldots, n-1$ 且

$$(-1)^{n-1}\mathbb{E}[X^n] > (-1)^{n-1}\mathbb{E}[Y^n],$$

则 t 存在一个随机变量 Z，它与 X 和 Y 独立，使得 $X+Z >_n Y+Z$.

证明。 注意，对于任意 $c \in \mathbb{R}$， $c^n = c_+^n + (-1)^n c_-^n$ 以及积分表示

$$c_+^n = n \int_0^\infty (c-t)_+^{n-1} \, \mathrm{d}t = n \int_0^\infty \left[(c-t)^{n-1} + (-1)^n (t-c)_+^{n-1} \right] \, \mathrm{d}t$$

and

$$c_-^n = n \int_{-\infty}^0 (t-c)_+^{n-1} \, \mathrm{d}t.$$

利用这些表示，我们得到

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\mathbb{E}[X^n] &= \int_0^\infty \mathbb{E}\left[(X-t)^{n-1} + (-1)^n (t-X)_+^{n-1} \right] \, \mathrm{d}t + (-1)^n \int_{-\infty}^0 \mathbb{E}\left[(t-X)_+^{n-1} \right] \, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty \left\{ \mathbb{E}\left[(X-t)^{n-1} \right] + (-1)^n (n-1)! F_X^{[n]}(t) \right\} \, \mathrm{d}t + (-1)^n (n-1)! \int_{-\infty}^0 F_X^{[n]}(t) \, \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}
\frac{(-1)^n}{n!} \left(\mathbb{E}[Y^n] - \mathbb{E}[X^n] \right) &= \int_0^\infty \left\{ \frac{(-1)^n}{(n-1)!} \mathbb{E}\left[(Y-t)^{n-1} \right] + F_Y^{[n]}(t) \right\} \, \mathrm{d}t + \int_{-\infty}^0 F_Y^{[n]}(t) \, \mathrm{d}t \\
&\quad - \int_0^\infty \left\{ \frac{(-1)^n}{(n-1)!} \mathbb{E}\left[(X-t)^{n-1} \right] + F_X^{[n]}(t) \right\} \, \mathrm{d}t - \int_{-\infty}^0 F_X^{[n]}(t) \, \mathrm{d}t \\
&= \frac{(-1)^n}{(n-1)!} \int_0^\infty \left\{ \mathbb{E}\left[(Y-t)^{n-1} \right] - \mathbb{E}\left[(X-t)^{n-1} \right] \right\} \, \mathrm{d}t \\
&\quad + \int_{-\infty}^\infty \left[F_Y^{[n]}(t) - F_X^{[n]}(t) \right] \, \mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^\infty \left[F_Y^{[n]}(t) - F_X^{[n]}(t) \right] \, \mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

等式 成立是因为假设 $\mathbb{E}[X^k] = \mathbb{E}[Y^k]$ 对 $k = 0$、.....、$n-1$成立。因此 ，

$$\int_{\mathbb{R}} \left[F_Y^{[n]}(t) - F_X^{[n]}(t) \right] \, \mathrm{d}t = \frac{(-1)^n}{n!} \left(\mathbb{E}[Y^n] - \mathbb{E}[X^n] \right) =: \gamma,$$

根据假设，该值为正。现在定义一个符号测度 ν 如下:

$$\nu(A) := \frac{1}{\gamma} \int_A \left[F_Y^{[n]}(t) - F_X^{[n]}(t) \right] \, \mathrm{d}t, \quad A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}).$$

因此， $\nu(\mathbb{R}) = 1$。令 μ_X 和 μ_Y 分别为由分布函数 F_X和 F_Y诱导的 Lebesgue–Stieltjes测度。下文中，$\mathrm{d}|F_X(x) - F_Y(x)|$ 表示 $\mathrm{d}|\mu_X(x) - \mu_Y(x)|$。我们得出结论， ν是一个有界符号测度，因为

$$\begin{aligned}
\gamma|\nu|(\mathbb{R}) &= \int_{\mathbb{R}} \left| F_Y^{[n]}(t) - F_X^{[n]}(t) \right| \, \mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^\infty \left| \int_{-\infty}^t \frac{(t-u)^{n-1}}{(n-1)!} \, \mathrm{d}\left(F_Y(u) - F_X(u) \right) \right| \, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty \left| \int_{-\infty}^t \frac{(t-u)^{n-1}}{(n-1)!} \, \mathrm{d}\left(F_Y(u) - F_X(u) \right) \right| \, \mathrm{d}t + \int_{-\infty}^0 \left| \int_{-\infty}^t \frac{(t-u)^{n-1}}{(n-1)!} \, \mathrm{d}\left(F_Y(u) - F_X(u) \right) \right| \, \mathrm{d}t \\
&\leq \int_0^\infty \int_t^\infty \frac{(u-t)^{n-1}}{(n-1)!} \, \mathrm{d}\left| F_Y(u) - F_X(u) \right| \, \mathrm{d}t + \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^t \frac{(t-u)^{n-1}}{(n-1)!} \, \mathrm{d}\left| F_Y(u) - F_X(u) \right| \, \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^{\infty} \left[\int_0^u \frac{(u-t)^{n-1}}{(n-1)!} \, \mathrm{d}t \right] \mathrm{d}\left|F_Y(u) - F_X(u)\right| + \int_{-\infty}^{0} \left[\int_u^0 \frac{(t-u)^{n-1}}{(n-1)!} \, \mathrm{d}t \right] \mathrm{d}\left|F_Y(u) - F_X(u)\right| \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|u|^n}{n!} \, \mathrm{d}\left|F_Y(u) - F_X(u)\right| \\
&\leq \frac{1}{n!} \left(\mathbb{E}[|Y|^n] + \mathbb{E}[|X|^n]\right) < \infty,
\end{aligned}
$$

其中，第三个等号由关于 $k = 0, \ldots, n-1$的 $\mathbb{E}[X^k] = \mathbb{E}[Y^k]$假设得出。因此，$\nu \in \mathcal{M}_0$。接着，根据引理 4.1，存在一个概率测度 $\mu \in \mathcal{P}_0$，使得 $\nu * \mu \in \mathcal{P}_0$。令 Z 为一个随机变量，它与 X 和 Y 相互独立，且分布为 μ。根据定义，符号测度 ν 关于密度 $\left[F_Y^{[n]}(t) - F_X^{[n]}(t)\right]/\gamma$绝对连续。因此，$\nu * \mu$也绝对连续，其密度函数 $f(x)$几乎处处满足

$$
\begin{aligned}
\gamma f(x) &= \int_{\mathbb{R}} \left[F_Y^{[n]}(x-t) - F_X^{[n]}(x-t) \right] \mathrm{d}\mu(t) \\
&= \frac{1}{(n-1)!} \int_{\mathbb{R}} \left\{ \mathbb{E}\left[(x-t-Y)_+^{n-1}\right] - \mathbb{E}\left[(x-t-X)_+^{n-1}\right] \right\} \mathrm{d}F_Z(t) \\
&= \frac{1}{(n-1)!} \left\{ \mathbb{E}\left[(x-Z-Y)_+^{n-1}\right] - \mathbb{E}\left[(x-Z-X)_+^{n-1}\right] \right\} \\
&= F_{Y+Z}^{[n]}(x) - F_{X+Z}^{[n]}(x).
\end{aligned}
$$

由于 $\nu * \mu$是一个概率测度，因此 $f(x) \geq 0$，从而对于几乎所有 x，都有 $F_{Y+Z}^{[n]}(x) \geq F_{X+Z}^{[n]}(x)$。由于 $F_{Y+Z}^{[n]}(x)$ 和 $F_{X+Z}^{[n]}(x)$ 连续右侧，这意味着对于所有 $x \in \mathbb{R}$，都有 $F_{Y+Z}^{[n]}(x) \geq F_{X+Z}^{[n]}(x)$。此外，由于 $f(x)$ 是密度函数，该不等式在某处是严格的。因此，$X + Z >_n Y + Z$。 □

A定理 4.2 对于 $n = 1$ 和 2 的直接推论如下。

推论 4.3. (Pomatto 等人，2020年)。设 X 和 Y 是两个随机变量。

(i) 如果 X 和 Y 具有有限期望且满足 $\mathbb{E}[X] > \mathbb{E}[Y]$，那么存在一个随机变量 Z，它与 X 和 Y相互独立，并且满足 $X + Z >_1 Y + Z$。

(ii) 如果 X 和 Y具有有限方差，且 $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y]$ 以及 $\mathrm{Var}(X) < \mathrm{Var}(Y)$，那么存在一个随机变量 Z，它与 X和 Y相互独立，使得 $X + Z >_2 Y + Z$。

Pomatto 等人 (2020年) 应用推论 4.3 对 Markowitz的(1952) 经典均值—方差偏好给出了一个简单的公理化。

受定理 3.8(i) 和4.2的启发，我们提出如下问题。

问题 1。设 X、$Y \in L^1$ 满足 $\mu_{1:k}^X = \mu_{1:k}^Y$，其中 $k = 1$、……、$n-1$，且 $\mu_{1:n}^X > \mu_{1:n}^Y$，其中 $n > 2$。是否存在一个随机变量 Z，它与 X和 Y相互独立，使得 $X + Z <_n^- Y + Z$?

资金

通讯作者 Z. Zou 衷心感谢国家自然科学基金（项目编号：12401625）和中央高校基本科研业务费提供的经费支持

（项目编号：WK2040000108）。T. Hu 衷心感谢国家自然科学基金（项目编号：72332007、12371476）提供的经费支持。

披露声明

作者未报告任何潜在的利益冲突。

参考文献

Aaberge, R., Havnes, T. 和 Mogstad, M. (2021)。相交分布函数的排序。 *Journal of AppliedEconometrics*, **36**(6), 639-662。Andreoli, F. (2018)。逆随机占优的稳健推断。 *Journal of Business and Economic Statistics*,**36**(1), 146-159。Carletti, M. 和 Pellerey, F. (1998)。关于高阶随机占优及其应用的一项新必要条件。 *Ricerche di Matematica*, **47**, 373-381。De La Cal, J. 和 C´arcamo, J. (2010)。逆随机占优、主序与均值次序统计量。 *Journalof Applied Probability*, **47**, 277-292。Delbaen, F. (2012)。 *Monetary Utility Functions*。大阪：大阪大学出版社。Eeckhoudt, L., Schlesinger, H., Tsetlin, I. (2009)。通过随机占优进行风险分摊。 *Journal of EconomicTheory*, **144**(3), 994-1003。Fishburn, P.C. (1976)。有界概率分布的连续随机占优关系。 *Journal ofMathematical Economics*, **3**, 295-311。Fishburn, P.C. (1980a)。无界概率分布的连续随机占优关系。 *Journalof Mathematical Economics*,**7**, 271-285。Fishburn, P.C. (1980b)。随机占优与分布的矩。 *Mathematics of Operations Research*,**5**, 94-100。F¨ ollmer, H. 和 Schied, A. (2011)。 *Stochastic Finance: An Introduction in Discrete Time*。第三版，柏林：Walter de Gruyter。Gotoh, J. 和 Konno, H. (2000)。三阶随机占优与均值—风险分析。 *Management Science*,**46**, 289-301。Jean, W.H. (1980)。几何平均数与随机占优。 *Journal of Finance*,**35**(1), 151-158。Jean, W.H. 和 Helms, B.P. (1988a)。随机占优的必要条件：一种一般方法。 *AppliedStochastic Models and Data Analysis*,**4**, 89-99。Jean, W.H. 和 Helms, B.P. (1988b)。矩排序与随机占优检验。 *Journal of Business Financeand Accounting*,**15**, 573-584。

Jean, W.H. 和 Helms, B.P. (1988c)。通过矩组合排序识别随机占优有效集。 *Journal of Banking and Finance*, 12, 243-253。Jiang, H., Sun, Z. 和 Hu, S. (2024)。 m阶逆随机占优的非参数检验。 *EconomicsLetters*, 244, 文章编号 111978。Kaas, R., van Heerwaarden, A.E. 和 Goovaerts, M.J. (1994)。 *Ordering of Actuarial Risks*, 教育丛书 1, 布鲁塞尔 CAIRE。Levy, H. (2016)。 *Stochastic Dominance* （第三版）, 纽约：施普林格。Maccheroni, F., Muliere, P. 和 Zoli, C. (2005)。逆随机序与广义基尼泛函。 *Metron*, 63, 529-559。Markowitz, H. (1952)。投资组合选择。 *Journal of Finance*, 7(1), 77-91。Mattner, S. (2004)。累积量是映射到豪斯多夫群中的泛同态。 *Probability Theory and RelatedFields*, 130(2): 151-166。Muliere, P. 和 Scarsini, M. (1989)。关于随机占优与不平等度量的一则短注。 *Journal of EconomicTheory*, 49(2), 314-323。M¨uller, A. 和 Stoyan, D. (2002)。 *Comparison Methods for Stochastic Models and Risks*。奇切斯特：约翰·威立父子公司。O'Brien, G.L. (1984)。随机占优与矩不等式。 *Mathematics of Operations Research*, 9(3), 475-477。Ogryczak, W. 和 Ruszczy´nski, A. (1999)。从随机占优到均值-风险模型：作为风险度量的半偏差。 *European Journal of Operational Research*, 116, 33-50。Ogryczak, W. 和 Ruszczy´nski, A. (2001)。随机占优与均值-半偏差模型的一致性。*Mathematical Programming* （B 辑）, 89(2), 217-232。Pomatto, L., Strack, P. 和 Tamuz, O. (2020)。独立噪声下的随机占优。 *Journal of Political Economy*, 128(5), 1877-1900。Rachev, S. T. 和 Stoyanov, S. (2008)。 *Advanced Stochastic Models, Risk Assessment, and Portfolio Optimization:The Ideal Risk, Uncertainty, and Performance Measures*。奇切斯特：威立。Rolski, T. (1976)。 *Order relations in the set of probability distribution functions and their applications in queueingtheory*。博士论文, 波兰科学院数学研究所。Schmid, F. (2005)。关于三阶随机占优的一则短注。 *OR Spectrum*, 27, 653-655。Shaked, M. 和 Shanthikumar, J.G. (2007)。 *Stochastic Orders*。纽约：施普林格。Shorrocks, A.F. 和 Foster, J.E. (1987)。转移敏感不平等度量。 *Review of Economic Stduies*, 54, 485-497。Thistle, P.D. (1993)。负矩、风险厌恶与随机占优。 *Journal of Financial and Quanti-tative Analysis*, 2, 301-311。

Wang, R. 和 Wu, Q.（2025）。高阶随机占优中的参考区间。 *Economic Theory Bulletin*,**13**, 263-277。

Wang, S. 和 Young, V.（1998）。风险排序：期望效用理论与 Yaari 风险对偶理论。 *Insurance: Mathematics and Economics*,**22**(2), 145-161. Whang, Y.-J.（1998）。 *Econometric Analysis of Stochastic Dominance: Conceptes, Methods, Tools, and Applications*。Cambridge University Press，英国。Zoli, C.（1999）。广义洛伦兹曲线与基尼指数的交叉。 *Social Choice and Welfare*, **16**, 183-196。Zoli, C.（2002）。逆随机占优、不平等测度与基尼指数。 *Journal of Economics*, **77**, 119-161。

Zou, Z. 和 Hu, T.（2024）。调整后的高阶预期损失。 *Insurance: Mathematics and Economics*, **115**, 1-12。

附录

A 结果—风险图中的渐近线

定义如下两个函数

$$C_n^X(x) = F_X^{[n]}(x) - \overline{F}_X^{[n]}(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{A.1}$$

and

$$D_n^X(x) = F_X^{[n]}(x) + \overline{F}_X^{[n]}(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{A.2}$$

若 n 为偶数且 $X \in L^{n-1}$，则应用（2.2）和（2.3）可得

$$C_n^X(x) = \frac{1}{(n-1)!}\Big\{\mathbb{E}[(x-X)_+^{n-1}] - \mathbb{E}[(X-x)_+^{n-1}]\Big\} = -\frac{1}{(n-1)!}\mathbb{E}[(X-x)^{n-1}]. \tag{A.3}$$

同理，若 n 为奇数且 $X \in L^{n-1}$，则有

$$D_n^X(x) = \frac{1}{(n-1)!}\mathbb{E}[(X-x)^{n-1}], \quad x \in \mathbb{R}. \tag{A.4}$$

注意， $F_X^{[n]}(x)$ 是增函数、连续函数且为凸函数，而 $F_X^{[n]}(x)$ 是减函数、连续函数且为凸函数。因此，当 $x \to \infty$ 时，

$$F_X^{[n]}(x) - C_n^X(x) = \overline{F}_X^{[n]}(x) \longrightarrow 0 \quad \text{for even } n,$$
$$D_n^X(x) - F^{[n]}(x) = \overline{F}_X^{[n]}(x) \longrightarrow 0 \quad \text{for odd } n,$$

这意味着$C_n^X(x)$，由（A.1）定义，是右下渐近线，对应 $F_X^{[n]}(x)$，当 n为偶数时；而$D_n^X(x)$，由（A.2）定义，是右上渐近线，对应 $F_X^{[n]}(x)$，当 n为奇数时。

我们将 $F_X^{[n]}(x$的图称为结果—风险图。记 $\mu_X = \mathbb{E}X$ 为 $X \in L^1$，并以$\sigma_X^2 = \mathrm{Var}(X$表示 $X \in L^2$。根据Ogryczak 和 Ruszczy´nski (1999) 的结论，当 $n = 2$时， $C_2^X(x) = x - \mu_X$

是 $F_X^{[2]}$ (x在 x 趋于无穷大时的右下渐近线。对于 $n=3$，Gotoh 和 Konno (2000) 指出

$$D_3^X(x)=\frac{1}{2}(x-\mu_X)^2+\frac{1}{2}\sigma_X^2$$

是 $F_X^{[3]}(x)$ 在 x 趋于无穷大时的右上渐近线。需要指出的是，对于 $n\geq 1$，x轴是 $F_X^{[n]}(x)$ 在 x 趋于负无穷大时的左下渐近线。

B 证明

B.1 定理2.1的证明

为方便起见，记 $\mu_j^X=\mathbb{E}[X^j]$ 为 $j\geq 1$，并令 $\mu_i=\mu_i^X=\mu_i^Y$为 $i=1,\ .....,\ k$。我们将通过反证法证明所需结果（2.5）。反设（2.5）不成立，即

$$(-1)^{k+1}\,\mu_{k+1}^X>(-1)^{k+1}\,\mu_{k+1}^Y. \tag{A.1}$$

根据 n是奇数还是偶数，我们分两种情况讨论。

首先，假设 n 是奇数。在这种情况下，令 $D_n^X(x)$ 和 $D_n^Y(x)$ 分别为 $F_X^{[n]}(x)$ 和 $F_Y^{[n]}(x)$ 在 x 趋于无穷大时的右上渐近线。由（A.4）可得

$$D_n^X(x)=\frac{1}{(n-1)!}\left[\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{n-1}{j}\mu_j x^{n-1-j}+\sum_{j=k+1}^{n-1}(-1)^j\binom{n-1}{j}\mu_j^X x^{n-1-j}\right],$$
$$D_n^Y(x)=\frac{1}{(n-1)!}\left[\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{n-1}{j}\mu_j x^{n-1-j}+\sum_{j=k+1}^{n-1}(-1)^j\binom{n-1}{j}\mu_j^Y x^{n-1-j}\right].$$

于是，由于 $x\to\infty$,

$$\begin{aligned}D_n^X(x)-D_n^Y(x)&=\frac{1}{(n-1)!}\sum_{j=k+1}^{n-1}(-1)^j\binom{n-1}{j}(\mu_j^X-\mu_j^Y)x^{n-1-j}\\&=\frac{1}{(n-1)!}(-1)^{k+1}\binom{n-1}{k+1}\left(\mu_{k+1}^X-\mu_{k+1}^Y\right)x^{n-k-2}\left[1+\circ(1)\right]\longrightarrow\eta_k>0,\end{aligned}$$

其中

$$\eta_k=\begin{cases}\dfrac{1}{(n-1)!}\binom{n-1}{k+1}(-1)^{k+1}\left(\mu_{k+1}^X-\mu_{k+1}^Y\right)>0, & k=n-2,\\ +\infty, & k<n-2.\end{cases}$$

因此，存在 $\epsilon_0>0$和 $x_0\in\mathbb{R}$，使得 $D_n^X(x)-D_n^Y(x)>\epsilon_0$且 $D_n^X(x)-F_X^{[n]}(x)<\epsilon_0$对所有 $x>x_0$均成立。因此，我们有

$$F_X^{[n]}(x)>D_n^X(x)-\epsilon_0>D_n^Y(x)\geq F_Y^{[n]}(x),\quad x>x_0,$$

这与 $X\geq_n Y$矛盾。因此，(2.5) 在 n 为奇数时成立。

接下来，假设 n 是偶数。我们分别考虑$D_n^X(x)$ 和$D_n^Y(x)$ 的右下渐近线 $F_X^{[n]}(x)$ 和$F_Y^{[n]}(x)$。应用（A.3）可得，当 $x\to\infty$时，

$$C_n^X(x)-C_n^Y(x)=\frac{1}{(n-1)!}\sum_{j=k+1}^{n-1}(-1)^j\binom{n-1}{j}\left(\mu_j^X-\mu_j^Y\right)x^{n-1-j}$$

$$= \frac{1}{(n-1)!}(-1)^{k+1}\binom{n-1}{k+1}\left(\mu_{k+1}^X - \mu_{k+1}^Y\right) x^{n-k-2}\left[1+\circ(1)\right] \longrightarrow \eta_k > 0.$$

因此，存在 $\epsilon_1 > 0$和 $x_1 \in \mathbb{R}$，使得对于所有 $x > x_1$， $C_n^X(x) - C_n^Y(x) > \epsilon_1$且 $F_Y^{[n]}(x) - C_n^Y(x) < \epsilon_1$。因此，我们有

$$F_X^{[n]}(x) \geq C_n^X(x) > C_n^Y(x) + \epsilon_1 > F_Y^{[n]}(x), \quad x > x_1,$$

与之矛盾 $X \geq_n \quad Y$。因此，当2.5成立时， n 为奇数。这就完成了定理 2.1 的证明。 □

B.2 定理 2.2 的证明

我们采用与定理 3.8 的证明类似的思路。注意， $X >_n Y$ 意味着，对于所有 $x \in \mathbb{R}$， $F_X^{[n]}(x) \leq F_Y^{[n]}(x)$，并且存在一点 $x_0 \in \mathbb{R}$，使得 $F_Y^{[n]}(x_0) - F_X^{[n]}(x_0) = 2\alpha > 0$。由于 $F_X^{[n]}(x)$关于 x连续，因此存在一个区间 $[x_0, x_1]$, $x_0 < x_1$，使得对于所有 $x \in [x_0, x_1]$， $F_Y^{[n]}(x) \geq F_X^{[n]}(x) + \alpha$。因此，对于 $x > x_1$，

$$F_Y^{[n+1]}(x) - F_X^{[n+1]}(x) \geq \int_{x_0}^{x_1} \left[F_Y^{[n]}(t) - F_X^{[n]}(t)\right] \mathrm{d}t \geq \alpha(x_1 - x_0) > 0. \tag{A.2}$$

现在我们用反证法证明（2.6）。反设（2.6）不成立，即 $(-1)^{n-1}\mu_n^X \leq (-1)^{n-1}\mu_n^Y$. 考虑以下两种情况。

首先，假设 n 是偶数。注意， $D_{n+1}^X(x)$和$D_{n+1}^Y(x)$分别是 $F^{[n+1]}(x)$和 $G^{[n+1]}(x)$的右上渐近线。此外，

$$\begin{aligned} D_{n+1}^X(x) &= \frac{1}{n!}\mathbb{E}[(X-x)^n] = \frac{1}{n!}\left[\mu_n^X + \sum_{j=0}^{n-1}\binom{n}{j}\mu_j^X(-1)^{n-j}x^{x-j}\right] \\ &\geq \frac{1}{n!}\left[\mu_n^Y + \sum_{j=0}^{n-1}\binom{n}{j}\mu_j^Y(-1)^{n-j}x^{x-j}\right] = \frac{1}{n!}\mathbb{E}[(Y-x)^n] = D_{n+1}^Y(x). \end{aligned}$$

对任意 $0 < \epsilon < \alpha(x_1 - x_0)$，当 $F_X^{[n+1]}(x) > D_{n+1}^X(x) - \epsilon \geq D_{n+1}^Y(x) - \epsilon \geq F_Y^{[n+1]}(x) - \epsilon$足够大时， x成立。这与（A.2）矛盾。因此，当 n为偶数时，我们证明了（2.6）

接下来，假设 n 是奇数。注意， $C_{n+1}^X(x)$和 $C_{n+1}^Y(x)$分别是 $F_X^{[n+1]}(x)$和$F_Y^{[n+1]}(x)$的右下渐近线。类似地，我们有

$$\begin{aligned} C_{n+1}^X(x) &= \frac{1}{n!}\left[-\mu_n^X - \sum_{j=0}^{n-1}\binom{n}{j}\mu_{Y,j}(-1)^{n-j}x^{n-j}\right] \\ &\geq \frac{1}{n!}\left[-\mu_n^Y - \sum_{j=0}^{n-1}\binom{n}{j}\mu_j^Y(-1)^{n-j}x^{n-j}\right] = -\frac{1}{n!}\mathbb{E}[(Y-x)^n] = C_{n+1}^Y(x). \end{aligned}$$

对于任意 $0 < \epsilon < \alpha(x_1 - x_0)$，我们有 $F_X^{[n+1]}(x) \geq C_{n+1}^X(x) \geq C_{n+1}^Y(x) \geq F_Y^{[n+1]}(x) - \epsilon$当 x足够大时。这也与（A.2）矛盾。因此，当 n 为奇数时，我们证明了（2.6）。 □