arXiv:2601.03544v1 [math.DG] 7 Jan 2026

分层伪束与量化

BY

Ethan Ross

根据哲学博士学位的要求提交的论文数学系多伦多大学© 版权所有 Ethan Ross 2025

摘 要

分层伪丛与量子化

Ethan Ross

哲学博士

数学系

多伦多大学

2025

几何量子化是一个术语，用于描述一系列广泛的技术，其历史可追溯至20世纪60年代 Kirillov、Kostant 和 Souriau 的工作。这些技术将辛流形转化为复向量空间。该名称源于这样一种自然诠释：辛流形是经典力学系统的相空间，而复向量空间则是量子力学中波函数的自然定义域。

在这篇论文中，我将几何量子化的经典框架扩展到一类称为辛分层空间的奇异空间。这类空间可追溯至 Sjamaar 和 Lerman 在20世纪90年代的研究。作为这项工作的一部分，我发展了分层伪丛理论，用以替代几何量子化中的重要辅助信息：预量子线丛和极化。随后，我运用这一形式体系，为环面流形和余切丛的奇异商空间提供了 [Q,R]=0 结果。我还给出了一个并非源自奇异约化的奇异几何量子化例子。

献给我的妻子 *Carrie Clark*，以及
三重伟大的赫耳墨斯

致谢函

完成这篇论文是一项艰巨的工作；若没有许多人一路上的帮助，我不可能完成它。首先，我要感谢我的妻子 Carrie。若没有她，我肯定无法走到今天。还要感谢她用 TikZ 绘制了许多插图。

我衷心感谢我的导师 Lisa Jeffrey教授，多年来在各方面给予我的指导，允许我自由探索自己最感兴趣的问题，并始终认真地为我提供建议和修改意见。感谢Yael Karshon教授给予我的鼓励和指导，尤其是在我觉得自己所做的一切都微不足道的时候。我也要感谢Eckhard Meinrenken教授、David Miyamoto和Maarten Mol。与你们进行的许多有益交谈，对这篇论文的内容和呈现方式产生了重大影响。也感谢外审专家Reyer Sjamaar教授提供的宝贵反馈和修改意见。

感谢我的朋友和家人多年来给予我的所有支持，尤其是我在多伦多的朋友圈：Dan、Jane、Kristen、Adam、Eli、Curtis、Nick 和 Julia，是你们让这几年成为我人生中最美好的时光之一。也感谢 Victoria 和 Luke，虽然相隔遥远，却始终陪伴着我。

最后，感谢这些年来我在数学系遇到的许多善良之人，是他们让我的多伦多大学时光变得十分愉快。特别要感谢行政人员 Jemima Merisca 和 Sonja Injac，以及我的研究生同伴 Alice、Dinushi、Valia、Eva、Jonas、Peter、Thomas、Aidan 和 Emily。正是他们让参加学术会议和学生活动成为一段美好的经历。

目 录

1 引言 1

I 非奇异预备知识 13

2 背景：非等变几何 14
2.1 适当群作用与记号.142.2 适当作用的局部标准形.172.3 适当群作用的切片定理 192.4 对称流形的切空间与轨道类型类.232.5 等变向量丛.27

3 辛几何 39
3.1 辛向量空间.40 3.1.1 辛补空间与特征子空间 42 3.1.2 线性辛约化.44 3.2 辛流形与泊松流形.45 3.3 哈密顿空间与约化.53 3.4 线性辛表示.56 3.5 约化与局部标准形.60 3.6 非平凡的约化示例.65 3.6.1 环面流形与 Delzant 构造 65 3.6.2 余切丛约化.68

4 极化 72
4.1 拉格朗日子空间及其约化 . . . . . 724.2 极化.804.3 向量丛与复分布的像 . . . . 874.4 极化的非奇异约化 . . . . . 924.5 余切丛上的极化约化 95

5 几何量子化 96
5.1 预量子线丛.985.2 几何量子化.1065.3 量子化与约化可交换.1075.4 非奇异 [实数集,实数集]=0 例子.116

5.4.1 余切丛.1165.4.2 环面流形的几何量子化 119

II 可微分层空间 123

6 子笛卡尔空间 124
6.1 微分空间.125 6.1.1 诱导微分结构.126 6.1.2 可微映射.128 6.1.3 子空间微分结构.130 6.2 子笛卡尔空间.133 6.2.1 适当群作用的商空间 . . . . . 136 6.3 扎里斯基切向量 .139 6.4 扎里斯基向量场 .142 6.5 向量场的限制.147

7 可微分层空间 152
7.1 拓扑分层空间.152 7.2 可微分层空间.156 7.2.1 奇异叶状结构与分层.157 7.2.2 奇异黎曼叶状结构.164 7.3 由适当群作用产生的分层.169 7.3.1 由适当群作用产生的轨道类型分层169 7.3.2 约化轨道型与无穷小分层 172 7.4 分层切向量与向量场.176 7.5 正则性条件.178 7.5.1 惠特尼条件.178 7.5.2 局部平凡性.182 7.5.3 局部圆锥形与拟齐次性.184

8 分层伪丛 190
8.1 伪丛.1908.2 等变向量丛的商.1958.3 分层伪丛.1988.4 复化与分层分布 204

III 奇异量子化 211

9 辛分层空间 2129.1 辛分层空间.212

9.2 动量映射的轨道类型分层与典范分层.215 9.3 对称流形与奇异约化空间.219 9.4 约化空间上的泊松括号.221 9.5 哈密顿模.223 9.6 余切丛的奇异约化.228 10 预量子线丛的奇异约化 235 10.1 分层预量子线丛. 235 10.2 预量子线丛的奇异约化 239 10.3 环面流形上预量子线丛的奇异约化.244

11 极化的奇异约化 247
11.1 分层极化.247 11.2 极化的奇异约化.251 11.3 奇异约化下类型的保持 . . . . . 255 11.4 极化何时可以约化 .256 11.5 不可约化极化 .257

12 奇异约化与量子化 259
12.1 辛分层空间的量子化 . . . . . 259 12.2 $[Q,R]=0$ .262 12.3 环面流形与 $[Q,R]=0$ .264 12.4 余切丛与 $[Q,R]=0$ .268

1 引言

几何量子化是辛几何的一个分支，由 Kirillov [Kir62], Kostant [Kos09], 和 Souriau [Sou67] 在 20世纪60年代和20世纪70年代创立。最初，它是获取李群酉表示的一种方法，后来人们认识到，它或许可以解决量子化问题——即如何系统地将经典物理系统（以辛几何描述）转化为量子力学系统（以希尔伯特空间和算子描述）。无论是其原始形式还是各种推广形式，几何量子化都已发展成为一套丰富的数学理论。

其思路是取一个辛流形 (M, ω)——将其解释为经典力学系统的相空间——并为之关联两项辅助数据：一个极化 $\mathcal{P} \subseteq T^{\mathbb{C}}M$ 以及一个预量子线丛 $(\mathcal{L}, \nabla) \to (M, \omega)$。随后利用这些要素构造一个向量空间 $\mathcal{Q}(M)$，通常的做法是计算“极化截面”，或其某些变体，例如上同调波函数或算子指标。

这些构造试图模拟的是：在物理学家看来，辛 $\mathbb{R}^{2n}$ 应当具有量子化 $L^2(\mathbb{R}^n)$，即一个定义在半维空间上的复值函数空间。线丛 $\mathcal{L}$ 的截面就是复值函数，$\mathcal{P}$ 表示相空间中的“动量方向”，而联络 ∇ 则提供了一种对 $\mathcal{L}$的截面求导的方式。

基于这些数据，最经典的量子化定义是极化截面的空间：

$$\mathcal{Q}(M) := \sigma \in \Gamma(\mathcal{L}) \mid \nabla_{\mathcal{P}}\sigma = 0. \tag{1.1}$$

如上所述，文献中还存在几何量子化的其他定义。给定相同的量子化数据，我们可以给出一种层论定义（例如 [Śn75]）、一种指标论定义（例如 [MS99]），或一种移位栈论定义（例如 [Saf23]）。本文将聚焦于方程（1.1）中的经典定义。

几何量子化的核心问题之一是量子化与约化可交换问题。根据 Marsden、Weinstein [MW74],和 Meyer [Mey73], 的研究，可以通过一种自然的方式对辛流形按一个良好的对称群进行约化，并得到另一个辛流形。具体设定如下：给定一个辛流形(M,ω)、一个紧李群K 在M上的辛作用，以及一个等变动量映射$J : M \to \mathfrak{k}^*$，它表示诺特定理意义下的“守恒量”。这组数据可用符号$J : (M,\omega) \to \mathfrak{k}^*$概括，称为哈密顿$K$-空间。

Marsden、Weinstein 和 Meyer 证明，若K 在$J^{-1}(0)$上自由作用，则 $J^{-1}(0)$ 是K-不变子流形M，且约化空间$M_0 := J^{-1}(0)/K$ 配备了唯一的辛形式 ω_0，称为约化辛形式；若 $\pi_0 : J^{-1}(0) \to M_0$ 是商映射，则

$$\pi_0^*\omega_0 = \omega|_{J^{-1}(0)}. \tag{1.2}$$

回到量子化，若哈密顿量K-空间$J : (M,\omega) \to \mathfrak{k}^*$ 配备了等变极化和预量子线丛，则量子化 $\mathcal{Q}(M)$ 成为一个线性复K-表示。此外，若(M,ω) 上的量子化数据足够正则，我们便能在约化空间M_0上得到诱导的量子化数据。最后，我们得到一个典范线性映射：

$$\kappa : \mathcal{Q}(M)^K \to \mathcal{Q}(M_0). \tag{1.3}$$

若 κ 是线性同构，我们就称量子化与约化可交换，并记作 $[Q,R] = 0$。在 Guillemin 和 Sternberg 的原始论文中 [GS82], 他们证明，若 M 是紧致的，且$\mathcal{P}$ 是 Kähler 极化，则 κ 确实是双射。然而，正如 Sjamaar 和 Lerman 所证明的 [SL91], 若对称群 K 的作用不够良好，所得约化空间 M_0 可能高度奇异，许多常用的量子化技术也会失效。尽管如此，约化空间 M_0 仍可自然地划分为若干辛流形，它们以类似 CW 复形各胞腔的方式组合在一起，这种对象称为辛分层空间。

本论文旨在为辛分层空间的量子化提供一个框架，使其足够稳健，能够证明量子化与约化可交换的结果。具体而言，我们参照方程（1.1）中的经典量子化定义，给出预量子线丛（定义10.1）、极化（定义11.1）以及量子化（定义12.3）的分层版本定义。接下来，我们证明

在约化下，等变量子化数据可下降为分层量子化数据（定理 10.15 和定理 11.7），并且仍可得到方程（1.3）中的典范线性映射（定理 12.9）。最后，我们证明，在这一形式体系中，$[Q,\text{实数集}] = 0$ 对于环面流形的奇异商空间（定理 12.15）以及一般余切丛（定理12.16）均成立。这证明了该方法适用于奇异空间量子化的可行性。

本论文并非首次尝试对辛分层空间进行量子化。事实上，已有指标理论版本的量子化（例如 [MS99]）、一种称为“代数量子化”的模论方法 [SW83],，以及其他方法。除了采用了不同于方程（1.1）中经典定义的量子化形式外，这些方法与本论文提出的方法的区别在于，它们仅适用于奇异约化空间。相比之下，我们发展的形式体系可应用于任意辛分层空间。与我们的方法最为相似的是 ´Sniatycki [´Sn13]的奇异量子化理论。然而，这一形式体系也与我们的方法不同： ´Sniatycki 按分层逐一处理，而我们的方法则采用更为整体的视角。

尽管本论文的主要目标是为一般辛分层空间发展一种量子化理论，但我们发现，有必要进一步发展非奇异量子化理论以及奇异空间理论——即子笛卡尔空间和分层空间理论。这样做不仅是为了提高奇异空间量子化理论的普适性，也是为了在这一领域建立一个便于运用标准技术来表述和证明结果的框架。

首先，来看非奇异情形。几何量子化的大量文献只关注两种极化：实极化和 Kähler 极化。这是可以理解的，因为所有自然的极化例子都属于这两种类型之一。尽管如此，仍有一大类既非实极化也非 Kähler 极化的极化——所谓的“混合”极化。因此，在第 4 章中，我们重新发展了极化约化理论，使其适用于任意类型的极化，并且只要求群适当作用。这样做带来了显著成果：正如我们在第 5 章所展示的，式（$[Q,\text{实数集}] = 0$ 11.3）中的映射自然也推广到了混合情形。

这篇论文分为三个部分，每个部分又进一步分为若干章节。下面概述各部分和章节的内容，以及其中的主要成果。

第 I部分：非-奇异预备知识

第一部分的目标 既是确立后文将使用的大部分符号，也是讨论量子化的非奇异版本，而这些版本将在第二部分中得到推广。最初关于量子化与约化相交换的许多证明都依赖于微分形式等对象，而这些对象在子笛卡尔情形下的表现并不理想。因此，在必要时，我们给出了不依赖这类对象的新证明。这样一来，这些新的非奇异证明便很容易推广到奇异情形，而且对于我们在较为熟悉的光滑背景下所采用的技巧也颇具启发性。

章节2等变几何背景

章节 2 以群作用为主题展开本论文，重点讨论连通李群的适当作用。本章节主要是对现有材料的综述，旨在帮助读者掌握适当群作用的基础知识。第 2.1节给出主要的基本定义和反复使用的初等结果。第 2.2 节和 2.3 节专门用于介绍并陈述适当群作用理论中最重要的结果之一，即Palais切片定理（定理2.13）。随后，在第 2.4节中，我们利用切片定理计算适当 G-空间中一类特殊子流形的切空间。

最后，在第 2.5节中，我们讨论真等变向量丛。我们给出一个标准形结果（引理2.29），利用它给出平均化定理的新证明（定理2.32），并以一个刻画作结：何时真等变向量丛的商空间仍然是向量丛（定理2.35）。

章节 3 辛几何

章节 3 介绍辛几何中基本的定义和结果，为奇异约化与量子化作准备。第 3.1 总结线性辛几何中的基本定义和结果。第3.2专门介绍辛流形的基本定义、例子和定理，尤其讨论辛流形与泊松流形之间的关系。在第 3.3中，我们回顾哈密顿空间的基本定义。这引出了第 3.4 节中关于线性辛表示和二次动量映射的讨论。第 3.5 随后用于

陈述哈密顿空间的主要约化定理（定理3.46 和推论 3.51），以及一个正规形定理（定理 3.49）。

第 3.6 通过两个非平凡的例子族来阐释辛约化的原理，从而结束本章节：Subsection 3.6.1 中的环面流形的 Delzant 构造，以及 Subsection 3.6.2中的余切丛非奇异约化理论。

章节 4：极化

极化是几何量子化的主要组成部分之一，因此在第 4章节中，我们概述极化的基本理论。第 4.1节让我们回到第 3.1 节中的线性辛情形，该节位于第3章，但现在我们将研究拉格朗日子空间如何与线性辛约化相互作用。然而，本节超越了传统上对余各向同性子空间约化的强调，并在定理 4.10中给出了一个极化约化的线性模型，该模型将用于奇异和非奇异情形。

第 4.2 节专门讨论极化的基本理论，即辛流形上的对合的拉格朗日复分布。作为旁注，第 4.3节研究向量丛在向量丛态射下的像何时仍为向量丛。引理 4.24 给出了精确表述，随后引理 4.29利用该表述刻画流形之间的光滑映射何时能够将一个对合分布推前。第 4.4节利用这一理论证明定理 4.30，该定理说明自由哈密顿量 G-空间上的极化何时可以约化。第 4.5 节通过余切丛典范极化的约化对这一理论进行了阐释。

章节 5：几何量子化

在第 5 章中，我们将通过总结几何量子化的经典理论来结束第一部分 I 。第 5.1 节旨在说明预量子线丛定义的动机，并给出一些初步结果。接着，在第 5.2 节中，我们将陈述几何量子化的定义，并给出早期的例子，具体应用于辛$\mathbb{R}^{2n}$ 结构和余切丛。

从这里开始，在第5.3节中，我们讨论预量子线丛的约化理论，并将其用于证明

$[Q,R]=0$ 映射对任意极化均成立，见定理5.24，从而推广了 Guillemin 和 Sternberg 的经典理论。最后，第5.4节专门将这些结果用于计算环面流形的量子化，并为余切丛的非奇异约化给出一个“量子化与约化可交换”的结论。

第 II 可微分层空间

如前所述，辛流形的一般约化不一定仍然是流形。事实上，在适当群作用的情形下，所得结果是辛分层空间。第II 部分致力于发展分层空间的微分几何，旨在将这一理论应用于奇异约化。

讨论分层空间微分几何主要有三种形式体系：子笛卡尔形式体系（例如 [´Sn13]）、光滑图册形式体系（例如 [Pfl01]）以及约化微分结构形式体系（例如 [Mol24]）。本文采用子笛卡尔形式体系，因为就陈述和证明奇异微分几何结果而言，这是最经济的方法。这一选择主要是品味问题，因为定理 6.46基于 Mol 的一个结果 [Mol24]，，使我们能够轻松地在各种形式体系之间进行转换。

章节 *6*：子笛卡尔空间

第6章致力于建立本文所用奇异微分几何的形式体系。子笛卡尔空间是流形的推广，其图卡映射的像不必是开集，而可以是欧几里得空间的任意子集。这个定义虽然简单明了，但需要借助微分空间（又称 Sikorski 空间）的语言进行一些铺垫。这类空间是配备了一组特定函数 $C^\infty(X)$ 的拓扑空间 X；这组函数生成该拓扑、由局部决定，并且在与笛卡尔空间上的光滑函数复合后保持封闭。第 6.1 节致力于发展微分空间的基础理论，包括第 6.1.1 小节中微分结构的生成集、第 6.1.2 小节中的可微映射，以及第 6.1.3 小节中子集上的诱导微分结构。由此，在第 6.2 节中，我们终于可以定义子笛卡尔空间：它们就是具有到欧几里得空间的局部嵌入的微分空间 $(X,C^\infty(X))$。第 6.2.1 小节介绍了 Mathers–Schwarz 构造，即在 $C^\infty(M/G)$ [Sch80], 上构造子笛卡尔空间结构，其中 G 是连通李群

和 M 一个适当的 G-空间，文中给出了这一构造。在本小节中，我们还在命题 6.36 中给出了推广，可为一类特定子集 A 构造子笛卡尔结构$C^\infty(A/G)$；这类子集称为适当 G-空间的可切片子集。

第6 章的最后几节专门讨论子笛卡尔情形下切向量、切丛和向量场的自然概念，即第6.3节中的扎里斯基切向量和扎里斯基切丛，以及第6.4节中的扎里斯基向量场。这些是子笛卡尔空间函数环 $C^\infty(X)$ 上的导子，在许多方面自然地扩展了关于切向量和向量场的常规光滑理论。借助这一术语，我们证明定理6.46，该定理可用于说明上述关于分层空间微分几何的三种形式体系彼此几乎等价。最后，在第6.5节中，我们讨论将扎里斯基向量场限制到子空间，并在推论6.64 中给出限制映射为满射的一个充分条件。

章节7：可微分层空间

第 7 章专门讨论可微分层空间理论。第 7.1 节对分层空间作了基本介绍：分层空间是带有局部有限划分的拓扑空间，该划分将空间分成具有子空间拓扑的拓扑流形，称为分层，并满足边界条件。边界条件指出，分层中一个元素（称为一个分层）的闭包，是其他分层的不交并，这类似于 CW 复形中开胞腔之间的关系。随后，第 7.2 节将可微分层空间定义为带有相容分层的子笛卡尔空间；所谓相容，是指每个分层上的诱导子笛卡尔结构都是光滑结构。第 7.2.1 小节介绍了本文关于分层的主要观点（姑且称之为论战性观点）：应将分层视为 Stefan [Ste74] 和 Sussmann [Sus73]，意义下的一种奇异叶状结构；奇异叶状结构是另一种由流形构成的划分，并且根据推论 7.23，它们也满足边界条件。正如前文所述，有些分层并非奇异叶状结构，也有些奇异叶状结构并非分层。尽管如此，在满足某些条件的情况下，推论 7.23 表明，证明一个流形的划分是奇异叶状结构，也可以证明它是分层。第 7.2.2 小节利用这一观点，在定理 7.36 中证明，某一类称为奇异黎曼叶状结构的奇异叶状结构会诱导出典范分层

称为维数类型分层。本文是与 David Miyamoto 合作的一篇即将发表的论文的一部分 [MR25]。

在完成这些准备工作之后，第 7.3 节讨论由适当群作用产生的各种分层。具体来说，第 7.3.1 小节讨论轨道类型分层，第 7.3.2 小节讨论约化轨道类型分层与无穷小分层。在流形层面，我们在定理 7.42 中为 Jotz-Ratiu-Sniatycki 的一项结果给出新的证明 [JRS11]，该结果指出轨道类型分层是一种奇异叶状结构，因而也是一种分层。这也表明，适当群作用的商空间继承了一种称为典范分层的自然分层。借助 Posthuma-Tang-Wang 的结果 [PTW17], 推论 7.53 证明了约化轨道类型分层与无穷小分层都是分层和叶状结构。

第 7.4 节简要介绍分层向量场，它们可以看作与每个分层都相切的扎里斯基向量场。这里，我们给出 Pflaum [Pfl01] 提出的分层切丛的另一种构造，并证明这些向量场的一些基本性质。由此得到 Schwarz 7.60 的定理 [Sch80], , 该定理指出，商空间上的所有分层向量场都源自原空间上的等变向量场。

最后，第 7.5 节对分层空间的正则性条件进行了扩展讨论。从光滑几何的角度来看，一般的分层空间可能具有某些病态性质，因此人们引入了各种正则性条件来控制奇点。第 7.5.1 小节回顾了惠特尼条件，这可以说是施加于分层空间的最常见正则性条件。这些条件使得人们能够构造控制数据，从而利用法丛研究分层。由于光滑几何学家可能不熟悉惠特尼条件，命题 7.65 证明，若分层空间的分层切丛由分层向量场张成，则该空间满足惠特尼 (A) 条件。接下来，第 7.5.2 小节讨论局部平凡性，这是另一个使人联想到奇异叶状结构的条件。命题 7.72 表明，局部平凡分层空间自动满足惠特尼 (A) 条件。最后，第 7.5.3 小节讨论局部圆锥形分层和准齐次分层，这些概念由 Zimhony 引入，分别称为 [Zim24]光滑局部平凡且具有锥形纤维和光滑局部平凡且纤维拟齐次。这些都是局部平凡分层空间，并且可在局部实现为 Grabowski-Rotkiewicz 意义下的分次向量丛的子集 [GR12]。借鉴 David Miyamoto 的一个论证，定理

7.77 证明，准齐次分层空间满足惠特尼条件。最后我们将说明，迄今遇到的大多数重要分层例子都是准齐次的，因此也是惠特尼正则的。

章节 8：分层伪丛

第8章部分内容基于我的论文 [Ros24]。伪丛是向量丛针对子笛卡尔空间的一种自然推广，在这种空间中，纤维秩可以变化。Marshall [Mar75],曾研究过伪丛，并采用了子笛卡尔空间奇异图的线性版本。在第8.1节中，我给出了一个更新、更一般的伪丛定义；这种定义更为现代，因为伪丛结构是通过线性函数编码的。迄今为止遇到的所有“奇异向量丛”——例如扎里斯基、叶状结构和分层切丛——实际上都是伪丛。在第8.2节中，我们证明定理 8.21，该定理构造了一个可切片子集在真等变向量丛商空间上的可微向量丛，是对第2章定理 2.35 的推广。随后，第8.3节介绍分层伪丛，即由光滑向量丛分层的伪丛。根据 Pflaum[Pfl01]，的一个结果，分层空间的分层切丛只有在底层分层空间满足 Whitney A 条件时，才是分层伪丛。定义 8.27 引入了正则性条件线性惠特尼(A)条件，并据此将这一结果推广到分层空间上的更一般伪丛。与分层空间的情形一样，由其截面张成的分层伪丛自动满足线性 Whitney A 条件。最后一节，即第8.4节，讨论伪丛的复化及其在复化分层切丛子丛中的具体应用。本节的重要结果包括定理 8.37，该定理表明逐纤维复化所得的伪丛具有与输入对象相同的正则性；还包括引理 8.49，它给出了欧几里得空间上的复分布何时能在分层子集上定义分层复分布的条件。

部分III 奇异量子化

在第三部分中III，我们完成了可微分层空间理论的框架构建，现在可以开始研究辛分层空间及其量子化。迄今为止，本论文的一个主要目标是建立一个框架，使经典量子化理论能够应用于这种更一般的奇异情形，同时避免不必要的复杂性。本部分首先讨论由 Sjamaar-Lerman 构造 [SL91]

奇异约化产生的辛分层空间，随后运用第8章中发展的伪丛语言，对极化和预量子线丛进行推广。

章节12：辛分层空间

辛分层空间是配备了泊松括号，并且各分层上具有相容辛形式的可微分层空间。它们可以视为泊松流形的推广，只不过要求辛叶状结构局部有限。第12章研究这类空间及其在奇异约化中的出现。第 9.6 节定义了辛分层空间，并给出一些源自泊松流形的初步例子。第9.2、9.3和9.4节介绍了 Sjamaar 和 Lerman [SL91],提出的定理 9.21 的相关背景与证明；该定理指出，一般的真哈密顿 G-空间经过辛约化后会得到一个辛分层空间。第9.2节证明了 Zimhony 提出的定理 9.13，表明动量映射零水平集的轨道分层和典范分层，以及其商空间的相应分层，都是准齐次分层空间；此外，约化空间的每个分层都是一个自然的辛流形。在第9.3节中，我们概述 Sjamaar 和 Lerman 的证明：约化空间中的每个分层都可以通过对称流形的经典 Marsden-Weinstein-Meyer 约化来实现。最后，第9.4节通过在约化空间上构造泊松括号，完成定理 9.21 的证明。

本章迄今回顾了已知结果。在第9.5 节中，我引入了一个新定义：哈密顿模（定义 9.22）。它们构成了分层辛空间的分层向量场中一类特殊的生成元，其中包含哈密顿向量场，并且对于定义分层预量子联络的“可微性”概念至关重要。随后，定理 9.31 给出了奇异约化空间的哈密顿模的典范构造。最后，第 9.6 节总结了 Perlmutter-Rodriguez-Olmos-Sousa-Dias 对余切丛奇异约化的研究 [PROSD07]。本章最后一个新结果由我给出，即引理 9.39，它表明余切丛上的 Liou-ıville 1-形式典范地诱导出奇异约化空间各分层上的辛形式的原函数。

章节 *10*：预量子线丛的奇异约化

在第 10章中，我们讨论分层空间上的预量子线丛。第 10.1 节将分层预量子线丛（定义 10.1）定义为分层空间上的可微复线丛，并配备一个联络，该联络在丛的截面与哈密顿模的元素之间定义可微配对。这种结构施加了一个全局“可微性”条件，确保这些线丛不仅仅是限制在各个分层上的预量子线丛。随后，第10.2 节给出定理 10.15，该定理构造了奇异约化空间上预量子线丛的约化，是对非奇异情形的推广。例子10.16 说明，余切丛上的典范预量子线丛总是可以约化。最后，第 10.3节将定理 10.15与 Delzant 构造结合起来，证明定理10.18，从而提供了一种在环面流形的奇异商空间上构造分层预量子线丛的方法。

章节 *11*：极化的奇异约化

既然我们已经有了辛分层空间和分层预量子线丛，奇异量子化所需的最后一个组成部分就是一种合适的奇异极化概念。第11章将讨论这一微妙问题。在第11.1节中，我们将分层极化（定义 11.1）定义为复分层分布，其含义采用第8章中引入的定义，并且该分布在每个分层上限制为真正的极化。例 11.4 给出了源自环面流形理论的近乎自然的例子 —— 之所以说 “ 近乎 ”，是因为虽然这些分层由辛流形组成，但它们并非来自全局泊松结构。随后，第11.2节证明定理 11.7，该定理刻画了Hamiltonian G-空间上的极化何时会在约化空间上诱导出分层极化。然而，正如例 11.10所示，余切丛上的自然极化在约化后几乎从不诱导出分层极化。第11.3节讨论约化过程中极化类型的保持，证明实极化和复极化分别在约化空间的各个分层上诱导出实极化和复极化。此外，第11.4节表明，Kähler极化总是可以进行约化。最后，第11.5节回到余切丛，定理11.21确立了：余切丛的典范极化在约化空间上诱导出一个伪丛，并且该伪丛在每个分层的一个开稠密子集上构成极化。

章节 12：奇异约化与量子化

在最后一章，即第12章中，我们将得到辛分层空间的量子化定义。第12.1节给出定义 12.3，该定义与经典量子化定义密切平行，但将所有标准量子化数据替换为相应的分层对应物。第12.2节致力于确立一个典范的 $[Q,R]=0$ 映射，将Hamiltonian G-空间的量子化与其奇异约化空间的量子化联系起来。在此基础上，第12.3节在定理 12.15中证明，对于环面流形的奇异商空间，$[Q,R]=0$ 映射是一个单射。最后，第12.4节表明，尽管极化并未在奇异约化空间上诱导出分层极化，但正如定理 12.16所示，$[Q,R]=0$ 结果在这一情形下仍然成立。

第一部分

非奇异预备知识

2 等变几何背景

李群的适当作用是本文的核心。因此，本章将全面介绍适当作用的基本概念，其中最重要的是 Palais切片定理2。13。感兴趣的读者可查阅[Lee13]或 [Mico8] 等标准参考资料，以了解更多信息。

2.1 适当群作用与记号

设G 为一个李群，M 为一个配备了光滑（左）G-作用的光滑流形

$$G \times M \to M; \quad (g, m) \mapsto m \cdot m. \tag{2.1}$$

定义2.1 (G-空间)。称带有M 上的作用的流形G （如方程式（2.1）所示）为一个**G-空间**。

例子2.2。设G 为一个李群， $\mathfrak{g} = 李(G)$ 为其李代数。于是G 在 $\mathfrak{g}$ 上有一个自然作用，称为**伴随作用**。将 $\mathfrak{g}$ 视为单位元e处的切空间，我们可以将伴随作用定义为共轭映射的导数。也就是说，对每个$g \in G$ ，令

$$c_g : G \to G; \quad a \mapsto gag^{-1}.$$

这是一个微分同胚，因此在单位元处可微。现在定义

$$\mathrm{Ad}_g := T_e c_g : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}.$$

接下来，只需运用链式法则即可证明

$$G \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}; \quad (g, \xi) \mapsto \mathrm{Ad}_g(\xi)$$

使 $\mathfrak{g}$ 成为一个G-空间。

对偶化伴随作用，我们也得到**余伴随作用**。记

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R}; \quad (\alpha.\xi) \mapsto \langle \alpha, \xi \rangle$$

对于 $\mathfrak{g}$ 及其对偶 $\mathfrak{g}^*$之间的自然配对。现在给定 $\alpha \in \mathfrak{g}^*$ 和李代数 $g \in G$，定义 $\mathrm{Ad}_g^*(\alpha)$ 为

$$\langle \mathrm{Ad}_g^*(\alpha), \xi \rangle = \langle \alpha, \mathrm{Ad}_{g^{-1}}(\xi) \rangle.$$

那么映射

$$G \times \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^*; \quad (g, \alpha) \mapsto \mathrm{Ad}_g^*(\alpha)$$

使 $\mathfrak{g}^*$ 也成为一个G-空间。

我们将使用的另一个核心定义是等变性。

定义 2.3 （等变映射）。 设G 是一个李群，M 和N 是两个G-空间。若光滑映射$f : M \to N$ 满足对所有$g \in G$和$m \in M$，均有以下关系，则称其为**等变**映射：

$$f(g \cdot m) = g \cdot f(m).$$

现在固定一个李群G 和一个G-空间M。给定一个点$m \in M$，我们记

$$G \cdot m = \{g \cdot m \mid g \in G\} \tag{2.2}$$

经过m的轨道。我们还将记

$$G_m := \{g \in G \mid g \cdot m = m\} \tag{2.3}$$

m的稳定子群。最后，我们形式化地定义三种特征子集，因为它们将是后续讨论的核心。

定义 2.4 （不动点集、对称流形、轨道类型类）。设M 是一个适当的G-空间，且$H \leq G$ 是一个子群。

(1) 定义H-**不动点集**如下：

$$M^H := \{m \in M \mid H \subseteq G_m\} \tag{2.4}$$

(2) 定义 H-**对称流形**如下：

$$M_H := \{m \in M \mid H = G_m\} \tag{2.5}$$

(3) 定义H **轨道类型类**为

$$M_{(H)} := \{m \in M \mid G_m \text{ is conjugate to } H\}. \tag{2.6}$$

正如我们稍后将看到的，如果G 在M 上的作用足够良好，我们就能利用形如$M^{(H)}$的子集的诸多性质。

最后，我们先为G 在M上的诱导李代数作用确立一些标准记号。将 $\mathfrak{g}$ =Lie(G) 记作G的李代数。给定 $\xi \in \mathfrak{g}$，我们定义与 ξ相关的基本向量场，记作 $\xi_M \in \mathfrak{X}(M)$，

$$(\xi_M f)(m) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(\exp(-t\xi)\cdot m),$$

对$f \in C^\infty(M)$成立。根据此定义，映射

$$\mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(M); \quad \xi \mapsto \xi_M$$

是李代数同态。

现在，一般而言，我们只关注李群作用的一种特定类型，即适当群作用。

定义2.5（适当作用／适当G-空间）。 设M 是一个G-空间。如果映射G 在 M 上的作用是**适当的** ，则称该作用为

$$a : G \times M \to M \times M; \quad (g, m) \mapsto (g \cdot m, m) \tag{2.7}$$

是适当的。也就是说，对于每个紧致子集$C \subseteq M \times M$，其原像$a^{-1}(C) \subseteq G \times M$ 都是紧致的。如果G 在M 上的作用是适当的，我们就称M 为一个**适当的 G-空间**。

现在记录一个有用的事实，后面讨论等变向量丛时会用到。

命题 2.6 ([Lee13，命题 21。5])。 设 M 是一个 G-空间。则以下条件等价。

(1) M 是适当 G-空间。

(2) 对任意序列 $\{m_i\} \subseteq M$ 和 $\{g_i\} \subseteq G$，若 $\{m_i\}$ 和 $\{g_i \cdot m_i\}$ 都收敛，则 $\{g_i\}$ 有收敛子序列。

推论 2.7。 若 M 是 G-空间且 G 是紧致的，则 G 的作用是适当的。

证明。 由于 G 是紧致的，任意序列都有收敛子序列。因此，命题 2.6 中的第二个条件自然成立。 □

推论 2.8. . 设 M 和 N 是两个 G-空间，且 $f : M \to N$ 是一个等变映射。若 N 是适当 G- 空间，则 M 也是适当 G- 空间。

证明。设 $\{m_i\} \subseteq M$ 是一个收敛序列，且 $\{g_i\} \subseteq G$ 是一个序列，使得 $\{g_i \cdot m_i\}$ 收敛。由连续性，$\{f(m_i)\}$ 和 $\{f(g_i \cdot m_i)\}$ 是 N 中的收敛序列。由等变性，对于所有 i，$f(g_i \cdot m_i) = g_i \cdot f(m_i)$。因此，由于 G 在 N 上的作用是适当的，我们可以推出 $\{g_i\}$ 存在一个收敛子序列。于是，G 在 M 上的作用也是适当的。 □

现在我们回顾一下关于适当群作用的一些标准事实。

命题 2.9. 设 M 是一个光滑适当 G-空间，且 $m \in M$。

(1) 稳定子群 G_m *to* m 是 G 的一个紧子群。

(2) 轨道 $G \cdot m$ 是 M 的一个闭嵌入子流形，其映射

$$G/G_m \to G \cdot m; \quad gG_m \mapsto g \cdot m$$

是一个 G-等变微分同胚。

(3) 轨道 $G \cdot m$ 的切空间具有如下形式

$$T_m(G \cdot m) = \{\xi_M(m) \mid \xi \in \mathfrak{g}\}.$$

2.2 适当作用的局部标准形

现在我们来讨论适当 G-空间的局部标准形，稍后还会进一步探讨。设 $K \leq G$ 是一个紧子群，且 V是一个实线性的 K-表示。定义

$$G \times_K V := (G \times V)/K, \tag{2.8}$$

其中，K在 $G \times V$ 上的作用定义为

$$K \times (G \times V) \to G \times V; \quad (k,(g,v)) \mapsto (gk^{-1}, k \cdot v).$$

这是一个紧群的自由作用，因此商空间是一个光滑流形。我们将利用这些标准形来建立适当作用的一个加强版本，因此证明留待参考标准文献。

命题2.10 （[Lee13]）。设 $K \leq G$ 和 V 如上所述。

（*1*）空间 $G \times_K V$ 是一个光滑流形，且投影

$$\pi : G \times V \to G \times_K V; \quad (g,v) \mapsto [g,v]$$

是一个满射浸没。

（2）作用

$$G \times (G \times_K V) \to G \times_K V; \quad (g, [a, v]) \mapsto [ga, v]$$

使 $G \times_K V$ 成为一个适当的 G-空间。

有了这一点，我们可以观察到，我们在定义 2.4 中引入的特殊子流形实际上是形如 G-空间的适当子流形：$G \times_K V$。

命题 2.11。 设 G 为一个李群，$K \leq G$ 为一个紧子群，V 为一个线性 K-表示。记

$$N_G(K) = \{g \in G \mid gKg^{-1} = K\}$$

为 K 的正规化子子群。

(i) 有等式

$$(G \times_K V)_K = N_G(K) \times_K V^K \tag{2.9}$$

and

$$(G \times_K V)_{(K)} = G \times_K V^K \tag{2.10}$$

(ii) 映射

$$(N_G(K)/K) \times V^K \to G \times_K V; \quad (gK, v) \mapsto [g, v] \tag{2.11}$$

是一个 $N_G(K)$-等变嵌入，其像为 $(G \times_K V)_K$ 以及

$$(G/K) \times V^K \to G \times_K V; \quad (gK, v) \mapsto [g, v] \tag{2.12}$$

是一个 G-等变嵌入，其像为 $(G \times_K V)_{(K)}$。

证明。 首先，注意两个关键事实，我们将在整个证明过程中充分利用它们。

事实 1：对于任意 $[g、v] \in G \times_K V$，都有

$$G_{[g,v]} = gG_{[e,v]}g^{-1} = gK_v g^{-1}, \tag{2.13}$$

其中，$K_v \leq K$ 是线性的 K作用在 V上的稳定子群。

事实 2：对于任意 (李代数 g，v) $\in G \times K$,

$$K \subseteq gK_v g^{-1} \quad \Rightarrow \quad K = K_v. \tag{2.14}$$

第一个事实直接由 G 的作用定义得到。至于第二个事实，注意到 $K_v \subseteq K$ 且 $K \subseteq gK_vg^{-1}$ 意味着 $K \subseteq gKg^{-1}$。因此，$K = gKg^{-1}$，从而 $K = K_v$。

这些论断既已处理完毕，现在我们可以证明 (i) 和 (ii)。

(i) 首先证明公式（2.9）。由公式（2.13）可立即得到包含关系 $N_G(K) \times_K V^K \subseteq (G \times_K V)_K$。反过来，注意若 $[g, v] \in (G \times_K V)_K$，则 $gK_vg^{-1} = K_v$，因此根据公式（2.14），$K = K_v$，且 $g \in N_G(K)$。

公式（2.10）的证明几乎完全相同。

(ii) 我们只证明公式（2.11）中的映射是一个 $N_G(K)$-等变嵌入，其像为 $(G \times_K V)_K$。公式（2.12）的证明类似。为此，我们给公式（2.11）中的映射取个名字，比如

$$\phi : (N_G(K)/K) \times V^K \to G \times_K V; \quad (gK, v) \mapsto [g, v]$$

注意，ϕ 使图表交换

$$\begin{array}{ccc} N_G(K) \times V^K & \hookrightarrow & G \times V \\ \downarrow & & \downarrow \\ (N_G(K)/K) \times V^K & \xrightarrow{\phi} & G \times_K V \end{array}$$

其中竖直箭头是关于 K-作用的商映射。因此，ϕ 显然是一个 $N_G(K)$-等变光滑映射。此外，很容易看出，ϕ 的导数处处都是单射。最后，ϕ 是一个嵌入，因为上方的映射是一个 K-等变嵌入，且 K 是紧致的。显然，ϕ 的像是 $(G \times_K V)_K$。

□

2.3 适当群作用的切片定理

适当群作用的一项基础结果是切片的存在性。切片是适当的李群G-空间的子流形，它们以横截的方式与该作用的轨道相交，从而实现某种局部分裂。我们不会深入探讨切片理论，但有兴趣的读者可参阅 Palais 的原始论文 [Pal61]，或查阅 [Lee13] 或 [Mico8] 等标准参考资料，以了解更多信息。

固定一个李群 G。我们将采用的切片定理这一特定形式，利用了适当的 李群-空间的局部标准形。

现在给定一个适当的 G-空间 M，正如我们在命题2.9中看到的，稳定子群 $G_m \leq G$ 是紧致的。由于 G_m 固定 m，我们得到切空间上的典范线性 G_m 作用 T_mM 如下：

$$G_m \times T_mM \to T_mM; \quad (g, v) \mapsto T_m g(v),$$

其中 $T_m g : T_mM \to T_mM$ 是微分同胚的导数

$$M \to M; \quad m \mapsto g \cdot m.$$

这个线性化的作用不仅保持G_m 的m的切空间，也保持经过m的轨道$G \cdot m$ 的切空间。因此，我们得到法空间上的典范作用

$$G \times (T_mM/T_m(G \cdot m)) \to T_mM/(T_m(G \cdot m)).$$

为方便起见，我们现在引入一些记号。

定义 2.12 (轨道的法空间)。对于任意点 $m \in M$，定义**经过该点的轨道的法空间**m 如下

$$\nu_m(M, G) := T_mM/(T_m(G \cdot m)). \tag{2.15}$$

因此，我们已经证明，对于任意点$m \in M$，紧群G_m 在法空间 ν_m (M,G)上有一个典范线性作用。由此便可以陈述切片定理。

定理 2.13 (切片定理 [Pal61])。 设 M 是一个适当 G-空间。对于任意 $m \in M$，存在

(1) m 的 G-不变邻域 $U \subseteq M$，以及 $[e$ 的 G-不变邻域 V，$0]$ 在 $G \times_{G_m} \nu_m(M, G)$ 中。

(2) 一个 G-等变微分同胚 $\phi : U \to V$，将 m 映射到 $[e, 0]$。

我们将称数据 $\phi : U \to V$ 为以 ***slice neighbourhood centred on*** m.

虽然从技术上说，这是我们稍后将要给出的结果的推论，但现在正是陈述一条标准结果的最佳时机；我们稍后会大量用到它。

推论 2.14 ([GGK02，注 B。25])。 设 M 是一个适当 G-空间，且 $m \in M$。则存在一个以 $\boldsymbol{m}$ 为中心的极大切片邻域。也就是说，一个切片邻域

$$\phi : U \subseteq M \to V \subseteq G \times_{G_m} \nu_m(M, G)$$

如定理 2.13 中所述，但其中

$$V = G \times_{G_m} \nu_m(M, G).$$

Palais切片定理的主要优势在于，要证明适当群作用的局部性质，只需假设我们处于推论 2.14 所述的极大切片邻域中，并在那里证明这些性质。下面举例说明

Palais切片定理的一个直接推论是，我们在定义 2.4中引入的特征子集的连通分支都是嵌入子流形！

推论 2.15。 设 M 是一个适当 G 空间，$K \leq G$ 是一个紧子群。

(1) M_K 及 $M^{(K)}$ 的连通分支都是嵌入子流形。

(2) M_K 是一个自由的 $N_G(K)/K$-空间，且 $M^{(K)}$ 的连通分支在 G 的作用下是闭的。

(3) $G \cdot M_K = M^{(K)}$。

证明。 (1) 如果 $M_K = \emptyset$，那么 $M_{(K)} = \emptyset$ 也同样如此，因此这里无需证明。现在设 $x \in M_K$。由于这是一个局部问题，我们可以如推论2。14中所述，取一个极大切片邻域。现在只需应用命题2。11即可。

(2) 由于对于任意 $x \in M$ 和 $g \in G$，我们都有

$$G_{g \cdot x} = g G_x g^{-1} \tag{2.16}$$

由此可知，$M^{(K)}$ 在G的作用下是闭的。由于G 是连通的，$M^{(K)}$的连通分支也是连通的。至于M_K，方程（2。16）还表明，M_K 在$N_G(K)$ 的作用下也是闭的，因为如果$x \in M_K$ 且$g \in N_G(K)$，我们有

$$G_{g \cdot x} = g K g^{-1} = K.$$

此外，给定李代数 $g \in N_G(K)$ 和$x \in M_K$，当且仅当李代数 $g \cdot x = x$ 时，有李代数 $g \in K$。因此，$N_G(K)/K$ 自由作用。

(3) 显然$G \cdot M_K \subseteq M^{(K)}$。若$x \in M^{(K)}$，则对某个李代数 $g \in G$，有$G_x = gKg^{-1}$。因此，李代数 $g^{-1} \cdot x \in M_K$。

□

我们之后会大量用到这一事实。现在，我们来给出轨道空间成为流形的一个条件。

命题2.16. 设 M 是一个适当 G-空间，并假设对于某个 K，有 $M = M^{(K)}$。则 M/G 具有典范的光滑流形结构，且商映射

$$\pi : M \to M/G$$

是满射浸没。

证明。设$x \in M$，并设$K = G_x$。根据推论2.14，我们可以找到一个开邻域$U \subseteq M$，包含x，以及一个G-等变微分同胚

$$\phi : U \to G \times_K \nu_x(M, G). \tag{2.17}$$

由于 $M = M^{(K)}$，根据命题 2.11 可知 $\nu_x(M,G) = \nu_x(M,G)^K$ 且

$$G \times_K \nu_x(M, G) \cong (G/K) \times \nu_x(M, G).$$

因此，$U/G \cong \nu_x(M,G)$。由于 $\nu_x(M,G)$ 是一个向量空间，这为M/G提供了一个图卡。显然，任何两个这种形式的切片邻域彼此相容，从而为M/G提供了一个图册。

商空间 $\pi : M \to M/G$ 显然也是满射浸没，因为将其限制到公式（2.17）中的切片邻域后，图表满足交换性

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\phi} & (G/K) \times \nu_x(M, G) \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow{\scriptstyle pr_2} \\ U/G & \xrightarrow{\widetilde{\phi}} & \nu_x(M, G) \end{array}$$

其中，第二个垂直箭头是投影到第二个因子的投影。 □

这当然得到了关于自由作用的一个经典结果。

推论 2.17. 假设 M 是一个适当的 G 空间，且 G 在 M 上自由作用。那么 M/G 在规范意义下是一个光滑流形，且 $\pi : M \to M/G$ 是满射浸没。

证明。 在这种情况下，$M = M^{(\{e\})}$，其中$e \in G$ 是单位元。 □

备注2.18. 当然，这多少有些取巧，因为我们实际上已经在命题 2.10中对紧群使用了这一结论。关键在于，我们将其推广到了可能是非紧群的情形，前提是它们的作用是适当的。

2.4 对称流形与轨道类型类的切空间

设 M 是一个适当的 G-空间。正如推论 2.15所示，对称流形和轨道类型类的连通分支是嵌入子流形。经过一些额外的准备，我们便能够实际计算这些流形的切空间。

设 G 是一个李群，并固定一个紧子群 $K \leq G$ 是一个紧子群，记 $\mathfrak{k} = \mathrm{Lie}(K)$ 为 K 的李代数。由于 $\mathfrak{k}$ 在 K 对 $\mathfrak{g}$的伴随作用下是闭的，因此我们得到一个诱导作用

$$K \times (\mathfrak{g}/\mathfrak{k}) \to \mathfrak{g}/\mathfrak{k}; \quad (k, \xi + \mathfrak{k}) \mapsto \mathrm{Ad}_k(\xi) + \mathfrak{k}.$$

现在我们来确定此作用的不动点集。为此，先引入一些记号。记

$$N_G(K) = \{g \in G \mid gKg^{-1} \subseteq K\}$$

为 K 在 G 中的正规化子，并记

$$Z_G(K) = \{g \in G \mid gk = kg \text{ for all } k \in K\}$$

为其中心化子。它们都是 G 的闭子群，因此都有李代数。记

$$\mathfrak{n}_G(K) = \mathrm{Lie}(N_G(K)) \text{ and } \mathfrak{z}_G(K) = \mathrm{Lie}(Z_G(K)).$$

请注意，当K 是连通的时， $\mathfrak{n}_G(K)$ 等于李代数正规化子

$$\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{k}) = \{\xi \in \mathfrak{g} \mid [\xi, \mathfrak{k}] \subseteq \mathfrak{k}\}$$

且 $\mathfrak{z}_G(K)$ 等于李代数中心化子

$$\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{k}) = \{\xi \in \mathfrak{g} \mid [\xi, \eta] = 0 \text{ for all } \eta \in \mathfrak{k}\}.$$

一般而言，正规化子子群和中心化子子群的李代数不等于李代数正规化子和中心化子，如以下例子所示。

例子 2.19. 这个反例的构想来自以下 Math StackExchange 帖子 [Sch23]。令 $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$，并考虑子群

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; a, b = \pm 1 \right\}$$

由于 K 是离散子群，其李代数为 $\mathfrak{k} = \{0\}$。因此，

$$\mathfrak{z}_{\mathfrak{gl}_2(\mathbb{R})}(\mathfrak{k}) = \mathfrak{n}_{\mathfrak{gl}_2(\mathbb{R})}(\mathfrak{k}) = \mathfrak{gl}_2(\mathbb{R})$$

另一方面，经过简单计算可得

$$N_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})}(K) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; a = d = 0 \text{ or } b = c = 0 \right\}$$
$$Z_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})}(K) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

在这种情况下，

$$\mathfrak{n}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})}(K) = \mathfrak{n}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})}(K) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \in \mathfrak{gl}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

因此，李代数正规化子和中心化子不一定等于李群正规化子和中心化子的李代数。

尽管如此，我们仍能得到一个有用的关系。

命题 2.20 ([HHS+98，推论 B])。对于任意紧致子群 $K \leq G$，其李代数为 $\mathfrak{k}$，有如下等式

$$\mathfrak{n}_G(K) = \mathfrak{k} + \mathfrak{z}_G(K).$$

利用这一点，我们现在可以证明如下结论。

命题 2.21. 若 G 连通且 $K \leq G$ 是一个紧子群，则

$$(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})^K = \mathfrak{n}_G(K)/\mathfrak{k}.$$

证明。我们先来证明

$$\mathfrak{n}_G(K)/\mathfrak{k} \subseteq (\mathfrak{g}/\mathfrak{k})^K.$$

假设 $\xi \in \mathfrak{n}_G(K)$，并写作

$$\xi = \eta + \zeta,$$

对于 $\eta \in \mathfrak{k}$ 和 $\zeta \in \mathfrak{z}_G(K)$。由于 H 通过共轭对 $Z_G(K)$ 的作用是平凡的，因此对任意 $k \in K$，我们也有

$$\mathrm{Ad}_k(\xi) = \mathrm{Ad}_k(\eta) + \zeta.$$

因此，

$$\mathrm{Ad}_k(\xi) - \xi = \mathrm{Ad}_k(\eta) - \eta \in \mathfrak{k}.$$

反过来，为了证明

$$(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})^K \subseteq \mathfrak{n}_G(K)/\mathfrak{k},$$

固定一个满足以下条件的 $\xi \in \mathfrak{g}$

$$\mathrm{Ad}_k(\xi) - \xi \in \mathfrak{k}$$

对所有 $k \in K$ 均成立。现在定义一个映射

$$\Phi : \mathbb{R} \times G \to G; \quad (t, g) \mapsto \Phi_t(g) := \exp(t\xi) g \exp(-t\xi).$$

在李理论中，证明这一点是一个直接的练习

$$\frac{d}{dt}\Phi_t(g)\Big|_{t=0} = T_e L_g(\mathrm{Ad}_g(\xi) - \xi).$$

特别地，对于任意 $k \in K$，我们便得到

$$\frac{d}{dt}\Phi_t(k)\Big|_{t=0} = T_e L_k(\mathrm{Ad}_k(\xi) - \xi) \in T_k K.$$

由于K是G的闭子群，因此可得 $\Phi_t(k) \in K$ 对于任意$t \in \mathbb{R}$ 以及$k \in K$。特别地，令$t = 1$，我们得到

$$\Phi_1(K) = \exp(\xi) K \exp(-\xi) \subseteq K$$

从而 $\xi \in \mathfrak{n}_G(K)$。 □

作为这一结果的一个应用，现在让我们回到定义 2.4 中的对称流形

命题 2.22. 取 $x \in M$，记 $K = G_x$，并令 $S \subseteq M^{(K)}$ 为包含 x 的连通分支。那么，

$$T_x M_K = (T_x M)^K$$
$$T_x S = (T_x M)^K + T_x(G \cdot x)$$

证明。 由于这是一个局部问题，我们可以如定理 2.13 所示转到一个切片邻域，并假设 $M = G \times_K V$ 是一个有限维K-表示，且 $x = [e, 0]$。注意，通过商映射

$$G \times V \to G \times_K V,$$

我们有一个典范识别

$$T_x(G \times_K V) = \mathfrak{g}/\mathfrak{k} \oplus V.$$

现在，让我们首先转向对称流形 $L \subseteq M_K$。回想命题 2.11中我们已经证明了

$$M_K = N_G(K) \times_K V^K$$

由于L 是M_K 中包含 $[e$的连通分支， $0]$, 我们立即得到

$$T_x L = \mathfrak{n}_G(K)/\mathfrak{k} \oplus V^K.$$

根据命题 2.20，我们有

$$(\mathfrak{g}/\mathfrak{k} \oplus V)^K = (\mathfrak{g}/\mathfrak{k})^K \oplus V^K = (\mathfrak{n}_G(K)/\mathfrak{k}) \oplus V^K.$$

因此，$(T_x M)^K = T_x L$ 如所期望。

现在对于轨道类型片 $S \subseteq M^{(K)}$。再次利用命题 2.11，我们有

$$M_{(K)} = G \times_K V^K$$

因此，由于S 也是包含x 的连通分支，我们得到

$$T_x S = (\mathfrak{g}/\mathfrak{k}) \oplus V^K.$$

正如我们已经看到的，

$$(T_x M)^K = (\mathfrak{n}_G(K)/\mathfrak{k}) \oplus V^K$$

而

$$T_x(G \cdot x) = (\mathfrak{g}/\mathfrak{k}) \oplus 0$$

将这两项相加，便得到

$$\begin{aligned}(T_x M)^K + T_x(G \cdot x) &= (\mathfrak{n}_G(K)/\mathfrak{k}) \oplus V^K + (\mathfrak{g}/\mathfrak{k}) \oplus 0 \\ &= (\mathfrak{g}/\mathfrak{k}) \oplus V^K \\ &= T_x S.\end{aligned}$$

□

2.5 等变向量丛

现在我们来讨论如何将切片定理延拓到等变向量丛。这番讨论的收获是：（1）我们将得到等变向量丛的一个优美的局部标准形；（2）我们将得到适当群作用的一个平均化过程。

定义 2.23（等变向量丛）。设 $\pi : E \to M$ 是一个光滑向量丛，且G 是一个李群。在 $\pi : E \to M$ 上，G **-等变向量丛结构**是指G 在E 和M 上的光滑作用，满足

(1) $\pi : E \to M$ 是G-等变的。

(2) G 在E 上的作用是线性的。也就是说，对于每个$x \in M$ 和$g \in G$，诱导映射

$$E_x \to E_{g\cdot x}; \quad e \mapsto g \cdot e$$

是线性的。

若G 在M 上的作用是适当的，则称 $\pi : E \to M$ 为一个**真等变向量丛**。

在适当等变向量丛的定义中，我们只要求G 在底空间上适当地作用，这可能看起来有些奇怪。但事实证明，这会自动推出G 也在全空间E 上适当地作用。

命题 2.24. 若 $\pi : E \to M$ 是一个适当的等变向量丛，则 G 在 E 上的作用是适当的。

证明。 这直接应用推论 2.8。 □

例子2.25. 适当等变向量丛的标准例子是适当G-空间的切丛。事实上，若M 是一个适当的G-空间，那么对M 上的G作用求导，便得到一个G作用

$$G \times TM \to TM; \quad (g, v) \mapsto Tg(v)$$

其中$Tg : TM \to TM$ 表示映射的导数

$$M \to M; \quad m \mapsto g \cdot m.$$

此作用可以对偶化到余切丛上。事实上，给定$m \in M$,$\alpha \in T^*_m M$和$g \in G$，定义$g^*\alpha \in T^*_{g\cdot m} M$如下：

$$\langle g^*\alpha, v\rangle = \langle \alpha, T_m g^{-1}(v)\rangle,$$

其中$v \in T_{g\cdot m}M$，而 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示相切纤维与余切纤维之间的配对。

例子 2.26. 由流形上的作用产生的另一类很好的例子是“轨道叶状结构”，我们稍后将更详细地探讨。和之前一样，假设M 是一个适当的G-空间，并进一步假设M 只有一种轨道类型，即$M = M^{(K)}$，其中$K \leq G$是某个紧致子群。记 $\mathfrak{g}$ 为G的李代数。接着定义一个G-不变子丛 $\mathfrak{g}_M \subseteq TM$，令其为以下映射的像

$$\mathfrak{g} \times M \to TM; \quad (\xi, m) \mapsto \xi_M(m),$$

其中， $\xi_M \in \mathfrak{X}(M)$ 是与 ξ对应的基本向量场。注意，对所有$g \in G$、$m \in M$以及 $\xi \in \mathfrak{g}$，都有

$$T_m g(\xi_M(m)) = (\mathrm{Ad}_g \xi)_M(g \cdot m)$$

因此， $\mathfrak{g}_M$ 在G的作用下是闭的。为证明 $\mathfrak{g}_M$ 确实是一个子丛，我们固定$x \in M$，并取以x为中心的切片邻域。也就是说，设$M = G \times_K V$，其中 $K \leq G$ 是紧致子群，且K在V上有一个表示，并且$x = [e, 0]$。由于$M = M^{(K)}$，可知$V = V^K$，因此存在一个自然的G-等变微分同胚

$$M \cong (G/K) \times V.$$

因此很容易看出，在此识别下

$$\mathfrak{g}_M = (G/K) \times V \times (\mathfrak{g}/\mathfrak{k}),$$

其中 $\mathfrak{k}$ 是K的李代数。因此， $\mathfrak{g}_M$ 是TM的向量子丛。

当然，多亏了例子 2.25，我们可以从 $\mathfrak{g}_M$中得到一大批新的等变向量丛。例如，很容易看出，湮灭子

$$\mathfrak{g}_M^\circ = \{\alpha \in T^*M \mid \langle \alpha, v \rangle = 0 \text{ for all } v \in \mathfrak{g}_M\}$$

在诱导的余切作用下也是一个等变向量丛。

接下来，我们需要一种适用于适当等变向量丛的特定标准形。

命题 2.27. 设 G 为李群，$K \leq G$ 为一个紧子群，V、W 为两个有限维 K-表示。那么

$$\pi : G \times_K (V \times W) \to G \times_K V; \quad [g,(v,w)] \mapsto [g,v]$$

是一个真等变向量丛。

证明。 由于投影

$$pr : G \times V \times W \to G \times V; \quad (g,v,w) \mapsto (g,v)$$

是光滑且 K-等变的，因此商空间上的诱导映射

$$\begin{array}{ccc} G \times V \times W & \xrightarrow{pr} & G \times V \\ \downarrow & & \downarrow \\ G \times_K (V \times W) & \xrightarrow{\pi} & G \times_K V \end{array}$$

是光滑的。显然， π 也具有 G-等变性。对于向量丛结构，给定 [李代数 g_0,v_0] $\in G \times_K V$，其纤维为

$$(G \times_K (V \times W))_{[g_0,v_0]} = \{[g_0,(v_0,w)] \mid w \in W\},$$

它自然同构于 W。为得到局部平凡化，固定 [李代数 g_0,v_0] $\in G \times_K V$。注意，由于投影 $\pi_K : G \to G/K$ 是一个主 K-丛，我们可以找到陪集 g_0K 的一个邻域$U \subseteq G/K$ ，以及覆盖U的 K-主丛同构 ϕ

$$\begin{array}{ccc} \pi_K^{-1}(U) & \xrightarrow{\phi} & U \times K \\ & {\scriptstyle \pi_K} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle pr_1} & \\ & U & \end{array} \tag{2.18}$$

为方便起见，对所有 $g \in \pi_K^{-1}(U)$，记作 ϕ(李代数 g) $= (gK,\ f$(李代数 g)) 。通过此同构，我们得到一个向量丛同构

$$\begin{array}{ccc} \pi_k^{-1}(U) \times_K (V \times W) & \xrightarrow{\phi_1} & U \times V \times W \\ \downarrow {\scriptstyle \pi} & & \downarrow \\ \pi_K^{-1}(U) \times_K V & \xrightarrow{\phi_0} & U \times V \end{array} \tag{2.19}$$

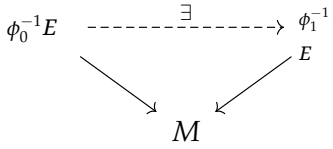
其中

$$\phi_0 : \pi_K^{-1}(U) \times_K V \to U \times V; \quad [g, v] \mapsto (gK, f(g) \cdot v)$$

以及 ϕ_1 也以类似方式定义。公式（2.19）中的图表是一个局部平凡化。 □

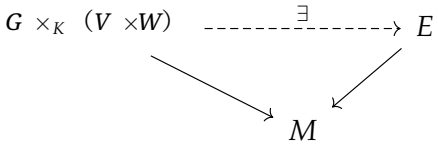
现在我们将证明，每个等变向量丛在局部上都具有命题 2.27 中的形式。首先，回顾 Segal 关于紧致 [Seg68] 的等变向量丛的一个结果G。

命题 2.28 ([Seg68])。 设 K 是一个紧李群。假设我们有两个 K-空间，以及两个 K-等变映射 $\phi_0, \phi_1 : M \to N$，它们是 K-同伦的。此外，假设 N 是紧致的，并且 $\pi : E \to N$ 是一个 K-等变向量丛。那么，拉回丛之间存在 K-等变向量丛同构



有了这一点，我们就可以证明以下结论。

引理 2.29 （适当等变向量丛的局部标准形）。设 G 为李群，$K \leq G$ 为紧子群，V 为有限维 K-表示。记 $M = G \times_K V$。若 $\pi : E \to M$ 是一个真 G-等变向量丛，则存在有限维 K-表示 W 以及一个等变向量丛同构



证明。 固定一个真等变向量丛 $\pi : E \to G \times_K V$。注意，我们可以将 V 与 $K \times_K V \subseteq G \times_K V$认同。现在定义 $A = E|_V$ 为 E 在 $V \cong K \times_K V$上的限制。由于 V 在 K的作用下保持不变，$\pi|_A : A \to V$ 是一个 K-等变向量丛。由于 K 对 V的作用是线性的，数乘映射

$$\mu : [0, 1] \times V \to V; \quad (t, v) \mapsto tv$$

定义了一个 K-等变同伦，将 V 与 $\{0\}$相连。由于K 和$\{0\}$ 都是紧致的，命题 2.28 给出了一个 K-等变向量丛同构

$$\begin{array}{ccc} A & \overset{\exists}{\dashrightarrow} & V \times W \\ & {\scriptstyle \pi|_A} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle pr_1} & \\ & V & \end{array} \tag{2.20}$$

其中 $pr_1 : V \times W \to V$ 是到第一因子的投影。采用与命题 2.27中极为相似的证明，我们可以证明

$$\widetilde{\pi} : G \times_K A \to G \times_K V; \quad [g, a] \mapsto [g, \pi(a)]$$

是定义在 $G \times_K V$ 上的 G-等变向量丛。接下来很容易证明映射

$$G \times_K A \to E; \quad [g, a] \mapsto g \cdot a$$

定义了一个 G-等变向量丛同构。将其与公式（2.20）中的同构复合，即得到所需结果。 □

例 2.30. 运用上述证明的思路，我们可以得到适当 G-空间的切丛的局部正规形。具体而言，给定连通李群 G、紧子群 $K \leq G$，以及一个 K-表示 V，我们有一个向量丛的 G-等变同构

$$T(G \times_K V) = G \times_K (V \times (\mathfrak{g}/\mathfrak{k}) \times V).$$

类似地，我们也可以计算出余切丛具有如下形式

$$T^*(G \times_K V) = G \times_K (V \times \mathfrak{k}^\circ \times V^*),$$

其中 $\mathfrak{k}^\circ \subseteq \mathfrak{g}^*$ 属于 $\mathfrak{k} = 李(K)$ 的湮灭子。

适当作用的平均化定理所需的最后一块拼图，是紧群平均化定理。

引理2.31 (紧群平均化定理 [节68]). 设 K 是一个紧李群，μ 是 K 上哈尔测度的一种选取，V 和 W 是两个有限维实 K-表示。给定任意光滑映射 f: $V \to W$，则存在一个规范的 K-等变映射 $f^K : V \to W$，称为 f 的K-平均化，定义如下

$$f^K(v) := \frac{1}{vol(K)} \int_K k^{-1} \cdot f(k \cdot v) d\mu(k).$$

由此，我们现在可以证明以下结论。

定理 2.32 （适当向量丛的平均化定理）。 *[动量映射实数集11]]*设 $\pi: E \to M$ 是一个适当的 G-等变向量丛。那么存在一个线性满射

$$\Gamma(E) \to \Gamma(E)^G; \quad \sigma \mapsto \sigma^G, \tag{2.21}$$

称为平均映射，使得若 $\sigma \in \Gamma(E)^G$，则 $\sigma^G = \sigma$。

证明。 首先，我们证明可以在局部对截面进行平均化。设 $M = G \times_K V$，其中 $K \leq G$ 是紧子群，且 V是一个 K-表示。根据引理2.29，不妨设 $E = G \times_K (V \times W)$，并且

$$\pi : G \times_K (V \times W) \to G \times_K V; \quad [g, (v, w)] \mapsto [g, v]$$

其中 K-表示W。现在固定一个截面 $\sigma \in \Gamma(E)$。限制

$$\sigma|_{K \times_K V} : K \times_K V \to K \times_K (V \times W)$$

可视为平凡的 K-等变向量丛的截面$V \times W \to V$，其丛映射为到第一因子的投影。由于 K 是紧致的，我们可以应用引理 2.31中的平均化，得到一个等变截面 τ，它属于 $V \times W \to V$。也就是说，定义

$$\tau := (\sigma|_{K \times_K V})^K \in \Gamma(E|_{K \times_K V})^K, \tag{2.22}$$

上标表示已对K 取平均。由此，我们现在可以定义

$$\sigma^G([g, v]) := g \cdot \tau([e, v]).$$

由于 τ 是K-等变的，很容易得出 σ^G 是良定义且G-等变的。注意，若 σ 原本就是等变的，则 $\sigma|_{K \times_K V}$ 也将是K-等变的，因此 $\tau = \sigma|_{K \times_K V}$。因此，在这种情况下， $\sigma^G = \sigma$ 。

既然局部图景已经建立，下面我们来说明如何将这些构造拼接起来，得到一个整体构造。首先，在G 上固定一个哈尔测度 μ ，并令M由切片邻域$U_i\}_{i \in I}$ 构成一个局部有限覆盖。取一个从属于覆盖$U_i\}_{i \in I}$的单位分解 $\{\phi_i\}_{i \in I}$。对于任意$i \in I$， ϕ_i 都是紧支撑的。因此，借助G上的哈尔测度 μ ，我们可以定义

$$\phi_i^G : M \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \int_G \phi_i(g \cdot x) d\mu(g).$$

显然， ϕ_i^G是等变且光滑的。此外，由于U_i 在G作用下保持不变， ϕ_i^G的支撑集仍包含在U_i 中。最后，我们将得到

$$\sum_i \phi_i^G = 1.$$

现在，给定一个截面 $\sigma \in \Gamma(E)$，将其 $\sigma|_{U_i}$ 限制到某个切片邻域后，我们可以如上应用平均化过程，得到一个G-等变截面 $\sigma_i^G \in \Gamma(E|_{U_i})^G$。现在定义

$$\sigma^G = \sum_{i \in I} \phi_i \sigma_i^G.$$

于是 $\sigma^G \in \Gamma(E)^G$。 □

注2.33。 请注意，平均映射并非只有一个，原则上存在无穷多个平均映射。特别是，局部平均映射依赖于极大切片邻域中心处特定的稳定子群。随后，我们利用在整体群G上选定的哈尔测度，将这些局部平均映射拼接起来。

作为平均化以及我们为真向量丛推导出的局部标准形的应用，现在我们可以构造一族子丛，它们具有这样的性质：可以对其取商，从而得到底空间的商空间上的向量丛。为建立这一构造，设G 为一个连通李群，且 $\pi : E \to M$ 是一个真等变向量丛。对于任意 $x \in M$，由于 $\pi : E \to M$ 是等变的，因此稳定子群G_x 在线性地作用于纤维E_x上。特别地，不动点集E^{G_x} $_x$ 是有定义的。

定义2.34。 设 G 是一个连通李群，且 $\pi : E \to M$ 是一个适当的等变向量丛。定义

$$\widetilde{E} := \bigcup_{x \in M} E_x^{G_x}.$$

这是我们构造中的关键要素。

定理 2.35。 设 G 是一个连通李群，且 $\pi : E \to M$ 是一个适当的等变向量丛。假设 M 只有一种轨道类型，则有以下结论。

~(1) $E \subseteq E$ 是 E 的一个 G-不变向量子丛。

(2) The induced map $\widetilde{\pi} : \widetilde{E}/G \to M/G$ is a smooth vector bundle.

证明。 设 $K \leq G$ 是一个紧子群，使得 $M = M^{(K)}$。固定 $x \in M$，我们现在将利用引理 2。29 来构造一个 G-等变局部

~平凡化 E。因此，设 $M = G \times_K V$ 且 $E = G \times_K (V \times W)$，其中 K 表示 V、W，$x = [e, 0]$,并

$$\pi : G \times_K (V \times W) \to G \times_K V; \quad [g, (v, w)] \mapsto [g, v].$$

由于$M = M^{(K)}$，因此$V = V^K$。注意，$[e\,0]$ 上的纤维与W 作为K表示同构。利用K 在V上平凡作用这一事实，对于任意$v \in V$，有

$$E^K_{[e,v]} \cong W^K.$$

利用G在M 和E上的作用，我们进而得到

$$\widetilde{E} = G \times_K (V \times W^K) \cong (G/K) \times V^K \times W^K.$$

~这给出了所需的G等变局部平凡化，因此E 是一个向量子丛。

~由我们的构造还可立即得出，E/G 是M/G上的一个向量丛。事实上，在上面的局部标准形中，我们有

$$M/G \cong V$$

而

$$\widetilde{E}/G \cong V \times W^K,$$

~从而为E/G提供了光滑的局部平凡化。 □

推论 2.36： 设 G 是一个连通李群，且 $\pi : E \to M$ 是一个适当的等变向量丛。如果 G 在 M 上自由作用，则商空间 $E/G \to M/G$ 是一个向量丛。

备注2.37。 有人可能会想知道，总丛 E/G 的商空间是否也是底空间 M/G 的一个向量丛。一般而言，情况并非如此。事实上，考虑平凡丛 $\pi : \mathbb{R}^2 \to \{点\}$，其中我们赋予 $\mathbb{R}^2$ 自然的 S^1 作用，该作用由绕原点的旋转给出，并令 $\{点\}$ 带有平凡作用。那么，$\mathbb{R}^2/S^1$ 同胚于 $[0, \infty)$，而后者显然不同胚于一个 $\{点\}/S^1 = \{点\}$ 上的向量丛，因为$[0, \infty)$ </style}不同胚于任何向量空间。

推论 2.38. 设 G 是一个连通李群，M 是一个具有~单一轨道类型的适当 G-空间，即 $M = M^{(K)}$，其中 K 是 G 的某个紧致子群 $\leq$。那么 $TM = TM$ 当且仅当 K 是正规子群。

证明。 这是例子 2.30 中标准形的推论。化为标准形后，我们有 $M = (G/K) \times V$，其中 V 是平凡的 K-表示V，并且

$$TM = (G \times_K (\mathfrak{g}/\mathfrak{k})) \times V \times V.$$

因此，根据命题 2.21，

$$\widetilde{TM} = (G \times_K (\mathfrak{g}/\mathfrak{k})^K) \times V \times V = (G/K) \times (\mathfrak{n}_G(K)/\mathfrak{k}) \times V \times V.$$

这两个表达式相等，当且仅当 $\mathfrak{n}_G(K)/\mathfrak{k} = \mathfrak{g}/\mathfrak{k}$，而这只有在 $\mathfrak{n}_G(K) = \mathfrak{g}$ 时才可能发生。由于 G 是连通的，因此可得 $N_G(K) = G$，从而 K 是正规子群。 □

平均化的一个结果是，我们可以得到 E 的一种替代刻画：它是由等变截面张成的子丛。此外，我们还可以借此确定商向量丛 E/G的所有截面。

命题 2.39. 设 G 是一个连通李群，且 $\pi : E \to M$ 是一个适当的~等变向量丛。设 $E \subseteq E$ 是定义 2.34中定义的子集。则有以下结论。

(1) 映射

$$M \times \Gamma(E)^G \to E; \quad (x, \sigma) \mapsto \sigma(x) \tag{2.23}$$

~的像为 E。

（2）当 M 只有一种轨道类型时，记 $\pi_M : M \to M/G$ 和~ ~π_E : $E \to E/G$ 为商映射。于是存在典范线性同构

$$(\pi_E)_* : \Gamma(E)^G \to \Gamma(\widetilde{E}/G)$$

使得若 $\sigma \in \Gamma(E)^G$，则 $(\pi_E)_*\sigma \in \Gamma(\widetilde{E}/G)$ 是使该图表交换的唯一截面

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\sigma} & E \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_M} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_E} \\ M/G & \xrightarrow{(\pi_E)_*\sigma} & \widetilde{E}/G \end{array} \tag{2.24}$$

证明。 (1) 首先，我们来证明方程（2.23）中的映射的像包含于 ~E。固定一个等变截面 $\sigma \in \Gamma(E)^G$ 以及 $x \in M$。那么，对于任意李代数 $g \in G_x$，有

$$g \cdot \sigma(x) = \sigma(g \cdot x) = \sigma(x).$$

因此，$\sigma(x) \in E^{G_x}{}_x$。反之，设$v \in E^{G_x}{}_x$。沿着轨道$G \cdot x$定义一个等变截面

$$\sigma_0 : G \cdot x \to E|_{G \cdot x}; \quad g \cdot x \mapsto g \cdot v.$$

由于v被G_x稳定，因此σ_0是良定义且光滑的。在局部坐标中工作并利用单位分解，我们可以将σ_0延拓为全局截面$\sigma_0 \in \Gamma(E)$，使得$\sigma_0|_{G \cdot x} = \sigma_0$。对$\sigma_0$应用平均映射，得到等变截面$\sigma = \overline{(\sigma_0)^G} \in \Gamma(E)^G$。由于$\sigma_0$是等变的，因此$\sigma|_{G \cdot x} = \sigma_0$。特别地，我们构造了等变截面$\sigma$，使得$\sigma(x) = v$。

(2) 现在假设M只有一种轨道类型，即$M = M^{(K)}$，其中$K \leq G$是某个紧子群。设$\sigma \in \Gamma(E)^G$是一个等变截面。定义

$$(\pi_E)_* \sigma : M/G \to \widetilde{E}/G; \quad [x] \mapsto [\sigma(x)]$$

由于σ是等变的，因此$(\pi_E)_*$是良定义的。此外，根据构造，$(\pi_E)_*\sigma$满足方程（2.24）。为说明$(\pi_E)_*\sigma$是光滑的，回顾一下我们在定理2.35的证明中所示的：对于任意点$\mathbf{x} \in M$，我们可以找到一个G-不变邻域$U \subseteq M$，它包含$\mathbf{x}$，以及一个G-等变向量丛同构

$$\widetilde{E}|_U \cong U \times W,$$

其中，G仅作用于第一个因子。在这种情况下，$\sigma|_U$可以识别为一个映射

$$U \to U \times W; \quad u \mapsto (u, f(u))$$

对于某个光滑的K-不变映射$f : U \to W$。那么在这个平凡化中，很容易看出$(\pi_E)_*\sigma$变成了映射

$$U/G \to (U/G) \times W; \quad [u] \mapsto ([u], f(u))$$

它是良定义且光滑的，因为f是K-不变且光滑的。因此，我们有一个映射

$$(\pi_E)_* : \Gamma(E)^G \to \Gamma(\widetilde{E}/G)$$

这显然是线性的且为单射。

~为证明$(\pi_E)_*$是满射，取 $\eta \in \Gamma(E/G)$。注意，对于任意$x \in M$，该映射

$$(\pi_E)_x : \widetilde{E}_x \to (\widetilde{E}/G)_{[x]}$$

是一个同构。因此，定义

$$\sigma : M \to \widetilde{E}; \quad x \mapsto (\pi_E)_x^{-1}(\eta([x]).$$

如果 σ 光滑，那么显然 σ 是等变的，并且 $(\pi_E)_*\sigma = \eta$。因此，为了证明 σ 光滑，注意若我们取 G-不变的平凡化 $U \subseteq M$，使得 E 上有 $E|_U \cong U \times W$，且 G 仅作用于第一因子。那么，在此平凡化下，存在一个 K-不变的 $f : U \to W$，使得

$$\eta([u]) = ([u], f(u))$$

对任意 $u \in U$ 都成立。经过图追踪，我们得到

$$\sigma(u) = (u, f(u))$$

因此 σ 光滑。

□

推论 2.40. 设 G 是一个连通李群，M 是只有一种轨道类型的适当 G-空间。记 $\pi : M \to M/G$ 为商映射。若 $V \in \mathfrak{X}(M)^G$ 是一个等变向量场，则逐点推前 $\pi_* V$ 定义了 M/G 上的一个向量场。此外，映射

$$\pi_* : \mathfrak{X}(M)^G \to \mathfrak{X}(M/G)$$

是一个满射。

证明。 令 $\mathfrak{g}_M \subseteq$ 切丛 为由基本向量场张成的子丛，现在考虑法丛

$$\nu(M, G) := TM/\mathfrak{g}_M.$$

由于 $\mathfrak{g}_M$ 是等变子丛，因此商空间也是等变的。此外，由于 $\mathfrak{g}_M$ 是投影 $T\pi :$ 切丛 $\to T(M/G)$ 的核，因此诱导映射

$$T\pi : \nu(M, G) \to \pi^{-1}T(M/G) \tag{2.25}$$

是一个 G-等变向量丛同构。现在我声称

$$\widetilde{\nu(M,G)} = \nu(M,G).$$

在这种情况下，根据定理 2.35， $\nu(M,G)/G \cong T(M/G)$ 作为 G-等变向量丛。此外，根据命题2.39 ，方程（2.25）中的映射诱导出一个双射

$$\Gamma(\nu(M,G))^G \to \Gamma(T(M/G)) = \mathfrak{X}(M/G)$$

从而得到一个满射

$$\mathfrak{X}(M)^G \to \mathfrak{X}(M/G).$$

因此，要证明 $\nu(M,G) = \nu(M,G)$，只需证明对于所有 $x \in M$，$\nu_x(M,G)^{G_x} = \nu_x(M,G)$。为此，固定 $x \in M$。应用引理 2.29 中的局部标准形，并利用 M 只有一种轨道类型这一事实，我们可以假设

$$M = (G/K) \times V$$

对于一个紧子群 $K \leq G$ 以及 $x = (K, 0)$。注意到

$$\nu_x(M,G) = \frac{(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}) \oplus V}{(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}) \oplus \{0\}} \cong V$$

作为K-表示。由于K 在V上的作用是平凡的，结论便由此得出。 □

3

辛普莱克几何

辛流形是经典力学的哈密顿形式所产生的“相空间”的一种自然推广。这里的想法是，我们有一个质量为m 、受F作用力的经典粒子。若用坐标$q_1,\ldots,q_n$ 表示位置，并用坐标 $p_1,\ldots,p_n$ 表示动量，那么所有可能的位置和动量构成的空间就称为**相空间**。在我们的情形中，这可以简单地看作 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$，或某个合适的子集。将力写作$F(q) = (F_1(q),\ldots,F_n(q))$，牛顿方程告诉我们，粒子的位置$q(t)$ 将满足微分方程

$$F = ma = m\frac{d^2q}{dt} = \frac{dp}{dt},$$

其中导数是逐坐标计算的。哈密顿形式是牛顿方程的一种变体，适用于力是保守力的情况，即 F 是某个函数$U(q)$ 的梯度，该函数称为“势能”。粒子不仅具有势能，还具有动能，即运动所带来的能量

$$T = \frac{\|p\|^2}{2m} = \frac{p_1^2+\cdots+p_n^2}{2m}.$$

将这两者相加，就得到总能量，也称为哈密顿量

$$H(q,p) = T(p) + U(q).$$

注意，如果$q(t)$ 是牛顿方程的一个解，那么很容易看出

$$\frac{d}{dt}H\left(q, m\frac{d}{dt}q\right) = 0$$

因此有“能量是守恒量”这一说法。利用这一点（或者更传统地说，利用哈密顿泛函），我们便可以推导出哈密顿方程。也就是说，若一条轨迹（q（t），p（t）满足牛顿方程，则

$$\begin{cases} \frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases}$$

为了开始理解辛几何，我们首先需要泊松括号。给定相空间上的两个函数f 和g ，我们定义

$$\{f,g\} := \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} \right). \tag{3.1}$$

这件事看起来可能有些奇怪，但只需对哈密顿方程稍加整理即可证明：如果f 是相空间上的函数，并且$(q(t),\ p(t))$ 是粒子的轨迹，那么

$$\frac{d}{dt} f(q(t),p(t)) = \{H,f\}(q(t),p(t)).$$

特别地，鉴于在经典物理中，可测量的量被称为可观测量，并由相空间上的函数建模，我们可以看到，可观测量的动力学由泊松括号的代数性质决定。

导向辛几何的洞见是，方程（3.1）中的泊松括号实际上可以由一个称为辛形式的 2-形式编码。此外，保持哈密顿方程不变的对称性（物理学家称之为“正则变换”）随后可编码为保持辛形式不变的相空间微分同胚。

现在，辛几何的实际发展史相当漫长而复杂，从某种意义上说始于 Hamilton 对光学的研究，详见[GS84]。得益于 Arnold [Arn78], Weinstein [Wei71], Souriau[Sou70] 以及许多其他人的工作，自1960年代以来，辛几何已发展成为微分几何的主要领域之一，其研究远远超出了源自物理学的任何诠释。

建议感兴趣的读者查阅上文列出的任一资料，以了解相关入门知识；也可参阅 [DS08] ， 了解辛几何的另一部优秀入门读物。

3.1 辛向量空间

我们从辛向量空间开始研究辛几何。正如我们将在整篇论文中反复看到的那样，许多证明会转到线性情形，因此有必要先在这里打下坚实的基础。

定义3.1 （辛向量空间）**：** 辛向量空间是一个二元组 $(V、\ \omega)$，其中 V 是一个实向量空间，而 $\omega \in \bigwedge^2(V^*)$ 是一个非退化的 2-形式。也就是说，映射

$$\omega^\flat : V \to V^*; \quad v \mapsto \omega(v, \cdot)$$

是一个线性同构。

例子 3.2. 辛向量空间的标准例子可以在 $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 中找到。令 $e_1, \ldots, e_n$ 和 $f_1, \ldots, f_n$ 分别表示 $\mathbb{R}^n$ 的第一份和第二份拷贝上的标准基向量。现在令 $e_1^*, \ldots, e_n^*$ 和 $f_1^*, \ldots, f_n^*$ 为相应的对偶基。现在在 $\mathbb{R}^{2n}$ 上定义**标准辛形式** 如下:

$$\omega_0 = \sum_{j=1}^{n} e_i^* \wedge f_i^*.$$

于是很容易验证 ω_0 是辛的。事实上，将$(\mathbb{R}^{2n})^* \cong \mathbb{R}^{2n}$ 与典范内积对应后， $\omega_0^\flat$ 的矩阵形式为

$$\omega^\flat = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$$

因此 ω_0 是非退化的。

定义 3.3 (线性辛同胚**).** 设$(V1, \omega_1)$ 和$(V2, \omega_2)$ 是两个辛向量空间。线性辛同胚 是一个线性同构 $\Phi : V_1 \to V_2$，使得

$$\Phi^* \omega_2 = \omega_1.$$

定理 3.4。 每个辛向量空间 $(V,\ \omega)$ 都存在一个达布基。也就是说，存在一组基 $e_1, \ldots,\ e_n,\ f_1, \ldots,\ f_n \in V$，使得

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} e_i^* \wedge f_i^*,$$

其中，$\{e_1^*,\ \ldots,\ e_n^*,\ f_1^*,\ \ldots,\ f^*n\}$ 是 V^* 中的对偶基。

推论 3.5。 设 $(V,\ \omega)$ 是一个辛向量空间。

(1) V 的维数为偶数。

(2) 如果维数$(V) = 2n$，其中 n 为某个整数，那么存在一个辛同胚 $\Phi : (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0) \to (V, \omega)$，其中 ω_0 是 $\mathbb{R}^{2n}$上的标准辛形式。

3.1.1 辛补空间与特征子空间

定义 3.6（辛补空间）。设(V,ω)是一个辛向量空间，且$C \subseteq V$是一个线性子空间。定义C的**辛补空间**，记作C^ω，如下：

$$C^\omega = \{v \in V \mid \omega(v,c) = 0 \text{ for all } c \in C\}.$$

与内积的补空间不同，子空间不一定与其辛补空间互为横截。事实上，在辛线性代数中，我们主要关注那些与其辛补空间以有趣方式相交的子空间。在考察这些子空间之前，让我们先确立辛补空间的一些基本性质。

命题 3.7. 设(V,ω)是一个辛向量空间，且$A,B \subseteq V$是两个线性子空间。

(1) 若$A \subseteq B$，则$B^\omega \subseteq A^\omega$。*(2)* $(A^\omega)^\omega = A$。*(3)* 维数(A) +维数(A^ω) = 维数(V)。

定义 3.8（辛向量空间的特征子空间）. 设(V,ω)是一个辛向量空间，且$C \subseteq V$是一个线性子空间。我们称C为

(1) **各向同性**当且仅当$C \subseteq C^\omega$.
(2) **余各向同性**当且仅当$C^\omega \subseteq C$
(3) **拉格朗日**当且仅当$C = C^\omega$.
(4) **辛**当且仅当$C \cap C^\omega = \{0\}$。

例子 3。9. 考虑标准辛结构$(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$并设$e_1,\ldots,e_n,f_1,\ldots,f_n$为标准达布基。现在来看定义3.8中引入的各类子空间的标准例子。

(1) 各向同性。

$$A = \text{span}_{\mathbb{R}}\{e_1,\ldots,e_k\}$$

对于$k \leq n$。简单计算可得

$$A^{\omega_0} = \text{span}_{\mathbb{R}}\{e_1,\ldots,e_n,f_{k+1},\ldots,f_n\},$$

其中尤其包含A。因此A是各向同性的。注意，由于命题 1 中的（3.7，可得A^{ω_0}是余各向同性的。

（2）余各向同性。

$$B = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_k\}.$$

也可以立即看出

$$B^{\omega_0} = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{e_{k+1}, \ldots, e_n\}$$

它包含于 B. 因此，B 是余各向同性的。与上文类似，我们也看到命题1的性质（3.7 ）蕴含B^{ω_0} 是各向同性的。

（3）拉格朗日。

$$C = \{e_1, \ldots, e_n\}.$$

利用（a）中的计算，我们立即推出$C^{\omega_0} = C$，因此C 是拉格朗日的。

（4）辛。

$$D = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{e_1, \ldots, e_k, f_1, \ldots, f_k\}.$$

可以验证

$$D^{\omega_0} = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{e_{k+1}, \ldots, e_n, f_{k+1}, \ldots, f_n\}.$$

注意， ω_0 对D 和D^{ω_0} 的限制分别在每个子空间上定义了辛形式。

现在我们来总结一些关于辛向量空间的简单性质，之后会不加赘述地使用它们。

命题 3.10. 设(V, ω) 是一个辛向量空间，且 $C \subseteq V$ 是一个辛子空间。

(1) $\omega|_C$ 和 $\omega|_{C^\omega}$ 的限制分别在每个子空间上定义了辛形式。

(2) V 是 C 与 C^ω 的内直和。也就是说，$V = C \oplus C^\omega$。

由此可见，辛子空间恰好是这样的子空间：其辛补空间的作用更像是由内积所关联的补集。特别地，对于每个辛子空间，我们都能得到一个典范投影映射。

定义 3.11 (辛投影)。 设 (V, ω) 是一个辛向量空间，且 $C \subseteq V$ 是一个辛子空间。设 $P_C : V \to C$ 是由内直和 $V = C \oplus C^\omega$所诱导的典范投影。

3.1.2 线性辛约化

现在，为了结束我们对辛线性代数的介绍性讨论，让我们来讨论线性辛约化。

命题 3.12 (线性辛约化)。 设 $C \subseteq V$ 是一个子空间。那么

$$V_0 := \frac{C}{C \cap C^\omega}$$

是一个辛向量空间，具有唯一的辛形式 ω_0，满足

$$\pi^* \omega_0 = \omega|_C,$$

其中 $\pi: C \to V_0$ 是典范投影。

证明。 在V_0 上定义 ω_0，使得

$$\omega_0([c],[c']) := \omega(c,c'),$$

其中 c、$c' \in C$ 和 $[c],[c'] \in V_0$ 是它们对应的等价类。首先我们证明 ω_0 是良定义的，然后证明 ω_0 是非退化的。

(i) ω_0 是良定义的。

事实上，若$c,d,c',d' \in C$ 使得$c - d, c' - d' \in C \cap C^\omega$，则

$$\omega(d,d') = \omega(d + (c-d), d' + (c'-d')) = \omega(c,c').$$

因此， $\omega_0([d],[d']) = \omega_0([c],[c'])$ 正如所需。

(ii) ω_0 是非退化的。

设$c \in C$，使得 $[c] \in \ker(\omega_0^\flat)$。也就是说，对于所有$d \in C$，都有

$$\omega_0([c],[d]) = 0.$$

根据 ω_0的定义，这意味着 $\omega(c,d) = 0$ 对于所有$d \in C$均成立。特别地，这意味着$c \in C^\omega$，从而$c \in C \cap C^\omega$。因此， $[c] = 0$，所以 $\omega_0^\flat$ 是单射，因而是线性同构。

□

定义3.13（线性约化空间）。**给定子空间**$C \subseteq V$，称$V_0 = C/(C \cap C^\omega)$ 为 **V** 在C 处的线性约化，并称 $\pi_0: C \to V_0$ 为**约化映射**。

在下一章节中，我们将讨论辛向量空间中还有哪些其他结构可以被“约化”。特别是，我们将研究拉格朗日子空间何时可以被约化。

3.2 辛流形与泊松流形

现在我们可以定义辛流形了。尽管这相当不拘常规，我们很快就会转向更加一般的泊松流形。这是因为，辛流形的一些特征或许看起来颇为神秘，但在更一般的泊松图景中，它们会显得十分自然。此外，在奇异情形下，泊松括号是更自然的整体对象，因此值得同时花时间研究这两个概念。

定义 3.14 （辛流形）。 辛流形是一个二元组(M, ω)，其中M 是一个流形，且 $\omega \in \Omega^2(M)$ 是一个满足以下两个条件的 2-形式。

(1)（闭）$d\omega = 0$。

(2)（非退化）映射

$$\omega^\flat : TM \to T^*M; \quad v \mapsto \omega(v, \cdot)$$

是一个向量丛同构。

如果 ω 满足上述两个条件，我们就称 ω 为**辛形式**。

例子 3.15. 当然，任何辛向量空间(V, ω) 都是辛流形。现在来看标准辛结构$(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$，若我们写作 $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$，并将$x_1, \dots, x_n$和$y_1, \dots, y_n$分别作为 $\mathbb{R}^n$ 的第一份和第二份副本的坐标，那么

$$\omega_0 = \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dy_i$$

显然它是闭的。推论 3.5 的一个简单应用立即表明，所有辛向量空间都是辛流形。

例子 3.16. 作为上述内容的推广，现在考虑余切丛。固定一个流形 Q，令 $\tau_Q : T^*Q \to Q$ 为 Q 的余切丛。定义**李维尔 1-形式** $\theta_Q \in \Omega^1(T^*Q)$ 如下：

$$(\theta_Q)_\alpha(v) = \langle \alpha, (\tau_Q)_* v \rangle \tag{3.2}$$

对于 $\alpha \in T^*Q$ 以及 $v \in T_\alpha(T^*Q)$。在 Q 上选取局部坐标$(q_1,\ldots,q_n)$，并令$(p^1,\ldots,p^n)$ 为相应的余切坐标，立即可得，在这些坐标下

$$\theta_Q = \sum_{i=1}^{n} p_i dq_i \tag{3.3}$$

因此，在这些坐标下

$$d\theta_Q = -\sum_{i=1}^{n} dq_i \wedge dp_i \tag{3.4}$$

因此，

$$\omega_Q = -d\theta_Q \in \Omega^2(T^*Q) \tag{3.5}$$

是一个辛形式。

注意，辛向量空间和余切丛这两个例子都可以写成相同的局部形式。这是辛流形中更普遍的现象。

定理 3.17. 设 (M,ω) 是一个辛流形，且 维数$(M) = 2n$，$x \in M$。那么存在 x 的一个邻域 $U \subseteq M$、0 的一个邻域 $V \subseteq \mathbb{R}^{2n}$，以及一个微分同胚

$$\phi : U \to V$$

使得 $\phi^*\omega_0 = \omega|_U$，其中 ω_0 是标准辛形式。

特别是，辛流形没有局部不变量。这使得辛结构比诸如黎曼结构之类的结构刚性强得多。在继续介绍辛几何的更多基本定义之前，现在让我们讨论另一类非平凡辛流形的例子，即余伴随轨道。

例子 3.18. 设 G 是一个连通李群，其李代数为 $\mathfrak{g}$，并令$\mathfrak{g}^*$ 表示其对偶。回忆一下例子 2.2 中引入的余伴随作用

$$G \times \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^*; \quad (g,q) \mapsto \mathrm{Ad}^*_g(q).$$

现在我们将讨论余伴随轨道上的一种典范辛结构，称为 Kostant-Kirillov-Souriau 辛结构。现在固定$p \in \mathfrak{g}^*$，并记

$$\mathrm{Ad}^*_G(p) := \{\mathrm{Ad}^*_g(p) \mid g \in G\}$$

表示经过p的余伴随轨道。通过双射，为 $\mathrm{Ad}_G^*(p)$ 赋予光滑流形结构

$$G/G_p \to \mathrm{Ad}_G^*(p).$$

由于 Ad_G^*（p）是群作用的一个轨道，其切空间由基本向量场张成。特别地，在p处，定义

$$\omega_{KKS}(\xi_{\mathfrak{g}^*}(p), \eta_{\mathfrak{g}^*}(p)) := \langle p, [\xi, \eta]\rangle. \tag{3.6}$$

ω_{KKS} 随后可通过G-作用扩展到整个 Ad_G^*（p），从而定义一个 2-形式 $\omega_{KKS} \in \Omega^2$（$\mathrm{Ad}_G^*$（$p$））。现在我来证明 ω_{KKS} 是一个辛形式。

假设$G_p \neq G$，否则 Ad_G^*（p）只是一个点，我们约定点是平凡的辛流形。现在，为了证明 ω_{KKS}是闭的，首先确定$T_q^*\mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}$。在这种情况下，我们很容易证明，若 $\xi \in \mathfrak{g}$ 且$q \in \mathfrak{g}^*$，则点q 处的基本向量场 $\xi_{\mathfrak{g}^*}$（q）具有如下形式

$$\xi_{\mathfrak{g}^*}(q) = -\mathrm{ad}_\xi^*(q), \tag{3.7}$$

其中 $\mathrm{ad}_\xi^*\colon \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^*$ 定义为

$$\langle \mathrm{ad}_\xi^*(q), \eta\rangle = -\langle q, [\xi, \eta]\rangle$$

利用单位元

$$[\mathrm{ad}_\xi^*, \mathrm{ad}_\eta^*] = \mathrm{ad}_{[\xi,\eta]}^*$$

即可推出$d\omega_{KKS} = 0$。非退化性源于$G_p \neq G$这一事实。

现给定一个辛流形(M, ω)。根据定义，每个切空间T_xM 都是一个辛向量空间。利用这一点，我们现在可以将辛向量空间中特征子空间的线性定义“整体化”为辛流形的子流形。

定义 3.19（各向同性／余各向同性／拉格朗日／辛子流形）。设(M, ω) 是一个辛流形，且$C \subseteq M$ 是一个子流形。对于各性质$P \in$ {各向同性、余各向同性、拉格朗日、辛}，若C 满足P 子流形的条件，即对每个$x \in C$，$T_xC \subseteq T_xM$ 都是P 子空间，则称C 为P 子流形。

现在，辛流形具有一类特殊的向量场，称为哈密顿向量场。这些向量场是通过同构 $\omega^\flat\colon TM \to T^*M$ 所诱导的向量场与1-形式之间的对应关系得到的。特别地，哈密顿向量场对应于恰当1-形式。不过，在我们进一步讨论之前，最自然的做法是

在进入奇异情形时，先介绍一种比辛形式更一般的结构，即泊松结构。

定义 3.20（泊松结构）。**泊松流形** 是一个二元组 (M,π)，其中 M 是一个流形，而 $\pi \in \bigwedge^2(TM)$ 是一个双向量，使得配对

$$\{\cdot,\cdot\} : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \to C^\infty(M); \quad (f,g) \mapsto \{f,g\} := \pi(df,dg)$$

满足雅可比恒等式。也就是说，对于所有 f、g、$h \in C^\infty(M)$，都有

$$\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\} = 0.$$

我们称 $\{\cdot,\cdot\}$ 为泊松括号。

备注 3.21。鉴于泊松括号 $\{\cdot,\cdot\}$ 源自双导子，因此它们具有双线性和反对称性。特别地，这意味着泊松括号是李括号。

定义 3.22（泊松映射）。设 $(M1,\pi_1)$ 和 $(M2,\pi_2)$ 是两个泊松流形。若对所有f、$g \in C^\infty(M_2)$ 都有，则称光滑映射 $\phi : M_1 \to M_2$ 为**泊松** 映射

$$\{\phi^* f, \phi^* g\}_1 = \phi^* \{f,g\}_2..$$

现在，给定一个泊松流形(M,π)，有一种非常自然的方式可以从函数得到向量场。给定一个函数$f \in C^\infty(M)$，注意到由于 π 是一个双向量，映射

$$\{f,\cdot\} : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$$

是一个导子。正如我们将在第 6 章中详细探讨的，对函数代数的导子是刻画向量场的一种方式。因此，我们可以给出如下定义。

定义 3.23（哈密顿向量场）。设 (M,π) 是一个泊松流形，且$f \in C^\infty(M)$ 是一个函数。定义 **哈密顿向量场**f，记为 $V_f \in \mathfrak{X}(M)$，如下：

$$V_f(g) = \{f,g\}$$

对所有 $g \in C^\infty(M)$均成立。

命题 3.24. 设 (M,π) 是一个泊松流形。那么映射

$$C^\infty(M) \to \mathfrak{X}(M); \quad f \mapsto V_f$$

是一个李代数同态。

证明。 这是雅可比恒等式的推论。给定 f、$g \in C^\infty(M)$以及一个测试函数 $h \in C^\infty(M)$，我们有

$$\begin{aligned}
[V_f, V_g]h &= V_f(V_g h) - V_g(V_f h) \\
&= \{f,\{g,h\}\} - \{g,\{f,h\}\} \\
&= \{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} \\
&= -\{h,\{f,g\}\} \\
&= \{\{f,g\},h\} \\
&= V_{\{f,g\}}h,
\end{aligned}$$

其中，第三行和第五行用到了泊松括号的反对称性，第四行用到了雅可比恒等式。 □

回到辛情形，设有一个辛流形(M,ω)。根据定义， ω 定义了一个向量丛同构

$$\omega^\flat : TM \to T^*M$$

记作 $\omega^\# = (\omega^\flat)^{-1}$。因此，给定两个函数$f$、$g \in C^\infty(M)$，我们可以定义

$$\{f,g\} := \omega^\#(df)(g) \tag{3.8}$$

于是很容易看出，由于 ω 是闭的， $\{\cdot,\cdot\}$ 定义了一个李括号。我们可以将上述讨论总结如下。

命题 3.25. 设(M,ω) 是一个辛流形。

(1) 配对

$$\{\cdot,\cdot\} : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \to C^\infty(M); \quad (f,g) \mapsto \{f,g\}$$

由方程（3.8）定义的结构在 M 上定义了一个泊松结构。

（2）给定任意函数$f \in C^\infty$（M），由定义$V_f \in \mathfrak{X}$（M）定义的哈密顿向量场3.23是满足下述条件的唯一向量场

$$df = \omega(V_f, \cdot).$$

（3）对于任意两个函数f、$g \in C^\infty$（M），有

$$\omega(V_f, V_g) = -\{f,g\}.$$

例子3.26. 回想一下，根据定理 3.17所有辛流形局部都与某个标准辛结构 $\mathbb{R}^{2n}$ 辛同构，其中 n。因此，要理解哈密顿向量场在局部的形式，只需

考察标准辛结构 $\mathbb{R}^{2n}$。此时，固定标准坐标$x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n$，使得

$$\omega_0 = \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dy_i.$$

若令$f \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ 为一个函数，则

$$df = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial f}{\partial y_i} dy_i \right).$$

容易看出

$$\omega_0^\flat \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) = dy_i$$
$$\omega_0^\flat \left(\frac{\partial}{\partial y_i} \right) - dx_i$$

因此，满足以下条件的唯一向量场 $V_f \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^{2n})$ 将具有如下形式

$$df = \omega^\flat(V_f)$$

其形式为

$$V_f = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_i} \right)$$

这也使我们能够轻松确定辛流形上的泊松括号的局部形式。给定函数f、$g \in C^\infty(M)$，$\mathbb{R}^{2n}$ 上的标准泊松括号具有如下形式

$$\{f, g\}_0 := V_f(g) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{\partial g}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial y_i} \right)$$

用双向量 $\pi_0 \in \Gamma(\bigwedge^2 TM)$表示，我们可以轻易推出

$$\pi_0 = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial y_i}.$$

例子 3.27. 并非所有泊松流形都是辛流形。例如，双向量 $\pi \in \Gamma(\bigwedge^2 T\mathbb{R}^2)$ 定义为

$$\pi = r^2 \frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y},$$

其中 $r = \sqrt{x^2+y^2}$。容易验证，π 是一个泊松双向量，但它不可能来自辛形式 $\pi = 0$ 在 $(x,y) = (0,0)$这显然与例子 3.26中给出的辛泊松双向量的局部形式相矛盾。不过，如果我们同意点是平凡的辛流形，那么确实存在一个将流形划分为子流形的典范划分

$$\mathbb{R}^2 = \{0\} \bigsqcup (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$$

其中，泊松双向量的限制是辛的。例如，记作 $S = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$，很容易看出 π 与S 相切，并且诱导映射

$$\pi^\# : T^*S \to TS; \quad \alpha \mapsto \pi(\alpha, \cdot)$$

是向量丛同构。记 $\pi^\flat$ 为逆映射，很容易看出诱导的 2-形式 $\omega_S \in \Omega^2(S)$ 由下式给出

$$\omega_S(v,w) := \pi(\pi^\flat(v), \pi^\flat(w))$$

是辛的。事实上，在坐标中

$$\omega_S = -\frac{dx \wedge dy}{r^2}.$$

定义 3.28 （泊松结构的辛子流形）。 设(M, π)是一个泊松流形。若子流形$S \subseteq M$ 满足以下条件，则称其为**辛**

（1） π 与S相切，即 $\pi|_S \in \Gamma(\bigwedge^2 TS)$

（2）映射的限制

$$\pi^\# : T^*M \to TM; \quad \alpha \mapsto \pi(\alpha, \cdot)$$

到 T^*S is 定义了一个向量丛同构

$$\pi^\#|_{T^*S} : T^*S \to TS$$

泊松流形分解为辛子流形的不交并，这一性质是泊松结构的一般特征。

定理 3.29 ([Wei83]). 设(M, π) 是一个泊松流形。那么，对于任意点 $x \in M$，都存在唯一的连通辛子流形 $S \subseteq M$ 包含 x，并具有以下性质。

(1) 若 $R \subseteq M$ 是包含 x 的另一个连通辛子流形，则 R 是 S 的一个开子集。

(2) T_xS 由 *Hamiltonian* 向量场 $V_f(x)$ 张成，其中 $f \in C^\infty(M)$。

我们称 S 为包含 x。的辛叶。

注记 3.30。 当然，若 (M,ω) 是辛流形，那么辛叶就是 M 的连通分支。

例子 3.31. 作为一个有趣且非平凡的例子，我们回到连通李群的余伴随轨道。固定一个连通李群 G，其李代数为 $\mathfrak{g}$，对偶为 $\mathfrak{g}^*$。在 $\mathfrak{g}^*$ 上存在一个称为 Kostant-Kirillov-Souriau（KKS）泊松结构的典范泊松结构，记作 π_{KKS}。为定义 π_{KKS}，将 $T^*\mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}$ 识别起来。利用这一识别，我们可以在 $\Omega^1(\mathfrak{g}^*)$ 上定义一个括号：

$$[\alpha,\beta](p) := [\alpha(p),\beta(p)]_{\mathfrak{g}}, \quad \alpha,\beta \in \Omega^1(\mathfrak{g}*),\ p \in \mathfrak{g}^*$$

其中 $[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}}$ 是 $\mathfrak{g}$ 上的李括号。利用这一点，我们现在定义

$$\pi_{KKS}(\alpha,\beta)(p) := \langle p,[\alpha(p),\beta(p)]\rangle, \quad \alpha,\beta \in \Omega^1(\mathfrak{g}^*),\ p \in \mathfrak{g}^*. \tag{3.9}$$

π_{KKS} 满足函数上的李括号公理，这是 $[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}}$ 为李括号这一事实的结果。现在，我们来看看为什么余伴随轨道是该泊松结构的辛叶。

选取一组基 $\xi_1, \cdots, \xi_n \in \mathfrak{g}$ 便在 $\mathfrak{g}^*$上定义了一个坐标系。利用这一点以及公式（3.7），对于任意 $f \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ 和 $p \in \mathfrak{g}^*$，有

$$V_f(p) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \xi_i} \mathrm{ad}^*_{\xi_i}(p).$$

由此可得：（1）哈密顿向量场与余伴随轨道相切；（2）哈密顿向量场由基本向量场张成。综合这两点，我们推断余伴随轨道恰好是 π_{KKS}的辛叶。

例子 3.32. 更一般地，给定一个李代数$(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot])$，我们可以在其对偶 $\mathfrak{g}^*$ 上定义一个**线性泊松结构**，如下所示。对于f、$g \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$，我们将$df$、$dg$识别为：$\mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}$。然后定义

$$\pi_x(d_xf, d_yg) := \langle x, [d_xf, d_xg]\rangle$$

这赋予 $\mathfrak{g}^*$ 一种泊松结构，称为**线性泊松结构**。

3.3 哈密顿空间与约化

现在，我们开始将第2 章的等变几何与迄今发展的辛几何结合起来。这引出了哈密顿空间。我们既可以纯粹从辛几何的角度来阐释它们，也可以通过诺特定理从物理学的角度来阐释。为了节省篇幅，我将仅讨论辛几何的观点。设我们有一个辛流形(M,ω)，以及一个作用于M 上的李群G，且该作用保持辛结构。也就是说，对于每个$g \in G$，我们有

$$g^*\omega = \omega.$$

然后，正如我们在章节2中所看到的，每个李代数元素 $\xi \in \mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$都会诱导出一个向量场 $\xi_M \in \mathfrak{X}(M)$。由于$G$ 的作用保持辛形式不变，因此 ξ_M 的流保持 ω 不变。也就是说，

$$L_{\xi_M}\omega = 0,$$

其中L 表示李导数算子。另一类保持辛形式不变的向量场是哈密顿向量场。因此，最自然的作用是这样的：基本向量场同时也是哈密顿向量场，即对每个 $\xi \in \mathfrak{g}$，存在一个函数$J^\xi \in C^\infty(M)$，使得$V_{J^\xi} = \xi_M$。将这些函数组合起来并施加进一步条件，可以得到如下定义。

定义 3.33（哈密顿G-空间）。 一个**哈密顿 G-空间** 由一个辛流形(M,ω) 和一个映射$J\colon M \to \mathfrak{g}$组成，该映射称为**动量映射**，并满足以下条件。

(1) M 是一个G空间，且G的作用保持 ω。

(2) J 关于G 在 $\mathfrak{g}^*$上的余伴随作用是G等变的。

(3)（哈密顿条件）若 $\xi \in \mathfrak{g}$，并将 $\xi_M \in \mathfrak{X}(M)$ 记为诱导的基本向量场，且

$$J^\xi : M \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \langle J(x), \xi\rangle,$$

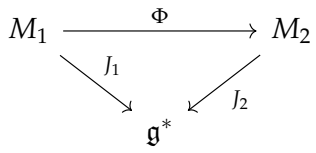
then

$$dJ^\xi - \omega(\xi_M, \cdot) = 0.$$

我们将 $J : (M,\omega) \to \mathfrak{g}^*$ 记作一个哈密顿G空间。若G 在M上的作用是适当的，则称$J : (M,\omega) \to \mathfrak{g}^*$ 为适当的哈密顿 G**空间**。

定义3.34 （哈密顿 G-空间的同构）。 设 $J_1 : (M1,\omega_1) \to \mathfrak{g}^*$ 和 $J_2 : (M2,\omega_2) \to \mathfrak{g}^*$ 是两个哈密顿 G-空间。一个**同构**

是它们之间的一个G-等变辛同胚 $\Phi : M_1 \to M_2$，使得该图表交换



例子 3.35. 设 G 是一个连通李群，且 $p \in \mathfrak{g}^*$。那么包含映射

$$\iota : \mathrm{Ad}^*_G(p) \hookrightarrow \mathfrak{g}^*$$

经过 p 的余伴随轨道的包含映射，是相对于 KKS 辛结构的动量映射 $\omega_{KKS} \in \Omega^2(\mathrm{Ad}^*_G(p))$，来自例子 3.18。根据定义，$\omega_{KKS}$ 在 $\mathrm{Ad}^*_G(p)$上的 G-作用下保持不变，因此我们只需证明 ι 是动量映射。固定 $\xi \in \mathfrak{g}$，回忆

$$\xi_{\mathfrak{g}^*}(q) = -\mathrm{ad}^*_\xi(q).$$

特别地，$\xi_{\mathfrak{g}^*}$ 关于 q是线性的。因此，

例子 3.36. 设 G 是一个李群，$\mathfrak{g} =$ 是它的李代数 (G)，且Q 是一个适当的 G-空间。那么余切丛 T^*Q 具有一个典范的哈密顿 G空间结构

$$J : (T^*Q, \omega_{can}) \to \mathfrak{g}^*$$

现描述如下。记 $\tau_Q : T^*Q \to Q$ 为丛映射，$\theta_Q \in \Omega^1(T^*Q)$ 为刘维尔 1-形式，$\omega = -d\theta_Q$ 为例子 3.16中的典范辛形式。

首先，回顾例子 2.25 指出，T^*Q 具有一个典范的适当 G-等变向量丛结构，其定义为

$$G \times T^*Q \to T^*Q; \quad (g, \alpha) \mapsto g \cdot \alpha$$

其中，对于 $\alpha \in T^*_qQ$ 以及 $v \in T_{g\cdot q}Q$

$$\langle g \cdot \alpha, v \rangle = \langle \alpha, T_q g^{-1}(v) \rangle.$$

此作用保持 Liouville 1-形式不变。事实上，给定 $q \in Q$、 $\alpha \in T_q^*Q$、$v \in T_\alpha(T^*Q)$以及 李代数 $g \in G$，我们有

$$\begin{aligned}(g^*\theta)_\alpha(v) &= \theta_{g\cdot\alpha}(T_\alpha g(v)) \\ &= \langle g\cdot\alpha, T_{g\cdot\alpha}\tau \circ T_\alpha g(v)\rangle \\ &= \langle g\cdot\alpha, T_q g \circ T_\alpha \tau(v)\rangle \\ &= \langle \alpha, T_\alpha \tau(v)\rangle \\ &= \theta_\alpha(v).\end{aligned}$$

因此，G 的作用也保持辛形式 $\omega = -d\theta$。

现在来描述动量映射。固定 $\alpha \in T^*Q$ ，并定义动量映射$(\alpha) \in \mathfrak{g}^*$为

$$\langle J(\alpha), \xi\rangle = \langle \alpha, \xi_Q(\tau(\alpha))\rangle, \tag{3.10}$$

其中， $\xi \in \mathfrak{g}$和 $\xi_Q \in \mathfrak{X}(Q)$ 是Q上的相应基本向量场。为证明动量映射 是一个动量映射，固定 $\xi \in \mathfrak{g}$。根据刘维尔 1-形式的定义，我们有

$$J^\xi = \theta(\xi_{T^*Q})$$

其中，$\xi_{T^*Q} \in \mathfrak{X}(T^*Q)$ 是与 ξ相应的基本向量场。注意，由构造可知， θ 是不变 1-形式，因此，

$$L_{\xi_{T^*Q}}\theta = 0$$

其中 $L^{\xi_{T^*Q}}$ 是李导数。根据嘉当魔术公式（例如参见 [Lee13，定理14。35])

$$0 = d\theta(\xi_{T^*Q}, \cdot) + d(\theta(\xi_{T^*Q})$$

因此

$$dJ^\xi = d(\theta(\xi_{T^*Q})) = \omega(\xi_{T^*Q}, \cdot).$$

因此，J 是一个动量映射。

由于我们将深入研究余切丛，下面为上述构造命名。

定义3.37 （哈密顿提升）。 设G 为一个李群，Q 为一个适当的G-空间。称这个适当的哈密顿G-空间

$$J : (T^*Q, \omega) \to \mathfrak{g}^*$$

在上面的例子中构造了作用在Q上的**哈密顿提升**。

3.4 线性辛表示

为了理解哈密顿空间的局部结构，有必要转而描述与辛表示相关的无穷小结构。

定义 3.38 （辛表示）。 设 G 是一个李群。辛表示是一个辛向量空间 (V, ω) ，并且 G 在 V 上有保持辛形式不变的表示结构。

我们将充分利用适用于适当哈密顿空间的切片定理（即定理 2.13）的一个修订版本，因此我们的兴趣主要集中在紧李群的辛表示上。现在，我们来确立辛表示的一项基础性质；在讨论辛约化时，这项性质将会非常重要。

命题 3.39。 设 K 是一个紧李群，且 (V, ω) 是一个辛 K-表示。那么，不动点集 V^K 是一个辛子空间。

证明。 由于 K 在 V 上的作用是线性的，因此立即可知 V^K是一个线性子空间。根据假设， ω 是 K-不变的。特别地，这意味着它定义了一个 K-表示的同构

$$\omega^{\#} : V \to V^*; \quad v \mapsto \omega(v, \cdot)$$

因此是线性同构

$$\omega^{\#} : V^K \to (V^*)^K.$$

利用平均化，我们可以很容易地证明自然映射

$$(V^*)^K \to (V^K)^*$$

通过限制包含映射的对偶而诱导的 $V^K \hookrightarrow V$ 是线性同构。特别地，若$v \in V$ ，那么我们可以找到 $\lambda \in (V^*)^K$ ，使得$\lambda(v) \neq 0$。利用同构 $\omega^{\#}$，λ 对应于某个$w \in V^K$。根据定义，这意味着

$$\omega(v, w) = -\lambda(v) \neq 0.$$

因此， V^K 是辛的。 □

继续围绕约化这一主题，接下来我们将把关于线性约化的结果应用于不变子空间。

命题 3.40. 设 K 是一个紧李群，(V,ω) 是有限维辛表示，且 $C \subseteq V$ 是一个 K-子表示。则有以下结论。

(1) 辛补空间 C^ω 是一个 K-子表示。

(2) 线性约化 $V_0 = C/(C \cap C^\omega)$ 具有典范的辛表示结构。

证明。 (1) 这是因为K 保持辛形式。若$v \in C^\omega$ 且$k \in K$，那么对任意$c \in C$，有

$$\omega(k\cdot v, c) = \omega(v, k\cdot c) = 0$$

因为C 在K的作用下保持不变。因此，$k \cdot v \in C^\omega$，所以C^ω是一个子表示。

(2) 由于C 和C^ω 都是子表示，它们的交$C \cap C^\omega$也是子表示。因此，我们在约化空间V_0 上有典范作用，其定义为

$$K \times V_0 \to V_0; \quad (k,[c]) \mapsto [k\cdot c].$$

为验证该作用保持约化辛形式 ω_0，令$\pi_0 : C \to V_0$ 为商映射。显然，π_0 是等变的，因此若$k \in K$，则

$$\pi_0^* k^* \omega_0 = k^* \pi_0^* \omega_0 = k^*(\omega|_C) = \omega|_C$$

因此，根据 ω_0 的定义，我们有 $k^*\omega_0 = \omega_0$。因此，$(V0,\omega_0)$ 是一个辛 K-表示。

□

推论 3.41. 设 K 是一个紧李群，且 (V,ω) 是一个辛 K-表示。那么，辛补空间 $(V^K)^\omega$ 是 V 的一个辛子表示。

证明。 由于 V^K 是辛的，根据命题3.40，其补空间 $(V^K)^\omega$也如此。此外，根据命题 3.40 $(V^K)^\omega$ 是一个子表示。

□

事实证明，辛表示具有一个典范动量映射，称为**二次动量映射**。为此，设K 是一个紧李群，且(V,ω) 是一个辛表示。由于V 是一个向量空间，因此我们有典范识别$TV = V \times V$。于是，若$\xi \in \mathfrak{k}$ 是一个李代数元素，且 $\xi_V \in \mathfrak{X}(V)$ 是相应的基本向量场，那么对每个$v \in V$，我们可以将 $\xi_V(v) \in V$。这使我们可以证明以下结论。

引理 3。42。 设K是一个紧李群，且$(V,\ \omega)$ 是一个辛表示。那么，映射J_V：$V\ \to \mathfrak{k}^*$ 定义为

$$\langle J_V(v),\xi\rangle = \frac{1}{2}\omega(\xi_V(v),v),\quad \xi\in\mathfrak{k},\ v\in V \tag{3.11}$$

是 K-作用的一个动量映射。我们称 J 为二次动量映射证明。为说明这是一个动量映射，令 $\xi\in\mathfrak{k}$ 且$v\ \in V$。我们证明

$$dJ_V^\xi + \omega(\xi_V,\cdot) = 0.$$

事实上，固定$v\ \in V$，并通过作用将$w\ \in V$ 与T_vV 中的一个元素相对应

$$w(f) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f(v+tw),$$

其中$f\ \in C^\infty(V)$。于是，一方面有

$$d_vJ_V^\xi(w) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} J_V^\xi(v+tw) = \frac{\omega(\xi_V(v),w)+\omega(\xi_V(w),v)}{2},$$

其中我们用到了 ξ_V的线性性。由于K 在(V,ω) 上的作用是辛的，因此有

$$\omega(\xi_V(w),v) = -\omega(w,\xi_V(v))$$

结合 ω 的反对称性，得到

$$d_vJ_V^\xi(w) = \frac{\omega(\xi_V(v),w)+\omega(\xi_V(v),w)}{2} = \omega(\xi_V(v),w).$$

因此

$$dJ_V - \omega(\xi_V,\cdot) = 0.$$

我们还需要证明动量映射$_V$ 是等变的，但这是因为对于任意$k\ \in K$、 $\xi\in\mathfrak{k}$ 和$v\ \in V$，都有

$$k\cdot\xi_V\cdot k^{-1}\cdot v = (\mathrm{Ad}_k\xi)\cdot v.$$

由此以及K对动量映射$_V$的不变性，立即可得

$$J_V(k\cdot v) = \mathrm{Ad}_k^*J_V(v).$$

□

现在我们记录一些关于线性辛表示的事实，这些事实稍后会派上用场。

引理 3。43。 设 K 是一个紧李群，且$(V,\ \omega)$ 是一个辛 K-表示。

（1）如果 $J_V\colon\ V\ \to \mathfrak{k}^*$ 是二次动量映射，那么 $J_V^{-1}\ (0)\ ^K = V^K$。

（2）如果 $J_W\colon\ W\ \to \mathfrak{k}^*$ 表示诱导二次动量映射，那么

$$J_V^{-1}(0) = J_W^{-1}(0) + V^K.$$

证明。 （1）首先，该陈述是有意义的，因为 J_V 是等变的。因此，由于 G 固定 $0 \in \mathfrak{k}^*$，可知 K 作用于 $J_V^{-1}\ (0)$。特别地，我们显然有 $J_V^{-1}\ (0)\ ^K \subseteq V^K$。另一方面，如果 $v\ \in V^K$，那么对于任意 $\xi \in \mathfrak{k}$，我们有

$$\xi_V(v) = 0.$$

特别地，这意味着

$$\langle J_V(v), \xi\rangle = \frac{1}{2}\omega(\xi_V(v), v) = \frac{1}{2}\omega(0, v) = 0.$$

由于 v 和 ξ 是任意的，我们得出 $V^K \subseteq J_V^{-1}\ (0)$。

（2）由于W 和 V^K 都是辛空间，并且是辛补空间，因此它们也是线性补空间。也就是说，$V\ = V^K + W$，且$V^K \cap W\ = \{0\}$。因此，对于每个 $v\ \in V$，都存在唯一的$v^K \in V^K$ 和 $w\ \in W$，使得

$$v = v^K + w.$$

现在，注意到由于K 是一个子表示，如果 $\xi \in \mathfrak{k}$，那么

$$\xi_V|_W = \xi_W.$$

由此可见，如果$v\ \in V^K$ 且$w\ \in W$，那么对于任意 $\xi \in \mathfrak{k}$，我们有

$$\langle J_V(v+w), \xi\rangle = \frac{1}{2}\omega(\xi_V(v+w), v+w) = \frac{1}{2}\omega(\xi_W(w), w) = \langle J_W(w), \xi\rangle.$$

特别地，我们看到，如果$v\ \in V^K$ 且$w\ \in W$，那么$J_V(v\ +w)\ = 0$当且仅当$J_W(w)\ = 0$。结论由此得出。

□

我们关注哈密顿量G-空间，主要是为了进行辛约化。现在我们来介绍下面这个基础概念。

定义 3.44（辛约化）。设动量映射：$(M,\omega) \to \mathfrak{g}^*$ 我们将动量映射在 0 级处的**辛约化**定义为商空间

$$M_0 := J^{-1}(0)/G.$$

我们将 π_0：动量映射$^{-1}(0) \to M_0$ 记作商映射。称 π_0 为**约化映射**

例3.45。设 G 是一个连通李群，Q 是一个适当 G-空间，G 在其上自由作用；设 J：$T^*Q \to \mathfrak{g}^*$ 是定义 3.37 中的哈密顿提升。我们先确定 J^{-1}(0)。根据定义，给定 $\alpha \in T^*Q$，当且仅当 $\alpha \in J^{-1}(0)$，其中 ⟨J(α)，对所有 $\xi \in \mathfrak{g}$ 均成立；这里$\xi_Q \in \mathfrak{X}(Q)$ 是相应的基本向量场。回顾例2.26，由于 G 自由作用，基本向量场张成一个 G-不变子丛 $\mathfrak{g}_Q \subseteq TQ$。因此，我们证明了 J^{-1}(0) 是 $\mathfrak{g}_Q$ 的湮灭子，即

$$J^{-1}(0) = \mathfrak{g}_Q^\circ \subseteq T^*Q,$$

由于G 在Q上自由作用，我们还有约化空间

$$(T^*Q)_0 = J^{-1}(0)/G = \mathfrak{g}_Q^\circ/G$$

是Q/G上的一个向量丛。是哪一个向量丛呢？正如我们稍后将更一般地证明的，它恰好是$T^*(Q/G)$。

当紧李群自由作用时，会出现所谓的“约化奇迹”。设K 是一个紧李群，且J :$(M,\omega) \to \mathfrak{k}^*$ 是一个哈密顿量K-空间。假设 0 是J 的正则值，且K 在J^{-1}(0)上自由作用。那么通过直接计算可得，对于任意$x \in J^{-1}(0)$ ，

$$(T_x J^{-1}(0))^{\omega_x} = T_x(K \cdot x).$$

这就是“约化的奇迹”，原因如下。首先，动量映射$^{-1}(0)$是一个余各向同性子流形，并且对于每个$x \in$ 动量映射$^{-1}(0)$，商空间的切空间具有如下形式

$$T_{[x]}(J^{-1}(0)/K) = T_x J^{-1}(0)/T_x(K \cdot x)$$

这恰好是T_x动量映射$^{-1}(0)$的线性约化。因此，我们基本上已经证明了以下经典结果。

定理 3.46 (Marsden-Weinstein-Meyer 约化 [MW74，Mey73])。 设 K 是一个紧李群，其李代数为 $\mathfrak{k}$，且 $J:(M,\ \omega)\ \to \mathfrak{k}^*$ 是一个哈密顿 K-空间。假设 0 是 J 的正则值，并且 K 在 $J^{-1}(0)$上的作用是自由的。那么有以下结论。

(1) $J^{-1}(0)\ \subseteq M$ 是一个嵌入余各向同性子流形。

(2) 约化 $M_0\ = J^{-1}(0)/K$ 带有典范辛形式 $\ \omega_0\ \in\Omega^2(M_0)$，使得

$$\pi_0^*\omega_0 = \omega|_{J^{-1}(0)},$$

其中 $\ \pi_0 : J^{-1}(0)\ \to M_0$ 是约化映射。

现在我们将讨论群的适当作用，这些群未必自由作用。因此，我们需要局部标准形，以便恰当地讨论这一更一般的情形。定理 3.46与分步约化结合起来（例如参见 [MMO+07]，其中有全面的介绍），可以证明如下结论。

引理 3.47 (适当 Hamilton 空间的局部模型 [SL91])。 设 G 是一个连通李群，$K\ \leq G$ 是一个紧子群。记 $\ \mathfrak{k}$ 为 K 的李代数，并且

$$\mathfrak{k}^\circ = \{p \in \mathfrak{g}^* \mid \langle p, \xi\rangle = 0 \textit{ for all } \xi \in \mathfrak{k}\}$$

为 $\ \mathfrak{k}$ 的湮灭子。假设我们有以下数据 假设我们有以下数据。

(i) K 的一个线性辛表示$(V,\ \omega_V)$。

(ii) 短正合列的一个 K-等变分裂 $\ \mathfrak{p}:\ \mathfrak{k}^*\to\mathfrak{g}^*$

$$0 \longrightarrow \mathfrak{k}^\circ \longrightarrow \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{k}^* \longrightarrow 0$$

记 $\ \pi:\ G\ \times\mathfrak{k}^\circ\times V\ \to G\ \times_K(\mathfrak{k}^\circ\times V)$ 为商映射，并记 $\omega_{T^*G}\ \in\Omega^2(G\ \times\mathfrak{g}^*)$ 为典范辛形式。

(1) $G\ \times_K(\mathfrak{k}^\circ\times V)$ 典范地构成一个辛流形，其唯一的 G-不变辛形式 $\ \omega$ 满足

$$\pi^*\omega = \omega_{T^*G}\times\omega_V|_{G\times\mathfrak{g}^*\times V}.$$

(2) 将 $J_V : V\ \to\mathfrak{k}^*$ 记为例子3.42中的二次动量映射，则映射

$$J : G\times_K(\mathfrak{k}^\circ\times V)\to\mathfrak{g}^*;\quad [g,q,v]\mapsto Ad_g^*(q+\mathfrak{p}\circ J_V(v))$$

是一个动量映射。

现在我们已经得到了局部模型，接下来讨论局部标准形以及如何获得它。固定一个哈密顿 G-空间 $J:(M,\omega)\to\mathfrak{g}^*$，并令 $x\in M$。那么切空间 T_xM 自然具有一个辛 G_x表示结构。显然，该作用保持轨道的切空间 $T_x(G\cdot x)$。因此，根据命题 3.40，补集 $T_x(G\cdot x)^{\omega_x}$ 的约化也具有由 G_x 作用的典范辛作用结构。这使我们能够给出以下定义。

定义 3.48 （辛法空间）。设动量映射 $J:(M,\omega)\to\mathfrak{g}^*$ 是一个哈密顿 G-空间，且$x\in M$。定义经过x的轨道的**辛法空间**，记作$S\nu_x(M,G)$，为$T_x(G\cdot x)^{\omega_x}$的线性约化，即

$$S\nu_x(M,G):=\frac{T_x(G\cdot x)^{\omega_x}}{T_x(G\cdot x)^{\omega_x}\cap T_x(G\cdot x)} \tag{3.12}$$

记 $J_x:S\nu_x(M,G)\to\mathfrak{g}_x^*$ 为引理 3.42 中所述的诱导二次动量映射

现在我们已经具备了足够的准备，可以陈述哈密顿空间的一个切片定理版本。

定理3.49 （动量映射沿零水平集的局部标准形[SL91]）。设动量映射 $J:(M,\omega)\to\mathfrak{g}^*$ 是一个真哈密顿 G- 空间，且 $x\in J^{-1}(0)$。记 $\mathfrak{g}_x$ 为稳定子群 G 的李代数$_x$，并假设$\mathfrak{p}:\mathfrak{g}_x^*\to\mathfrak{g}^*$ 是引理3.47 中的一个分裂。那么存在以下数据。

(1) *G-invariant neighbourhoods* $U\subseteq M$ *of* x *and* $V\subseteq G\times_{G_x}(\mathfrak{g}_x^\circ\times S\nu_x(M,G))$ *of* $[e,0,0]$

(*ii*) 关于动量映射的哈密顿 G-空间同构 $\Phi:\ U\to V$

$$M\times_{G_x}(\mathfrak{g}_x^\circ\times V)\to\mathfrak{g}^*;\quad [g,q,v]\mapsto Ad_g^*(q+\mathfrak{p}\circ J_x(v)),$$

其中 $J_x:\ S\nu_x(M,\ G)\to\mathfrak{g}_x^*$ 是二次动量映射，使得$\Phi(x)=[e,0,0]$。

定义3。50 （辛切片邻域）。设 动量映射 $J:(M,\omega)\to\mathfrak{g}^*$是一个适当的哈密顿量 G-空间，且 $x\in M$。称邻域$U\subseteq M$ 和 $V\subseteq G\times_{G_x}(\mathfrak{g}_x^\circ\times S\nu_x(M,G))$ 连同哈密顿量 G-空间之间的同构 $\Phi:U\to V$ 为关于 x 的一个**辛切片邻域**。

因此，我们得到以下 Marsden-Weinstein-Meyer 约化的延拓。

推论 3.51. 设 G 是一个连通李群，且 $J:(M,\omega)\to\mathfrak{g}^*$ 是一个真哈密顿 G-空间。假设 $J^{-1}(0)\neq\emptyset$，并且 $J^{-1}(0)$ 中的任意两点都具有共轭稳定子。那么以下结论成立。

(1) $J^{-1}(0)$ 是一个嵌入子流形。

(2) 约化 $M_0=J^{-1}(0)/G$ 自然地构成一个辛流形，其辛结构 $\omega_0\in\Omega^2(M_0)$ 满足

$$\pi_0^*\omega_0=\omega|_{J^{-1}(0)},$$

其中 $\pi_0:J^{-1}(0)\to M_0$ 是约化映射。

证明。 由于这两个结论都是局部性的，根据定理 3.49，我们不妨假设处于一个哈密顿 G-空间的局部模型中。也就是说，$M=G\times_K(\mathfrak{k}^\circ\times V)$，其中 $K\leq G$ 是一个紧子群，且 (V,ω) 是一个辛K-表示，并且 $J:M\to\mathfrak{g}^*$ 具有如下形式

$$J:G\times_K(\mathfrak{k}^\circ\times V)\to\mathfrak{g}^*;\quad [g,q,v]\mapsto \mathrm{Ad}_g^*(q+\mathfrak{p}\circ J_V(v)),$$

其中 $\mathfrak{p}:\mathfrak{k}^*\to\mathfrak{g}^*$ 是一个分裂，且动量映射$_V:V\to\mathfrak{k}^*$ 是二次动量映射。

(1) 由于 $\mathfrak{p}$ 的像位于自然投影$\mathfrak{g}^*\to\mathfrak{k}^*$的核中，因此可得

$$J^{-1}(0)=G\times_K(\{0\}\times J_V^{-1}(0)).$$

由于 $[e,0,0]\in$ 动量映射$^{-1}(0)$，由假设可知 动量映射$^{-1}(0)\subseteq M^{(K)}$。正如命题2.11中所见，

$$G\times_K(\mathfrak{k}^\circ\times V)_{(K)}=G\times_K((\mathfrak{k}^\circ)^K\times V^K)$$

因此由引理 3.43，

$$J^{-1}(0)=G\times_K(\{0\}\times J_V^{-1}(0)^K)=G\times_K(\{0\}\times V^K).\tag{3.13}$$

这显然与$(G/K)\times V^K$ 等变微分同胚，因此动量映射$^{-1}(0)$ 是一个嵌入子流形。

(2) 利用公式（3.13），我们得到

$$M_0=J^{-1}(0)/G\cong V^K.$$

这表明约化空间 M_0 具有自然的光滑流形结构。此外，由于 V 是辛的，根据命题 3.39 可知，V^K 是一个辛子空间，因此 M_0 具有自然的辛结构。

□

作为标准形定理的最后一个推论，我们可以对真哈密顿G-空间的切空间给出一种无穷小描述，这在转向奇异情形时将派上用场。

命题 3。52。 设 G 是一个连通李群，$J : (M, \omega) \to \mathfrak{g}^*$ 是一个真哈密顿 G-空间，且 $x \in J^{-1}(0)$。那么，x 周围的一个辛切片邻域诱导出线性辛 G_x-表示与线性辛 G_x-表示之间的等变同构

$$\phi : (T_xM, \omega_x) \to (T^*(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_x) \times S\nu_x(M, G), \omega_0)$$

其中，$S\nu_x(M,G)$ 是穿过 x 的轨道的辛法空间，如定义3。48 所述，而 $\omega_0 = \omega_{T^*(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_x)} \times \omega_{S\nu_x(M,G)}$。

证明。 固定 $x \in J^{-1}(0)$，令

$$\Phi : U \subseteq M \to V \subseteq G \times_{G_x} (\mathfrak{g}_x^\circ \times S\nu_x(M, G))$$

是 x 周围的一个辛切片邻域。特别地，我们得到一个G_x-等变线性辛同胚

$$T_x\Phi : T_xM \to T_{[e,0,0]}G \times_{G_x} (\mathfrak{g}_x^\circ \times S\nu_x(M, G)).$$

由于G_x 在$G \times \mathfrak{g}_x^\circ \times S\nu_x(M,G)$上自由作用，因此我们有

$$\begin{aligned} T_{[e,0,0]}G \times_{G_x} (\mathfrak{g}_x^\circ \times S\nu_x(M, G)) &\cong T_{(e,0,0)}(G \times \mathfrak{g}_x^\circ \times S\nu_x(M, G))/T_{(e,0,0)}(G_x \cdot (e, 0, 0)) \\ &= (\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_x) \times \mathfrak{g}_x^\circ \times S\nu_x(M, G). \end{aligned}$$

投影 $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_x$ 的对偶给出了一个G_x-等变同构$(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_x)^* \to \mathfrak{g}_x^\circ$，从而得到$(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_x) \times \mathfrak{g}_x^\circ \cong T^*(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_x)$。由于局部标准形上的辛形式是通过对$T^*G$ 上的辛形式与$S\nu_x(M,G)$上的辛形式的乘积进行约化而得，因此结论成立。

□

3.6 约化的非平凡例子

3.6.1 环面流形与 *Delzant* 构造

约化理论的一个优美应用是环面流形理论。环面流形是一类特殊的哈密顿空间，正如我们将看到的，它们可以由动量映射的像重构。除非另有说明，以下内容均可见于 Delzant 的原始论文 [Del88]。关于这方面的精彩英文综述，参见1-3中的章节 [Gui94]。

定义 3.53（环面流形）。设 $\mathbb{T}$ 是一个环面，即一个紧致连通阿贝尔李群，它同构于$(S^1)^n$，其中n为某个数。记 $\mathfrak{t}$ 为 $\mathbb{T}$ 的李代数。一个**环面 $\mathbb{T}$-流形** 是一个哈密顿量 $\mathbb{T}$-空间动量映射 $:(M,\omega) \to \mathfrak{t}$，满足

(1) $\mathbb{T}$ 在 M 上有效作用，即

$$\bigcap_{x\in M} \mathbb{T}_x = \{e\}$$

and

(2) 维(M) $=$ 2维$(\mathbb{T})$.

Delzant 构造以一种特定类型的多面体为输入，并生成一个环面流形。为了建立这一构造，我们先给出这一类特殊多面体的定义。

定义 3.54 (Delzant 多面体)。考虑一个子集 $\Delta \subseteq \mathbb{R}^n$。如果满足以下条件，我们称 Δ 是一个**Delzant 多面体**。

(1) 存在**内法向量** v_1，。。。，$v_N \in \mathbb{Z}^N$，使得

$$\Delta = \{x \in \mathbb{R}^N \mid \langle x, v_i\rangle \geq \lambda_i \text{ for all } i = 1,\dots,N\}$$

对于某些 λ_1，。。。，$\lambda_N \in \mathbb{R}$。

(2) 线性映射 $\pi:\ \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^n$ 定义为 $\pi(e_i) = v_i$，其中e_1，。。。，$e_N \in \mathbb{R}^N$ 是标准基，是一个满射线性映射，满足

$$\pi(\mathbb{Z}^N) = \mathbb{Z}^n.$$

注3.55. 给定一个 Delzant 多面体

$$\Delta = \{x \in \mathbb{R}^N \mid \langle x, v_i\rangle \geq \lambda_i \text{ for all } i = 1,\dots,N\},$$

我们可以利用法向量截取出这些**面**。具体而言，给定任意指标集合$I \subseteq \{1,\ldots,N\}$，我们定义

$$F_I := \{x \in \Delta \mid \langle x, v_i\rangle = \lambda_i \text{ for all } i \in I\}.$$

如果非空，那么它也是 $\mathbb{R}^n$ 内的另一个多面体。此外，很容易看出，如果 $I_1 \subseteq I_2$ 是两个指标集，那么

$$F_{I_2} \subseteq F_{I_1}.$$

顶点可以识别为关于包含关系的极小面。最后，为了便于后续讨论，我们将 Δ 的**开面** 定义为如下形式的子集

$$\mathring{F}_I := F_I \setminus \bigcup_{I \subsetneq J} F_J,$$

也就是说，从一个面中去除关于包含关系更小的面后所剩下的部分。这些是 $\mathbb{R}^n$ 的子流形。

现在固定一个 Delzant 多面体 $\Delta \subseteq \mathbb{R}^n$，其法向量为 $v_1,\ldots, v_N \in \mathbb{Z}^N$，使得

$$\Delta = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, v_i\rangle \geq \lambda_i \text{ for all } i = 1,\ldots,N\} \tag{3.14}$$

其中 $\lambda_1, \ldots, \lambda_N \in \mathbb{R}$。环面流形 M_Δ 的 Delzant 构造如下。令 $\pi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^n$ 为由下式定义的线性映射

$$\pi(e_i) = v_i \text{ for all } i = 1,\ldots,N,$$

其中 $e_1,\ldots, e_N \in \mathbb{R}^N$ 是标准基。此外，令 $\mathfrak{k} = \ker(\pi)$。于是得到一个正合序列

$$0 \longrightarrow k \longrightarrow \mathbb{R}^N \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}^n \longrightarrow 0 \tag{3.15}$$

由于 $\pi(\mathbb{Z}^N) \subseteq \mathbb{Z}^n$，因此 π 诱导出一个群同态

$$\pi : T^N = \mathbb{R}^N/\mathbb{Z}^N \to T^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$$

而且，核 K 是T^N 的子环面，其李代数可与 $\mathfrak{k}$典范地等同。因此，我们得到一个李群正合序列。

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow T^N \xrightarrow{\pi} T^n \longrightarrow 0 \tag{3.16}$$

将 $T^N = (S^1)^N \subseteq (\mathbb{C}^\times)^N$视为相同，并令 ω 为 $\mathbb{C}^N$上的典范辛形式。该作用

$$T^N \times \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N; \quad ((t_1,\dots,t_N),(z_1,\dots,z_N)) \mapsto (t_1z_1,\dots,t_Nz_N)$$

具有一个典范动量映射

$$\mathbb{C}^N \to \mathbb{R}^N; \quad (z_1,\dots,z_N) \mapsto \frac{1}{2}(|z_1|^2,\dots,|z_N|^2) \tag{3.17}$$

由于T^N 是阿贝尔的，我们可以将J 在 $\mathbb{R}^N$ 中平移一个常数，并且仍然得到一个动量映射。基于此，我们定义

$$J : \mathbb{C}^N \to \mathbb{R}^N; \quad (z_1,\dots,z_N) \mapsto \frac{1}{2}(|z_1|^2,\dots,|z_N|^2) - \lambda. \tag{3.18}$$

作为构造的最后一步，令 $\iota :\ \mathfrak{k} \hookrightarrow \mathbb{R}^N$ 为包含映射，并令 $\iota^* :\ (\mathbb{R}^N)^* \to \mathfrak{k}^*$ 为其对偶。则映射

$$\iota^* \circ J : \mathbb{C}^N \to \mathfrak{k}^* \tag{3.19}$$

是诱导的K作用的一个动量映射。

引理 3.56 ([Del88]). *K在$(\iota^* \circ J)^{-1}(0)$上自由作用。*

证明。 这相当于证明：如果 $z = (z_1,\dots,z_N) \in (\iota^* \circ J)^{-1}(0)$，那么 $z_j \neq 0$ 对所有 j成立。关于这一事实的一个简洁证明可见于 [Gui94，定理 1。6] □

因此，根据 Marsden-Weinstein-Meyer 约化（定理3.46），$\phi^{-1}(0)/K$ 是一个典范的辛流形。此外，我们看到$(\iota^* \circ$ 动量映射$)^{-1}(0)$ 恰好是 $\mathbb{C}^N$ 中映射到 $\mathfrak{k}^\circ \subseteq (\mathbb{R}^N)^*$的点集，即 $\mathfrak{k}$的湮灭子。它可以典范地识别为$(\mathbb{R}^N/\mathfrak{k})^* \cong (\mathbb{R}^n)^* \cong \mathbb{R}^n$。

定义3.57 （由 Delzant 多面体得到的环面流形）。 给定一个 Delzant 多面体 Δ，令$(M_\Delta, \omega_\Delta)$ 表示沿着 $\phi^{-1}(0)$对 $\mathbb{C}^N$ 进行辛约化所得的流形。此外，令

$$J_\Delta : M_\Delta \to \mathbb{R}^n; \quad [x] \mapsto J(x) \tag{3.20}$$

为诱导映射。

事实证明，Delzant 构造能够生成所有环面流形。

定理 3.58（[*Del88*]）。*$J_\Delta : (M_\Delta, \omega_\Delta) \to \mathbb{R}^n$ 是一个环面 T^n-流形。若 Δ是紧致的，则 M_Δ也是紧致的。此外，若 $J : (M, \omega) \to \mathbb{R}^n$ 是任意一个环面 T^n-流形，则 $\Delta = J(M)$ 是一个 Delzant 多面体，并且作为哈密顿量 T^n-空间，$(M, \omega) \cong (M_\Delta, \omega_\Delta)$。*

3.6.2 余切丛约化

正如例子3.45所暗示的那样，当底层群以适当且自由的方式作用时，余切丛的辛约化会得到商空间的余切丛。事实证明，我们还可以将这一结果推广得更远，正如下文所示。

本节余下部分中，设 G 是一个连通李群，其李代数为 $\mathfrak{g}$，Q 是一个适当的 G-空间，并满足 $Q = Q^{(K)}$，其中 $K \leq G$ 是某个紧致子群；$J : T^*Q \to \mathfrak{g}^*$ 是余切丛上的典范哈密顿量 G-空间结构，并令

$$\mathfrak{g}_Q := \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{\xi_Q \mid \xi \in \mathfrak{g}\} \subseteq TQ \tag{3.21}$$

为由例子 2.26 中的基本向量场张成的不变子丛。

引理 3.59 ([ER90]). 假设 G 在 Q 上的作用是正则的。也就是说，$Q = Q^{(K)}$ 对某个紧致子群 $K \leq G$.

(i) 动量映射 $J^{-1}(0) = J^{-1}(0)^{(K)}$

(ii) $(T^*Q)_0 = J^{-1}(0)/G$ 是一个光滑流形，并且存在唯一的辛形式 $\omega_0 \in \Omega^2((T^*Q)_0)$，使得

$$\pi_0^*\omega_0 = \omega|_{J^{-1}(0)},$$

其中 $\pi_0 :$ 动量映射$^{-1}(0) \to$ (切丛$^*Q)_0$ 是商映射。

*(iii) Liouville*1-形式 $\theta_Q|_{J^{-1}(0)}$ 是基本的，因此诱导出一个1-形式 $\theta_0 \in \Omega^1$ ((切丛$^*Q)_0$)，使得

$$\pi_0^*\theta_0 = \theta_Q|_{J^{-1}(0)}. \tag{3.22}$$

且 $d\theta_0 = \omega_0$。

证明。 (i) 假设 $\alpha \in$ 动量映射$^{-1}(0)$，并令 李代数 $g \in G_\alpha$。写作 $x = \tau_Q(\alpha)$，可得

$$g \cdot x = g \cdot \tau_Q(\alpha) = \tau_Q(g \cdot \alpha) = \tau_Q(\alpha) = x.$$

因此，$G_\alpha \subseteq G^{\tau_Q(\alpha)} \sim K$。于是，共轭之后我们可以假设$G_\alpha = K_\alpha \subseteq K$。

为了证明 $K \subseteq K_\alpha$，在 Q 上选取一个 G-不变度量，从而得到一个分裂

$$T_xQ = T_x(G \cdot x) \oplus \nu_x(Q, G)$$

由于 Q上只有一种轨道类型，因此立即可知K 在 $\nu_x(Q,G)$上平凡作用。现在固定 $v \in T_xQ$ 和 $k \in K$。由于 K稳定$x = \tau_Q(\alpha)$，可知 $k \cdot \alpha \in T_x^*Q$。因此，我们可以将$k \cdot \alpha$ 与 v配对，得到

$$\langle k \cdot \alpha, v \rangle = \langle \alpha, k^{-1} \cdot v \rangle$$

记$v = \xi_Q(x) + w$，其中 $\xi \in \mathfrak{g}$ 且$w \in \nu_x(Q,G)$，我们有

$$k^{-1} \cdot v = (\mathrm{Ad}_{k^{-1}}\xi)_Q(x) + w$$

因此，

$$\langle \alpha, k^{-1} \cdot v \rangle = \langle \alpha, w \rangle$$

类似地，

$$\langle \alpha, v \rangle = \langle \alpha, w \rangle.$$

因此，$k \cdot \alpha = \alpha$

(ii) 由于Q 上的轨道叶状结构是正则的，动量映射$^{-1}(0)$ 是T^*Q的一个嵌入子流形。此外，动量映射$^{-1}(0)$ 根据引理3.59只有一种轨道类型，因此，商空间 动量映射$^{-1}(0)/G$ 是一个流形。因此，根据 Marsden-Weinstein 约化，$(T^*Q)_0$ 继承了一个典范辛形式 ω_0，且

$$\pi_0^*\omega_0 = \omega_Q|_{J^{-1}(0)}.$$

(iii) 这立即源于以下事实： θ_Q 是G-不变的，且 ω_0是唯一的。

□

回顾一下， $\mathfrak{g}_Q \subseteq TQ$ 由方程（3.21定义为基本向量场张成的空间。这是由G-轨道构成的Q上的叶状结构的切丛。因此，若记 $\pi : Q \to Q/G$ 为投影映射，则我们有一个定义在Q上的向量丛短正合列

$$0 \longrightarrow \xi_Q \longrightarrow TQ \xrightarrow{T\pi} \pi^{-1}T(Q/G) \longrightarrow 0$$

其中 $\pi^{-1}T(Q/G) \subseteq Q \times T(Q/G)$ 是拉回丛。对偶化该短正合列后，我们得到一个短正合列

$$0 \longrightarrow \pi^{-1}T^*(Q/G) \xrightarrow{\phi} T^*Q \xrightarrow{T\pi} (\xi_Q)^* \longrightarrow 0$$

其中

$$\phi : \pi^{-1}T^*(Q/G) \to T^*Q$$

定义为

$$\langle \phi(q,\beta), v\rangle = \langle \beta, T_q\pi(v)\rangle$$

对于 $(q,\beta) \in \pi^{-1}T^*(Q/G)$ 以及 $v \in T_qQ$。逐点考察可知，$(\pi^{-1}T^*(Q/G))_q$ 在 ϕ 下的像恰好是 $\mathfrak{g}_Q(q)^\circ =$ 动量映射$^{-1}(0)_q$，对所有$q \in Q$均成立。因此，我们得到一个覆盖Q的向量丛同构

$$\phi : \pi^{-1}T^*(Q/G) \to J^{-1}(0). \tag{3.23}$$

现在，为了引出下一条陈述，记 $\tau_{Q/G}: T^*(Q/G) \to Q/G$ 为丛投影映射。根据定义，

$$\pi^{-1}T^*(Q/G) = \{(q,\beta) \in Q \times T^*(Q/G) \mid \pi(q) = \tau_{Q/G}(\beta)\}$$

其中 $\pi: Q \to Q/G$ 是商映射。因此，我们有两个自然映射

$$pr_1 : \pi^{-1}T^*(Q/G) \to Q; \quad (q,\beta) \mapsto q$$

and

$$pr_2 : \pi^{-1}T^*(Q/G) \to T^*(Q/G); \quad (q,\beta) \mapsto \beta.$$

引理 3.60. 在 Q 仅有一种轨道类型的情形下，令 $\theta_{Q/G} \in \Omega^1(T^*(Q/G))$ 表示 $T^*(Q/G)$上的李维尔 *1*-形式。那么，

$$\phi^*\theta_Q = pr_2^*\theta_{Q/G}.$$

证明。 固定 $(q,\beta) \in \pi^{-1}T^*(Q/G)$ 以及 $v \in T_{(q,\beta)}(\pi^{-1}T^*(Q/G))$。首先有

$$(\phi^*\theta_Q)_{(q,\beta)}(v) = (\theta_Q)_{\phi(q,\beta)}(\phi v) = \langle \phi(q,\beta), (\tau_Q)_*\phi_* v\rangle = \langle \beta, (\pi\circ\tau_Q\circ\phi)_* v\rangle$$

经过图追踪，我们得到

$$\pi\circ\tau_Q\circ\phi = \tau_{Q/G}\circ pr_2$$

因此，

$$(\phi^*\theta_Q)_{(q,\beta)}(v) = \langle \beta, (\tau_{Q/G}\circ pr_2)_* v\rangle = (\theta_{Q/G})\beta((pr_2)_* v\rangle = (pr_2^*\theta_Q)_{(q,\beta)}(v).$$

□

既已确立这一事实，我们现在可以证明如下结论。

定理3.61. 假设 Q 只有一种轨道类型。那么，方程 ϕ: $\pi^{-1}T^*(Q/G)$ →动量映射 $^{-1}(0)$ （3.23）给出的映射诱导出一个典范辛同胚

$$\widetilde{\phi} : T^*(Q/G) \to (T^*Q)_0 \tag{3.24}$$

证明。 记 π_0 ： 动量映射$^{-1}(\mathbf{0})$ $\to (T^*Q)_0$ 为商映射。由于

$$\phi : \pi^{-1}T^*(Q/G) \to J^{-1}(0)$$

它是一个 G-等变向量丛同构， ϕ 在商空间之间诱导出一个同构

$$\widetilde{\phi} : T^*(Q/G) \to (T^*Q)_0$$

根据引理 3.59， $(T^*Q)_0$ 上的辛形式有一个规范原函数。根据引理3.60，我们有

$$\widetilde{\phi}^*\theta_0 = \theta_{Q/G}$$

˜因此， ϕ 是一个辛同胚。 □

4

极化

鉴于第3章开篇将辛流形描述为经典物理中相空间的推广，我们不禁会想，还有哪些物理概念可以推广并引入辛几何领域。极化将动量，或者更准确地说，将动量方向推广到了辛流形上。事实上，任意辛流形(M, ω)都可以根据达布定理在局部描述为相空间，但这并不意味着由此描述得到的局部动量概念在整体上是一致的。关键在于，在相空间中，动量变量刻画出拉格朗日子流形。于是，根据弗罗贝尼乌斯定理，由动量子流形构成的这一叶状结构的切空间给出了一个由拉格朗日子空间构成的对合子丛$\mathcal{P} \subseteq$ 切丛。进一步推广时，我们不再要求极化位于切丛中，而是要求它位于复化切丛切$^{\mathbb{C}}$丛中，由此得到“复动量”的概念。正如我们将在下一章看到的，这一概念将是构建几何量子化的关键。

本章的目标不仅是阐述极化的初等理论，还要发展其约化的非奇异理论。这是将哈密顿几何与量子化相融合的一个重要思想。

4.1 拉格朗日子空间及其约化

在着手研究极化的一般约化情形之前，先掌握一些预备事实将会有所帮助。

在下文中，我们始终假设(V, ω)是一个有限维实辛向量空间，$\omega_{\mathbb{C}}$将是ω到$V_{\mathbb{C}}$上的$\mathbb{C}$-线性延拓，$=$并且$L \subseteq V_{\mathbb{C}}$将是一个复拉格朗日子空间。本节要回答的主要问题如下：给定一个子空间$C \subseteq V$及其约化$\pi_0 : C \to V_0,$，其中$V_0 = C/(C \cap C^{\omega})$，何时它是

$$L_0 = \pi_0(L \cap C_{\mathbb{C}}) \subset (V_0)_{\mathbb{C}}$$

一个拉格朗日子空间？当C为余各向同性时，即$C^\omega \subseteq C$，答案总是肯定的。

命题4.1. 设 $C \subseteq V$ 是一个余各向同性子空间，并令 $V_0 = C/C^\omega$和 $\pi : C \to V_0$ 为约化映射。则，

$$L_0 := \pi_0(L \cap C_{\mathbb{C}}) \subseteq (V_0)_{\mathbb{C}}$$

是一个复拉格朗日子空间。

证明。由于 L_0 是各向同性的，这由约化辛形式 ω_0 的定义可直接得出。因此，我们只需证明 L_0 是余各向同性的。设 $c \in C$，使得 $\pi_0(c) \in L_0^{\omega_0}$。那么，对于任意 $\ell \in L \cap C_{\mathbb{C}}$，有

$$0 = \omega_0(\pi_0(c), \pi_0(\ell)) = \omega_0(c, \ell).$$

因此，

$$c \in (L \cap C_{\mathbb{C}})^\omega = L^\omega + C_{\mathbb{C}}^\omega = L + C_{\mathbb{C}}^\omega$$

设 $c = a + b$，其中 $a \in L$ 且 $b \in C_{\mathbb{C}}^\omega$，则 $a \in L \cap C_{\mathbb{C}}$，因为 $C^\omega \subseteq C$。因此，

$$\pi_0(c) = \pi_0(a) \in L_0.$$

□

这里值得探讨的一个问题是，沿余各向同性子空间进行约化后，类型会发生什么变化。

推论 4.2. 设 $C \subseteq V$ 是一个余各向同性子空间，$L \subseteq V_{\mathbb{C}}$ 是一个复拉格朗日子空间，并令 $\pi_0 : C \to V_0$ 如命题4.1所示。

(1) 如果 L 是全复的，即 $L \cap \overline{L} = \{0\}$，那么 L_0 也全复，即 $L_0 \cap \overline{L_0} = \{0\}$。

(2) 如果 L 是实的，即 $L = \overline{L}$，那么 L_0 也是实的。

证明。 (1) 和 (2) 都是以下事实的推论：L_0 是通过将一个复子空间与一个实子空间的复化相交而得到的。

□

例子 4.3. 设 (V, ω) 是一个 4 维辛向量空间，且$\{e_1, e_2, f_1, f_2\}$ 是 ω的一组达布基，即

$$\omega = e_1^* \wedge f_1^* + e_2^* \wedge f_2^*,$$

其中 $\{e_i^*, f_i^*\}$ 是对偶基。现在考虑余各向同性子空间

$$C = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{e_1, e_2, f_1\}.$$

C 确实是余各向同性的，且

$$C^\omega = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{e_2\}$$

因此，约化空间 $V_0 = C/C^\omega$ 具有一个典范达布基，可以与 $\{e_1, f_1\}$对应。记 $\pi_0 : C \to V_0$ 为约化映射。现在，考虑以下三个拉格朗日子空间，

$$\begin{aligned} L_1 &= \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{e_1, e_2\} \\ L_2 &= \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{e_1 + if_1, e_2 + if_2\} \\ L_3 &= \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{e_1 + if_1, e_2\} \\ L_4 &= \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{e_1, e_2 + if_2\} \end{aligned}$$

注意，L_1 是实的，L_2 是全复的，而L_3 和L_4 是混合的。事实上，正如我们所料，可以看到L_1 的约化仍是实的

$$(L_1)_0 = \pi_0(L_1 \cap C_{\mathbb{C}}) = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{e_1\},$$

L_2 的约化仍是复的

$$(L_2)_0 = \pi_0(L_2 \cap C_{\mathbb{C}}) = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{e_1 + if_1\}.$$

而我们看到L_3的约化

$$(L_3)_0 = \pi_0(L_3 \cap C_{\mathbb{C}}) = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{e_1 + if_1\}$$

变为全复，而L_4的约化

$$(L_4)_0 = \pi_0(L_4 \cap C_{\mathbb{C}}) = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{e_1\}$$

变为实的。因此，在约化下唯一稳定的类型是实和全复。

在继续讨论一般情形之前，我想回顾一下 Guillemin 和 Sternberg 的一个结果。首先给出一个定义。

定义 4.4. 设 (V, ω) 是一个实辛向量空间，且 $L \subseteq V^{\mathbb{C}}$ 是一个复拉格朗日子空间。定义内积

$$V^{\mathbb{C}} \times V^{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}; \quad (v, w) \mapsto i\omega(v, \overline{w}), \tag{4.1}$$

其中 w 表示 w 的复共轭。如果方程（4.1）中的内积限制在 L上为正定，则称 L 为**正的**。

命题 4.5 ([GS82])。 设 $L \subseteq V \otimes \mathbb{C}$ 是一个正拉格朗日子空间，且 $C \subseteq V$ 是一个余各向同性子空间。那么，

$$L \cap C_{\mathbb{C}}^{\omega} = \{0\}.$$

证明。 这与 [GS82] 中找到的证明几乎完全一致。令 $c_1, c_2 \in C^{\omega}$ 使得 $\ell = c_1 + ic_2 \in L$。于是，

$$i\omega(\ell, \overline{\ell}) = 2\omega(c_1, c_2) = 0$$

由于C^{ω} 是各向同性的。由于假设L 为正，因此可得$\ell = 0$。

□

推论 4.6. 设 $L \subseteq V \otimes \mathbb{C}$ 是正拉格朗日子空间，且 $C \subseteq V$ 是余各向同性的。那么约化拉格朗日子空间 $L_0 \subseteq (V_0)_{\mathbb{C}} = (C/C^{\omega}) \otimes \mathbb{C}$是正极化。

证明。 写作 $\pi_0 : C \to V_0$ 表示投影。回忆一下

$$L_0 = \pi_0(L \cap C_{\mathbb{C}}).$$

将 V_0上的约化形式记为 ω_0。那么，若 $\ell_1, \ell_2 \in L \cap C_{\mathbb{C}}$，我们有

$$i\omega_0(\pi_0(\ell_1), \overline{\pi_0(\ell_2)}) = i\omega(\ell_1, \overline{\ell_2})$$

现在假设 $\pi_0(\ell_1) = \pi_0(\ell_2) \neq 0$。那么存在$c \in C_{\mathbb{C}}^{\omega}$，使得

$$\ell_2 = \ell_1 + c.$$

因此，

$$i\omega_0(\pi_0(\ell_1), \pi_0(\ell_2)) = i\omega(\ell_1, \overline{\ell_1} + \overline{c}) = i\omega(\ell_1, \overline{\ell}_1) > 0$$

其中我们用到了L 为正，且$C_{\mathbb{C}}^{\omega}$ 在复共轭下封闭这一事实。

□

在非奇异约化的情况下，这将立即意味着，只要满足某些正则性条件，极化就会在约化空间上诱导出约化极化。然而，仅凭这一点不足以处理奇异约化的情况。为此，我们需要一些辅助结果。

命题 4.7. 设 $S \subseteq V$ 是一个辛子空间，并设

$$L = L \cap S_{\mathbb{C}} + L \cap S_{\mathbb{C}}^{\omega}. \tag{4.2}$$

那么 $L \cap S_{\mathbb{C}}$ 是 $S_{\mathbb{C}}$ 的复拉格朗日子空间。

证明。设 $\omega_S := \omega|_S$。显然，

$$L \cap S_{\mathbb{C}} \subseteq (L \cap S_{\mathbb{C}})^{\omega_S}$$

因此 $L \cap S_{\mathbb{C}}$ 是各向同性的。为证明其为余各向同性，取 $x \in (L \cap S_{\mathbb{C}})^{\omega_S}$ 并取 $\ell \in L$。由方程（4.2）中的分解，可写为

$$\ell = \ell_1 + \ell_2,$$

其中 $\ell_1 \in L \cap S_{\mathbb{C}}$ 且 $\ell_2 \in L \cap S_{\mathbb{C}}^{\omega}$。注意到

$$\omega(x, \ell) = \omega(x, \ell_1) + \omega(x, \ell_2).$$

由于 $x \in S_{\mathbb{C}}$ 且 $\ell_2 \in S_{\mathbb{C}}^{\omega}$，第二个加数为零，因此

$$\omega(x, \ell) = \omega(x, \ell_1) = \omega_S(x, \ell_1) = 0.$$

因此，$x \in L^{\omega} = L$，从而 $x \in L \cap S_{\mathbb{C}}$。 □

现在回顾一下，若 $S \subseteq V$ 是辛子空间，则其补集 S^{ω}也是辛子空间。此外，我们有典范内部直和 $V = S \oplus S^{\omega}$。因此，我们有一个自然投影 $P_S : V \to S$，沿 S 的补集进行投影。

命题 4.8. 设 $L \subseteq V_{\mathbb{C}}$ 为复拉格朗日子空间，$C \subseteq V$ 为子空间。设存在辛子空间 $S \subseteq V$，使得

(1) $C = C \cap S + C \cap S^{\omega}$
(2) $L = L \cap S_{\mathbb{C}} + L \cap S_{\mathbb{C}}^{\omega}$

(3) $C \cap S$ 在 S 中是余各向同性的。

(4) $c - P_S(c) \in C^{\omega}$ *for all* $c \in C$.

于是有以下结论。

(i) $C \cap S$ 在 S 中的辛补空间由下式给出

$$(C \cap S)^{\omega|_S} = C \cap C^{\omega} \cap S$$

而 $C \cap C^{\omega}$ 在辛投影 P_S： $V \to S$ 下的像由下式给出

$$P_S(C \cap C^{\omega}) = (C \cap S)^{\omega|_S}.$$

(ii) 定义

$$V_0 = \frac{C}{C \cap C^{\omega}} \quad \textit{and} \quad S_0 = \frac{C \cap S}{(C \cap S)^{\omega|_S}}$$

并令 $\pi_C\colon\ C \to V_0$ 和 $\pi_S\colon\ C \cap S \to S_0$ 分别为相应的投影。于是，包含映射 $\iota\colon\ C \cap S \hookrightarrow C$ 定义了一个辛同胚 $\phi\colon\ S_0 \to V_0$，使得该图表交换

$$\begin{array}{ccc} C \cap S & \xrightarrow{\iota} & C \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_S} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_C} \\ S_0 & \xrightarrow{\phi} & V_0 \end{array}$$

(iii) $L_0 = \pi_C(L \cap C_C)$ 是$(V_0)_C$的拉格朗日子空间。

证明。 (i) 首先，注意到

$$C \cap C^\omega \cap S = (C \cap S)^{\omega|_S}$$

事实上，由于

$$C = C \cap S + C \cap S^\omega,$$

不难看出

$$(C \cap S)^{\omega|_S} = C^\omega \cap S.$$

但我们假设$C \cap S$ 是余各向同性的，因此

$$C^\omega \cap S \subseteq C \cap S$$

因此

$$C^\omega \cap S = (C^\omega \cap S) \cap (C \cap S) = C \cap C^\omega \cap S.$$

现在来证明

$$P_S(C \cap C^\omega) = C \cap C^\omega \cap S.$$

设 $c \in C \cap C^\omega$。利用单位元

$$(C + C^\omega)^\omega = C \cap C^\omega,$$

我们证明 $P_S(c)$ 属于 $C + C^\omega$ 的辛补空间。为此，令 $x \in C$ 且 $y \in C^\omega$。利用 $P_S(C) = C \cap S$这一事实，我们得到

$$\omega(P_S(c), x + y) = \omega(P_S(c), x) = \omega(P_S(c), P_S(x))$$

现在，由于 $c - P_S(c) \in S^\omega$，我们得到

$$\omega(P_S(c), P_S(x)) = \omega(P_S(c) + c - P_S(c), P_S(x)) = \omega(c, P_S(x)).$$

再次利用$P_S(C) = C \cap S$ 以及$c \in C^\omega$这一事实，我们得到

$$\omega(c, P_S(x)) = 0$$

因此得证。

(ii) 为了定义 ϕ，令$c \in C \cap S$，并令

$$\phi(\pi_S(c)) = \pi_C(c).$$

这是良定义的，因为如果$c - c' \in C \cap C^\omega \cap S$，那么显然有 $\pi_C(c - c') = 0$。按构造，它使该图表交换。记 ω_0 为 V_0 上的辛形式，记 $\omega_S|_0$ 为S_0, 上的辛形式，我们注意到

$$\pi_S^* \phi^* \omega_0 = \iota^* \pi_C^* \omega_0 = \iota^*(\omega|_C) = \omega|_{S \cap C} = (\omega_S)|_{C \cap S}$$

由于$(\omega_0)_S$ 是S_0 上满足 $\pi_S^*(\omega_S)_0 = \omega_S|_{C \cap S}$的唯一二形式，因此

$$\phi^* \omega_0 = (\omega_S)_0.$$

还需证明 ϕ 是线性同构。由于 ϕ 将一个非退化2-形式拉回为一个非退化2-形式，立即可知 ϕ 是单射。对于满射性，注意到若$c \in C$，则由于

$$c - P_S(c) \in C^\omega,$$

我们立即得出

$$\phi(\pi_S(P_S(c)) = \pi_C(c).$$

因此， ϕ 是一个辛同胚。

(iii) 利用 (ii) 中的交换图，我们得到

$$\pi_C(L \cap C_{\mathbb{C}}) = \phi(\pi_S(L \cap C_{\mathbb{C}} \cap S_{\mathbb{C}})).$$

由于 $C \cap S$ 是余各向同性的，且根据命题 4.7，$L \cap S_{\mathbb{C}}$ 是 $S_{\mathbb{C}}$ 的复拉格朗日子空间，因此 $\pi_S(L \cap C_{\mathbb{C}} \cap S_{\mathbb{C}})$ 是 $(S_0)_{\mathbb{C}}$ 的复拉格朗日子空间。因此，根据命题 4.7， $\pi_S(L \cap C_{\mathbb{C}} \cap S_{\mathbb{C}}) \subseteq (S_0)_{\mathbb{C}}$ 是复拉格朗日子空间；又由于 ϕ 是一个辛同胚，其像也如此。

□

似乎不太可能会遇到命题4.8中所述的辛子空间。然而，若有紧群的线性作用，上述许多性质便会自动成立。因此，接下来我们固定一个紧（但不一定连通的）李群 K，并假设 (V,ω) 是一个辛 K-表示。我们还假设拉格朗日子空间 $L \subseteq V_{\mathbb{C}}$ 是一个复 K-表示。

命题 4.9. *(1)* $L = L \cap V_{\mathbb{C}}^K + L \cap (V^K)_{\mathbb{C}}^{\omega}$，并且

(2) L^K 是 V^K 的拉格朗日子空间。

证明。 **(1)** 由命题 3.39可知，V^K 是一个辛子空间。因此，我们沿着 $(V^K)^{\omega}$ 有一个自然的满射投影

$$P_{V^K} : V \to V^K \subseteq V.$$

限制该映射，得到一个映射 $P_{V^K}|_L : L \to L^K \subseteq L$，因此还得到一个典范直和

$$L = L^K + \ker(P_{V^K}|_L).$$

于是显然有 $L^K = L \cap V_{\mathbb{C}}^K$，且 $\ker(P_{V^K}|_L) = L \cap (V^K)_{\mathbb{C}}^{\omega}$。

(2) 根据命题 4.7，$L \cap V_{\mathbb{C}}^K$ 是 $V_{\mathbb{C}}^K$ 的复拉格朗日子空间。此外，我们有

$$L^K = L \cap V_{\mathbb{C}}^K.$$

结论由此得出。

□

有了这一点，我们现在可以进行奇异约化的线性版本。

定理 4.10. 设 V 和 W 是两个有限维辛 K-表示，且 $F \subseteq V$ 是一个 K-不变实拉格朗日子空间，并定义

$$C = F \oplus W^K$$

并设

$$(V \oplus W)_0 := \frac{F \oplus W^K}{(F \oplus W^K) \cap (F \oplus W^K)^{\omega}}$$

并将 $\pi : C \to V_0$ 记作投影。若 $L \subseteq V_{\mathbb{C}} \oplus W_{\mathbb{C}}$ 是一个 K-不变复拉格朗日子空间，则

$$L_0 = \pi(L \cap C_{\mathbb{C}}) \subseteq (V \oplus W)_0 \otimes \mathbb{C}$$

是（$V \oplus W$）$_0$的复拉格朗日子空间。

证明。 令$S = V^K \oplus W^K = (V \oplus W)^K$。$S$ 是一个辛子空间，而投影映射

$$P_S : V \oplus W \to V^K \oplus W^K; \quad (v, w) \mapsto (v^K, w^K)$$

由对K取平均得到。根据命题4。9，

$$L = L \cap S_{\mathbb{C}} + L \cap S_{\mathbb{C}}^{\omega}.$$

由于C 在K作用下保持不变，因此我们还有

$$C = C \cap S + C \cap S^{\omega}.$$

接下来，

$$C \cap S = F^K \oplus W^K$$

这显然是$V^K \oplus W^K$中的余各向同性子空间。最后，对于任意$(f, w) \in F \oplus W^K$，我们有

$$(f, w) - P_S(f, w) = (f, w) - (f^K, w) = (f - f^K, 0)$$

它属于$\mathbb{C}^{\omega}$，因为F 是V中的拉格朗日子空间。因此，我们可以应用命题4。8，结论随即成立。 □

4.2 极化

现在，拉格朗日子空间的线性理论已经完备，我们可以转向极化的整体理论。

定义 4.11 （极化）。 设(M, ω) 是一个辛流形。(M, ω) 的**极化** 是一个复分布$P \subseteq T^{\mathbb{C}}M$，满足以下性质。

- P 是对合的。也就是说，若V、$W \in \Gamma(P)$，则 $[V$、$W] \in \Gamma(P)$。
- P 是拉格朗日的。也就是说，对所有$x \in M$，纤维$P_x \subseteq T^{\mathbb{C}}{}_x M$ 相对于辛形式的复化$\omega^{\mathbb{C}}{}_x$，是一个复拉格朗日子空间。

给定一个极化 $\mathcal{P} \subseteq T^{\mathbb{C}}M$，将极化函数定义为

$$\mathcal{O}_{\mathcal{P}}(M) := \{f \in C^{\infty}(M, \mathbb{C}) \mid v(f) = 0 \text{ for all } v \in \mathcal{P}\}.$$

我们也用 $C^{\infty}_{\mathcal{P}}(M)$ 表示 $\mathcal{O}_{\mathcal{P}}(M)$上的实值函数。

我们将极化视为表示辛流形的“动量方向”。在局部，这表示波函数可以依赖的变量中的一半，因此我们只考虑在这些方向上为常数的波函数。在精确定义这一概念之前，我们先讨论一些极化的例子及其若干特征。

例子 4.12. 设 $(M,\ \omega)\ =(\mathbb{R}^{2n},\omega_{can})$ 是具有达布坐标 $(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n)$ 的标准辛 $\mathbb{R}^{2n}$。这个辛流形具有大量自然极化。将y 坐标视为动量坐标，我们可以得到动量极化

$$\mathcal{P}_{momentum}=\operatorname{span}_{\mathbb{C}}\left\{\frac{\partial}{\partial y_i}\ \middle|\ i=1,\ldots,n\right\}$$

并且，将x 坐标视为位置变量，我们得到位置极化

$$\mathcal{P}_{position}=\operatorname{span}_{\mathbb{C}}\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\ \middle|\ i=1,\ldots,n\right\}.$$

这两种极化对于量子化都有意义。注意，它们也是实分布的复化，因此是叶状结构。在这两种情况下，极化函数 $\mathcal{O}_{\mathcal{P}_{momentum}}(\mathbb{R}^{2n})$和 $\mathcal{O}_{\mathcal{P}_{position}}(\mathbb{R}^{2n})$等于 $\mathbb{R}^{2n}$ 上沿叶保持常数的函数，因此可与$C^{\infty}(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$等同。

我们可以通过复结构得到其他类型的极化。令I 表示 $\mathbb{R}^{2n}$ 上的标准复结构，并将其与 $\mathbb{C}^n$相认。现在考虑全纯切丛$T^{0,1}\mathbb{R}^{2n}$ 和反全纯切丛$T^{0,1}\mathbb{R}^{2n}$。这两者都是$T^{\mathbb{C}}\mathbb{R}^{2n}$ 的对合拉格朗日子丛，因此是极化。在这种情况下，极化函数$\mathcal{O}_{T^{1,0}\mathbb{R}^{2n}}(\mathbb{R}^{2n})$和 $\mathcal{O}_{T^{0,1}\mathbb{R}^{2n}}(\mathbb{R}^{2n})$ 分别等于反全纯函数和全纯函数。

例子 4.13. 作为上述内容的推广，余切丛也是极化产生的极其自然的场所。设Q 为一个流形，$\tau:T^*Q\ \to Q$ 为Q的余切丛。由于 τ 是一个以余切纤维为纤维的满射浸没，其核的复化

$$\mathcal{P}=\ker(T\tau)\otimes\mathbb{C}\subseteq T^{\mathbb{C}}(T^*Q)$$

是一个对合复分布。此外，由于对于任意 $\alpha\in T^*Q$，我们有

$$\mathcal{P}_{\alpha}=T_{\alpha}(T^*_{\tau(\alpha)}Q)\otimes\mathbb{C},$$

根据刘维尔形式 $\theta \in \Omega^1(T^*Q)$ 的定义，立即可知 $\mathcal{P}$ 是拉格朗日的。在余切坐标下，我们可以立即推得，极化函数 $\mathcal{O}_{\mathcal{P}}(T^*Q)$ 是沿余切纤维为常数的复值光滑函数。换句话说，

$$\mathcal{O}_{\mathcal{P}}(T^*Q) = \tau^* C^\infty(Q, \mathbb{C}). \tag{4.3}$$

例子 4.14. 设 T^n 是一个 n维环面，且 $J : (M, \omega) \to \mathfrak{t}^*$是一个环面 T^n 空间，其中 T^n 自由作用。由例子 2.26可知，子集$\mathfrak{t}_M \subseteq TM$ 定义为

$$(\mathfrak{t}_M)_x = \{\xi_M(x) \mid \xi \in \mathfrak{t}\}, \quad x \in M$$

是一个 T^n-不变子丛。我主张 $\mathcal{P} = \mathfrak{t}_M \otimes \mathbb{C}$ 是一个极化。由于 $\mathfrak{t}_M$ 是叶状结构的切丛，因此闭合性立即可得。至于拉格朗日性，由于 T^n 是阿贝尔的，对于任意 ξ、$\eta \in \mathfrak{t}$，有

$$\omega(\xi_M, \eta_M) = \eta_M(J^\xi) = 0$$

由于对于任意 $\xi \in \mathfrak{t}$，$J^\xi : M \to \mathbb{R}$都是不变的。因此，$\mathfrak{t}_M$ 的秩是M维数的一半，由此可知 $\mathcal{P}$ 是逐纤维拉格朗日的，因而是一个极化。

命题 4.15. 设 $\mathcal{P}$ 是一个极化。

(1) 设 $f \in C^\infty(M, \mathbb{C})$。则当且仅当 $V_f \in \Gamma(\mathcal{P})$时，$f \in \mathcal{O}_{\mathcal{P}}(M)$。

(2) $\mathcal{O}_{\mathcal{P}}(M)$ 是 $C^\infty(M, \mathbb{C})$的泊松子代数。

证明。 (1) 设$f \in C^\infty(M, \mathbb{C})$。那么，$f \in \mathcal{O}_{\mathcal{P}}(M)$ 当且仅当$d_x f$对所有x都属于 $\mathcal{P}_x$的湮灭子。由于$df = \omega(Vf, \cdot)$，这当且仅当$Vf(x) \in \mathcal{P}_x^\omega = \mathcal{P}_x$对所有$x$都成立。反过来，这当且仅当$V_f \in \Gamma(\mathcal{P})$。

(2) 设f、$g \in \mathcal{O}_{\mathcal{P}}(M)$。那么，

$$V_{\{f,g\}} = [V_f, V_g].$$

由 (1)，Vf，$V_g \in \Gamma(\mathcal{P})$，因此由对合性可得$V_{\{f,g\}} \in \Gamma(\mathcal{P})$，这由 (1) 推出 $\{f、g\} \in \mathcal{O}_{\mathcal{P}}(M)$。

□

极化主要有两种典型（也是研究最为广泛的）类型：实极化和 Kähler 极化。在以下讨论中，固定一个辛流形 (M, ω)。现在假设我们有一个由拉格朗日子流形构成的（非奇异）叶状结构

$\mathcal{F}M$ 上的。于是，根据弗罗贝尼乌斯定理，该叶状结构的切丛 $T\mathcal{F}$ 是对合的，并且显然 $T_x\mathcal{F} \subseteq T_xM$ 是拉格朗日的。因此，复化

$$T\mathcal{F} \otimes \mathbb{C} \subseteq TM \otimes \mathbb{C}$$

是一个极化。

命题 4.16. 设 $\mathcal{F}$ 表示一个拉格朗日叶状结构，且令 $\mathcal{P} = T\mathcal{F} \otimes \mathbb{C}$。那么，极化函数 $\mathcal{O}_{\mathcal{P}}(M)$ 恰好是沿 $\mathcal{F}$的叶保持常数的复函数。

证明。 根据定义，$f \in \mathcal{O}_{\mathcal{P}}(M)$ 当且仅当对于每个叶L，都有$df|_L = 0$。由于各叶连通且$df|_L = d(f|_L)$，因此得证。

□

现在让我们舍弃拉格朗日叶状结构 $\mathcal{F}$，转而考虑相反的“极端”情形（其含义稍后将精确定义）：凯勒结构。设I 是M 上的可积复结构，并且与 ω 相容，具体来说，

$$g(X, Y) := \omega(X, I(Y))$$

定义了(M, ω)上的黎曼度量。I 自然地扩张为一个端omorphism

$$I : TM \otimes \mathbb{C} \to TM \otimes \mathbb{C}$$

这使我们能够将$TM \otimes \mathbb{C}$ 分解为其i 和 $-i$ 特征子丛。

$$TM \otimes \mathbb{C} = T_J^{0,1}M \oplus T_J^{1,0}M.$$

由此立即可知，$T^{0,1}{}_I M$、$T^{1,0}{}_I M \subseteq TM \otimes \mathbb{C}$ 是拉格朗日子丛，并且根据 Newlander-Nirenberg 定理，它们都是对合的[NN57]。因此，由 I 可得到两个极化：全纯切丛 $T^{0,1}{}_I M$ 和反全纯切丛 $T^{1,0}{}_I M$。

命题 4.17. 设 (M, ω, I) 是一个 *Kähler* 流形。则相对于全纯切丛 $T^{1,0}\,I\,M$ 的复极化函数是反全纯函数。反过来，相对于反全纯切丛 $T^{0,1}\,I\,M$ 的复极化函数由 M 上的全纯函数给出。

证明。 这只是全纯函数和反全纯函数的定义。

□

我说过，这个来自 Kähler 结构的例子与拉格朗日叶状结构的情形恰好相反。这里的“相反”是指复共轭。注意，如果 $\mathcal{F}$ 是一个拉格朗日叶状结构，那么 $T\mathcal{F} \otimes \mathbb{C}$ 就等于其逐纤维复共轭

$$\overline{T\mathcal{F} \otimes \mathbb{C}} = T\mathcal{F} \otimes \mathbb{C},$$

对于凯勒结构I，全纯切丛和反全纯切丛$T^{1,0}{}_I M$ 与$T^{0,1}{}_I M$ 的交为零，并且在复共轭下互换。也就是说，

$$\overline{T_I^{0,1}M} \cap T_I^{0,1}M = \{0\}.$$

由此自然引出了极化类型的概念。

定义 4.18 （极化类型）。 设(M, ω) 是一个辛流形，且 $\mathcal{P} \subseteq$ 切丛 $\otimes \mathbb{C}$ 是一个极化。

(1) $\mathcal{P}$ 称为**实**的，若 $\mathcal{P}$ 等于其逐纤维复共轭，即

$$\overline{\mathcal{P}} = \mathcal{P}.$$

(2) 若 $\mathcal{P}$ 与其逐纤维复共轭的交为零，则称 $\mathcal{P}$ 为**全复**的，即

$$\overline{\mathcal{P}} \cap \mathcal{P} = \{0\}.$$

(3) 如果 $\mathcal{P}$ 既非实的也非全复的，则称其为**混合**类型。

注4.19。 一般而言，全复极化不一定对应于Kähler结构。实际上，它们对应的是伪Kähler结构，这意味着诱导度量李代数 g 是伪黎曼度量。也就是说，诱导度量李代数 g 不要求正定。事实上，给定一个全复极化 $\mathcal{P}$，我们有一个内直和

$$TM \otimes \mathbb{C} = \mathcal{P} \oplus \overline{\mathcal{P}}.$$

于是定义

$$I : \mathcal{P} \oplus \overline{\mathcal{P}} \to \mathcal{P} \oplus \overline{\mathcal{P}}; \quad v + w \mapsto iv - iw.$$

若令$v \in$切丛，则可将$v = p + p$写成唯一的$p \in \mathcal{P}$。根据定义，

$$I(v) = ip - i\overline{p}$$

注意到$I(v) = \overline{I(v)}$，这意味着$I(v)$ 属于切丛。因此，我们得到一个映射

$$I : TM \to TM$$

显然$I^2 = -\mathrm{id}_{\text{切丛}}$，且$I$ 根据 Newlander-Nirenberg 定理是可积的。现在在切丛上定义对称二阶张量

$$g(v,w) = \omega(v, I(w)).$$

李代数 g 不必是正定的，但它是非退化的，因此定义了一个伪黎曼度量。

例如，为 $\mathbb{C}^2$ 赋予复坐标(z_1,z_2) ，并令

$$\omega = \frac{i}{2}\sum_{j=1}^{2} dz_j \wedge d\overline{z_j}$$

为典范辛形式。现在定义

$$\mathcal{P} = \left\langle \frac{\partial}{\partial \overline{z_1}}, \frac{\partial}{\partial \overline{z_2}} \right\rangle.$$

于是很容易看出， $\mathcal{P}$ 是对合的且为拉格朗日子空间，因此是一种极化。此外，显然有 $\mathcal{P} \cap \mathcal{P} = 0$。因此， $\mathcal{P}$ 是全复的。在这种情形下，我们看到诱导的对称二阶张量具有如下形式

$$g = \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial y_1}\frac{\partial}{\partial y_1} - \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial y_2}\frac{\partial}{\partial y_2}$$

其中，并置表示对称积，而x^j、y^j 定义为

$$x_j = \frac{z_j + \overline{z_j}}{2} \quad \text{and} \quad y_j = \frac{i}{2}(z_j - \overline{z_j}).$$

特别地，诱导度量具有混合符号$(++--)$ ，因此是伪黎曼度量。

例子 4.20. 设 $(M1, \omega_1)$ 和 $(M2, \omega_2)$ 是两个辛流形， $\mathcal{F}M_1$ 的一个拉格朗日叶状结构，以及M_2上的一个凯勒结构 动量映射 。那么，外直和

$$\mathcal{P} = (T\mathcal{F} \otimes \mathbb{C}) \oplus T_J^{0,1} M_2 \subseteq T(M_1 \times M_2) \otimes \mathbb{C}$$

是混合型极化。

作为极化的最后一个性质，我想讨论正性。注意，对于每个 $x \in M$，我们可以在 $\mathcal{P}_x$ 上定义如下非对称半双线性型：

$$\langle v, w \rangle := i\omega_x(v, \overline{w}), \tag{4.4}$$

其中w 表示w的复共轭。

定义4.21. 若极化 $\mathcal{P}$ 在方程（4.4）中定义的配对是正定的，则称其为正极化。

正如下文将要看到的，极化具有正性等价于它是 Kähler 的。提供这一替代刻画的意义在于，在取商空间时，正性很容易验证。

引理 4.22. 设 (M, ω) 是一个辛流形，且 $\mathcal{P} \subseteq T^{\mathbb{C}}M$ 是一个全复极化。则以下条件等价。

(1) $\mathcal{P}$ 具有正性。

(2) 存在一个凯勒结构 I，使得 $\mathcal{P} = T^{0,1}{}_I M$。

证明。 首先，设对于某个凯勒结构 I，有 $\mathcal{P} = T^{0,1}{}_I M$。记 g 为由下式给出的诱导黎曼度量

$$g(v, w) = \omega(v, I(w)).$$

固定 $x \in M$ 和 $v \in \mathcal{P}_x$，并将 v 代入方程（4.4）中的内积，

$$\langle v, v \rangle = i\omega_x(v, \overline{v})$$

由于 v 属于切丛的复化，因此存在 $w_1, w_2 \in T_xM$ 使得 $v = w_1 + iw_2$。由此可得

$$\langle v, v \rangle = 2\omega_x(w_1, w_2).$$

现在，由于 $I(v) = -iv$，可知 $I(w_1) = w_2$，并且 $I(w_2) = -w_1$。特别地，

$$\langle v, v \rangle = 2\omega_x(w_1, I(w_1)) = 2g_x(w_1, w_1).$$

特别地，若 $w_1 \neq 0$，则有 $\langle v, v \rangle > 0$，从而 $\mathcal{P}$ 为正。

对于逆命题，假设 $\mathcal{P}$ 为正。首先我声称 $\mathcal{P}$ 是全复的。事实上，若 $v \in \mathcal{P}_x \cap \overline{\mathcal{P}_x}$ 对某个 $x \in M$ 成立，则可得 $\overline{v} \in \mathcal{P}_x$。因此，

$$\langle v, v \rangle = i\omega_x(v, \overline{v}) = 0$$

因为 $\mathcal{P}_x$ 是拉格朗日的。由于假设 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是正定的，可知 $v = 0$。因此，$\mathcal{P}_x \cap \overline{\mathcal{P}_x} = 0$，所以 $\mathcal{P}$ 是全复的。

因此，根据注记4.19中的讨论，存在一个可积复结构 I : 切丛 $\to$ 切丛，使得 $\mathcal{P} = T^{0,1}{}_I M$。最后，我们需要证明

$$g(v, w) := \omega(v, I(w))$$

是正定的。这很容易证明：对于任意$v \in$ 切丛，首先注意到

$$I(v + iI(v)) = I(v) - iv = -i(v + iI(v))$$

因此 $v + iI(v) \in \mathcal{P}$ 此外

$$g(v,v) = \omega(v, I(v)) = \frac{i}{2}\omega(v + iI(v), v - iI(v)) = \frac{\langle v + iI(v), v + iI(v)\rangle}{2}$$

如果 $v \neq 0$，则由正性立即可得 $g(v,v) > 0$，从而 I 是一个 Kähler 结构。 □

4.3 向量丛和复分布的像

在上一节中，我们推导出了奇异约化所需的无穷小图景。现在我们需要借助可积性将各部分整合起来。这里的主要思想来自向量丛和复分布理论。

首先，我们需要提出一个颇为简单的问题。向量丛的像何时仍然是一个向量丛？特别地，如果

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{p} & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

是一个向量丛态射，且 f 为满射浸没，那么何时$p(A) \subseteq B$ 是 N上的向量子丛？除非 f 是一个微分同胚，否则仅仅假设p 具有常秩是不够的。

例子 4.23. 为了说明秩恒定的向量丛态射的像未必是向量丛，考虑万有覆盖映射

$$f : \mathbb{R} \to S^1 \subseteq \mathbb{C}; \quad \theta \mapsto e^{i\theta}$$

令 $B = S^1 \times \mathbb{R}^2$ 为 S^1 上的平凡二阶向量丛，并如下定义 $A \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$。对每个 $\theta \in \mathbb{R}$，令 实数集$_\theta \in \mathrm{SO}(2)$ 为旋转 θ 的逆时针旋转。选择一条直线

$$L = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

现在定义$A \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ 为

$$A_\theta := R_{\theta/4}(L).$$

投影pr_1： $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 到第一因子的限制定义了一个向量丛结构

$$\pi_A : A \to \mathbb{R}.$$

记 π_B： $S^1\times\mathbb{R}^2\to S^1$ 也表示第一因子上的投影。由于$A_\theta\subseteq\mathbb{R}^2$ 对每个 θ 都成立，我们得到一个典范向量丛态射

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{p} & B \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_A} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_B} \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

由逐纤维包含给出。于是，我们看到$p(A)$ 不是B的向量子丛。令

$$X = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=0 \text{ or } y=0\},$$

我们看到

$$p(A)\cap(\{(1,0)\}\times\mathbb{R}^2) = \{(1,0)\}\times X$$

而在S^1 中的每个其他点上，它将是X的一个旋转副本。因此，$p(A)$不是向量子丛。

常秩不足以保证向量丛态射的像是向量丛，因此我们需要施加一个额外条件。

引理 4.24。设

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{p} & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

是一个向量丛态射，其中 f 是满射浸没。于是，$p(A)\subseteq B$ 是 B 的向量子丛，且

$$p(A)_{f(x)} = p(A_x)$$

当且仅当对任意 $x\in M$

(1) 该映射

$$M\to\mathbb{Z};\quad x\mapsto \dim p(A_x)$$

是常数。

(2) 若 $f(x)=f(y)$，则 $p(A_x)=p(A_y)$。

证明。 首先，假设 $p(A)\subset B$ 是一个向量子丛，且

$$p(A_x) = p(A)_{f(x)}$$

对所有 $x \in M$都成立。那么显然，$p(A_x)$ 的维数必须是常数；若 x、$y \in M$ 满足 $f(x) = f(y)$，则 $p(A_x) = p(A_y)$。

现在让我们假设逆命题成立。也就是说，假设对于任意满足 $f(x) = f(y)$ 的 $x, y \in M$，$p(A_x)$ 关于 x 为常数，且 $p(A_x) = p(A_y)$。要证明 $p(A)$ 是一个向量子丛，只需证明：对于任意点 $n \in N$，都可以找到 n 的一个邻域 $U \subseteq N$，以及逐点线性无关的截面 $\tau_1, \dots, \tau_k \in \Gamma(U, B)$，它们张成 $p(A)|_U$。

因此，利用 f 是浸没这一事实，我们可以转到局部坐标，并假设 $M = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$、$N = \mathbb{R}^n$，且 $f\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$是到第一因子的投影。注意，由于假设 p 具有常秩，核 $\ker(p) \subseteq A$ 是一个向量子丛。因此，我们可以找到截面

$$\sigma_1, \dots, \sigma_k, \sigma_{\ell+1}, \dots, \sigma_r \in \Gamma(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, A)$$

使得 $\sigma_{\ell+1}, \dots, \sigma_r$ 构成 $\ker(p)$ 的标架。对于每个 $i = 1, \dots, k$，定义

$$\tau_i : \mathbb{R}^n \to B; \quad x \mapsto p \circ \sigma_i(x, 0)$$

根据构造，$\tau_1, \dots, \tau_k$ 张成$p(A)$，且逐点线性无关。因此结论成立。

□

定义 4.25。设

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{p} & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

是一个向量丛态射。若对于任意满足$f(x) = f(y)$的 x,$y \in M$，都有$p(A_x) = p(A_y)$，则称p 沿着f的纤维**为常数**。

注4.26. 回到例子 4.23 中的向量丛态射

$$\begin{array}{ccc} A \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{p} & S^1 \times \mathbb{R}^2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & S^1 \end{array}$$

其中$f(\theta) = e^{i\theta}$ 是万有覆盖映射，而A 定义为

$$A_\theta := R_{\theta/4}(L) \subseteq \mathbb{R}^2$$

其中 $L = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$，$R_{\theta/4} \in \mathrm{SO}(2)$ 是绕原点逆时针旋转 $\theta/4$。

之所以 $p(A)$ 不是 $S^1 \times \mathbb{R}^2$ 的向量子丛，恰恰是因为 p 不满足引理4.24中的假设 (ii)。事实上，考虑纤维 A_0 和 $A_{2\pi}$。我们有

$$p(A_0) = \{f(0)\} \times L = \{1\} \times L$$

而

$$p(A_{2\pi}) = \{f(2\pi)\} \times R_{\pi/2}(L) = \{1\} \times R_{\pi/2}(L).$$

显然，$p(A_0) \neq p(A_{2\pi})$，尽管$f(0) = f(2\pi)$。

例子 4.27. 如果不要求p 沿底空间基映射的纤维保持常数，我们也能得到 $p(A)$ 为向量丛的例子。事实上，现在考虑由投影到第二个因子给出的$f : S^1 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$。令$B = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ 为平凡秩-2向量丛，并如下定义$A \subseteq (SO(2) \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^2$。令

$$L = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$$

对于每个$(R,t) \in SO(2) \times \mathbb{R}$，定义

$$A_{(R,t)} := R(L) \subseteq \mathbb{R}^2.$$

这些纤维随后拼合成一个实线丛$A \to SO(2) \times \mathbb{R}$。令$p : A \to B$ 为逐纤维包含映射，可见p 具有常秩；但是，如果$R,R' \in SO(2)$ 是两个不同且互不为逆的元素，那么对于任意$t \in \mathbb{R}$，两条直线$R(L)$ 和$R'(L)$ 不相等，因此

$$A_{(R,t)} \neq A_{(R',t)}$$

因此，它们在p下的像也不相等。不过，很容易看出

$$p(A) = B$$

因此它是一个向量子丛。注意，在这种情况下，对于任意$(R,t) \in SO(2) \times \mathbb{R}$，$p(A^{(R,t)}) \neq p(A)_t$。

推论4.28. 设 $p : A \to B$ 是一个沿 f 的纤维保持常数的向量丛态射。那么，任意一种分裂

$$A = \ker(p) \oplus A'$$

定义了一个单射

$$p^! : \Gamma(p(A)) \to \Gamma(A'); \quad \sigma \mapsto p^!\sigma$$

使得对于任意 $\sigma \in \Gamma(p(A))$，图表交换

$$\begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{p} & p(A) \\ {\scriptstyle p^!\sigma}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \sigma} \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

证明。 显然，p 在M 上诱导出拉回丛$f^{-1}(p(A))$ 与A'之间的向量丛同构，

$$f^{-1}(p(A)) \cong A' \tag{4.5}$$

因此，若 $\sigma \in \Gamma(p(A))$ 是一个截面，则得到一个诱导的拉回截面$f^{-1}\sigma \in \Gamma(f^{-1}p(A))$ 它通过方程（$p^!\sigma \in \Gamma(A')$ 4.5）中的同构与一个截面相对应。 □

关于一般向量丛的讨论直接得出的结论是：满足某些条件时，我们现在可以通过满射浸没推前分布。

引理 4.29. 设 M 和 N 是光滑流形，$P \subseteq T^{\mathbb{C}}M$ 是一个复对合子丛，且 $\pi : M \to N$ 是满射浸没。记 $V^{\mathbb{C}}M := \ker(T^{\mathbb{C}}\pi)$。假设以下条件成立。

(i) $T^{\mathbb{C}}\pi|_P : P \to T^{\mathbb{C}}N$ 在 π 的纤维上为常数且具有常秩。

(ii) 对任意截面 $X \in \Gamma(V^{\mathbb{C}}M)$ 和 $Y \in \Gamma(P)$，我们有

$$[X, Y] \in \Gamma(P).$$

Then

$$\pi_* P := T\pi(P) \subseteq T^{\mathbb{C}}N$$

是 N 上的对合复分布。

证明。该映射

$$T\pi|_P : P \to T^{\mathbb{C}}N$$

是一个常秩向量丛态射，并且沿满射浸没的纤维保持常数。由引理 4.24，其像 $\pi_* P$ 是 $T^{\mathbb{C}}N$ 的复子丛。现在证明 $\pi_* P$ 是对合的。

设 X、Y $\in \Gamma(\pi_*\mathrm{P})$ 为两个截面，并设 X^L、$\mathrm{Y}^L \in \Gamma(\mathrm{P})$ 为推论 4.28 中所述的两个提升。由于 P 是对合的，因此 $[\mathrm{X}^L、\mathrm{Y}^L] \in \Gamma(\mathrm{P})$。又因为 $\mathrm{X}^L \sim_\pi \mathrm{X}$ 且 $\mathrm{Y}^L \sim_\pi \mathrm{Y}$，所以 $[\mathrm{X}^L、\mathrm{Y}^L] \sim_\pi [\mathrm{X}、\mathrm{Y}]$。因此，$[\mathrm{X}、\mathrm{Y}] \in \Gamma(\pi_*\mathrm{P})$ 也成立。 □

4.4 极化的非奇异约化

在以下所有内容中，设 G 为一个连通李群，$J:(M,\omega)\to\mathfrak{g}^*$ 为一个适当的哈密顿量 G-空间，并且 $\mathcal{P}\subseteq$ 切丛 $\otimes\mathbb{C}$ 为一个 G-不变极化。

定理 4.30. 设 0 是动量映射 J 的正则值，$J^{-1}(0)\neq\emptyset$，并且 G 在 $J^{-1}(0)$上自由作用。设 $M_0=J^{-1}(0)/G$ 为约化空间，且 $\pi_0:J^{-1}(0)\to M_0$ 为商映射。若

$$\mathcal{P}_{J^{-1}(0)}:=\mathcal{P}\cap T^{\mathbb{C}}J^{-1}(0)\subseteq T^{\mathbb{C}}M$$

是切丛 $T^{\mathbb{C}}M$ 的嵌入子流形，则

$$\mathcal{P}_0:=(\pi_0)_*(\mathcal{P}_{J^{-1}(0)})$$

是 M_0 的极化。

证明。 由于 $\mathcal{P}_{J^{-1}(0)}$ 是 $T^{\mathbb{C}}M$ 的嵌入子流形，因此可立即得出 $\mathcal{P}_{J^{-1}(0)}$ 是 $T^{\mathbb{C}}J^{-1}(0)$ 的复向量子丛。此外，由于 $\mathcal{P}_{J^{-1}(0)}$ 是两个对李括号运算闭合的子丛的交集，故 $\mathcal{P}_{J^{-1}(0)}$ 是 $J^{-1}(0)$ 的复分布。

我们假设 $\mathcal{P}$ 是G-不变的，因此可立即得出向量丛态射 $T\pi_0:\mathcal{P}_{J^{-1}(0)}\to T^{\mathbb{C}}M_0$ 如下图所示，

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{P}_{J^{-1}(0)} & \xrightarrow{T\pi_0} & T^{\mathbb{C}}M_0\\ \downarrow & & \downarrow\\ J^{-1}(0) & \xrightarrow{\pi_0} & M_0\end{array}\tag{4.6}$$

在 π_0 的纤维上是常数，符合定义4.25。此外，由于动量映射$^{-1}(0)$ 是一个余各向同性子流形，并且

$$T_x(G\cdot x)=(T_xJ^{-1}(0))^{\omega_x}$$

对所有 x，由命题 4.1 中的线性约化结论可知，对于任意 x，$T_x\pi_0((\mathcal{P}_{J^{-1}}(0))_x)\subseteq T^{\mathbb{C}}_{\pi_0}(x)M_0$ 是 $T^{\mathbb{C}}_{\pi_0}(x)M_0$ 的拉格朗日子空间。由此，我们同时得到两个事实。首先，公式 (4.6) 中的向量丛态射具有常秩。利用引理 4.29，我们推得 $(\pi_0)_*(\mathcal{P}_{J^{-1}(0)})=\mathcal{P}_0\subseteq T^{\mathbb{C}}M_0$ 是 M_0上的复分布。其次，由于 $\mathcal{P}_0$ 是逐纤维拉格朗日的，因此 $\mathcal{P}_0$必定是一个极化。

□

定义 4.31. 给定一个 G-不变极化 $\mathcal{P}$，称 $\mathcal{P}$ 是**可约**$\mathcal{P}_{J^{-1}(0)} := \mathcal{P} \cap T^{\mathbb{C}} J^{-1}(0)$ 是 $T^{\mathbb{C}}M$的嵌入子流形。

鉴于此定理，从现在起我们假设 0 是动量映射 的正则值，且G 在动量映射$^{-1}(0)$上自由作用。我们接下来要进一步探讨的主要问题是 $\mathcal{P}$ 何时可约，以及由此产生的影响。

命题 4.32. 令 $\mathfrak{g}_{J^{-1}(0)} \subseteq TJ^{-1}(0)$ 表示动量映射 $J^{-1}(0)$ 上由自由 G-作用的轨道构成的叶状结构的切丛。若 $\mathcal{P}$ 如定义 4.21中所述为纤维方向正，则

$$\mathcal{P} \cap \mathfrak{g}_{J^{-1}(0)} = \{0\}.$$

证明。 这是由以下事实得出的：对每个$x \in$ 动量映射$^{-1}(0)$，都有

$$(T_x J^{-1}(0))^{\omega_x} = T_x(G \cdot x) = (\mathfrak{g}_{J^{-1}(0)})_x.$$

因此，由命题 4.5， $\mathcal{P}_x \cap T_x^{\mathbb{C}}(G \cdot x) = \{0\}$ ，因为 $\mathcal{P}$ 是正的。 □

推论 4.33 ([GS82])**.** 若 $\mathcal{P}$ 是正极化，则它是可约的。此外，约化后的极化

$$\mathcal{P}_0 = (\pi_0)_*(\mathcal{P}_{J^{-1}(0)})$$

是 M_0 上的正极化。

证明。 根据命题 4。 32，其和

$$\mathcal{P}|_{J^{-1}(0)} + \mathfrak{g}_{J^{-1}(0)} \otimes \mathbb{C}$$

定义了一个向量子丛，其为$T^{\mathbb{C}}M|_{J^{-1}(0)}$的子丛。逐点考察可知，辛对偶为

$$(\mathcal{P}|_{J^{-1}(0)} + \mathfrak{g}_{J^{-1}(0)} \otimes \mathbb{C})^{\omega} = \mathcal{P} \cap T^{\mathbb{C}} J^{-1}(0) = \mathcal{P}_{J^{-1}(0)}.$$

因此，$\mathcal{P}_{J^{-1}(0)}$ 是一个子丛，因此 $\mathcal{P}$ 是可约的。约化后的极化 $\mathcal{P}_0$ 是正定的，这由推论4。 6得出。 □

结合推论 4。 2应用这一结果，可得如下结论。

推论 4。 34。 若 I 是一个 *Kähler* 结构，则它在 M_0 上典范地诱导出一个 *Kähler* 结构。

例子4.35. 由定理 3.58 和推论 4.34可知，所有环面流形都是凯勒流形，而且事实上都配备了不变凯勒结构。设 动量映射 : $(M, \omega) \to \mathfrak{t}^*$ 是一个环面 $\mathbb{T}$-流形，其

n = 维($\mathbb{T}$)。由定理 3.58 动量映射 : $(M,\omega) \to \mathfrak{t}^*$ 与标准辛 $\mathbb{C}^N$ 的约化等变微分同胚，其中约化是相对于某个子环面 $K \leq (S^1)^N$的作用进行的。

现在令I_{can} 为 $\mathbb{C}^N$上的标准复结构。显然，I_{can} 在整个$(S^1)^N$ 作用下不变，因此在子环面K的作用下也不变。因此，根据推论4.34，I_{can} 在M_Δ上诱导出一个凯勒结构I_Δ。注意，通过 Delzant 构造， $\mathbb{T}$ 在M 上的作用可与 $(S^1)^N/K$ 在约化空间上的作用等同。特别地，由此可知，I_Δ 也必定在 $\mathbb{T}$的作用下不变。

另一极端当然是实极化。它们显然不是正极化，因此，要探讨它们何时可约，我们需要采取略有不同的方式。在陈述结论之前，先回顾一个标准定义（例如，[Hud24，例子2.7，(c)]。）

定义 4.36. 设M 为一个流形，且A、$B \subseteq M$ 是两个子流形。若A 与B **干净相交**，则称

(i) $A \cap B$ 是M的子流形。

(ii) $T_x(A \cap B) = T_xA \cap T_xB$ 对所有 $x \in A \cap B$。

命题 4.37. 设 $\mathcal{F} = \{L_x\}_{x\in M}$ 是 M 上的拉格朗日叶状结构。若 $\mathcal{F}$ 的叶与动量映射 $J^{-1}(0)$ 相交得干净且秩为常数，则该划分

$$\mathcal{F}_{J^{-1}(0)} = \bigcup_{L\in\mathcal{F}} \pi_0(L \cap J^{-1}(0))$$

是动量映射 $J^{-1}(0)$ 的正则叶状结构，并且

$$T\mathcal{F} \cap TJ^{-1}(0) = T\mathcal{F}_{J^{-1}(0)}$$

证明。 根据构造，$T^{\mathcal{F}_{J^{-1}(0)}}$ 是$TJ^{-1}(0)$的对合子丛。因此，根据弗罗贝尼乌斯定理（例如，参见 [Lee13，定理 19.12]），$T^{\mathcal{F}_{J^{-1}(0)}}$ 是动量映射$J^{-1}(0)$上一个正则叶状结构的切丛。 □

推论 4.38. 若 $\mathcal{P}$ 是实极化，且 $\mathcal{P}$ 的拉格朗日叶与动量映射 $J^{-1}(0)$ 以常秩干净相交，则 $\mathcal{P}$ 可约，且其约化 $\mathcal{P}_0$ 也是实的。此外，若 $x \in$ 属于动量映射 $J^{-1}(0)$，$L_x \in \mathcal{F}$ 是经过 $\tilde{}x$ 的拉格朗日叶，且 $L_{[x]} \subseteq M_0$ 是经过 $[x] \in M_0$, 的叶，那么

$$\pi_0^{-1}(\widetilde{L}_{[x]}) = L_x \cap J^{-1}(0).$$

4.5 余切丛上极化的约化

本文考察的另一类自然例子是余切丛，因为它们带有自然的实极化。设 G 是一个连通李群，Q 是一个适当 G-空间，且 $\tau_Q : T^*Q \to Q$ 是余切丛。如例 4.13 所示，T^*Q 具有自然极化 $\mathcal{P}_Q \subseteq T(T^*Q) \otimes \mathbb{C}$，它由丛映射 τ_Q 的导数之核的复化给出。回顾一下，当 Q 只有一种轨道类型时，我们在定理 3.61 中证明了约化 $(T^*Q)_0$ 与余切丛 $T^*(Q/G)$ 自然辛同构。当然，这也具有自然极化 $\mathcal{P}_{Q/G}$，它由丛映射 $\tau_{Q/G} : T^*(Q/G) \to Q/G$ 的核的复化给出。

命题 4.39. 假设 Q 只有一种轨道类型，并令

$$\phi : T^*(Q/G) \to (T^*Q)_0$$

为定理3.61中的辛同胚。那么， $\mathcal{P}_Q$ 按照定义 4.31的意义是可约的。此外，诱导的极化 $\mathcal{P}_0 \subseteq T^{\mathbb{C}}(T^*Q)_0$ 满足

$$T^{\mathbb{C}}\widetilde{\phi}(\mathcal{P}_{Q/G}) = \mathcal{P}_0.$$

证明。显然

$$\mathcal{P}_Q \cap T^{\mathbb{C}}J^{-1}(0) = \ker(T\tau_Q|_{J^{-1}(0)}) \otimes \mathbb{C}$$

因此， $\mathcal{P}_Q$ 是可约的，并且

$$\mathcal{P}_0 = T^{\mathbb{C}}\pi_0(\mathcal{P}_Q \cap T^{\mathbb{C}}J^{-1}(0))$$

是$(T^*Q)_0$上的实极化。记

$$\overline{\tau_Q} : (T^*Q)_0 \to Q/G$$

对于诱导投影，$(T^*Q)_0 \to Q/G$ 是定义在Q/G上的向量丛，而 $\mathcal{P}_0$ 与$(T^*Q)_0$ 由 τ_Q 的纤维构成的典范叶状结构重合。此外，映射

$$\widetilde{\phi} : T^*(Q/G) \to (T^*Q)_0$$

~也是一个向量丛同构。因此， ϕ 将 $\mathcal{P}_{Q/G}$ 映射到 $\mathcal{P}_0$。 □

5

几何量子化

量子化是一个术语，指的是各种各样的过程和技术：它们以对应于经典物理的数学对象（即牛顿、胡克、拉格朗日等人的物理学）为基础，生成一种量子类比。这是一个相当笼统的引言，但鉴于“量子化”有许多不同版本，且它们往往试图以截然不同的方式再现量子力学理论的不同方面，这种概括也是不得已而为之。接下来，我们将更具体地讨论几何量子化，至少是它最简单的形式。

总体思想是用辛流形 (M,ω)来表示经典物理系统。流形 M 本身应被视为某个系统的“相空间”，即一个系统可能具有的所有允许的位置和动量的集合。然后，用光滑函数 $C^\infty(M)$对可观测量进行建模，其中，特定函数 $f \in C^\infty(M)$被视为表示某种可通过实验直接测量的量。随后，辛形式在 $C^\infty(M)$上诱导出泊松代数的代数结构 $\{\cdot,\cdot\}$。如果给定一个与系统能量相对应的特定函数 $H \in C^\infty(M)$，那么我们就可以利用哈密顿-雅可比方程确定任意可观测量 $f \in C^\infty(M)$ 如何随时间演化：

$$\frac{d}{dt}(f \circ \phi^H(t)) = \{H, f\}(\phi^H(t)),$$

其中，$\phi^H(t)$ 表示 H 的哈密顿流。

在量子理论中，我们改用希尔伯特空间和自伴算子。这里有一个希尔伯特空间 $\mathcal{H}$，其射影化 $\mathcal{H}$ 中的元素对应于“波函数”，可视为量子力学系统的态。在此语境下，可观测量是自伴算子 $S(\mathcal{H})$（或者，更一般地说，是本质自伴算子 [Hal13]），算子 $A \in S(\mathcal{H})$ 所表示的可能取值由其谱中的元素给出。与经典情形相似，量子可观测量 $S(\mathcal{H})$ 也具有自然的李

代数结构，即对易子结构。给定 A、$B \in S(\mathcal{H})$ 以及 $\hbar > 0$，定义

$$[A, B]_\hbar := \frac{i}{\hbar}[A, B],$$

其中，$[\cdot, \cdot]$ 是算子的对易子。在这种情况下，如果我们有一个与能量对应的特殊可观测量 $H \in S(\mathcal{H})$，称为**哈密顿量**，那么我们还可以通过薛定谔方程追踪另一个可观测量 $A \in S(\mathcal{H})$随时间的变化

$$\frac{d}{dt}A(t) = [H, A(t)]_\hbar,$$

其中

$$A(t) = e^{itH/\hbar}Ae^{-itH/\hbar}$$

参见 Hall [Hal13]，了解有关这一形式体系的更多信息。

我们可以看到，经典力学的辛形式体系与量子力学的希尔伯特空间形式体系之间存在一些重要的相似之处。具体而言，二者都有一个状态空间、一组具有实李代数结构的可观测量，以及一个与能量对应的特殊算子的选择；该算子通过李括号决定可观测量如何变化。这引出了下面的量子化“定义”。

设(M, ω) 是一个辛流形。对(M, ω) 的量子化由一个希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 和一个李代数同态组成

$$\phi : C^\infty(M) \to S(\mathcal{H})$$

使得 $\phi(1) = \mathrm{id}_\mathcal{H}$。此外，偶对 $(\mathcal{H}, \phi)$ 应当是“极小的”

现在，究竟什么才算极小，将取决于你询问的对象。狄拉克有一个经典定义 [Dir82]，该定义进一步要求，应将 (M, ω) 上的一组完备函数映射为 $\mathcal{H}$上的一组完备自伴算子。正如 Groenewold 和 van Hove 所证明的 [Gro46]，对于欧几里得空间而言，这是不可能的。然而，正如 Gotay 所示，环面上确实存在狄拉克量子化 [Got95]，，因此这并非一个完全无法实现的梦想。本文不讨论狄拉克量子化，因此就谈到这里。

相反，让我们规定另一种版本的“极小性”。

定义 5.1 (量子化过程)。针对一组 $\mathcal{C}$ 辛流形的量子化过程由以下数据构成。

(i) 一个映射

$$\mathcal{Q} : \mathcal{C} \to \text{Hilbert Spaces}; \quad (M, \omega) \mapsto \mathcal{Q}(M, \omega)$$

为集合 $\mathcal{C}$ 中的每个辛流形指定一个希尔伯特空间。

(ii) 对每个辛流形 $(M, \omega) \in \mathcal{C}$，都有一个李子代数$\mathcal{A} \subseteq C^\infty(M)$，称为**可量子化函数**。

(iii) 对每个辛流形 (M, ω)，都有一个李代数同态

$$\mathcal{Q} : \mathcal{A} \to S(\mathcal{Q}(M, \omega)).$$

这些数据必须满足以下公理

(1) 若 $1_M \in C^\infty(M)$ 表示常数函数 1，则 $1_M \in \mathcal{A}$ 和$\mathcal{Q}(1_M) = \text{id}_{\mathcal{Q}(M,\omega)}$。

(2) 标准辛结构$(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0) \in \mathcal{C}$ 和

$$\mathcal{Q}(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0) = L^2(\mathbb{R}^n).$$

我现在将概述一种特定的量子化过程，称为“几何量子化”，其思想最终可追溯至 Kostant [Kos09],Kirillov [Kir62], 和 Souriau [Sou67]。

备注5.2。 在继续之前，最后说明一点：我们将采用所谓的“自然单位制”，令 $\hbar = 1$，因为我不想在讲解过程中一直追踪不必要的常数。特别是，自伴算子上的李括号现在将具有如下形式

$$[A, B]_1 = i[A, B].$$

留作练习，请读者在以下所有定义中的适当位置补上 $\hbar$。

5.1 预量子线丛

预量子线丛最早源自 Kirillov 的工作 [Kir62]，其目的是通过李群的余伴随轨道来构造李群的酉表示。在 Kostant [Kos09] 和 Souriau [Sou67],后续的工作中，预量子线丛被推广到更一般的辛流形，作为实现系统化量子化框架的潜在第一步。现在让我们看看，在给出正式定义之前，如何推导出这类对象。

为简单起见，假设我们有一个紧致辛流形(M,ω)。我们有与(M,ω)相关联的典范希尔伯特空间，即紧支撑复值函数$C^\infty(M,\mathbb{C})$构成的空间，其内积为

$$\langle f,g\rangle = \int_M f\overline{g}\frac{\omega^n}{n!},$$

其中g 表示逐点复共轭，且 $2n$ = 维(M)。辛结构为我们提供了一种将函数映射为算子（即哈密顿向量场）的方法。注意，若$f \in C^\infty(M)$ 且$g_1,g_2 \in C^\infty(M,\mathbb{C})$，则

$$\begin{aligned}\langle V_f g_1, g_2\rangle &= \int_M (V_f g_1)\overline{g_2}\frac{\omega^n}{n!}\\ &= \int_M (V_f(g_1\overline{g_2}) - g_2\overline{V_f g_2})\frac{\omega^n}{n!}\\ &= \int_M V_f(g_1\overline{g_2})\frac{\omega^n}{n!} - \langle g_1, V_f g_2\rangle\end{aligned}$$

利用$L_{V_f}\omega = 0$ 这一事实以及斯托克斯定理，我们得到

$$0 = \int_M V_f\left(g_1\overline{g_2}\frac{\omega^n}{n!}\right) = \int_M V_f(g_1\overline{g_2})\frac{\omega^n}{n!}.$$

因此，哈密顿向量场V^f 是$C^\infty(M,\mathbb{C})$上的反自伴算子。鉴于将函数映射为其哈密顿向量场是一个李代数同态，我们由此得到对量子化映射的第一个猜想，即

$$C^\infty(M) \to S(C^\infty(M,\mathbb{C})); \quad f \mapsto -iV_f, \tag{5.1}$$

这已经使我们向定义5.1中的量子化方案迈进了一步，但我们很快就遇到了问题。具体来说，若$1_M \in C^\infty(M)$ 是常数函数 1，则$V_{1_M} = 0$，这违反了定义5.1中的公理（1）。只需在方程（5.1）的映射中再添加一项，就可以轻松解决这一问题。对任意$f \in C^\infty(M)$，定义逐点乘法算子

$$m_f : C^\infty(M) \to S(C^\infty(M,\mathbb{C})); \quad g \mapsto m_f g,$$

其中，对所有m^f 李代数 $g(x)$ $=f(x)$李代数 $g(x)\,x$ $\in M$ 以及g $\in C^\infty(M)$都成立。于是我们得到一个新的映射，它映到自伴算子上

$$C^\infty(M) \to S(C^\infty(M,\mathbb{C})); \quad f \mapsto -iV_f + m_f \tag{5.2}$$

现在映射 1_M 到单位元。然而，方程（5.2）中的映射不是李代数同态！事实上，给定f、$g \in C^\infty(M)$，我们有

$$\begin{aligned} i[-iV_f + m_f, -iV_g + m_g] &= -i[V_f, V_g] + [V_f, m_g] + [m_f, V_g] + i[m_f, m_g] \\ &= -iV_{\{f,g\}} + [V_f, m_g] + [m_f, V_g] + i[m_f, m_g] \end{aligned}$$

通过对测试函数$f \in C^\infty(M, \mathbb{C})$作用，我们得到

$$\begin{aligned} [V_f, m_g] &= m_{\{f,g\}} \\ [m_f, m_g] &= 0. \end{aligned}$$

因此，

$$i[-iV_f + m_f, -iV_g + m_g] = -iV_{\{f,g\}} + 2m_{\{f,g\}} \neq -iV_{\{f,g\}} + m_{\{f,g\}}.$$

为解决这一问题，假设 ω 是恰当的，即 $\omega = d\theta$，其中 $\theta \in \Omega^1(M)$ 是某个 1-形式。于是，对于任意函数$f \in C^\infty(M)$，我们可以在方程（5.2）中加入一个修正项，即 $\theta(Vf)$。这为我们提供了第三个可能的映射

$$\mathcal{Q}_{pre} : C^\infty(M) \to S(C^\infty(M, \mathbb{C})); \quad f \mapsto -iV_f + m_{\theta(V_f)} + m_f \tag{5.3}$$

很容易验证它满足公理（1），并且是一个李代数同态。事实上，我们首先看到

$$\mathcal{Q}_{pre}(1_M) = iV_{1_M} + m_{\theta(1_M)} + m_{1_M}$$

正如我们已经看到的，$V_{1_M} = 0$，因此

$$\mathcal{Q}_{pre}(1_M) = i \cdot 0 + m_{\theta(0)} + m_{1_M} = m_{1_M} = \mathrm{id}_{C^\infty(M,\mathbb{C})}$$

至于它是李代数同态这一点，对于任意f、$g \in C^\infty(M)$，利用先前的计算，我们得到

$$\begin{aligned} i[\mathcal{Q}_{pre}(f), \mathcal{Q}_{pre}(g)] &= i[-iV_f + m_{\theta(V_f)} + m_f, -iV_g + m_{\theta(V_g)} + m_g] \\ &= -iV_{\{f,g\}} + 2m_{\{f,g\}} + [V_f, m_{\theta(V_g)}] + [m_{\theta(V_f)}, V_g]. \end{aligned}$$

再次，对测试函数进行作用，我们得到

$$[V_f, m_{\theta(V_g)}] + [m_{\theta(V_f)}, V_g] = m_{V_f\theta(V_g) - V_g\theta(V_f)}.$$

注意到

$$\omega(V_f, V_g) = V_f\theta(V_g) - V_g\theta(V_f) - \theta([V_f, V_g]).$$

因此，由于 $-\{f、\text{李代数 } g\} = \omega(Vf、Vg)$ 以及 $[Vf、V_g] = V_{\{f、\text{李代数 } g\}}$，我们得出

$$[V_f, m_{\theta(V_g)}] + [m_{\theta(V_f)}, V_g] = -m_{\{f,g\}} + m_{\theta(V_{\{f,g\}})}.$$

因此，

$$\begin{aligned} i[\mathcal{Q}_{pre}(f), \mathcal{Q}_{pre}(g)] &= -iV_{\{f,g\}} + 2m_{\{f,g\}} - m_{\{f,g\}} + m_{\theta(V_{\{f,g\}})} \\ &= -iV_{\{f,g\}} + +m_{\theta(V_{\{f,g\}})} + m_{\{f,g\}} \\ &= \mathcal{Q}_{pre}(\{f,g\}). \end{aligned}$$

当然，一般的辛流形并不一定是恰当的，即辛形式不一定具有全局原始元。因此，原则上我们需要取 M 的一个开覆盖，在该覆盖上 ω 的原函数存在，然后将这些原函数粘合起来，以得到一个良定义的全局算子。这样做的代价是，我们的预希尔伯特空间不再是 $C^\infty(M,\mathbb{C})$，而是一个复线丛的截面。这便引出了预量子线丛的定义。

定义 5.3 （预量子线丛）。设 (M,ω) 是一个辛流形。预量子线丛是 M $\mathcal{L} \to M$ 上的一个厄米复线丛，并带有一个相容联络

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \otimes \Gamma(\mathcal{L}) \to \Gamma(\mathcal{L}); \quad X \otimes \sigma \mapsto \nabla_X \sigma$$

使得，如果 $V、W \in \mathfrak{X}(M)$ 是向量场，且 $\sigma \in \Gamma(\mathcal{L})$ 是一个截面，那么

$$\nabla_V(\nabla_W\sigma) - \nabla_Y(\nabla_V\sigma) - \nabla_{[V,W]}\sigma = i\omega(V,W) \tag{5.4}$$

我们称 ∇ 为预量子联络，并将 $(\mathcal{L},\nabla) \to (M,\omega)$ 记作预量子线丛的数据。

例子 5.4. 在正式定义预量子线丛之前的讨论表明，任何恰当辛流形都存在预量子线丛。更形式地，设(M,ω) 是一个辛流形，且 $\omega = d\theta$，其中某个 $\theta \in \Omega^1(M)$。令

$$\mathcal{L} = M \times \mathbb{C}$$

在 $\mathbb{C}$上采用标准厄米结构。将 $\Gamma(\mathcal{L}) = C^\infty(M, \mathbb{C})$对应起来，定义

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \otimes C^\infty(M,\mathbb{C}) \to C^\infty(M,\mathbb{C}); \quad V \otimes f \mapsto L_V f + i\theta(V)f,$$

其中 $L_V f$ 是 f 沿 V的李导数。几乎完全重复我们在证明方程（5.3）中的映射时所进行的计算，我们可以很容易地证明

$$[\nabla_V, \nabla_W] - \nabla_{[V,W]} = id\theta(V,W) = i\omega(V,W).$$

因此，$(\mathcal{L}, \nabla) \to (M, \omega)$ 是一个预量子线丛。

如上文所述，恰当情形对应于预量子线丛的局部图景。若$(\mathcal{L}, \nabla) \to (M, \omega)$ 是一个预量子线丛，那么在一个平凡化邻域$U \subseteq M$ 上，使得 $\mathcal{L}|_U \cong U \times \mathbb{C}$作为复线丛，我们可以将 $\Gamma(\mathcal{L}|_U)$ 与$C^\infty(U, \mathbb{C})$相识别。在此识别下，我们得到一个由 $\alpha \in \Omega^1(U, \mathbb{C})$定义的典范复值1-形式，其定义为

$$\alpha(X) = \nabla_X(1_U),$$

其中，$1_U \in C^\infty(U)$ 是常数1-函数。利用方程（5.4）可以验证，α 实际上是纯虚的，即对于某个实值1-形式$\theta \in \Omega^1(U)$，有 $\alpha = i\theta$，并且该实值1-形式 θ 是 ω的原函数，即$d\theta = \omega$。通过上述讨论，我们概述了以下证明。

命题 5.5. 设 $(\mathcal{L}, \nabla) \to (M, \omega)$ 是一个预量子线丛，$U \subseteq M$ 是一个开子集，并且

$$\phi : \mathcal{L}|_U \to U \times \mathbb{C}$$

一个平凡化。于是，将 $\mathcal{L}|_U \to U$ 的截面识别为复值光滑函数 $C^\infty(U, \mathbb{C})$后，存在一个 1-形式 $\theta \in \Omega^1(U)$，使得 $d\theta = \omega|_U$，从而 ∇ 可识别为

$$\nabla_V f = L_V f + i\theta(V) f,$$

其中 L_V 表示 f 沿 V 的李导数。

因此，我们可以将方程（5.3）定义的映射转化为联络的语言，从而得到以下定义。

定义 5.6 (预量子算子)**.** 设 $(\mathcal{L}, \nabla) \to (M, \omega)$ 是一个预量子线丛，且 $f \in C^\infty(M)$。定义 f 的**预量子算子**为作用于截面上的线性算子

$$\mathcal{Q}_{pre}(f) : \Gamma(\mathcal{L}) \to \Gamma(\mathcal{L})$$

定义为

$$\mathcal{Q}_{pre}(f) = -i\nabla_{V_f} + m_f,$$

其中，mf是由f定义的逐点乘法算子。

正如上述局部描述所预期的，预量子化算子满足定义2的公理（5。1）。

命题 5.7： 设f、$g \in C^\infty(M)$，则

$$i[\mathcal{Q}_{pre}(f), \mathcal{Q}_{pre}(g)] = \mathcal{Q}_{pre}(\{f,g\}).$$

此外，$\mathcal{Q}_{pre}(1) = id_{\Gamma(\mathcal{L})}$。

证明。固定f、$g \in C^\infty(M)$。于是，作为作用在$\Gamma(\mathcal{L})$上的算子

$$\begin{aligned} i[\mathcal{Q}_{pre}(f), \mathcal{Q}_{pre}(g)] &= i[-i\nabla_{V_f} + m_f, -i\nabla_{V_g} + m_g] \\ &= -i[\nabla_{V_f}, \nabla_{V_g}] + [\nabla_{V_f}, m_g] + [m_f, \nabla_{V_g}] + i[m_f, m_g]. \end{aligned}$$

首先，显然$[mf$和$m_g] = 0$都是逐点乘以实值函数的算子。接下来，由于∇是一个联络，对于任意$\sigma \in \Gamma(\mathcal{L})$

$$[\nabla_{V_f}, m_g]\sigma = \nabla_{V_f}(g\sigma) - g\nabla_{V_f}\sigma = (V_f g)\sigma = \{f,g\}\sigma.$$

因此，在上述结果中交换f和g，可得

$$[\nabla_{V_f}, m_g] + [m_f, \nabla_{V_g}] = 2m_{\{f,g\}}.$$

最后，∇上的预量子条件给出

$$\begin{aligned} [\nabla_{V_f}, \nabla_{V_g}] &= \nabla_{[V_f,V_g]} + i\omega(V_f, V_g) \\ &= \nabla_{V_{\{f,g\}}} - im_{\{f,g\}}, \end{aligned}$$

这里我们用到了以下事实：$[Vf, V_g] = V_{\{f,\ g\}}$以及$\omega(Vf, Vg) = -\{f, g\}$由命题3.25得到。因此，

$$\begin{aligned} i[\mathcal{Q}_{pre}(f), \mathcal{Q}_{pre}(g)] &= -i(\nabla_{V_{\{f,g\}}} - im_{\{f,g\}}) + 2m_{\{f,g\}} \\ &= -i\nabla_{V_{\{f,g\}}} + m_{\{f,g\}} \\ &= \mathcal{Q}_{pre}(\{f,g\}) \end{aligned}$$

正如所需。$\mathcal{Q}_{pre}(1_M) = \mathrm{id}_{\Gamma(\mathcal{L})}$由以下事实可得：$V_{1_M} = 0$。 □

与紧致正合辛流形的情形一样，如果M是紧致的，那么我们可以通过以下方式将$\Gamma(\mathcal{L})$变成一个希尔伯特空间

$$\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle = \int_M (\sigma_1, \sigma_2) \frac{\omega^n}{n!}$$

其中 $2n = 是(M)$ 的维数，且$(\cdot,\cdot)$ 是 $\mathcal{L}$上的厄米结构。在这种情况下，对于所有$f \in C^\infty(M)$，都有$\mathcal{Q}_{pre}(f) \in S(\Gamma(\mathcal{L}))$。如果$M$不是紧致的，那么我们需要对紧支撑截面空间 $\Gamma_0(\mathcal{L})$取希尔伯特空间完备化；在这种情况下， $\mathcal{Q}_{pre}(f)$ 将仅为本质自伴。

因此，预量子线丛似乎为辛流形的量子化提供了一个相当有希望的方向。不过，我们现在必须问：哪些辛流形允许存在预量子线丛？根据命题 5.5$(\mathcal{L},\nabla)$ ，只要将辛形式 ω 恰当的邻域上的局部平凡化粘合起来，就能得到一个预量子线丛。这一过程只有在 ω满足整性条件时才能成功。特别地，利用切赫上同调的论证，可以证明以下结论。

定理 5.8 ([Koso9])**.** 当且仅当上同调类 $\frac{1}{\hbar}[\omega] \in H^2(M)$ 属于以下映射的像时，辛流形(M,ω) 才允许存在预量子线丛

$$H^2(M,\mathbb{Z}) \to H^2(M).$$

这相当不错，因为它表明了与量子化相关的离散性质，例如电子在原子中能够处于离散轨道。不过，正如下一个例子所示，就量子化而言，预量子线丛并非故事的全部。

例子 5.9. 设 $(M,\ \omega) = (\mathbb{R}^{2n},\omega_{can})$ 是标准辛结构 $\mathbb{R}^{2n}$。也就是说，将 $(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n)$ 记作 $\mathbb{R}^{2n}$ 上的坐标，我们有

$$\omega_{can} = \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dy_i.$$

使用原函数

$$\theta = -\sum_{i=1}^{n} y_i dx_i$$

关于 ω 并利用例子 5.4，预量子算子作用的希尔伯特空间是$C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n},\mathbb{C})$的完备化。容易计算得出，该空间为 $L^2(\mathbb{R}^{2n})$，但这并非正确的希尔伯特空间！

从上面的例子可以看出，预量子线丛产生的希尔伯特空间“过于庞大”，因为它依赖的变量太多。这是一个严重的问题，因为位置和动量的不确定性原理等重要的量子力学性质，在预量子

线丛所产生的空间中并不成立。因此，我们需要修改这一过程，减少变量。极化可以实现这一点。

现在记录预量子线丛的一些基本性质，后文将会用到。

命题 5.10. 设 $(\mathcal{L}, \nabla) \to (M, \omega)$ 是一个预量子线丛，$\sigma \in \Gamma(\mathcal{L})$，且 $x \in M$。若 $V, W \in \mathfrak{X}(M)$ 且 $V_x = W_x$，则

$$\nabla_V \sigma(x) = \nabla_W \sigma(x).$$

证明。固定 $x \in M$、一个截面 $\sigma \in \Gamma(\mathcal{L})$，以及满足 $V_x = W_x$ 的向量场 V、$W \in \mathfrak{X}(M)$。令 $U \subseteq M$ 为 $\mathcal{L}$ 的一个平凡化邻域。于是，根据命题 5.5，将截面 $\Gamma(\mathcal{L}|_U)$ 识别为复值函数 $C^\infty(U, \mathbb{C})$ 后，我们可以将联络 ∇ 识别为算子

$$\nabla = L + i\theta,$$

其中 L 是向量场的李导数算子，而 $\theta \in \Omega^1(U)$ 是 ω 的一个局部原函数。通过平凡化，我们可以将 $\sigma|_U$ 识别为函数 $h \in C^\infty(U, \mathbb{C})$。于是，

$$\nabla_V h(x) = V_x h + i\theta(V_x)h(x) = W_x h + i\theta(W_x)h(x) = \nabla_W h(x).$$

□

推论 5.11： 对于每个 $\sigma \in \Gamma(\mathcal{L})$ 以及 $v \in T^{\mathbb{C}}M$，定义

$$\nabla_v \sigma := \nabla_V \sigma, \tag{5.5}$$

其中，$V \in \mathfrak{X}^{\mathbb{C}}(M)$ 是任意复向量场，且 $V_x = v$。则映射

$$\nabla\sigma : T^{\mathbb{C}}M \to L; \quad v \mapsto \nabla_v \sigma \tag{5.6}$$

该映射是良定义的复向量丛之间的光滑映射。

证明。 根据命题 5.10，公式 (5.6) 中的映射是良定义的。为证明其光滑性，固定 $x \in M$，并令 $U \subseteq M$ 为一个具有标架 $V_1, \ldots, V_n \in \mathfrak{X}^{\mathbb{C}}(U)$ 的开邻域，其中该标架属于 $T^{\mathbb{C}}U$。则映射

$$U \times \mathbb{C}^k \to T^{\mathbb{C}}U; \quad (y, \lambda^1, \ldots, \lambda^k) \mapsto \sum_{i=1} \lambda^i (V_i)_y$$

是一个向量丛同构。现在定义

$$\phi : U \times \mathbb{C}^k \to L|_U; \quad (y, \lambda^1, \ldots, \lambda^k) \mapsto \sum_{i=1} \lambda^i \nabla_{V_i} \sigma(y)$$

那么， $\nabla\sigma$ 符合图表

$$\begin{array}{ccc} T^{\mathbb{C}}U & \xrightarrow{\nabla\sigma} & L|_U \\ \uparrow & \nearrow_{\phi} & \\ U \times \mathbb{C}^k & & \end{array}$$

因此， $\nabla\sigma$ 是光滑的。 □

5.2 几何量子化

定义5.12 （量子化数据，几何量子化）。 我将量子化数据定义为一个三元组 $(M, \mathcal{P}, \mathcal{L})$，其中 M 是一个辛流形，$\mathcal{P}$ 是 M上的一个极化，而 $\mathcal{L}$ 是 M上的一个预量子线丛。于是，我们将该三元组的几何量子化定义为

$$\mathcal{Q}(M, \mathcal{P}, \mathcal{L}) := \{\sigma \in \Gamma(\mathcal{L}) \mid \nabla_{\mathcal{P}}\sigma \equiv 0\}.$$

如果根据上下文可以确定 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{L}$，我们就写作

$$\mathcal{Q}(M) = \mathcal{Q}(M, \mathcal{P}, \mathcal{L}).$$

例子 5.13。 回到我们讨论辛 $\mathbb{R}^{2n}$的例子。定义

$$\mathcal{P}_{\mathbb{R}} = \operatorname{span}_{\mathbb{C}}\left(\frac{\partial}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y_n}\right)$$

那么 $\mathcal{P}$ 就是 $\mathbb{R}^{2n}$的极化。使用相同的预量子线丛$\mathcal{L} = \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{C}$，我们得到

$$\mathcal{Q}(\mathbb{R}^{2n}) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{C}) \mid f(x, y) = g(x) \text{ for some } g \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})\}$$

它可以被识别为 $C^\infty(\mathbb{R}^n)$。注意，这恰好就是极化函数 $\mathscr{O}_{\mathcal{P}_{\mathbb{R}}}$的空间。当然，我们还可以通过识别 $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$获得另一种典范极化。令$I_{can}$ 表示典范复结构，则

$$\mathcal{P}_{\mathbb{C}} = T^{0,1}\mathbb{R}^{2n}.$$

在这种情况下，如果我们使用原函数

$$\theta = -\frac{i}{2}\sum \overline{z}_j dz_j$$

那么 $\mathcal{Q}(\mathbb{R}^{2n}) = \mathscr{O}_{\mathcal{P}_{\mathbb{C}}}$ 这恰好是 $\mathbb{R}^{2n}$ 上的全纯函数空间。

正如上文所见，几何量子化未必会得到希尔伯特空间。事实上，半形式或亚纯辛构造等进一步的步骤会提供所需的额外数据。关于这类构造的概述，参见 Sniatycki [Śn75] 。不过，利用与上述证明非常相似的思路，我们可以证明以下关于余切丛几何量子化的结论。

定理 5.14。 T^*Q 的量子化等于极化函数$\mathcal{O}_{\mathcal{P}}(T^*Q)$。特别地，我们有等式

$$\mathcal{Q}(T^*Q) = \tau^* C^\infty(Q, \mathbb{C}).$$

证明。 设$f \in C^\infty(T^*Q, \mathbb{C})$。那么，当且仅当对任意$\alpha \in T^*Q$ 以及 $V \in T_\alpha(T^*_{\tau(\alpha)}Q)$ ，都有$f \in \mathcal{Q}(T^*Q)$

$$\nabla_V f = Vf + i\theta(V)f = 0. \tag{5.7}$$

注意，根据构造，当 $\theta(V) = 0$若 V 与余切纤维相切，则成立。因此，$\mathcal{Q}(T^*Q)$ 与极化函数$\mathcal{O}_{\mathcal{P}}(T^*Q)$重合。根据方程（5.7），有

$$\mathcal{O}_{\mathcal{P}}(T^*Q) = \tau_Q^* C^\infty(Q, \mathbb{C}).$$

□

5.3 量子化与约化相交换

以下内容中，G 均表示一个连通李群，而 $J : (M, \omega) \to \mathfrak{g}^*$表示一个适当的哈密顿 G-空间。

定义 5.15 （等变预量子线丛）。 预量子线丛$(\mathcal{L}, \nabla) \to (M, \omega)$ 称为等变的，如果 $L \to M$ 配备了一个 G-等变线丛的结构，并且对于每个 $\xi \in \mathfrak{g}$ 和$\sigma \in \Gamma(\mathcal{L})$ ，都有

$$\xi \cdot \sigma = \nabla_{\xi_M}\sigma + iJ^\xi\sigma,$$

其中 $\xi \cdot \sigma \in \Gamma$（$\mathcal{L}$）定义为

$$(\xi \cdot \sigma)(x) := \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \exp(t\xi)\sigma(\exp(-t\xi) \cdot x)$$

例子 5.16。 设 (M, ω) 是一个辛流形，其辛形式 ω 是恰当的，并选定了一个原函数 $\theta \in \Omega^1(M)$。回忆例—

子5.4 我们有一个典范预量子线丛，即平凡丛$\mathcal{L} = M \times \mathbb{C}$ 以及联络

$$\nabla = L + i\theta.$$

现在假设连通李群 G 以适当且哈密顿的方式作用在 M 上

$$J : M \to \mathfrak{g}^*.$$

如果我们令 $\mathcal{L}$ 在第二个因子上取平凡作用，那么对于任意$\xi \in \mathfrak{g}$ 和$f \in C^\infty(M, \mathbb{C})$，

$$\xi \cdot f = \xi_M f.$$

因此，等变条件归结为

$$\xi_M f = \xi_M f + i\theta(\xi_M)f + iJ^\xi f$$

因此，∇ 是等变的，当且仅当

$$\theta(\xi_M) = -J^\xi \tag{5.8}$$

对所有 $\xi \in \mathfrak{g}$均成立。更一般地，如果我们还有一个表示

$$\rho : G \to \mathbb{C}^\times$$

并利用它对 $\mathcal{L}$的第二个因子施加非平凡作用，那么对于任意$\xi \in \mathfrak{g}$ 和$f \in C^\infty(M, \mathbb{C})$，我们有

$$\xi \cdot f = \rho_*(\xi)f + \xi_M f,$$

其中我们将 $\rho_*(\xi) \in \mathbb{C}$视为。因此，$\nabla$ 是等变的，当且仅当

$$\theta(\xi_M) = -J^\xi - i\rho_*(\xi)$$

对所有 $\xi \in \mathfrak{g}$均成立。注意，只有当 $\rho_*(\xi) \in i\mathbb{R}$ 时，这才有意义；如果 ρ 是酉表示，即其像包含于$S^1 \subseteq \mathbb{C}^\times$中，则这一点必然成立。

例子 5.17. 我们将在下文的例子 5.16中看到满足方程（5.8）的 1-形式，但实际上，我们可以从余切丛中得到大量例子。设 G 为连通李群，Q 为适当的 G-空间。设 $J : (T^*Q, \omega) \to \mathfrak{g}^*$ 为 T^*Q 上诱导的哈密顿G-空间结构，其辛形式取为典范辛形式，其中

$$\langle J(\alpha), \xi \rangle = \langle \alpha, \xi_Q \rangle$$

对于 $\alpha \in T^*Q$，$\xi \in \mathfrak{g}$，而 $\xi_Q \in \mathfrak{X}(Q)$ 为相应的基本向量场。典范辛形式当然有一个典范原函数，即刘维尔 1-形式 $\theta \in \Omega^1(Q)$的相反数。注意，若 $\tau : T^*Q \to Q$ 是丛映射，$\alpha \in T^*Q$，且 $\xi \in \mathfrak{g}$，则由于 τ 是等变的，我们有

$$\theta_\alpha(\xi_{T^*Q}(\alpha)) = \langle \alpha, T_\alpha\tau(\xi_{T^*Q}(\alpha))\rangle = \langle \alpha, \xi_Q(\tau(\alpha))\rangle = J^\xi(\alpha).$$

因此，$-\theta$ 满足方程（5.8），因此平凡预量子线丛$\mathcal{L} = T^*Q \times \mathbb{C}$ 配备联络 $\nabla = L - i\theta$ 是一个等变预量子线丛。

由于动量映射的等变性，水平集$J^{-1}(0)$在G的作用下保持不变。因此，等变预量子线丛在该集合上的限制$\mathcal{L}|_{J^{-1}(0)}$ 也如此。由此，我们现在可以形式化地定义预量子线丛的约化。

定义 5.18（预量子线丛的约化）。 设G 为连通李群，$J : (M, \omega) \to \mathfrak{g}^*$ 为适当的哈密顿G-空间，且$(\mathcal{L}, \nabla) \to (M, \omega)$ 为等变预量子线丛。定义沿 **0水平集的 $\mathcal{L}$ 约化-水平集** 为

$$\mathcal{L}_0 := (\mathcal{L}|_{J^{-1}(0)})/G. \tag{5.9}$$

以下讨论中，我们固定一个等变预量子线丛$(\mathcal{L}, \nabla) \to (M, \omega)$。定理2.35 和命题2.39 的直接应用可得以下结论。

引理 5.19. 假设动量映射$^{-1}(0) \subseteq M$ 是一个嵌入子流形；此外，假设动量映射$^{-1}(0)$ 只有一种轨道类型。记 π_M : 动量映射$^{-1}(0) \to M_0$ 和$\pi_{\mathcal{L}} : \mathcal{L}|_{J^{-1}(0)} \to \mathcal{L}_0$ 为商映射。若该映射

$$J^{-1}(0) \times \Gamma(\mathcal{L})^G \to \mathcal{L}; \quad (x, \sigma) \mapsto \sigma(x) \tag{5.10}$$

是满射，则有以下结论。

(i) 诱导映射 $\mathcal{L}_0 \to M_0$ 是 M_0上的光滑复线丛。

(ii) 投影 $\pi_{\mathcal{L}}$: $\mathcal{L}|_{J^{-1}(0)} \to \mathcal{L}_0$ 诱导一个双射

$$\kappa : \Gamma(\mathcal{L}|_{J^{-1}(0)})^G \to \Gamma(\mathcal{L}_0)$$

(iii) 映射

$$\kappa : \Gamma(\mathcal{L})^G \to \Gamma(\mathcal{L}_0); \quad \sigma \mapsto \kappa(\sigma|_{J^{-1}(0)})$$

是满射。

注5.20。 如果G 在动量映射$^{-1}(0)$上自由作用，那么映射满足以下假设

$$J^{-1}(0) \times \Gamma(\mathcal{L})^G \to \mathcal{L}|_{J^{-1}(0)}$$

这是自动成立的。然而，如果G 在$J^{-1}(0)$ 上的作用不是自由的，那么

$$J^{-1}(0) \times \Gamma(\mathcal{L})^G \to \mathcal{L}|_{J^{-1}(0)}$$

不一定是满射。这一事实的主要结果是， $\mathcal{L}_0 =(\mathcal{L}|_{J^{-1}(0)})/G$ 不一定是流形，因此也不一定是线丛。要了解这种情况如何发生，请看下面的例子。设 $M = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$，并令 $\mathcal{L} = M \times \mathbb{C}$ 为平凡丛。赋予M 典范的S^1 作用

$$S^1 \times M \to M; \quad (t,(x,y)) \mapsto (t \cdot x, y),$$

其中$t \cdot x$ 是S^1 在 $\mathbb{R}^2$上的标准作用。再考虑由包含映射给出的标准表示 $\rho : S^1 \to \mathbb{C}^\times$ 。容易验证，动量映射为

$$J : M \to \mathbb{R}; \quad (x,y) \mapsto \frac{\|x\|^2}{2}.$$

根据例子 5.16，一个等变联络由辛形式的原函数$\theta \in \Omega^1(M)$ 确定，该原函数满足

$$\theta(\xi_M) = J^\xi - i\rho_*(\xi) \tag{5.11}$$

对所有 $\xi \in \mathfrak{g} = \mathbb{R}$均成立。令 β 为第二个因子上标准辛形式的任意原函数，并考虑原函数

$$\theta = \frac{-x_2 dx_1 + x_1 dx_2}{2} + pr_2^* \beta$$

在 $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$上显然有 θ 满足方程（5.11）。现在，由于我们通过典范的S^1 作用作用于 $\mathbb{C}^\times$，可见在动量映射$^{-1}(0)$ $=\{0\} \times \mathbb{R}^2$

$$C^\infty(J^{-1}(0), \mathbb{C})^{S^1} = \{0\}$$

此外，我们有

$$\mathcal{L}|_{J^{-1}(0)} \cong \mathbb{R}^2 \times (\mathbb{C}/S^1)$$

它不是动量映射动量映射$^{-1}(0)$上的线丛。

为了解决映射

$$J^{-1}(0)\times\Gamma(\mathcal{L})^G\to\mathcal{L};\quad (x,\sigma)\mapsto\sigma(x)$$

通常不必是满射；可以将此分析扩展到考察**轨道丛**，如 [MS99] 中所做的那样。不过，出于本文的目的，我们将满足于采用限制性更强的等变条件。

作为上述结果的一个特例，我们得到以下 Guillemin 和 Sternberg定理。

定理 5.21 ([GS82]). 设0 是动量映射 J 的正则值，且 G 在 $J^{-1}(0)$上自由作用。那么 L_0 存在唯一的预量子联络 ∇^0，具有如下性质：

$$\pi^*\nabla^0=\iota^*\nabla,$$

其中 $\pi:J^{-1}(0)\to M_0$ 是商映射，而 $\iota:J^{-1}(0)\hookrightarrow M$ 是包含映射。

证明这一点的方法是，取 G-不变的平凡化邻域，它们覆盖 $J^{-1}(0)$ 中的各点，并证明辛形式的局部原函数是基本的，因此可下降为约化辛形式的原函数。此方法要求 G 自由作用，因此我们需要作出调整，以推广到引理5.19所述的更一般（但仍为非奇异！）情形。为建立这一更一般的方法，回顾推论2.40：若$J^{-1}(0)$ 是一个嵌入子流形，且只有一种轨道类型，则约化映射 $\pi_0:J^{-1}(0)\to J^{-1}(0)/G=M_0$ 诱导一个满射

$$(\pi_0)_*:\mathfrak{X}(J^{-1}(0))^G\to\mathfrak{X}(M_0).$$

利用这个映射，我们可以如下构造 ∇^0。令$V\in\mathfrak{X}(M_0)$ 和$\sigma\in\Gamma(\mathcal{L}_0)$，求取到$W\in\mathfrak{X}(M,$动量映射$^{-1}(0))^G$ 以及 $\tau\in\Gamma(\mathcal{L})^G$ 的提升，使得

$$(\pi_0)_*(W|_{J^{-1}(0)})=V\quad\text{and}\quad\kappa(\tau)=\sigma.$$

然后定义

$$\nabla^0_V\sigma:=\kappa(\nabla_W\tau).\tag{5.12}$$

根据推论 2.40 和引理 5.19，W 和 τ 均保证存在。现在的问题是证明 ∇^0 是良定义的、光滑的，并且是一个预量子联络。

定理 5.22。假设 $J^{-1}(0)\subseteq M$ 是一个仅具有一种轨道类型的嵌入子流形，并且假设

$$J^{-1}(0)\times\Gamma(\mathcal{L})^G\to\mathcal{L};\quad (x,\sigma)\mapsto\sigma(x)$$

是满射的。则以下结论成立。

(*i*) 假设 σ_1, $\sigma_2 \in \Gamma(\mathcal{L})^G$ 以及 $V_1, V_2 \in \mathfrak{X}(M、J^{-1}(0))^G$ 满足

$$\sigma_1|_{J^{-1}(0)} = \sigma_2|_{J^{-1}(0)}$$

and

$$(\pi_0)_*(V_1|_{J^{-1}(0)}) = (\pi_0)_*(V_2|_{J^{-1}(0)}).$$

那么，

$$\nabla_{V_1}\sigma_1|_{J^{-1}(0)} = \nabla_{V_2}\sigma_2|_{J^{-1}(0)}. \tag{5.13}$$

(ii) $\mathcal{L}_0 = (\mathcal{L}|_{J^{-1}(0)})/G$ 在典范意义下是 M_0 =动量映射$^{-1}(0)/G$ 上的预量子线丛，其预量子联络 ∇^0 由下式给出

$$\nabla^0_V\sigma = \kappa(\nabla_W\tau),$$

其中 $W \in \mathfrak{X}(M$,动量映射$^{-1}(0))^G$ 以及 $\tau \in \Gamma(\mathcal{L})^G$ 满足

$$(\pi_0)_*W|_{J^{-1}(0)} = V \quad and \quad \kappa(\tau) = \sigma.$$

证明. (i) 固定等变截面 $\sigma_1, \sigma_2 \in \Gamma(\mathcal{L})^G$ 以及可限制的向量场 $V_1, V_2 \in \mathfrak{X}($M, 动量映射$^{-1}(0))^G$，使其满足 $\sigma_1|_{J^{-1}(0)} = \sigma_2|_{J^{-1}(0)}$ 和 $(\pi_0)_*(V_1|_{J^{-1}(0)}) = (\pi_0)_*(V_2|_{J^{-1}(0)})$。注意到

$$\nabla_{V_1}\sigma_1 - \nabla_{V_2}\sigma_2 = \nabla_{V_1}(\sigma_1 - \sigma_2) + \nabla_{V_1 - V_2}\sigma_2$$

我断言，这两项限制到动量映射$^{-1}(0)$后均为零。

为证明第一项为零，取 $x \in$ 动量映射$^{-1}(0)$，并令 $U \subseteq M$ 为 $\mathcal{L}$的平凡化邻域。然后，选取同构 $\mathcal{L}|_U \to U \times \mathbb{C}$后，我们可以将 $\Gamma(\mathcal{L}|_U)$ 识别为 $C^\infty(U, \mathbb{C})$。因此，由于 $\sigma_1 = \sigma_2$ 位于动量映射 $^{-1}(0)$ 上，我们可以将 $\sigma_1 - \sigma_2$ 识别为一个函数 $f \in C^\infty(U, \mathbb{C})$，其中 $f|_{J^{-1}(0)} = 0$。此外，我们可以找到 $\omega|_U$ 的局部原函数 $\alpha \in \Omega^1(U)$，使得

$$\nabla = d + i\alpha.$$

因此，

$$\nabla_{V_1}(f) = V_1 f + i\alpha(V_1)f.$$

利用$f(x) = 0$这一事实，我们得到

$$\nabla_{V_1}f(x) = (V_1)_x f.$$

由于V_1 与动量映射$^{-1}(0)$ 相切，且f 在动量映射$^{-1}(0)$上消失，因此有$(V_1)_f = 0$。由于这对任何与动量映射$^{-1}(0)$相交的平凡化邻域都成立，我们得到 $\nabla_{V_1}(\sigma_1 - \sigma_2)|_{J^{-1}(0)} = 0$。

现在来看第二项。由于 $(\pi_0)_* V1|_{J^{-1}(0)} = (\pi_0)_* V2|_{J^{-1}(0)}$，我们有

$$(\pi_0)_*((V_1 - V_2)|_{J^{-1}(0)}) = 0.$$

由于 π_0 : 动量映射$^{-1}(0) \to$ 切丛$_0$ 是关于G作用的商映射，且G 在动量映射$^{-1}(0)$ 上的作用是正则的，因此存在函数h_1,.....，$h_M \in C^\infty$(动量映射$^{-1}(0)$) 以及李代数元素 ξ_1..... $\xi_M \in \mathfrak{g}$，使得

$$(V_1 - V_2)|_{J^{-1}(0)} = \sum_{i=1}^{M} h_i (\xi_i)_{J^{-1}(0)},$$

其中，$(\xi_i)_{J^{-1}(0)} \in \mathfrak{X}$(动量映射$^{-1}(0)$) 是与 ξ_i 相关联的基本向量场。因此，

$$\nabla_{V_1 - V_2}\sigma_2|_{J^{-1}(0)} = \sum_{i=1}^{M} h_i \nabla_{(\xi_i)_M}\sigma_2|_{J^{-1}(0)}.$$

根据 ∇ 和 σ_2 的等变性，我们有

$$\nabla_{(\xi_i)_M}\sigma_2 = \xi_i \cdot \sigma + iJ^{\xi_i}\sigma_2 = +iJ^{\xi_i}\sigma_2$$

因此，限制到动量映射$^{-1}(0)$ 上，我们有

$$\nabla_{V_1 - V_2}\sigma_2|_{J^{-1}(0)} = 0.$$

(ii) $\mathcal{L}_0$ 是复线丛，这是引理5.19中的陈述 (i)。现在我们来证明 ∇^0 是良定义的。取$V \in \mathfrak{X}(M_0)$ 和 $\sigma \in \Gamma(\mathcal{L}_0)$，并设$W_1$,$W_2 \in \mathfrak{X}(M$, 动量映射$^{-1}(0))^G$ 是V 的两个提升，而 τ_1、$\tau_2 \in \Gamma(\mathcal{L})^G$ 是 σ 的两个提升。于是，根据构造，我们有

$$(\pi_0)_* W_1|_{J^{-1}(0)} = (\pi_0)_* W_2|_{J^{-1}(0)} = V$$

and

$$\kappa(\tau_1) = \kappa(\tau_2) = \sigma.$$

因此，由 (i)

$$\nabla_{W_1}\tau_1|_{J^{-1}(0)} = \nabla_{W_2}\tau_2|_{J^{-1}(0)}.$$

由于 $\nabla_{W_1}\tau_1$和 $\nabla_{W_2}\tau_2$都是 $\mathcal{L}$的等变截面，因此根据引理 5。19 可得

$$\kappa(\nabla_{W_1}\tau_1) = \kappa(\nabla_{W_2}\tau_2).$$

因此， ∇^0 是良定义的。显然， ∇^0 也是光滑的，因为 κ 的像是 $\Gamma(\mathcal{L}_0)$的光滑截面。最后，我们证明 ∇^0 是预量子的。固定具有提升$V_1, V_2 \in \mathfrak{X}(M_0)$ 的W_1,$W_2 \in \mathfrak{X}(M, J^{-1}(0))^G$，以及带有提升 $\tau \in \Gamma(\mathcal{L})^G$的截面 $\sigma \in \Gamma(\mathcal{L}_0)$。展开定义可得

$$[\nabla^0_{V_1}, \nabla^0_{V_2}]\sigma = \kappa([\nabla_{W_1}, \nabla_{W_2}]\tau)$$

并且由于映射$(\pi_0)_*$： $\mathfrak{X}(M,J^{-1}(0))^G \to \mathfrak{X}(M_0)$ 是李代数同态，

$$\nabla^0_{[V_1,V_2]}\sigma = \kappa(\nabla_{[W_1,W_2]}\tau).$$

因此，

$$\begin{aligned}[\nabla^0_{V_1}, \nabla^0_{V_2}]\sigma - \nabla^0_{[V_1,V_2]}\sigma &= \kappa([\nabla_{W_1}, \nabla_{W_2}]\tau - \nabla_{[W_1,W_2]}\tau) \\ &= \kappa(-i\omega(W_1, W_2)\tau) \\ &= -i\omega_0(V_1, V_2)\sigma.\end{aligned}$$

这里我们用到了 ∇ 是预量子的这一事实，以及$\omega|_{J^{-1}(}$

$\pi_0^*\omega_0$ ∇^0 $_0$ $=$) 。因此，它是预量子的。

□

现在固定一个G-不变极化 $\mathcal{P} \subseteq T^{\mathbb{C}}M$。如果 $\mathcal{P}$ 如定义4.31所述是可约的，那么我们可以约化该极化，得到一个新的极化 $\mathcal{P}_0 \subseteq T^{\mathbb{C}}M_0$。现在的问题是，关于 $\mathcal{P}$的M 量子化，与$(\mathcal{L}, \nabla) \to (M, \omega)$的量子化和约化空间的量子化之间有什么关系？Guillemin 和 Sternberg 指出，在紧致自由情形下，二者存在紧密联系。

定理 *5.23*（[GS82]）。设 $(\mathcal{L}, \nabla) \to (M, \omega)$ 是一个等变预量子线丛，且 $\mathcal{P} \subseteq T^{\mathbb{C}}M$ 是一个 G-不变正极化。进一步假设 M 和 G 都是紧致的，且 G 在 M 上自由作用。那么，引理 *5.19* 中的映射 $\kappa: \Gamma(\mathcal{L})^G \to \Gamma(L_0)$ 限制后是一个双射

$$\kappa : \mathcal{Q}(M)^G \to \mathcal{Q}(M_0).$$

这个定理是典型的 $[Q、R] = 0$ 结果。我们可以对任意适当作用和极化给出一个部分推广。

定理 5.24. 设 $(\mathcal{L}, \nabla) \to (M, \omega)$ 是一个等变预量子线丛，且 $\mathcal{P} \subseteq T^{\mathbb{C}}M$ 是一个 G-不变的可约极化。

(1) 量子化 $Q(M) \subseteq \Gamma(\mathcal{L})$ 相对于典范作用是一个线性子表示

$$G \times \Gamma(\mathcal{L}) \to \Gamma(\mathcal{L}); \quad (g, \sigma) \mapsto g \cdot \sigma,$$

其中

$$(g \cdot \sigma)(x) = g \cdot \sigma(g^{-1} \cdot x).$$

(2) 引理 κ : $\Gamma(\mathcal{L})^G \to \Gamma(L_0)$ 中的映射5。19 限制为一个映射

$$\kappa : Q(M)^G \to Q(M_0). \tag{5.14}$$

证明。 (1) 由于G 是连通的，只需证明对所有 $\sigma \in \mathcal{Q}(M)$ 和 $\xi \in \mathfrak{g}$, $\xi \cdot \sigma \in \mathcal{Q}(M)$ 成立。为此，固定 $\sigma \in \mathcal{Q}(M)$、 $\xi \in \mathfrak{g}$和$V \in \Gamma(\mathcal{P})$。然后，利用 ∇的等变性，得到

$$\begin{aligned} \nabla_V(\xi \cdot \sigma) &= \nabla_V(\nabla_{\xi_M}\sigma + iJ^\xi\sigma) \\ &= \nabla_V\nabla_{\xi_M}\sigma - i(VJ^\xi)\sigma, \end{aligned}$$

这里用到了联络的导子性质以及 $\nabla_V\sigma = 0$这一事实。注意，根据定义

$$\nabla_V\nabla_{\xi_M}\sigma = \nabla_{\xi_M}\nabla_V\sigma + \nabla_{[V,\xi_M]}\sigma + i\omega(V, \xi_M)\sigma$$

由于 $\mathcal{P}$在G-作用下不变，因此有 $[V、\ \xi_M] \in \Gamma(\mathcal{P})$，从而项 $\nabla_{\xi_M}\nabla_V\sigma$和 $\nabla_{[V,\xi_M]}\sigma$均为零。此外，根据动量映射的定义，有

$$\omega(V, \xi_M) = -VJ^\xi\sigma$$

因此，

$$\nabla_V(\xi \cdot \sigma) = -iVJ^\xi\sigma + iVJ^\xi\sigma = 0.$$

因此， $\xi \cdot \sigma \in \mathcal{Q}(M)$。

(2) 假设 $\sigma \in \mathcal{Q}(M)^G$ ，并令 $\kappa(\sigma) \in \Gamma(\mathcal{L}_0)$ 为约化预量子线丛上的诱导截面。为证明 $\kappa(\sigma) \in \mathcal{Q}(M_0)$，令$x \in$ 动量映射$^{-1}(0)$ ，并取$v \in (\mathcal{P}_0)_{[x]}$ 为约化极化中的一个元素，再选取一个提升 $\tilde{}v \in \mathcal{P}_x$。于是，根据 ∇^0 的定义，我们有

$$\nabla^0_v\kappa(\sigma) = \kappa(\nabla_{\tilde{v}}\sigma) = \kappa(0) = 0.$$

□

5.4 非奇异 [q,r]=0 例子

5.4.1 余切丛

由此，我们现在可以证明余切丛的量子化与约化可交换。设 G 是一个连通李群，Q 是一个适当的 G-空间，且 动量映射 $: T^*Q \to \mathfrak{g}^*$ 是定义 3[3.37]中的哈密顿提升。将 $\theta_Q \in \Omega^1(Q)$ 记作 Liouville 1-形式，可得一个典范等变预量子线丛，其给定为 $\mathcal{L}_Q = T^*Q \times \mathbb{C}$，以及预量子联络

$$\nabla^Q = L - i\theta_Q,$$

其中L 表示李导数算子。根据定理[3.61]，约化$(T^*Q)_0 = J^{-1}(0)/G$ 典范地辛同构于$T^*(Q/G)$。令 $\pi : Q \to Q/G$ 为商映射，回顾投影$T\pi : TQ \to \pi^{-1}T(Q/G)$的对偶，

$$\phi : \pi^{-1}T^*(Q/G) \to J^{-1}(0),$$

其像包含于 $J^{-1}(0)$ 中，并诱导出一个辛同胚 $\widetilde{\phi} : T^*(Q/G) \to (T^*Q)_0$。不仅如此，正如我们所见，刘维尔 1-形式 θ_Q 在 $(T^*Q)_0$ 上诱导出一个 1-形式 θ_0，该形式拉回为 $(T^*(Q/G))\Omega^1$ 上的刘维尔 1-形式 $\theta_{Q/G} \in$。最后，将 $\mathcal{P}_Q \subseteq T^{\mathbb{C}}(T^*Q)$ 和 $\mathcal{P}_{Q/G} \subseteq T^{\mathbb{C}}(T^*(Q/G))$ 记作典范实极化，我们在命题 4.39 中看到，$\mathcal{P}_Q$ 是可约的，并在 $T^*(Q/G)$ 上诱导出一个极化 $\mathcal{P}_0$，其具有如下性质：$T\widetilde{\phi}(\mathcal{P}_{Q/G}) = \mathcal{P}_0$。有了这些，我们现在可以证明下面的结果。

定理 5.25. 假设 Q 只有一种轨道类型。

(i) $(\mathcal{L}_Q, \nabla^Q)$ 是可约的。特别地，

$$(\mathcal{L}_Q|_{J^{-1}(0)})/G \cong (T^*Q)_0 \times \mathbb{C}$$

且诱导的预量子联络 ∇^0 具有如下形式

$$\nabla^0 = L - i\theta_0,$$

其中 $\theta_0 \in \Omega^1((T^*Q)_0)$ 如引理[3.59]中所述。

(ii) 自然映射

$$\kappa : \mathcal{Q}(T^*Q)^G \to \mathcal{Q}((T^*Q)_0)$$

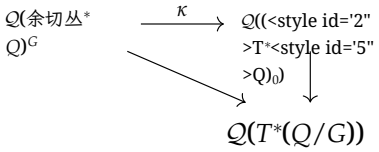
是一个双射。特别地，存在两个典范线性同构

$$\mathcal{Q}((T^*Q)_0) \to \mathcal{Q}(T^*(Q/G))$$

and

$$\mathcal{Q}(T^*Q)^G \to \mathcal{Q}(T^*(Q/G))$$

使图表交换



证明。 (i) 设 $\mathcal{L}_Q = T^*Q \times \mathbb{C}$。因此，

$$\mathcal{L}_Q|_{J^{-1}(0)} = J^{-1}(0) \times \mathbb{C}.$$

由于 G 仅作用于第一因子，因此 $\mathcal{L}_Q|_{J^{-1}(0)}$ 由 G-不变截面生成这一陈述等价于以下陈述:

$$Q \times C^\infty(J^{-1}(0), \mathbb{C})^G \to Q \times \mathbb{C}; \quad (q, f) \mapsto (q, f(q))$$

是满射。显然这成立。因此， $\mathcal{L}_Q$ 诱导出一个预量子线丛 $(\mathcal{L}_0, \nabla^0)$ $\to (T^*Q)_0$。显然，

$$\mathcal{L}_0 = (T^*Q)_0 \times \mathbb{C}.$$

现在，设 π_0 : 动量映射$^{-1}(0) \to (T^*Q)_0$ 为商映射。映射

$$\pi_0^* : C^\infty((T^*Q)_0, \mathbb{C}) \to C^\infty(J^{-1}(0), \mathbb{C})^G$$

是一个双射。因此，典范映射

$$\kappa : \Gamma(\mathcal{L}_Q)^G \to \Gamma(\mathcal{L}_0)$$

可以与映射视为同一映射

$$\kappa : C^\infty(T^*Q, \mathbb{C})^G \to C^\infty((T^*Q)_0, \mathbb{C}); \quad f \mapsto (\pi_0^*)^{-1}(f|_{J^{-1}(0)}).$$

现在，设 $V \in \mathfrak{X}((T^*Q)_0)$，且 $f \in C^\infty((T^*Q)0, \mathbb{C})$。取提升 $W \in \mathfrak{X}($ T^*Q, 动量映射$^{-1}(0))^G$ 和 $h \in C^\infty(T^*Q, \mathbb{C})^G$。那么，

$$\nabla_V^0 f = \kappa(\nabla_W h) = \kappa(Wh + i\theta_Q(W)h) = Vf + i\theta_0(V)f$$

因此，该断言得证。

(ii) 对于这三种量子化，预量子联络具有如下形式

$$\nabla = d + i\theta,$$

其中 θ 在向量丛纤维上为零。此外，极化由与向量丛纤维相切的向量给出。因此，所有量子化都与极化函数一致。由于

$$\widetilde{\phi} : T^*(Q/G) \to (T^*Q)_0$$

是保持极化的辛同胚，拉回定义了一个双射

$$\widetilde{\phi}^* : \mathcal{O}_{\mathcal{P}_0}((T^*Q)_0) \to \tau^*_{Q/G} C^\infty(Q/G, \mathbb{C})$$

这给出了我们的第一个双射。至于第二个，请注意 $\mathcal{Q}(T^*Q, \mathbb{C}) = \tau^*_Q C^\infty(Q, \mathbb{C})$ 以及 $\mathcal{Q}(T^*(Q/G)) = \tau^*_{Q/G} C^\infty(Q/G, \mathbb{C})$。由于 τ_Q 是等变的，我们有

$$(\tau^*_Q C^\infty(Q, \mathbb{C}))^G = \tau^*_Q (C^\infty(Q, \mathbb{C})^G)$$

商映射 $\pi : Q \to Q/G$ 定义了一个双射

$$\pi^* : C^\infty(Q/G, \mathbb{C}) \to C^\infty(Q, \mathbb{C})^G$$

此外，$\tau^*_Q : C^\infty(Q, \mathbb{C}) \to \tau^*_Q C^\infty(Q, \mathbb{C})$ 和 $\tau^*_{Q/G} : C^\infty(Q/G, \mathbb{C}) \to \tau^*_{Q/G} C^\infty(Q/G, \mathbb{C})$ 也都是双射，因为 τ_Q 和 $\tau_{Q/G}$ 是满射浸没。因此，将这些映射依次复合，我们得到一串双射

$$\lambda = \tau^*_{Q/G} \circ (\pi^*)^{-1} \circ (\tau^*_Q)^{-1} : \tau^*_Q C^\infty(Q, \mathbb{C})^G \to \tau^*_{Q/G} C^\infty(Q/G, \mathbb{C}).$$

接下来，只需通过图追踪即可轻松证明

$$\widetilde{\phi}^* \circ \kappa = \lambda.$$

□

我们将在讨论奇异空间时探讨G 不具有单一轨道类型的情形。

5.4.2 环面流形的几何量子化

回顾一下环面流形的 Delzant 构造。设

$$\Delta = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, v_i \rangle \leq \lambda_i,\ i = 1, \ldots, N\}$$

是一个 Delzant 多面体，其内向法向量为 v_i。以下讨论中，我们令 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$。回顾一下，作为 Delzant 构造的一部分，我们得到一个环面 T^n 流形

$$J_\Delta : (M_\Delta, \omega_\Delta) \to \mathbb{R}^n$$

通过对标准辛 $\mathbb{C}^N$ 关于子环面 $K \leq (S^1)^N$的作用进行辛约化得到。具体而言，令$k \subseteq \mathbb{R}^N$ 为映射的核

$$\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^n; \quad e_i \mapsto v_i$$

且 $K = \exp(k) \subseteq (S^1)^N$，则

$$M_\Delta = (\iota^* \circ J)^{-1}(0)/K,$$

其中

$$J : \mathbb{C}^N \to \mathbb{R}^N; \quad (z_1, \ldots, z_N) \mapsto \frac{1}{2}(|z_1|^2, \ldots, |z_N|^2) - \lambda$$

且 $\iota^* : \mathbb{R}^N \to \mathfrak{k}^*$ 是包含映射 $\iota : \mathfrak{k} \hookrightarrow \mathbb{R}^N$的对偶。于是，我们可以将$(S^1)^N/K = T^n$ 识别为一个n维环面。

定理 5.26. 在上述设定中，若 $\lambda \in \mathbb{Z}^N$ 和 $\iota^*(\lambda)$ 都属于 k 的整格，则 $J_\Delta : (M_\Delta, \omega_\Delta) \to \mathbb{R}^n$ 存在一个 T^n 等变预量子线丛。

证明。 假设 $\lambda \in \mathbb{Z}^N$ 和 $\iota^*(\lambda) \in \mathfrak{k}^*$ 属于整格。用$(z_1, \ldots, z_n)$ 表示 $\mathbb{C}^N$的复坐标，并用$(\theta_1, \ldots, \theta_N)$ 表示 $\mathbb{R}^N$上的实坐标，我们有辛形式的典范原函数

$$\alpha = \sum_{j=1}^{N} \frac{r_j^2}{2} d\theta_j.$$

由此，带有联络的平凡线丛 $\mathcal{L}_{can} = \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}$

$$\nabla^{can} = d + i\alpha$$

是 $(\mathbb{C}^N, \omega_{can})$上的预量子线丛。由于 $\lambda \in \mathbb{Z}^N$，我们得到一个表示

$$\rho : T^N \to \mathbb{C}^\times; \quad (e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_N}) \mapsto e^{-i\langle \lambda, (\theta_1, \ldots, \theta_N) \rangle}.$$

接下来很容易证明，对于所有$f \in C^\infty(\mathbb{C}^N, \mathbb{C})$ 以及$j = 1, \ldots, N$，关于这个表示，

$$e_j \cdot f = \partial_{\theta_j} f - i\lambda_j f$$

其中 $e_1, \ldots, e_N \in \mathbb{R}^N$ 是标准基。因此，令

$$J : \mathbb{C}^N \to \mathbb{R}^N; \quad (z_1, \ldots, z_N) \mapsto \frac{1}{2}(|z_1|^2, \ldots, |z_N|^2) - \lambda$$

我们得到

$$\xi \cdot f = \nabla_{\xi_{\mathbb{C}^N}} f + iJ^\xi f$$

因此，$(\mathcal{L}_{can}, \nabla^{can}) \to (\mathbb{C}^N, \omega_{can})$ 是一个 T^N-等变预量子线丛。由于还假设 $\iota^*(\lambda)$ 是整的，我们便自动得到 $(\mathcal{L}_{can}, \nabla^{can}) \to (\mathbb{C}^N, \omega_{can})$ 也是一个 K- 等变预量子线丛。由于 K 在 $J^{-1}(0)$ 上自由作用，根据引理 5.19

$$\mathcal{L}_\Delta := (\mathcal{L}_{can}|_{J^{-1}(0)})/K = (J^{-1}(0) \times \mathbb{C})/K$$

它是 $M_\Delta = J^{-1}(0)/K$ 上的复线丛，并配备了典范预量子联络 ∇^Δ。注意，由于 K 在 $J^{-1}(0) \times \mathbb{C}$ 上自由作用，$T^n \cong T^N/K$ 在 $\mathcal{L}_\Delta$ 上有一个自然作用，使得

$$\mathcal{L}_\Delta \to M_\Delta$$

它成为一个等变复线丛。我声称这是一个等变预量子联络。确实，回忆一下 ∇^Δ 的定义。取 $V \in \mathfrak{X}(M_\Delta)$ 和 $\sigma \in \Gamma(\mathcal{L}_\Delta)$。那么我们可以找到提升 $\widetilde{V} \in \mathfrak{X}(\mathbb{C}^N)^K$ 和 $\sigma \in \Gamma(\mathcal{L}_{can})^K$。然后我们设

$$\nabla^\Delta_V \sigma = \kappa(\nabla^{can}_{\widetilde{V}} \widetilde{\sigma}),$$

其中

$$\kappa : \Gamma(\mathcal{L}_{can})^K \to \Gamma(\mathcal{L}_\Delta)$$

是引理5.19中的满射。特别地，取 $\xi \in \mathbb{R}^n$ 和$\sigma \in \Gamma(\mathcal{L}_\Delta)$，选取 $\eta \in \mathbb{R}^N$ 和 $f \in C^\infty(\mathbb{C}^N, \mathbb{C})^K$，使得 $\pi(\eta) = \xi$，并且满足 $\kappa(f) = \sigma$。随后很容易证明

$$\kappa(\eta \cdot f) = \xi \cdot \sigma.$$

由此可得

$$\begin{aligned}\xi\cdot\sigma &= \kappa(\eta\cdot f)\\ &= \kappa(\nabla^{can}_{\eta_{\mathbb{C}^N}} f + iJ^{\eta} f)\\ &= \nabla^{\Delta}_{\xi_M} f + iJ^{\xi}_{\Delta}\sigma.\end{aligned}$$

由此得证。 □

现在，令I_{can} 为 $\mathbb{C}^N$上的典范复结构。由于I_{can} 是K-等变的，且K 在$J^{-1}(0)$ 上的作用是自由的，因此它诱导出M_Δ上的凯勒结构I_Δ 。这一诱导的凯勒结构也具有T^n 不变性。我们将记作 $\mathcal{P}_\Delta = T^{0,1}{}_{I_\Delta} M_\Delta$。

定理 5.27 ([Hamo8]). 对于任意元素 $a = (a_1,\dots,a_n)\in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$，记

$$\psi_a : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C};\quad (z_1,\dots,z_n)\mapsto z_1^{a_1}\cdots z_n^{a_n}.$$

于是存在一个典范的 T^n 表示同构

$$\mathcal{Q}(M_\Delta,\mathcal{P}_\Delta,\mathcal{L}_\Delta)\cong span_{\mathbb{C}}\{\psi_a \mid a\in\Delta\cap\mathbb{Z}^n\}.$$

证明。 令$T^{0,1}\mathbb{C}^N$ 表示 $\mathbb{C}^N$ 相对于典范复结构的反全纯相切丛。由于$T^{0,1}\mathbb{C}^N$ 有典范平凡化，其由反全纯向量场 $\partial/\partial\overline{z_i}$张成，因此函数$f \in C^\infty(\mathbb{C}^N,\mathbb{C})$ 属于量子化 $\mathcal{Q}(\mathbb{C}^N)$ 当且仅当

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial\overline{z_j}}} f = 0$$

对所有 $j = 1$、.....、N。利用这一事实，即

$$\nabla^{can} = d + i\sum_{j=1}^{N}\frac{r_j^2}{2}d\theta_j$$

我们很容易推出，$f \in \mathcal{Q}(\mathbb{C}^N)$ 当且仅当存在全纯函数 $h \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^N)$ 使得

$$f(z) = h(z)e^{-2\pi\|z\|^2},$$

其中 $\|\cdot\|$ 是 $\mathbb{C}^N$上的标准 L^2 范数。注意，因子 $e^{-2\pi\|z\|^2}$ 在 T^N 作用下不变，因此作为 T^N 空间，我们有 $\mathcal{Q}(\mathbb{C}^N)$ 与全纯函数空间之间的一个标准同构

$h : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}$ 其中我们赋予 $\mathbb{C}$ 由 λ诱导的作用。特别地，我们有

$$\mathcal{Q}(\mathbb{C}^N)^K \cong \{h \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^N) \mid h(t \cdot z) = \rho(t)h(z) \text{ for all } t \in K\}.$$

对于任意元素 $a = (a_1, \ldots, a_N) \in \mathbb{Z}^N$，记作

$$z^a := z_1^{a_1} \cdots z_N^{a_N}.$$

那么，如 [Hamo8], 所示，等变全纯函数空间的基为

$$\{z^a \mid a \in \mathbb{Z}^N \cap \Delta\},$$

由于 K 在 动量映射$^{-1}(0)$ 上自由作用，且 $\mathcal{P}_\Delta$ 是 Kähler 结构，因此由定理5.24 可知

$$\mathcal{Q}(M_\Delta) \cong \mathcal{Q}(\mathbb{C}^N)^K \cong \{\psi_a \mid a \in \Delta \cap \mathbb{Z}^n\}.$$

□

第二部分

可微分层空间

6

子笛卡尔空间

子笛卡尔结构与微分学（例如 [IZ13]）和层叠（例如 [Vis05]）一样，是研究奇异空间（即非流形空间）微分几何的主要途径之一。这种方法可追溯至 Aronszajn 和 Smith [AS61] 对贝塞尔势的研究，之后 Marshall [Mar75]等学者的工作将其推广为光滑流形理论的一种延拓。

子笛卡尔空间的概念相当简单。取一个拓扑空间X，将其局部嵌入到某个欧几里得空间 $\mathbb{R}^N$中，然后将微分几何构造适当地限制到 $\mathbb{R}^N$ X 上。这个简单的想法非常实用，因为通过这种方式，我们可以在奇异空间上定义向量场、切丛，甚至流（有关流的更多信息，见 [Śni13] 或 [KL23] ）。当然，事情并不像我描述的那么简单，因为为了使局部嵌入彼此协调，我们需要预先定义拓扑空间 X 上“光滑函数”的含义。这就需要引入微分结构（也称为 Sikorski 结构）的概念。

微分结构，顾名思义，源自 Sikorski [Sik67]。它们为讨论拓扑空间上的“可微函数”提供了一个抽象框架，使得那些仅依赖于光滑函数的光滑几何构造能够轻松推广。例如，光滑流形上的向量场可刻画为光滑函数代数的导子，因此我们可以对微分结构采用完全相同的定义，从而得到所谓的扎里斯基向量场。在这一框架下，子笛卡尔结构就是一种微分结构，它在局部看起来像欧几里得空间上光滑结构的限制。

值得注意的是，在较早关于子笛卡尔空间的文献中，并未提及微分结构。相反，文献采用了另一种基于相容图册的形式体系，仿照光滑流形上光滑结构的定义。正如我们将在定理 6.46 中所证明的，这两种形式体系实际上是等价的。

6.1 微分空间

现在我们开始讨论微分空间。以下大部分内容可见于 [Śn13] 或 [KL23]。

定义 6.1 （微分空间）。 设 (X, τ) 为一个拓扑空间。若一族连续函数 $\mathcal{F} \subseteq C^0(X)$ 满足以下公理，则称其为微分结构或 Sikorski 结构。

(1) 由 $\mathcal{F}$ 诱导的弱拓扑，记作 $\tau(\mathcal{F})$，与 X 上给定的拓扑 τ 一致。(2) 对任意 $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{F}$ 以及任意 $G \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$，复合 $G(f_1, \ldots, f_n) \in \mathcal{F}$。(3) 若 $f \in C^0(X)$ 具有这样的性质：对于每个点 $x \in X$，其附近都存在一个开邻域 $U \subseteq X$ 和一个函数 $g \in \mathcal{F}$，满足 $g|_U = f|_U$，则 $f \in \mathcal{F}$。

称二元组 $(X, \mathcal{F})$ 为微分空间。若上下文明确，我们将用 $C^\infty(X)$ 表示微分结构。若 X 上的拓扑已给定，则称诱导相同拓扑的微分结构 $\mathcal{F}$ 为 X 上的微分结构。

例子 6.2： (1) 设 (X, τ) 是一个完全正则拓扑空间，$C^0(X)$ 是 X 上的连续函数。完全正则性等价于由 $C^0(X)$， $\tau(C^0(X))$ 诱导的弱拓扑等于 X 上的拓扑 τ。连续函数的复合仍为连续函数，这给出了第二条公理；第三条则归结为如下对应关系

$$\{\text{open in } X\} \to \mathrm{Ab}; \quad U \mapsto C^0(U)$$

是一个层。

(2) 设 M 为一个光滑流形，并考虑光滑函数环 $C^\infty(M)$。用 τ 表示 M上的给定拓扑。与连续函数的情形一样，微分结构的第二和第三条公理显然成立。唯一需要证明的是由 $C^\infty(M)$诱导的弱拓扑 $\tau(C^\infty(M))$ 等于 M 上的给定拓扑 τ。由于 M 是豪斯多夫且第二可数的， τ 由收敛序列决定。于是，设 $\{x_k\} \subset M$ 是一个序列，且 $x_0 \in M$ 满足：对所有$f \in C^\infty(M)$，都有

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = f(x_0).$$

我们证明 $\lim_{k\to\infty} x_k = x_0$ 在 M的拓扑中成立。为此，取一个图卡 $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ ，使得 $x_0 \in U$。令以 x_0, 为中心的相对紧球 $B \subseteq U$ ，则可找到一个紧集 $K \subseteq U$ 和一个光滑函数 $\psi : M \to \mathbb{R}$ ，使得

$$\psi|_B \equiv 1 \text{ and } \psi|_{M\setminus K} \equiv 0.$$

因此现在定义 $F = \psi\phi : M \to \mathbb{R}^n$。写作 $F(x) = (F_1(x), \ldots, F_n(x))$，我们看到每个 $F_i \in C^\infty(M)$，因此 $F(x_k)$ 收敛到 $F(x_0)$。由于 $F|_B : B \to \phi(B)$ 是一个同胚，且 $x_0 \in B$，因此得到 x_k 收敛到 x_0。由于 $\{x_k\}$ 和 x_0 是任意的，我们得出$\tau(C^\infty(M)) = \tau$。因此，$C^\infty(M)$ 是 M 上的一个微分结构。

注6.3. 请注意，所有微分空间都自动是完全正则的。

6.1.1 诱导微分结构

鉴于微分结构是一种C^∞-代数空间，考虑这类结构的生成元是很自然的。与交换环不同，交换环的生成元只是其线性组合张成整个环的元素，而微分结构的生成元需要是“C^∞ 组合”。我们将在下文更精确地阐明这一概念。

定理 6.4. 设 (X, τ) 是一个拓扑空间，且 $\{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是 X 上微分结构的任意集合。定义

$$\mathcal{F} := \bigcap_{\alpha\in I} \mathcal{F}_\alpha.$$

如果 $\mathcal{F}$ 非空且 $\tau(\mathcal{F}) = \tau$，那么 $\mathcal{F}$ 是 X 上的一个微分结构。

证明。 与前面的例子一样，我们只需证明第二条和第三条公理成立。首先，设 $G \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 且 $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{F}$。固定 $\alpha \in I$，有 $f_1, \ldots, f_n \mathcal{F}_\alpha$，因此 $G(f_1, \ldots, f_n) \in \mathcal{F}_\alpha$。由于 α是任意的，我们得出 $G(f_1, \ldots, f_n) \in \mathcal{F}$。

现在设 $f : X \to \mathbb{R}$是一个实值函数，$\{U_i\}$ 是 X 的一个开覆盖，且 $\{g_i\} \subseteq \mathcal{F}$满足 $f|_{U_i} = g|_{U_i}$。再次固定 α，有$\{g_i\} \subseteq \mathcal{F}_\alpha$，因此$f \in \mathcal{F}_\alpha$。$\alpha$ 的任意性意味着 $f \in \mathcal{F}$。 □

推论 6.5. 设 X 是任意集合，A 是 X 上任意一个（非空）实值函数集。如果 X 赋予由 A 生成的弱拓扑 $\tau(A)$，

那么存在一个最小微分结构，记作 $\langle A\rangle$，满足 $\tau(\langle A\rangle) = \tau(A)$，且 $A \subseteq \langle A\rangle$。

证明。令 $\tau(A)$ 表示由 A 诱导的弱拓扑。另记 $C_A(X)$为关于 $\tau(A)$ 的所有实值连续函数的集合。由于 $C_A(X)$ 是 X 上的微分结构，且 $A \subseteq C_A(X)$，这意味着该集合

$$I = \{\mathcal{F} \subseteq C_A(X) \mid \mathcal{F} \text{ is a differential structure on } X \text{ with } A \subseteq \mathcal{F}\}$$

非空。令

$$\langle A\rangle := \bigcap_{\mathcal{F}\in I} \mathcal{F}.$$

由于由 $C^0_A(X)$ 诱导的弱拓扑与 $\tau(A)$ 一致，且 $A \subseteq \langle A\rangle \subseteq C^0_A(X)$，我们得出 $\tau(\langle A\rangle) = \tau(A)$，因此由定理 6.4 可知，$\langle A\rangle$ 是 X 上的微分结构。 □

例子 6.6. 利用推论 6.5，我们可以在积空间上构造微分结构。设 X_1 和 X_2 是两个微分空间，并设$pr_1 : X_1 \times X_2 \to X_1$ 以及 $pr_2 : X_1 \times X_2 \to X_2$ 分别为到第一和第二因子的投影。对于 $i = 1, 2$，记

$$pr_i^* C^\infty(X_i) := \{f \circ pr_i : X_1 \times X_2 \to \mathbb{R} \mid f \in C^\infty(X_i)\}.$$

现在定义

$$C^\infty(X \times Y) = \langle pr_1^* C^\infty(X) \cup pr_2^* C^\infty(Y)\rangle$$

我们称$C^\infty(X \times Y)$ 为乘积微分结构。

命题 6.7. 设 X 是一个微分空间，并设有子集 $A \subseteq C^\infty(X)$，其中 $\langle A\rangle = C^\infty(X)$ 如推论6.5所述。则 $f \in C^\infty(X) \iff f$ 满足下述性质 *(P)*。

(P) 对每个 $x \in X$，都存在 $G \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$，某个 n，$h_1, \ldots, h_n \in A$，以及 x 的一个开邻域 $U \subseteq X$，使得

$$f|_U = G(h_1, \ldots, h_n)|_U.$$

证明。令 $\mathcal{F} \subseteq C^0(Y)$ 表示所有满足性质 (P) 的连续函数。首先注意，由于 $A \subseteq \langle A\rangle$ 且 $\langle A\rangle$ 是一个微分结构，如果 $h_1, \ldots, h_n \in A$ 且 $G \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$，那么 $G(h_1, \ldots, h_n) \in \langle A\rangle$。微分结构的层性质继而意味着 $\mathcal{F} \subseteq \langle A\rangle = C^\infty(Y)$。注意，由于 $A \subseteq \mathcal{F}$，由 $\mathcal{F}$ 诱导的弱拓扑与由 A 诱导的弱拓扑相同。

利用 $\langle A \rangle$ 的极小性，现在只需证明 $\mathcal{F}$ 满足C^∞-环性质以及微分空间的层性质。层性质由 $\mathcal{F}$ 的定义自然具备。C^∞-环性质自动成立，因为 $\mathcal{F}$ 的所有元素在局部上都是由 A 的元素与欧几里得空间上的光滑函数复合而成的。再与另一个来自欧几里得空间的函数复合，仍保持这一性质。因此 $\mathcal{F}$ 是一个微分结构，故由极小性可得 $\mathcal{F} = \langle A \rangle$ 。

□

定义6.8（可微函数层）. 设X 为一个可微空间。对于每个开子集$U \subseteq X$, 定义

$$C^\infty(U) := \langle C^\infty(X)|_U \rangle.$$

将C^∞_X 记作由此得到的可微函数层。

命题 6.9. C^∞_X 是一个层，当且仅当满足微分结构定义中的条件（3）。

6.1.2 可微映射

现在我们已经有了对象，接下来需要定义态射。正如 [Nes03], 等资料所示, 两个光滑流形之间的连续映射$F : M \to N$ 是光滑的，当且仅当F 将N 上的光滑函数拉回为M上的光滑函数。用符号表示，$F^*C^\infty(N) \subseteq C^\infty(M)$。既然我们现在已经用光滑函数环刻画了一种微分几何性质，便可以将其推广到微分空间。

定义 6.10（可微映射）. 设X 和Y 为微分空间。若映射$F : X \to Y$ 满足$F^*C^\infty(Y) \subseteq C^\infty(X)$，则称其为可微映射，其中

$$F^*C^\infty(Y) = \{f \circ F : X \to \mathbb{R} \mid f \in C^\infty(Y)\}.$$

如果F 可逆，且逆映射F^{-1} 也可微，则称F 为微分同胚。用$C^\infty(X、Y)$ 表示从X 到Y的所有可微映射所成的集合。

命题 6.11. 设 X 和 Y 为微分空间，且 F: $X \to Y$ 是一个集合映射。

(1) 如果 F 可微，则 F 连续。*(2)* 如果 $C^\infty(Y) = \langle A \rangle$，则 F 可微 $\iff F^*A \subseteq C^\infty(X)$。

证明。 (1) 令 $U \subseteq Y$ 为开集，并设 $x \in F^{-1}(U)$。由于Y 具有由 $C^\infty(Y)$诱导的弱拓扑，因此存在$f_1,\ldots, f_m \in C^\infty(Y)$以及开区间 $I_1,\ldots, I_m \subseteq \mathbb{R}$，使得

$$F(x) \in \bigcap_{i=1}^{m} f_i^{-1}(I_i) \subseteq U.$$

因此，

$$x \in F^{-1}(F(x)) \subseteq \bigcap_{i=1}^{m} (f \circ F)^{-1}(I_i) \subseteq F^{-1}(U).$$

由于对每个 i，$f_i \circ F$ 都是连续的，我们得出U 必定是开的。

（2）显然，若 $f : X \to Y$ 可微，则 $f^*A \subseteq C^\infty(X)$。因此，我们只需证明 $f^*A \subseteq C^\infty(X)$ 蕴含 f 可微。在这种情况下，我们利用命题 6.7 和微分空间的层性质。具体而言，若 $f \in C^\infty(Y)$，我们证明对每个 $x \in M$，均存在 x 的一个开邻域 $U \subseteq X$，以及 $g \in C^\infty(X)$，使得 $g|_U = F^* f|_U$。因此，固定 $f \in C^\infty(Y)$ 和 $x \in X$。根据命题 6.7，我们可以找到 F(x) 在 Y 中的一个开邻域 $V \subseteq Y$、某个 n 对应的 $G \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$，以及 $h_1,\ldots, h_n \in A$，使得

$$f|_V = G(h_1,\ldots,h_n)|_V.$$

注意

$$F^*G(h_1,\ldots,h_n) = G(F^*h_1,\ldots,F^*h_n)$$

因此，根据 C^∞-环性质，$g := F^*G(h_1,\ldots, h_n) \in C^\infty(X)$。特别地，$F^* f|_{F^{-1}(V)} = g|_{F^{-1}(V)}$，且 $x \in F^{-1}(V)$。因此，$F^* f \in C^\infty(X)$。

□

命题 6.12. 设 X、Y 和 Z 是微分空间，且 $F : X \to Y$ 和 $G : Y \to Z$ 是可微映射。那么复合映射

$$G \circ F : X \to Z$$

也是可微的。

例子 6.13. 设 X 和Y 是完全正则拓扑空间。那么，从 X 到Y 的连续函数集合与可微映射集合相同。这是命题 1 的推论6.7。

例子6.14. 设M 和N 是两个光滑流形，那么M 与N 之间的可微映射恰好就是光滑映射

之间的映射。也就是说，映射$F : M \to N$ 可微，当且仅当对每个$x \in M$，都存在图卡 $\phi : U \subseteq M \to \mathbb{R}^N$ （以x 为中心）以及$\psi : V \subseteq N \to \mathbb{R}^M$，使得$F(U) \subseteq V$，并且

$$\psi \circ F \circ \phi^{-1} : \phi(U) \to \psi(V)$$

是欧几里得空间开子集之间的C^∞-映射。

由于光滑映射在复合运算下保持闭性，映射$F : M \to N$ 按通常意义是光滑的，显然意味着F 是可微的。反之，如果$F : M \to N$ 是可微的，并且 $x \in M$，那么仅由连续性，我们就能找到坐标图 $\phi : U \subseteq M \to \mathbb{R}^N$ 和 $\psi : V \subseteq N \to \mathbb{R}^M$，使得 $F(U) \subseteq V$。显然，所得映射

$$G := \psi \circ F \circ \phi^{-1} : \phi(U) \to \psi(V)$$

是可微的。因此，如果我们将$x_1, \ldots, x_M$ 记作 $\mathbb{R}^M$ $G^* x_1, \ldots, G^* x_M \in C^\infty(\phi(U))$ 上的坐标函数，那么G 的坐标函数全都是C^∞-可微的，因此G 是光滑映射。

6.1.3 子空间微分结构

我们的目标是给出子笛卡尔空间的定义。子笛卡尔空间是这样一种微分空间：它们在局部上“看起来像”欧几里得空间的子集。为了使这一点精确化，我们需要讨论如何为微分空间的子集赋予微分结构。

定义 6.15（子空间微分结构）。 设X 是一个微分空间，且$Y \subseteq X$ 是一个子空间。在Y上定义子空间微分结构，记作 $C^\infty(Y)$，其定义为

$$C^\infty(Y) := \langle C^\infty(X)|_Y \rangle,$$

其中

$$C^\infty(X)|_Y = \{ f|_Y : Y \to \mathbb{R} \mid f \in C^\infty(X) \}.$$

命题 6.16。 若 X 是一个微分空间，且 $Y \subseteq X$ 是一个子空间。

(1) C^∞（Y）是 Y 上最小的微分结构，使包含映射 $\iota : Y \hookrightarrow X$ 可微。*(2)* 由 C^∞（Y）诱导的弱拓扑与 Y 上的子空间拓扑一致。

(3) $f \in C^\infty(Y)$ 当且仅当对每个 $y \in Y$，都存在 x 的一个邻域 $U \subseteq X$ 以及 $g \in C^\infty(X)$，使得

$$f|_{U\cap Y} = g|_{U\cap Y}.$$

证明。(1) 由于 $C^\infty(Y)$ 由 $C^\infty(X)|_Y = \iota^* C^\infty(X)$ 生成，因此显然 ι 是可微的，进而连续。因此，子空间拓扑 $\iota^*\tau$ 包含于由 $C^\infty(Y)$ 诱导的弱拓扑 $\tau(C^\infty(Y))$。反之，若 $U \subseteq Y$ 是 $\tau(C^\infty(Y))$ 中的开集，由于这与 $C^\infty(X)|_Y$ 诱导的拓扑相同，因此对每个 $y \in U$，我们都可以找到 $f_1,\ldots,f_\ell \in C^\infty(X)$ 以及开区间 $I_1,\ldots,I_\ell \subseteq \mathbb{R}$，使得

$$y \in \bigcap_{i=1}^{\ell} (f|_Y)^{-1}(I_i) \subseteq U.$$

注意

$$\bigcap_{i=1}^{\ell} (f|_Y)^{-1}(I_i) = \left(\bigcap_{i=1}^{\ell} f_i^{-1}(I_i)\right) \cap Y.$$

因此，对每个 $y \in U$，我们都可以找到一个包含 y 的 $V_y \subseteq X$ 中的开集，使得 $V_y \cap Y \subseteq U$，这意味着

$$U = \left(\bigcup_{y\in U} V_y\right) \cap Y$$

因此U 是 $\iota^*\tau$ 开集。因此，由 $C^\infty(Y)$ 诱导的弱拓扑与子空间拓扑一致。

（2）如前所述，ι 是可微的。由于 Y 上任何使 ι 可微的其他微分结构也必须包含 $\iota^* C^\infty(X) = C^\infty(X)|_Y$，由极小性可知，$C^\infty(Y)$ 是最小的。

(3）这是命题6.7的直接应用。设$y \in Y$ 且$f \in C^\infty(Y)$。那么我们可以找到 y 的一个邻域$W \subseteq Y$、某个m以及$h_1,\ldots,h_m \in C^\infty(X)$ 和$G \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$，使得

$$f|_W = G(h_1|_Y,\ldots,h_m|_Y)|_W.$$

由于 Y 上的拓扑是子空间拓扑，因此存在开$U \subseteq X$，使得$W = U \cap Y$ 且$G(h_1,\ldots,h_m) \in C^\infty(X)$，我们有

$$f|_{U\cap X} = G(h_1,\ldots,h_m)|_{U\cap X}$$

由此得证。

□

命题 6.17. 设 X 是一个具有单位分解的微分空间。也就是说，对于任意开集族 $\{U_i\}_{i\in I}$，我们都能找到函数$\{\rho_i\}_{i\in I} \subseteq C^\infty(X)$，使得

(1) $supp(\rho_i) \subseteq U_i$ 对所有 $i \in I$ 均成立。

(2) $\{\rho_i\}_{i\in I}$ 是局部有限的。

(3) $\sum_{i\in I}\rho_i = 1.$

那么，对于任意闭子集 $Y \subseteq X$，我们有

$$C^\infty(Y) = \langle C^\infty(X)|_Y\rangle = C^\infty(X)|_Y.$$

证明。 取定$f \in C^\infty(Y)$。我们证明存在 $g \in C^\infty(X)$ 使得 $g|_Y = f$。根据命题 6.16，我们可以找到 Y 的一个开覆盖 $\{U_i\}_{i\in I}$，以及函数 $h_i \in C^\infty(X)$，使得

$$f|_{Y\cap U_i} = h_i|_{Y\cap U_i}$$

对所有 $i \in I$ 均成立。现在考虑

$$U_\infty := X \setminus Y$$

并记 h_∞ 为 X 上的零函数。选取一个从属于覆盖 $\{U_\infty\} \cup \{U_i\}_{i\in I}$的单位分解$\{\rho_i\}_{i\in I\cup\{\infty\}}$，并定义

$$g := \sum_{i\in I\cup\{\infty\}} \rho_i h_i.$$

显然 李代数 $g \in C^\infty(X)$ 和 李代数 $g|_Y = f$。 □

命题 6.18. 设 X 是一个微分空间，且 $R \subseteq S \subseteq X$ 是一个子集链。那么

$$\langle C^\infty(X)|_R\rangle = \langle C^\infty(S)|_R\rangle.$$

证明。 这是极小性的一个简单应用。 □

定义 6.19 （微分嵌入）. 设 X 和Y 是微分空间，且$f : X \to Y$ 是一个可微映射。若f 的诱导映射满足，则称其为可微嵌入

$$f : (X, C^\infty(X)) \to (f(X), C^\infty(f(X)))$$

是一个微分同胚。

6.2 子笛卡尔空间

现在我们可以给出子笛卡尔空间的正式定义。正如我们将看到的，这些空间是光滑流形的严格推广。

定义6.20（子笛卡尔空间）。 子笛卡尔空间是一个微分空间$(X,C^\infty(X))$，满足

- X 是豪斯多夫的、第二可数的且仿紧的。
- $C^\infty(X)$ 存在**奇异图**。也就是说，对于每个$x \in X$，都存在一个开邻域$U \subseteq X$、一个正整数$N \in \mathbb{N}$以及一个可微嵌入

$$\phi : U \hookrightarrow \mathbb{R}^N$$

如果不会引起混淆，我们将子笛卡尔空间简记为X。如果所有图卡都可以选取得使其像是局部闭的，我们称X为局部闭子笛卡尔空间。

例子 6.21。 设M是一个光滑流形。那么，通常的坐标图 $\phi : U \subseteq M \to \mathbb{R}^n$，其像为开子集，也都是奇异图。因此$M$是一个子笛卡尔空间。

反过来，如果X是一个子笛卡尔空间，且存在一个覆盖 $\{(U_i,\phi_i)\}_{i\in I}$，由奇异图构成，并具有以下性质：

(1) 存在$n \in \mathbb{N}$，使得每个 ϕ_i 都映入 $\mathbb{R}^n$。

(2) $\phi_i(U_i) \subseteq \mathbb{R}^n$ 是一个开子集，

那么， $\{(U_i,\phi_i)\}_{i\in I}$ 就是通常意义下的光滑图册，而光滑函数恰好就是子笛卡尔结构$C^\infty(X)$。

例子 6.22. 给定两个子笛卡尔空间X和Y，它们的乘积微分结构$C^\infty(X \times Y)$显然仍然是子笛卡尔的。

例子 6.23. 设$N \geq 1$为一个整数，且$X \subseteq \mathbb{R}^N$为一个子集。那么X连同其子空间微分结构$C^\infty(X) = \langle C^\infty(\mathbb{R}^N)|_X \rangle$是子笛卡尔的。因此，远非流形的对象（如康托尔集）也是子笛卡尔的。

例子 6.24： 即使“无限维”空间也可以是子笛卡尔的。作为一个相当简单的例子，考虑不交并

$$X = \bigsqcup_{n\in\mathbb{Z}_{>0}} \{n\} \times \mathbb{R}^n.$$

赋予 X 不交并拓扑和微分结构$C^\infty(X)$，其定义为

$$f \in C^\infty(X) \iff f|_{\{n\}\times\mathbb{R}^n} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

对所有 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ 都成立。容易看出，$C^\infty(X)$ 是一个微分结构。此外，由于构成X 的每个 $\mathbb{R}^n$ 都是开子集，X 是子笛卡尔的。

例子 6.25. 并非所有微分空间都是子笛卡尔的。回想一下，对每个$n \in \mathbb{Z}_{>0}$，我们都有一个自然嵌入

$$\mathbb{CP}^n \hookrightarrow \mathbb{CP}^{n+1}; \quad [z_0,\dots,z_{n+1}] \mapsto [z_0,\dots,z_{n+1},0]$$

定义

$$\mathbb{CP}^\infty = \operatorname{colim}_n \mathbb{CP}^n$$

赋予最弱拓扑，使得包含映射

$$\iota_n : \mathbb{CP}^n \hookrightarrow \mathbb{CP}^\infty \tag{6.1}$$

是连续的。定义

$$C^\infty(\mathbb{CP}^\infty) := \{f : \mathbb{CP}^\infty \to \mathbb{R} \mid \iota_n^* f \in C^\infty(\mathbb{CP}^n)\ \forall n \in \mathbb{Z}_{>0}\}.$$

利用 $\mathbb{CP}^\infty$上的自然 CW 复形结构，我们可以推得该拓扑是序列拓扑。再利用 $\mathbb{CP}^n$ 对所有n 的紧致性，可知由 $C^\infty(\mathbb{CP}^\infty)$ 诱导的弱拓扑与余极限拓扑相同。因此，利用定理6.4 可知($\mathbb{CP}^\infty$,$C^\infty(\mathbb{CP}^\infty)$) 是一个微分空间。然而，它不是子笛卡尔的。

确实，如果 $\phi : U \subseteq \mathbb{CP}^\infty \hookrightarrow \mathbb{R}^N$ 是某个 N 的奇异图，那么很容易看出，这将为任意 n 提供从 $\mathbb{CP}^n$ 到 $\mathbb{R}^N$ 的局部嵌入，这显然是荒谬的。

命题 6.26： 设 X 是一个子笛卡尔空间，$Y \subseteq X$ 是一个子空间。那么 $C^\infty(Y) = \langle C^\infty(X)|_Y \rangle$ 也是一个子笛卡尔空间。

证明。 豪斯多夫、第二可数且仿紧空间的子集也具有豪斯多夫、第二可数和仿紧性质。因此，我们只需证明奇异图的存在性。为此，设 $y \in Y$，并设$\phi : U \hookrightarrow \mathbb{R}^N$ 是关于y的一个奇异图。于是我声称

$$\phi|_{U\cap Y} : U \cap Y \hookrightarrow \mathbb{R}^N$$

也是一个奇异图。事实上，我们只需证明诱导映射

$$\phi|_{U\cap Y} : (U\cap Y, C^\infty(U\cap Y)) \to (\phi(U\cap Y), C^\infty(\phi(U\cap Y)))$$

是微分空间的微分同胚。这是以下事实的直接推论： $\phi|_{Y\cap U}$ 及其逆映射都是可微映射的复合，因此 $\phi|_{U\cap Y}$ 和 $(\phi_{U\cap Y})^{-1}$ 都是可微的，结论得证。

□

推论 6.27. 设 M 为光滑流形，且 $N \subseteq M$ 是一个子集，在子空间拓扑下为拓扑流形。则诱导子笛卡尔结构 $C^\infty(N) = \langle C^\infty(M)|_N \rangle$ 在 N 上定义了光滑流形结构$\Longleftrightarrow N$ 是一个嵌入子流形。也就是说，对于任意 $x \in N$，都存在一个子流形图。

证明。 如果 N 是一个嵌入子流形，那么显然 $C^\infty(N)$ 在 N上定义了一个光滑流形结构。反之，如果 $C^\infty(N)$ 定义了一个流形结构，那么按照命题 6.26的证明中所采用的局部图，可在任意点 $n \in N$.周围得到所需的子流形坐标。

□

引理 6.28. 设 X 和 Y 是两个子笛卡尔空间，$F : X \to Y$ 是一个可微映射，且 $x \in X$。则存在

(1) 奇异图 $\phi : U \subseteq X \hookrightarrow \mathbb{R}^N$ 关于 x 的邻域，以及 $\psi : V \subseteq Y \hookrightarrow \mathbb{R}^M$ 关于 $F(x)$的邻域，使得 $F(U) \subseteq V$;

(2) U(的)的开邻域 $W \subseteq \mathbb{R}^N$ ；以及

(3) 一个光滑映射 $H : W \to \mathbb{R}^M$

使得

$$H|_{\phi(U)} = \psi \circ F \circ \phi^{-1}$$

证明。 固定 $x \in X$，由F 的连续性，我们可以找到坐标图 $\phi : U \subseteq X \hookrightarrow \mathbb{R}^N$关于$x$ 的邻域，以及 $\psi : V \subseteq Y \hookrightarrow \mathbb{R}^M$ 关于$F(U) \subseteq V$。记

$$G := \psi \circ F \circ \phi^{-1} : \phi(U) \to \psi(V).$$

由于 G 是一个可微映射，如果我们将 G 写作 $= (G_1, \ldots, G_M)$，那么对于每个 i，$G_i \in C^\infty(\phi(U))$。根据命题 6.16，对于每个 i，我们可以找到 $\phi(U)$ 的一个开邻域 $W_i \subseteq \mathbb{R}^N$ ，以及满足 $h_i|_{\phi(U)} = G_i$ 的光滑函数 $h_i \in C^\infty(W_i)$。令

$$W := \bigcap_{i=1}^{M} W_i$$

并令

$$H := (h_1|_W, \ldots, h_M|_W)$$

由此得到所需结果。 □

6.2.1 适当群作用的商空间

作为一个特殊但非常重要的情形，我们来考察紧群作用的表示。以下内容中，我们令K为一个紧李群，V为一个有限维实K-表示。

定义 6.29. 设 $\pi : V \to V/K$ 为典范商映射。定义

$$C^\infty(V/K) := \{f : V/K \to \mathbb{R} \mid \pi^* f \in C^\infty(V)^K\}.$$

我们的目标是证明$C^\infty(V/K)$是V/K上的子笛卡尔结构。记$\mathbb{R}[V]^K$为K在V上的不变多项式环。

定理 6.30 (希尔伯特 [Wey16])**.** 环 $\mathbb{R}[V]^K$ 由有限多个元素生成。

这使我们可以按照 [Mol24]的做法给出以下定义。

定义 6.31 (希尔伯特映射)。 设$p_1, \ldots, p_N \in \mathbb{R}[V]^K$是一个有限的生成元列表。称映射

$$p : V \to \mathbb{R}^N; \quad v \mapsto (p_1(v), \ldots, p_N(v))$$

为 **希尔伯特映射**。

请注意，生成元的不同选择会得到不同的希尔伯特映射。

定理 6.32 ([Sch75，Mat77])。 希尔伯特映射 $p : V \to \mathbb{R}^N$ 诱导出一个连续嵌入

$$\overline{p} : V/K \hookrightarrow \mathbb{R}^N.$$

此外，$p^* C^\infty(\mathbb{R}^N) = C^\infty(V/K)$。

这意味着紧群作用的商空间具有自然的全局奇异图表。

推论 6.33. 设 V 是有限维 K-表示，且 V^K 是 V 的不动点集。

(1) $C^\infty(V^K) = C^\infty(V)|_{V^K} = C^\infty(V)^K|_{V^K}$.

（2）选择一个希尔伯特映射 $p : V \to \mathbb{R}^N$ 定义了光滑流形的嵌入

$$p|_{V^K} : V^K \hookrightarrow \mathbb{R}^N.$$

证明。（1）恒等式 $C^\infty(V^K) = C^\infty(V)|_{V^K}$ 是 V^K为闭子集的结果。对于等式 $C^\infty(V)|_{V^K} = C^\infty(V)^K|_{V^K}$，取某个 $f \in C^\infty(V)$。在 K 上选择一个满足 $\mathrm{vol}(K) < \infty$的 K-不变内积，我们定义

$$f^K(v) := \frac{1}{\mathrm{vol}(K)} \int_{k\in K} f(k \cdot v).$$

于是f_K是不变的，并且如果$v \in V^K$，那么$f^K(v) = f(v)$。因此，$f_K|_{V^K} = f|_{V^K}$。

(2) 这相当于展开定义。

□

多亏了切片定理（定理 2.13），我们可以很自然地将整个讨论推广到适当群作用的情形。现在设 G 是一个连通李群，且 M 是一个光滑的适当 G-空间。

命题 6.34. *$C^\infty(M/G)$ 是 M/G 上的子笛卡尔结构。*

证明。这是定理2.13的一个简单应用。对任意$x \in M$，我们都能找到一个G-不变邻域$U \subseteq M$，它包含x，以及一个G-等变微分同胚 $\phi : U \to G \times_{G_x} \nu_x(M,G)$。因此，我们有

$$U/G \cong (G \times_{G_x} \nu_x(M,G))/G \cong \nu_x(M,G)/G_x$$

为 $\nu_x(M,G)$ 配备定理6.32 $p : \nu_x(M,G) \to \mathbb{R}^N$ 中的希尔伯特映射，即可得到所需的奇异图。 □

该结果可以推广到 M 的特定闭子集。

定义 6.35（可切片子集）。设 $A \subseteq M$ 是一个在 G-作用下闭的子集。若对于任意 $a \in A$，我们都能找到一个关于 a 的切片邻域 $\phi : U \subseteq M \to G \times_{G_a} \nu_a(M, G)$，如定理 2.13 所述，使得

$$\phi(U \cap A) = G \times_{G_a} S,$$

其中 $S \subseteq \nu_a(M,G)$ 是一个 G_a-不变子集。

命题 6.36。 *设 $A \subseteq M$ 是 M 的一个闭可切片子集，并记 $\pi_A : A \to A/G$ 为 G-作用在 A 上的商映射。则*

$$C^\infty(A/G) = \{f : A/G \to \mathbb{R} \mid \pi_A^* f \in C^\infty(A)^G\}$$

是 A 上的子笛卡尔结构。

证明。 由于 π_A 是开映射，显然可得$C^\infty(A/G)$ 是一个微分结构。因此，我们只需构造奇异图，这是一项局部工作。由于A 可切片，我们可以假设 $M = G \times_K V$，其中 K 是紧子群$K \leq G$，而K在V上的表示，且$A = G \times_K S$，其中K 是不变闭子集$S \subseteq V$。令$p : V \to \mathbb{R}^N$ 为一个希尔伯特映射，由 Schwarz 可知，

$$p^* C^\infty(\mathbb{R}^N) = C^\infty(V)^K.$$

现在利用命题 6.17，由于S 是闭的，我们有$C^\infty(S) =$和$C^\infty(V)|_S$，因此$C^\infty(S)^K = C^\infty(V)^K|_S$。因此，

$$(p|_S)^* C^\infty(\mathbb{R}^N) = C^\infty(S)^K$$

因此，诱导映射

$$A/G \cong S/K \hookrightarrow \mathbb{R}^N$$

是A/G的奇异图。 □

例子 6.37。 为了了解可切片子集的一个例子，现在考虑一个适当的哈密顿G空间$J : (M, \omega) \to \mathfrak{g}^*$ 其中G是连通李群。若$J^{-1}(0)$ 非空，我断言它是一个闭的可切片子集。由J的连续性和等变性可知，显然$J^{-1}(0)$ 是闭的且G-等变。关于可切片性，回顾引理3.47 : 对于任意$x \in J^{-1}(0)$，我们可以找到一个G-不变开邻域$U \subseteq M$，它包含x，以及一个哈密顿G空间的同构

$$\phi : U \to V \subseteq G \times_{G_x} (\mathfrak{g}_x^\circ \times S\nu_x(M, G)),$$

其中V是G-不变的邻域，包含 $[e, 0, 0]$。在这个局部模型中，动量映射J 具有如下形式

$$J : G \times_{G_x} (\mathfrak{g}_x^\circ \times S\nu_x(M, G)) \to \mathfrak{g}^*; \quad [g, q, v] \mapsto \mathrm{Ad}_g^*(q + \mathfrak{p} \circ J_x(v)),$$

其中 动量映射$_x : S\nu_x(M,G) \to \mathfrak{g}_x^*$ 是二次动量映射，而 $\mathfrak{p} : \mathfrak{g}_x^* \to \mathfrak{g}^*$ 是一个G_x- 等变分裂。由此可见

$$J^{-1}(0) = G \times_{G_x} (\{0\} \times J_x^{-1}(0))$$

并且显然，动量映射$_x^{-1}(0) \subseteq S\nu_x(M,G)$ 是闭且 G_x-不变的。因此，根据命题 6.36，我们可以在约化空间 $M_0 =$ 动量映射$^{-1}(0)/G$ 上赋予子笛卡尔结构 $C^\infty(M_0)$，其定义为

$$C^\infty(M_0) = \{f : M_0 \to \mathbb{R} \mid \pi_0^* f \in C^\infty(M)^G|_{J^{-1}(0)}\},$$

其中， π_0 : 动量映射$^{-1}(0) \to M_0$ 是商映射。

6.3 扎里斯基切向量

既然我们已经建立了子笛卡尔空间的基础，就可以开始讨论子笛卡尔空间相较于微分学或层叠，在将微分几何加以推广时真正擅长的方面：切结构。从某种意义上说，子笛卡尔空间非常适合推广协变几何结构（如切空间），但极不适合推广反变结构（如余切空间）。

和讨论向量场时一样，我们首先需要给出逐点描述。

定义 6.38 （扎里斯基切向量）。 设X 为一个子笛卡尔空间，并固定$x \in X$。在x 处的扎里斯基切向量是一个线性映射

$$V : C^\infty(X) \to \mathbb{R}$$

使得对任意f、$g \in C^\infty(X)$，都有

$$V(fg) = (Vf)g(x) + f(x)(Vg).$$

用T_xX 表示x处所有扎里斯基切向量构成的集合。

例子 6.39. 设 M 是一个光滑流形，那么这一概念恰好还原了通常切向量的定义。

例子 6.40. 设 $X = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 0 \text{ 或 } x_2 = 0\}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中坐标轴的并集。于是我们看到

$$T_{(x_1,x_2)}X = \begin{cases} \operatorname{span}_{\mathbb{R}}(\partial_1), & x_1 \neq 0 \\ \operatorname{span}_{\mathbb{R}}(\partial_2), & x_2 \neq 0 \\ T_{(0,0)}\mathbb{R}^2, & (x_1,x_2) = (0,0) \end{cases}$$

特别地，在一般的子笛卡尔空间上，扎里斯基切空间的维数可以变化。

引理 6.41. 设 X 是一个子笛卡尔空间，$x \in X$，且 $U \subseteq X$ 是 x 的一个开邻域。假设 $f \in C^\infty(X)$ 满足 $f|_U = 0$。则对于所有 $V \in T_xX$，都有 $Vf = 0$。

证明。 取邻域 $W \subseteq U$，使其包含x，并取函数 $\phi \in C^\infty(X)$，使得 $\phi|_W = 1$ 且 $\phi|_{X\setminus U} = 0$。于是 $\phi f = 0$。因此，对于任意$V \in T_xX$，我们有

$$V(\phi f) = 0.$$

利用导子性质，我们得到

$$0 = V(\phi f) = V(\phi)f(x) + \phi(x)V(f) = V(f).$$

□

推论 6.42. 若 X 是子笛卡尔空间，$x \in X$，且 $f, g \in C^\infty(X)$ 满足：在 x 的某个开邻域 $U \subset X$ 上，$f|_U = g|_U$，则对所有 $V \in T_xX$，都有 $Vf = Vg$。

定义 6.43 （点处的导数）**.** 若X 和Y 是两个子笛卡尔空间，$F : X \to Y$ 是可微映射，且$x \in X$，则定义**F 在** x 处的导数为 线性映射

$$T_xF : T_xX \to T_{F(x)}Y$$

定义如下。取$V \in T_xX$ 和$f \in C^\infty(Y)$，定义

$$T_xF(V)(f) := V(f \circ F).$$

推论 6.44. 设 X 是子笛卡尔空间，$Y \subseteq X$ 是子空间，且 $y \in Y$。若$\iota : Y \hookrightarrow X$ 是包含映射，则

(1) $T_y\iota : T_yY \to T_yX$ *is injective.*

(2) 设 $I_Y = \{f \in C^\infty(X) | f|_Y = 0\}$。那么，

$$T_y\iota(T_yY) = \{V \in T_yX \mid Vf = 0 \text{ for all } f \in I_Y\}.$$

证明。（1）设 $V \in T_yY$，且假设 $T_y\iota(V) = 0$。我们证明 $V = 0$。为此，取任意 $f \in C^\infty(Y)$。那么可以找到 y 的一个邻域 $U \subseteq X$，以及 $g \in C^\infty(X)$，使得 $g|_{U\cap Y} = f|_{U\cap Y}$。由引理 6.41，这意味着 $V(g|_Y) = V(f)$。注意，根据定义，$V(g|_Y) = T_y\iota(V)g$。因此 $Vf = 0$。由于 f 是任意的，我们得出 $V = 0$，从而 $T_y\iota$是单射。

（2）假设 $V \in T_yY$ 且$f \in I_Y$。那么显然

$$T_y\iota(V)f = V(f|_Y) = V(0) = 0.$$

现在假设 $V \in T_yX$ 满足 $Vf = 0$ 对所有$f \in I_Y$均成立。我们如下定义 $\overline{V} \in T_yY$。选取$f \in C^\infty(Y)$，并令$U \subseteq X$ 为 y 的一个邻域，且$g \in C^\infty(X)$ 满足 $g|_{U\cap Y} = f|_{U\cap Y}$。于是定义

$$\overline{V}f := Vg. \tag{6.2}$$

这是良定义的。为说明这一点，设 $g_1, g_2 \in C^\infty(X)$ 是两个函数，$U_1, U_2 \subseteq X$ 是 y 的两个邻域，并满足 $g_i|_{U_i \cap Y} = f|_{U_i \cap Y}$。我们证明 $Vg_1 = Vg_2$。令 $U = U_1 \cap U_2$，可见 $g_1 - g_2 \in I_{U \cap Y}$。选取 x 的一个邻域 $W \subseteq X$，以及一个非负函数 $\phi \in C^\infty(X)$，使得

$$\phi|_W = 1 \quad \text{and} \quad \phi|_{X \setminus U} = 0.$$

于是我们看到 ϕ（李代数 g_1 –李代数 g_2）$\in I_Y$。特别地，我们有

$$0 = V(\phi(g_1 - g_2)) = V(\phi)(g_1(y) - g_2(y)) + \phi(y)V(g_1 - g_2) = V(g_1 - g_2).$$

因此 $Vg_1 = Vg_2$。所以，公式（6.2）定义良好。显然 $V \in T_y Y$，并且显然 $T_y\iota(V) = V$。

□

引理 6.45. 设 $X, Y \subseteq \mathbb{R}^N$ 是两个子集，并设 $F: X \to Y$ 是子笛卡尔空间之间的一个微分同胚。那么，对每个 $x \in X$，都可以找到 x 和 $F(x)$ 的邻域 $U, V \subseteq \mathbb{R}^N$，以及一个微分同胚 $H: U \to V$，使得 $H|_{U \cap X} = F|_{U \cap X}$。

证明。经过仿射变换后，我们不妨设 $x = F(x) = 0$。根据引理 6.28，我们可以找到邻域 $U, V \subseteq \mathbb{R}^N$，位于原点附近，以及一个光滑映射 $G: U \to V$，使得

$$G|_{U \cap X} = F|_{U \cap X}$$

Mol 的一个论证 [Mol24，命题 2。33] 表明，经过适当缩小 U 后，我们可以找到一个映射 $A : U \to V$，使得 $A|_{U \cap X} = 0$，并且 $H = G + A$ 且 $T_0 H$ 可逆。因此，再次适当缩小 U 后，我们便得到所需的映射 H。

□

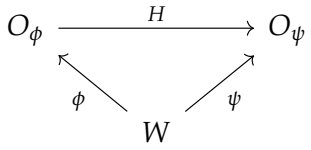
定理 6.46. 设 X 是一个子笛卡尔空间，且 $\phi : U \hookrightarrow \mathbb{R}^N$ 和 $\psi : V \hookrightarrow \mathbb{R}^M$ 是两个奇异图，其中 $U \cap V \neq \emptyset$。记 $Q := max(N, M)$，并令 $\iota_N : \mathbb{R}^N \hookrightarrow \mathbb{R}^Q$ 和 $\iota_M : \mathbb{R}^M \hookrightarrow \mathbb{R}^Q$ 为第一坐标的包含映射。于是，对每个 $x \in U \cap V$，存在

(1) 一个包含 $x \in W \subseteq U \cap V$ 的开邻域；

(2) 分别是关于 $\phi(W)$ 和 $\psi(W)$ 的开邻域 $O_\phi, O_\psi \subseteq \mathbb{R}^Q$；

(3) 一个 C^∞-微分同胚 $H : O_\phi \to O_\psi$

使得下图交换。



(6.3)

证明。 不失一般性，我们可以假设 $N = M = Q$。固定坐标图 $\phi: U \hookrightarrow \mathbb{R}^N$ 和 $\psi: V \hookrightarrow \mathbb{R}^N$，其中 $x \in U \cap V$。那么显然，映射的复合

$$\phi(U \cap V) \xrightarrow{\phi^{-1}} U \cap V \xrightarrow{\psi} \psi(U \cap V)$$

在两个 $\mathbb{R}^N$ 的子笛卡尔子集之间定义了一个微分同胚。因此，根据引理 6.45，我们可以找到开邻域 $A、B \subseteq \mathbb{R}^N$，分别包含 $\phi(x)$ 和 $\psi(x)$，以及一个微分同胚 $H: A \to B$，使得 $H|_{A\cap\phi(U\cap V)} = \psi \circ \phi^{-1}|_{A\cap\phi(U\cap V)}$。令 $W = \phi^{-1}(\phi(U \cap V) \cap A)$，即可得到所需的图表。 □

6.4 扎里斯基向量场

现在我们已经有了扎里斯基切向量，自然会考虑“光滑变化的”切向量，即向量场。它们可以从抽象角度刻画为可微函数环的导子，也可以刻画为扎里斯基切丛的可微截面（稍后将对此概念作更精确的说明）。扎里斯基向量场的一个重要特性是它们具有流（例如参见 [KL23]），但本文不会讨论流，因为它们与后文关于量子化的讨论无关。

定义 6.47 （扎里斯基向量场）。 设 X 是一个子笛卡尔空间。X 上的扎里斯基向量场是一个导子

$$V : C^\infty(X) \to C^\infty(X).$$

用 $\mathfrak{X}(X)$ 表示 X 上的所有扎里斯基向量场构成的集合。

备注6.48. 我将坚持使用完整表述“扎里斯基向量场”，而不只是“向量场”，因为 Sniatycki [Śni13] 将向量场定义为具有局部微分同胚之流的扎里斯基向量场。我们稍后将讨论的许多扎里斯基向量场，按照 Sniatycki 的定义也会是向量场；但由于流并非本论文关注的重点，我对此不再赘述。

由于扎里斯基向量场就是导子，因此扎里斯基向量场上有一个典范的李括号。事实上，若 $V,W \in \mathfrak{X}(X)$ 且 $f \in C^\infty(X)$，那么由于 $V(f), W(f) \in C^\infty(X)$，我们可以定义

$$V(W(f)) - W(V(f))$$

很容易看出，这实际上定义了一个新的导子，因此也定义了一个新的扎里斯基向量场。

定义 6.49（扎里斯基向量场上的李括号）。 设X 是一个子笛卡尔空间，且 V、$W \in \mathfrak{X}$（X）。定义V 与W的李括号，记作$[V$、$W],$，其定义为

$$[V,W](f) = V(W(f)) - W(V(f)).$$

接下来，只需运用线性代数即可验证

$$[\cdot,\cdot] : \mathfrak{X}(X) \times \mathfrak{X}(X) \to \mathfrak{X}(X); \quad (V,W) \mapsto [V,W]$$

它是双线性的、反对称的，并满足雅可比恒等式。现在，在讨论扎里斯基向量场相对于子空间的关键性质之前，我想先从子笛卡尔空间的切丛某种形式出发，给出一种替代性的解释。

定义 6.50。 设X 是一个子笛卡尔空间。定义扎里斯基切丛如下：

$$TX := \bigcup_{x \in X} T_x X$$

令 $\pi : TX \to X$ 为如下定义的自然投影：

$$\pi|_{T_x X} : T_x X \to X; \quad V \mapsto x,$$

对于 $x \in X$。这使我们能够正式定义 TX 上的一组实值函数：

$$\pi^* C^\infty(X) := \{f \circ \pi \mid f \in C^\infty(X)\}.$$

此外，给定$f \in C^\infty(X)$，我们可以定义

$$df : TX \to \mathbb{R}; \quad V \mapsto V(f).$$

因此，我们可以在 TX 上定义另一组形式函数：

$$dC^\infty(X) := \{df \mid f \in C^\infty(X)\}.$$

定义 6.51 （切空间微分结构，[Śn13]）。 设 X 是一个子笛卡尔空间，并赋予 TX 由$\pi^*C^\infty(X) \cup dC^\infty(X)$ 诱导的始拓扑以及微分结构

$$C^\infty(TX) = \langle \pi^* C^\infty(X) \cup dC^\infty(X) \rangle.$$

我们的目标现在是证明，$C^\infty(TX)$ 在TX上定义了一个子笛卡尔结构。为此，我们还引入子笛卡尔空间之间可微映射的（暂时形式上的）导数。

定义 6.52（切映射）。 设$F : X \to Y$ 是子笛卡尔空间之间的可微映射。定义切映射$TF : TX \to TY$ 为

$$TF|_{T_xX} = T_xF : T_xX \to T_{F(x)}Y,$$

其中 T_xF 是定义 6.43.中的导数映射。

正如人们所料，导数映射是一个可微映射。

命题 6.53。 设 $F : X \to Y$ 和 $G : Y \to Z$ 是子笛卡尔空间之间的可微映射。

（1）图表交换

$$\begin{array}{ccc} TX & \xrightarrow{TF} & TY \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{F} & Y \end{array} \tag{6.4}$$

其中，竖直箭头是典范投影映射 $TX \to X$ 和 $TY \to Y$。

(2) $TF : TX \to TY$ 是可微的。

(3) $T(G \circ F) = TF \circ T$李代数 g

(4) 若 F 是微分同胚，则 TF 也是微分同胚。

证明。 (1) 这是一个直接推论：对于所有 $x \in X$，T_xF 的像都包含在 $T^{F(x)}Y$ 中。

(2) 设 $\pi_X : TX \to X$ 和 $\pi_Y : TY \to Y$ 分别为投影映射。根据命题 6。11 ，只需证明对所有 $f \in C^\infty(Y)$ ，

- $(TF)^*\pi_Y^* f \in C^\infty(X)$ and
- $(TF)^* df \in C^\infty(X)$.

为明确起见，我们固定 $f \in C^\infty(Y)$。首先，由方程（6.4）可得

$$(TF)^*\pi_Y^* f = (\pi_Y \circ TF)^* f = (F \circ \pi_X)^* f.$$

映射 $F \circ \pi_X$ 是可微的，因此 $(TF)^* \pi_Y^* f \in C^\infty(TX)$。现在，为了证明 $(TF)^* df \in C^\infty(TX)$，注意，根据定义展开可知

$$(TF)^* df = d(F^* f)$$

再一次，$F^* f \in C^\infty(X)$，因此 $d(F^* f) \in C^\infty(TX)$。

(3) 由逐点导数的定义可直接得出。

(4) 将 **(3)** 应用于 F 和 F^{-1}，即可得出结论。

□

引理 6.54. 设 M 是一个光滑流形。则 TM 上的自然光滑结构与定义 *6.51* 中定义的微分结构 $C^\infty(TM)$

证明。 回忆一下，TM 是利用局部图的微分构造的。特别地，当且仅当对于每个坐标图，f: 切丛 $\to \mathbb{R}$ 光滑

$$\phi : U \subseteq M \to \mathbb{R}^n,$$

映射

$$f \circ (T\phi)^{-1} : T\phi(U) \to \mathbb{R}$$

是光滑的。令 $x_1, \ldots, x_n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上的坐标函数，并令 $v_1, \ldots, v_n$ 为 $T\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 上的相应线性坐标。令 $F = f \circ (T\phi)^{-1}$，由于 $T\phi(U) \subseteq T\mathbb{R}^n$ 是一个开子集，我们看到 F 是如下形式的函数

$$F(x_1, \ldots, x_n, v_1, \ldots, v_n).$$

现在，将 $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_n)$ 写作 ϕ 和 π 的坐标：$TM \to M$ 的投影映射，我们有

$$f = F \circ T\phi = F(\pi^* \phi_1, \ldots, \pi^* \phi_n, d\phi_1, \ldots, d\phi_n)$$

这恰好意味着 $f \in C^\infty(TM)$ 来自定义 6.51。逆命题中的包含映射是显然的。

□

定理 6.55。 设 X 为子笛卡尔空间，并赋予 TX 以下微分结构

$$C^\infty(TX) = \langle \pi^* C^\infty(X) \cup dC^\infty(X) \rangle.$$

则以下结论成立。

(1) 投影映射 π： $TX \to X$ 以及零截面

$$0_X : X \to TX$$

是可微的。

(2) $C^\infty(X)$ 是子笛卡尔结构。特别地，如果 $\phi : U \subseteq X \hookrightarrow \mathbb{R}^N$ 是 X 的奇异图，那么

$$T\phi : \pi^{-1}(U) = TU \hookrightarrow T\mathbb{R}^N$$

是 TX 的一个奇异图。

(3) 数乘

$$\mathbb{R} \times TX \to TX$$

和纤维逐点加法

$$TX \times_\pi TX \to TX$$

都是可微的。

证明。 (1) 根据定义， $\pi^* C^\infty(X) \subseteq C^\infty(TX)$，因此 π 是可微的。令

$$0_X : X \to TX$$

为将每个x 映射到零切向量的映射。注意到

$$0_X^* \pi^* C^\infty(X) = C^\infty(X)$$

and

$$0_X^* dC^\infty(X) = \{0\} \subseteq C^\infty(X).$$

根据命题6.11， 0_X 是可微的。

(2) 设 $\phi : U \subseteq X \hookrightarrow \mathbb{R}^N$ 是一个奇异图。由于 ϕ 是到其像上的微分同胚，因此 $T\phi : TU \to T\phi(U) \subseteq T\mathbb{R}^n$ 也是微分同胚。

(3) 在局部图中，数乘和加法都可以看作通常数乘和加法在$T\mathbb{R}^n$上的限制，因此是光滑的。

□

命题 6.56. 设 X 是一个子笛卡尔空间。

(1) 设 $V \in \mathfrak{X}(X)$ 是一个扎里斯基向量场，且 $x \in X$。则映射

$$V_x : C^\infty(X) \to \mathbb{R}; \quad f \mapsto V(f)(x) \tag{6.5}$$

是一个扎里斯基切向量。

(2) 方程（6.5）中的映射在扎里斯基向量场 $\mathfrak{X}(X)$ 与映射$\pi : TX \to X$ 的所有可微截面集合之间定义了一个典范双射。

6.5 可限制向量场

作为本章的收尾，我们现在来讨论将扎里斯基向量场限制到子集上的问题。与子流形的情形一样，我们不能将任意向量场限制到子集上，并期望它仍然相切。相反，只有特殊的向量场才能被限制。与子流形的情形一样，这些向量场可以用保持该子集的消失理想来刻画。对于下文的讨论，重要的是将第5.3节中构造约化预量子联络的方法加以推广；在该节中，我们将与动量映射的零水平集相切的向量场加以限制，再将其推送到约化空间。事实证明，在奇异情形下，我们几乎可以使用完全相同的构造。不过首先，我们需要建立所需的框架。

定义 6.57（可限制向量场）。 设X 是一个子笛卡尔空间，且$Y \subseteq X$ 是一个子集。记

$$\mathfrak{X}(X,Y) := \{V \in \mathfrak{X}(X) \mid V_y \in T_y Y \text{ for all } y \in Y\}.$$

为所有与Y相切的扎里斯基向量场所构成的集合。

如前所述，可限制向量场可以通过保持消失理想来刻画。

命题 6.58. 设 $Y \subseteq X$ 是一个子笛卡尔空间的子集。

$$\mathfrak{X}(X,Y) = \{V \in \mathfrak{X}(X) \mid V I_Y \subseteq I_Y\}.$$

此外，对于任意 $V \in \mathfrak{X}(X,Y)$ 以及 $f \in C^\infty(X)$，有

$$V|_Y(f|_Y) = V(f)|_Y.$$

证明。 这是命题6.56与推论6.44所给出的子集切空间逐点刻画相结合的直接应用。

□

推论 6.59. 设 $V,W \in \mathfrak{X}(X,Y)$。那么，

(1) 李括号 $[V,W] \in \mathfrak{X}(X,Y)$

(2) 李括号与限制可交换。也就是说，$[V|_Y, W|_Y] = [V, W]|_Y$。

证明。 (1) 设 $f \in I_Y$。根据命题 6.58 可得 $V(f), W(f) \in I_Y$。再次应用该命题，便可得 $V(W(f)), W(V(f)) \in I_Y$ 同样成立。因此，

$$[V,W](f) = V(W(f)) - W(V(f)) \in I_Y.$$

因此， $[V, W] \in \mathfrak{X}(X, Y)$。

（2）要证明 $[V|_Y, W|_Y] = [V, W]|_Y$，只需证明对任意 $f \in C^\infty(X)$，有

$$[V|_Y, W|_Y](f|_Y) = [V,W]|_Y(f|_Y).$$

固定 $f \in C^\infty(X)$，首先可见

$$[V|_Y, W|_Y](f|_Y) = V|_Y(W|_Y(f|_Y)) - W|_Y(V|_Y(f|_Y))$$

由命题 6.58，可得

$$V|_Y(W|_Y(f|_Y)) = V(W(f)|_Y) = V(W(f))|_Y$$

由对称性可得

$$[V|_Y, W|_Y](f|_Y) = V(W(f))|_Y - W(V(f))|_Y = [V,W](f)|_Y = [V,W](f|_Y).$$

□

给定一个子笛卡尔空间 X 及其子集 $Y \subseteq X$，现在我们定义了可限制向量场 $\mathfrak{X}(X, Y)$ 以及一个自然映射

$$\mathfrak{X}(X,Y) \to \mathfrak{X}(Y); \quad V \mapsto V|_Y.$$

问题变成了：这个映射何时是满射？这是一个非平凡的问题，因为它将决定能否在约化空间上定义预量子联络。为了开始研究这一问题，我们接下来转向 Karshon 和 Lerman 的一个结果。

引理 6.60 ([KL23]). 设 $X \subseteq \mathbb{R}^N$ 是一个子集，且 $V \in \mathfrak{X}(X)$。那么，对于 X 的任意开邻域 W 以及 $h \in C^\infty(W)$，我们有

$$V(h) = \sum_{i=1}^{N} V(x_i|_X) \left.\frac{\partial h}{\partial x_i}\right|_X.$$

推论 6.61. 设 $X \subseteq \mathbb{R}^N$ 为一个子集，且 $V \in \mathfrak{X}(X)$。那么存在 X 的一个邻域 $W \subseteq \mathbb{R}^N$，以及一个向量场 $\widetilde{V} \in \mathfrak{X}(W,X)$，使得 $\widetilde{V}|_X = V$。

证明。 令 $x_1,\dots,x_N\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ 为 $\mathbb{R}^N$上的坐标函数。由于函数只有有限多个，我们可以找到 X 的一个开邻域$W \subseteq \mathbb{R}^N$，以及X 上的李代数 $g_1,\dots,$ 李代数 $g_N \in C^\infty(W)$，使得

$$V(x_i|_X) = g_i|_X.$$

~定义$V \in \mathfrak{X}(W)$ 为

$$\widetilde{V} := \sum_{i=1}^{N} g_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

注意，若$U \subseteq W$ 是一个开集，且$f \in I^{U\cap X}$，那么利用引理6.60，可得

$$V(f|_{U\cap X}) = \sum_{i=1}^{N} V(x_i|_{U\cap X}) \frac{\partial f}{\partial x_i}\bigg|_{U\cap X} = 0.$$

特别地，注意若 $x_0 \in U \cap X$ 且 $(f)_{x_0} \in (I_X)^{x_0}$，则

$$\widetilde{V}_{x_0}(f)_{x_0} = 0.$$

~因此$V|_X = V$。 □

推论 6.62. 若 M 是一个光滑流形，且 $X \subseteq M$ 是一个闭集，则典范映射

$$\mathfrak{X}(M, X) \to \mathfrak{X}(X); \quad V \mapsto V|_X$$

是满射。

证明。 令 $V \in \mathfrak{X}(X)$。利用推论 6.61逐图卡地，我们可以找到一个~覆盖 $\{U_i\}_{i\in I}$，覆盖X，以及向量场 $V_i \in \mathfrak{X}(U_i, U_i \cap X)$，使得~$V_i|_{U_i\cap X} = V|_{U_i\cap X}$。令$U_\infty = M \setminus X$ 且$V_\infty = 0$。于是我们可以找到一个单位分解 $\{\phi_i\}_{i\in I\cup\{\infty\}}$，并定义

$$\widetilde{V} := \sum_{i\in I\cup\{\infty\}} \phi_i \widetilde{V}_i.$$

~于是显然可知$V|_X = V$。因此结论成立。 □

例子 6.63. 利用上述结果，我们可以证明，一般情况下无法进行延拓。也就是说，我们可以找到一个子笛卡尔空间X 以及一个闭集$A \subseteq X$，使得

$$\mathfrak{X}(X, A) \to \mathfrak{X}(A)$$

不是满射。这是 Sniatycki 提出的一个例子 [Śni13]。事实上，考虑

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \text{ or } y = 0\}$$

并令

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \text{ and } y = 0\}.$$

注意到 $A \subset X \subset \mathbb{R}^2$ 都是 $\mathbb{R}^2$ 的闭子集，因此这些映射

$$\mathfrak{X}(\mathbb{R}^2, X) \to \mathfrak{X}(X) \quad \text{and} \quad \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2, A) \to \mathfrak{X}(A)$$

都是满射。特别地，注意，如果 $V \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2, X)$，那么 $V_0 = 0$。事实上，这是由 $V(xy) \equiv 0$ 这一事实推得的。另一方面，我们很容易看出 $\partial/\partial x \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2, A)$，而且这个向量场显然在 0 处不为零。特别地，我们看到 $\partial/\partial x|_A$ 无法延拓到 $\mathfrak{X}(X)$。

因此，一般而言，我们没有理由认为定义在闭集上的向量场应当能够延拓到整个空间。这对我们来说并不是问题，因为我们之后要处理的空间都包含一个特殊的连通开稠密集，该集合具有流形结构。对于这类空间，延拓结果确实成立。

推论 6.64. 设 X 是一个局部闭子笛卡尔空间，$A \subseteq X$ 是一个闭集。假设 X 有一个连通开稠密集 $U \subseteq X$，使得

(1) $A \cap U$ 在 A 中稠密。

(2) 对任意点 $a \in A$，我们可以找到一个图卡 $\phi\colon W \subseteq X \hookrightarrow \mathbb{R}^N$，使得

$$\phi(U \cap W) = \mathbb{R}^k \times \{0\}$$

对某个 k 成立。

Then

$$\mathfrak{X}(X, A) \to \mathfrak{X}(A); \quad V \mapsto V|_A$$

是满射。

证明。 固定一个扎里斯基向量场 $V \in \mathfrak{X}(A)$。只需证明，对于任意点 $\in A$，我们都能找到一个邻域 $W_a \subseteq X$ 以及一个向量场 $V_a \in \mathfrak{X}(W_a, A \cap W_a)$，使得

$$\widetilde{V}_a|_{A \cap W_a} = V|_{A \cap W_a}.$$

事实上，若情况如此，则我们可以找到一个 W 对 A 的覆盖，以及从属于 WX A 的单位分解，并将这些局部

延拓拼接起来，从而得到一个全局延拓，它在A的某个开邻域之外为零。

因此，转到坐标图后，只需假设 $X \subseteq \mathbb{R}^N$ 是一个闭子集，且指定稠密子集U 是$U = \mathbb{R}^k \times \{0\}$的一个开子集。现在令 x_1,.....、x_N为 $\mathbb{R}^N$上的坐标函数。

根据构造，$\mathrm{x}_{k+1}|_U = \cdots = \mathrm{x}_N|_U = 0$。因此，由于 U 在 X 中稠密，我们有 $\mathrm{x}_{k+1}|_X = \cdots = \mathrm{x}_N|_X = 0$。因此，$\mathrm{V}(\mathrm{x}_{k+1}|_A) = \cdots = \mathrm{V}(\mathrm{x}_N|_A) = 0$。于是，根据推论 6.61，若令 α_1.....、$\alpha_k \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$ 为 $\mathrm{V}(\mathrm{x}_1|_A)$、.....、$\mathrm{V}(\mathrm{x}_k|_A)$ 的延拓，则

$$\widetilde{V} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

是 V 到 $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^N)$ 的延拓。此外，根据构造，$\widetilde{\mathrm{V}}$ 与 U 相切，因而也与 X 相切。事实上，若 $\mathrm{f} \in \mathrm{I}_X$ 是一个在 $\widetilde{\mathrm{X}}$ 上恒为零的函数，那么 $\mathrm{f} \in \mathrm{I}_U$ 也成立。根据定义，$\mathrm{V}(\mathrm{I}_U) \subseteq \mathrm{I}_U$，因而 $\mathrm{V}(\mathrm{f}) \in \mathrm{I}_U$。$\widetilde{}$ 因此，$\mathrm{V}(\mathrm{f})|_X$ 是一个连续函数，在一个开稠密集上恒为零，所以 $\widetilde{\mathrm{V}(\mathrm{f})}|_X = 0$。于是，$\widetilde{\mathrm{V}} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^N, \mathrm{X})$，且 $\widetilde{\mathrm{V}}|_X \in \mathfrak{X}(\mathrm{X}, \mathrm{A})\widetilde{}$，其中 $\mathrm{V}|_A = \mathrm{V}$。□

7 可微分层空间

研究奇异空间的另一种方法，是将奇异空间划分为光滑流形，然后在划分的每个部分上进行微分几何研究，并希望能将结果连贯地拼接起来。这大致就是分层空间的思想。Whitney 首先研究了这类空间 [Whi15], 托姆[Tho69],和马瑟 [Mat73]，旨在将光滑几何延拓至代数簇，并研究映射的稳定性。后来，Bierstone [Bie75], Schwarz [Sch75], 和马瑟 [Mat77] 将这一理论推广到适当群作用的商空间；我们将在第7节3详细讨论这一领域。Molino [Mol88] 还通过提出“维数分层”的定义，将分层理论拓展到奇异叶状结构领域。第 7节2.2中也讨论了这一点（并实际上证明它确实是一种分层！）。

如今，研究分层空间不幸存在许多彼此不等价的方法，而我也将为此增添一些混乱。为了避免在本论文涵盖的大量思想之上再引入更多概念，我将依据 [CM18]中介绍的分层空间理论。好奇的读者不妨查阅该资料，因为它对各种方法作了出色的概述。我也在我的论文 [Ros24]中讨论了研究分层空间的不同方法。

7.1 拓扑分层空间

首先，让我们讨论拓扑分层空间。它们是配有拓扑流形划分的拓扑空间，这些流形彼此拼接的方式类似于 CW 复形的开胞腔。稍后，我们将通过与子笛卡尔结构相容的条件，将微分几何引入其中。

定义7.1 (拓扑分层空间)**.** 拓扑分层空间是一对(X, Σ)，其中

(i) X 是豪斯多夫、第二可数、仿紧拓扑空间；并且

(ii) Σ 是 X 的一个局部有限划分，其各子集连通且局部闭

并满足以下公理。

(1) 每个元素 $S \in \Sigma$ 在子空间拓扑下都是拓扑流形。(2)（边界公理）若 S、$R \in \Sigma$ 是两个片段，且 $S \cap R \neq \emptyset$ 并且 $S \neq R$，则 $S \subseteq R$ 且 $\dim S < \dim R$。若 $S \leq R$ 成立，则记作 $S \subseteq R$。

我们称 Σ 为 X 的一个分层，其元素 Σ 称为分层。若上下文已明确分层，我们将 X 简写为 (X, Σ) 。

注7。2。 定义7.1 中的边界公理使用符号 $\leq$，十分贴切，因为边界公理使 Σ 成为一个偏序集。这与分层空间的一种定义相关，例如可见于 Ayala 等人的论文 [AFT17]。在该定义中，分层空间由一个拓扑空间 X、一个偏序集 $\mathcal{P}$ 以及一个连续映射组成

$$\Sigma : X \to \mathcal{P}; \quad x \mapsto \Sigma_x$$

关于某种拓扑。这里的想法是，“分层”不过是原像 $\Sigma^{-1}(S)$。当然，从这个意义上说，这是对定义 7.1 的极大推广，因为对分层唯一真正的假设是它们满足边界公理，除此之外别无要求。

例子 7.3. 考虑实数集中坐标轴的并集：

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \text{ or } y = 0\}.$$

将 X 划分为流形有很多种方式，但并非所有划分都是分层。例如，考虑这个划分

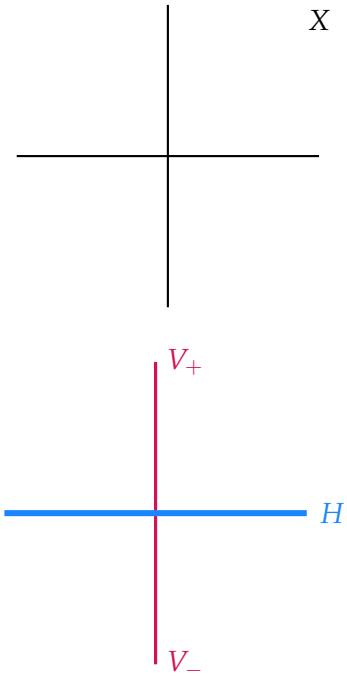
$$X = H \cup V_+ \cup V_-, \tag{7.1}$$

其中

$$H = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$$

and

$$V_\pm = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \pm y > 0\}$$



这定义了X 的一个划分，将其分成拓扑流形（每个部分都与 $\mathbb{R}$ 同胚），但这个划分并不是分层。事实上，请注意

$$\overline{V_+} = \{(0,y) \mid y \in [0,\infty)\}$$

因此 $H \cap V_+ \neq \overline{\varnothing}$。然而，显然 $H \not\subseteq V_+$，例如，$\overline{(1,0)} \notin V_+$。因此，边界公理对这一划分不成立。

尽管如此，对方程（7.1）中的划分进行细化，确实能得到 X 的一个分层。现在考虑划分

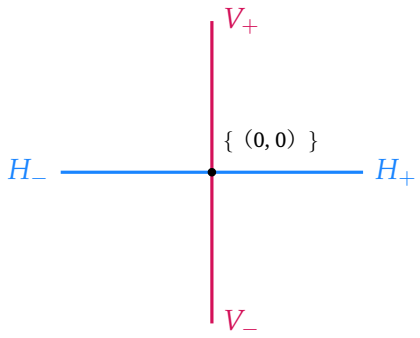
$$X = \{(0,0)\} \cup H_+ \cup H_- \cup V_+ \cup V_-, \tag{7.2}$$

其中

$$H_\pm = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 \mid \pm x > 0\}.$$

现在我们有四个一维片，$H_\pm$、$V_\pm$，以及一个零维片 $\{(0,0)\}$。在这种情况下，我们看到边界公理成立，例如 $\{(0,0)\} \subseteq H_+$。

例子 7.4. 设 M 是一个拓扑流形。由于M 可能不连通，划分 $\{M\}$ 并不是分层。相反，连通分支的集合 $\pi_0(M)$自然构成一个分层。



例子 7.5. 设 $\Delta \subseteq \mathbb{R}^n$ 是由超平面切出的一个子集。也就是说，存在对偶向量 $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in (\mathbb{R}^n)^*$，使得

$$\Delta = \bigcap_{i=1}^{m} \{x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha_i(x) \geq 0\}.$$

Δ 具有典范分层，描述如下。对于每个$x \in \Delta$，通过以下方式定义指标集合$I(x) \subseteq \{1,。.....m\}$

$$I(x) = \{i \in \{1, \ldots, m\} \mid \alpha_i(x) = 0\}.$$

现在，给定任意子集$I \subseteq \{1,。.....m\}$，定义

$$\Sigma_I := \{x \in \Delta \mid I(x) = I\}.$$

然后定义

$$\mathcal{S}(\Delta) = \{\Sigma_I \mid I \subseteq \{1, \ldots, m\},\ \Sigma_I \neq \emptyset\}. \tag{7.3}$$

注意，对于任意 $\Sigma_I \in \mathcal{S}(\Delta)$，有

$$\overline{\Sigma_I} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid I \subseteq I_x\}$$

这立即表明 $\mathcal{S}(\Delta)$ 满足边界公理。

例子 7.6. 给定一个分层空间 (X, Σ)，我们可以通过取 X 的开锥来构造一个新的分层空间。也就是说，令

$$CX = (X \times [0,1))/\sim$$

其中我们对所有$(x,0) \sim (x',0)$，x，$x' \in X$作如下规定。记 ∞为等价类 $[(x,0)]$。那么该划分

$$C\Sigma = \{\infty\} \cup \{S \times (0,1) \mid S \in \Sigma\}$$

定义了CX的一个分层。对分层空间取锥会增加一个 0维分层，并使所有分层的维数增加 1。还要注意，分层 $\{\infty\}$ 是分层上自然偏序中的唯一极小元素。这一性质很有用，在交叉同调理论中得到了广泛应用（例如参见[Max19]）。

作为关于分层空间的最后一个基础定义，我们来引入分层态射的概念。

定义 7.7 （分层态射）。 设$(X1, \Sigma_1)$ 和$(X2, \Sigma_2)$ 是两个拓扑分层空间。它们之间的分层态射是一个连续映射$F : X_1 \to X_2$ ，使得对每个$S_1 \in \Sigma_1$ ，都存在$S_2 \in \Sigma_2$ ，满足$F(S_1) \subseteq S_2$。

例子7.8。 拓扑流形之间的连续映射 $f : M \to N$ 相对于例子 7.4 中的典范分层是分层映射。

例子 7.9。 在论文接下来的部分，我们主要考虑由群作用和叶状结构产生的分层；但作为最后一个基础例子，我们回到分层空间的锥。设(X, Σ) 是一个分层空间，并固定$t \in [0, 1)$。那么，

$$f_t : X \to CX; \quad x \mapsto [x, t]$$

对所有t都定义了一个分层态射。注意，对于$t = 0$，映射f_0 是常数映射，并将所有点映到唯一的极小分层 $\{\infty\}$。

7.2 可微分层空间

分层通常是我们施加于奇异空间（即非流形的空间）上的结构，目的是将光滑几何中的思想和技术迁移到通常不适用这些方法的情形中。当然，这也与 Sikorski空间和子笛卡尔空间的思想有关。这里，我们在可微分层空间的定义中结合这两种思想。首先，我们先给出可微分层空间的基本定义和例子，然后再深入研究奇异叶状结构理论和适当群作用所产生的例子。

定义 7.10. 可微分层空间 设$(X, C^\infty(X))$ 是一个子笛卡尔空间，且 Σ 是X的一个分层。

(1) 若对于每个分层 $S \in \Sigma$，限制的subcartesian结构 $C^\infty(S)$ 都是 S上的光滑结构，则称 Σ 和 $C^\infty(X)$ 是**相容的**。

(2) 若$C^\infty(X)$ 与 Σ 相容，且X 是局部闭子笛卡尔结构，则称三元组$(X, \Sigma, C^\infty(X))$ 为**可微分层空间**。(3) 若$C^\infty(X)$ 与 Σ 相容，但不要求X 是局部闭的，则称$(X, \Sigma, C^\infty(X))$ 为**弱可微分层空间**。

我们将仅记作 X，如果根据上下文可以理解 Σ 和 $C^\infty(X)$。

注记7。11。 大致而言，为分层空间赋予"光滑结构"有三种不同的方法。一种是本文采用的子笛卡尔方法（最显著地见于[Śn13]），另一种是见于 [Pflo1] 或 [Zim24], 的光滑图册方法，还有一种是见于 [CM18]或 [Mol24] 的约化可微结构方法。这些方法并不完全相同，但得益于诸如定理 6。46 这样的结果，其中一种方法中的许多思想都可以直接移植到另一种方法中。在稍后第7。5。1。节讨论惠特尼条件时，这一点将最为有用。

例子7。12。 设 M 为一个光滑流形，并令 $C^\infty(M)$ 表示光滑函数的集合。那么三元组 $(M, \pi_0(M), C^\infty(M))$ 自然构成一个可微分层空间。

例子 7.13. 例子7.5 中讨论的多胞体，在赋予子空间子笛卡尔结构后，显然是可微分层空间。

命题 7.14. 设 (X_1, Σ_1) 和 (X_2, Σ_2) 是两个弱可微分层空间，且 $F: X_1 \to X_2$ 是连续映射。若 F 既可微又是分层态射，那么对于任意满足 $F(S_1) \subseteq S_2$, 的分层 $S_1 \in \Sigma_1$ 和 $S_2 \in \Sigma_2$，限制映射 $F|_{S_1} : S_1 \to S_2$ 是光滑流形之间的光滑映射。

证明。 取两个分层 $S_1 \in \Sigma_1$ 和 $S_2 \in \Sigma_2$，满足 $F(S_1) \subseteq S_2$。若 $f \in C^\infty(X_2)$, 则显然

$$(F|_{S_1})^*(f|_{S_2}) = (F^* f)|_{S_1}.$$

因此，由命题 6.11，可得 $F^*C^\infty(S_2) \subseteq C^\infty(S_1)$。因此，$F|_{S_1}$ 是光滑映射。 □

7.2.1 奇异叶状结构与分层

与分层看起来有些相似的一种结构是奇异叶状结构。它同样是将一个空间划分为流形，但不要求这种划分局部有限。

定义 7.15 （（Stefan-Sussmann）奇异叶状结构）。 设M 是一个流形，$\mathscr{F}$ 是将M 划分为连通浸入子流形的划分。对于每个$x \in M$，记L_x 为 $\mathscr{F}$ 中包含x的唯一元素。若满足以下光滑性条件，我们称$\mathscr{F}$ 为M 上的奇异叶状结构，并称 $\mathscr{F}$ 中的元素为叶。

(S) 若$x \in L$，且$v \in T_xL_x$，则在x 的一个邻域$U \subseteq M$ 中，存在一个向量场$V \in \mathfrak{X}(U)$，使得$V_x = v$，且对所有$y \in U$，都有$V_y \in T_yL_y$。

称这一对$(M, \mathscr{F})$ 为叶状空间。

例子 7.16. 第一个例子自然是通常所说的叶状结构概念，这里称为正则叶层。流形M 上的正则叶层是将其划分为浸入子流形的划分 $\mathscr{F}$，并且存在叶状结构图。也就是说，在每个点$x \in M$ 附近，都存在一个图卡

$$\phi : U \to \Omega \subseteq \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$$

对开集 Ω，满足对所有$y \in U$，都有

$$\phi(U \cap L_y) = \Omega \cap (\mathbb{R}^k \times \{v\})$$

对某个 $v \in \mathbb{R}^m$。根据 Stefan [Ste74], Stefan-Sussmann 叶状结构$\mathscr{F}$ 是正则的，当且仅当映射

$$M \to \mathbb{Z}; \quad x \mapsto \dim L_x$$

是常数。

例子 7.17. 为了观察一个真正奇异的叶状结构例子，考虑 $\mathscr{F}$ 对 $\mathbb{R}^2$ 的如下划分：

$$L_x = \{y \in \mathbb{R}^2 \mid \|y\|^2 = \|x\|^2\},$$

其中 $\|\cdot\|$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的通常范数。这是将 $\mathbb{R}^2$ 划分为两类叶：以原点为中心的一维同心圆，以及由原点 $\{0\}$ 构成的一个零维叶。为了说明 $\mathscr{F}$ 是一个奇异叶状结构，令 x_1,x_2 为 $\mathbb{R}^2$ 上的标准坐标函数。现在考虑

$$V_{(x_1,x_2)} = x_2\frac{\partial}{\partial x_1} - x_1\frac{\partial}{\partial x_2}.$$

显然，V 与所有一维叶片相切，且处处非零。此外，$V_{(0,0)} = 0$。因此，通过V 我们可以实现定义7中的光滑性条件（S）15。

例子 7。18。 设G 为一个连通李群，且M 是一个适当G-空间。由G-作用，我们将得到三种、也可能是四种不同的奇异叶状结构。

(1) **轨道叶状结构**。

根据命题2。9，所有轨道的集合

$$\mathscr{F}_G = \{G \cdot x \mid x \in M\}$$

是一个奇异叶状结构。事实上，每个轨道都是一个嵌入子流形，而映射

$$\mathfrak{g} \times M \to T\mathcal{F}_G; \quad (\xi, m) \mapsto \xi_M(m)$$

是一个满射，其中 $\xi_M \in \mathfrak{X}(M)$ 是相应的基本向量场。特别地，$T\mathscr{F}_G = \mathfrak{g}_M$。注意，为 $\mathbb{R}^2$ 赋予其典范的S^1 作用，即绕原点旋转的作用，可得到例子7。17中的叶状结构。

(2) **按对称流形构造叶状结构**。

回顾一下，对称流形是M 的如下形式的子流形

$$M_K = \{x \in M \mid G_x = K\}$$

对于紧子群 $K \leq G$。由命题 2.22可知，若$x \in M_K$，则 $T_x M_K = (T_x M)^K$。此外，请回想，由于TM是一个 G-等变向量丛，我们可以定义一个子集

$$\widetilde{TM} = \bigcup_{x \in M} (T_x M)^{G_x}.$$

请回想命题2.39 指出映射

$$M \times \mathfrak{X}(M)^G \to \widetilde{TM}; \quad (x, V) \mapsto V_x$$

是一个满射。因此，这意味着该划分

$$\mathscr{F} = \bigcup_{K \leq G} \pi_0(M_K)$$

是 M 的奇异叶状结构。

(3) **按轨道类型片分层**。

回顾一下，M 的轨道类型是如下形式的子集

$$M_{(K)} = \{x \in M \mid G_x \text{ is conjugate to } K\}$$

子群 $K \leq G$。正如推论2。15中所示，轨道类型的连通分支是嵌入子流形。此外，若 $S \subseteq M^{(K)}$ 是一个轨道类型片，则

$$T_x S = (T_x M)^{G_x} + T_x(G \cdot x).$$

因此，令 $\mathscr{F}$ 表示由轨道类型的连通分支构成的M 划分，则由下式给出的模 $\mathcal{M} \subseteq \mathfrak{X}(M)$

$$\mathcal{M} = \{V + \xi_M \mid V \in \mathfrak{X}(M)^G \text{ and } \xi \in \mathfrak{g}\}$$

张成$T\mathscr{F}$。因此， $\mathscr{F}$ 是一个奇异叶状结构。

还可能存在一种由 **约化轨道类型**构成的叶状结构，但我们将在小节7。3。2中更详细地讨论这一划分。

例子 7。19。 设 (M, π) 是一个泊松流形。则 π 诱导出一个由辛子流形构成的奇异叶状结构，称为 π的辛叶状结构。根据定理3。29 ，每个点 $x \in M$ 都唯一对应一个连通辛子流形 $S \subseteq M$ ，使得

$$T_x S = \{V_f(x) \mid f \in C^\infty(M)\}.$$

特别地，令 $\mathscr{F}_\pi$ 表示由辛叶构成的划分，我们有映射

$$M \times C^\infty(M) \to T\mathscr{F}_\pi; \quad (x, f) \mapsto V_f(x)$$

是一个满射，因此 $\mathscr{F}_\pi$ 是一个奇异叶状结构。

例子 7.20. 作为最后一个例子，值得注意的是，奇异叶状结构通常可能确实是奇异的。事实上，令$C \subset [0,1]$ 为康托尔集，并考虑由 $\mathbb{R}$ 构成的划分 $\mathscr{F}$

- 点C
- $\mathbb{R} \setminus C$的连通分支，它们构成一个可数的互不相交的开区间族。

这个划分确实构成一个叶状结构。由于C是闭集，我们可以找到一个光滑函数$f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$，使得$f^{-1}(0)=C$。定义向量场$X\in\mathfrak{X}(\mathbb{R})$如下：

$$X_x := f(x)\frac{d}{dx}.$$

显然，对于每个$X_x\in T_x\mathscr{F}$，都有$x\in\mathbb{R}$。此外，若对某个x_0,有$v\in T_{x_0}\mathscr{F}$，则$v=c\,d\,dx\big|_{x=x_0}$。若$x_0\in C$，则$v=X_{x_0}$。否则，$v=c\underline{f(x_0)}X_{x_0}$。

一般而言，给定任意流形M以及任意闭集$C\subseteq M$，我们可以构造一个奇异叶状结构$\mathscr{F}_C$，其零叶层恰好由C中的点构成。因此，奇异叶状结构可以任意地奇异。

正则叶状结构理论中最著名的结果之一是弗罗贝尼乌斯定理（例如参见 [Lee13，定理19。12]），该定理给出了流形上的正则叶状结构与切丛TM的子丛之间的等价关系，而这些子丛在李括号下封闭。这种看待叶状结构的方式在奇异叶状结构的情形下仍然有效，不过通常我们处理的是伪丛，而不是子丛（精确定义见章节8）。

定义7.21（SF 的切丛）：设M为一个流形，$\mathscr{F}$为将M划分为浸入子流形的一个划分。将该划分的切丛定义为

$$T\mathscr{F} := \bigcup_{x\in M} T_xL_x \subseteq TM.$$

赋予$T\mathscr{F}$子空间拓扑。记$\mathfrak{X}(\mathscr{F})$为满足对于所有$x\in M$，均有$V\in\mathfrak{X}(M)$且$V_x\in T_xL_x$的光滑向量场。

为方便起见，我们现在将关于奇异叶状结构的一系列重要结果汇集为一个陈述。

定理7.22（[Ste74，Sus73，Miy23]）：设$\mathscr{F}$为光滑流形M的一个划分，将其划分为连通浸入子流形。以下各项彼此等价。

(1) $\mathscr{F}$是M的奇异叶状结构。

(2) 该映射

$$\mathfrak{X}(\mathscr{F})\times M\to T\mathscr{F};\quad (V,x)\mapsto V_x$$

是满射。

(3) x、$y\in M$位于同一叶上 $\iff$ 存在$V_1,\dots$、$V_n\in\mathfrak{X}(\mathscr{F})$以及$t_1,\dots$、$t_n\in\mathbb{R}$，使得

$$\phi_{t_1}^{V_1}\circ\cdots\circ\phi_{t_n}^{V_n}(x)=y,$$

其中 $\phi^{V_i}t_i$ 表示 V_i 经过时间 t_i所产生的流。

推论 7.23。 奇异叶状结构满足边界公理。也就是说，若$(M, \mathscr{F})$ 是一个叶状空间，且 $L_x, L_y \in \mathscr{F}$ 是两片叶，其中 $L_x \cap L_y \neq \emptyset$，则 $L_x \subseteq L_y$。

证明。 不失一般性，我们可以假设 $x \in L_y$。设 $z \in L_x$ 是另一个点。那么，由定理 377.22 中的（3），我们可以找到向量场$V_1, \ldots, V_n \in \mathfrak{X}(\mathscr{F})$ 以及时刻 $t_1, \ldots, t_n$，使得

$$\phi_{t_1}^{V_1} \circ \cdots \circ \phi_{t_n}^{V_n}(x) = z.$$

设$U \subseteq M$ 是一个开邻域，使得

$$\psi := \phi_{t_1}^{V_1} \circ \cdots \circ \phi_{t_n}^{V_n}$$

有定义。注意， ψ 是一个保持叶不变的微分同胚。现在设 $\{y_k\} \subset L_y$ 是一个收敛到x的序列。经过可能的缩小U 并取子序列后，我们可以假设 $\{y_k\} \subseteq U$。因此，由连续性可得

$$\lim_{k\to\infty} \psi(y_k) = \psi(x) = z$$

然而， ψ 保持叶状结构，因此对于所有k都有 $\psi(y_k) \in L_y$ 。于是，$z \in L_y$。 □

由此我们得到了一种证明流形的划分是分层的方法，即证明该候选划分是奇异叶状结构！

推论 7.24. 如果$(M, \mathscr{F})$ 是一个局部有限的奇异叶状结构，且其叶是 M 的嵌入子流形，那么 $\mathscr{F}$ 是 M 的可微分层。

注7.25. (1) 注意，给定流形 $\mathscr{F}$ 上的正则叶状结构 M，如果叶的维数不是 $\dim(M)$，那么 $\mathscr{F}$ 不可能是分层。这完全是因为非平凡的正则叶状结构永远不会是局部有限的，正如定义7.16中的叶状结构图定义所直接表明的那样。

(2) 同样需要提醒的是，流形 Σ 上的一个分层 M 未必定义奇异叶状结构。事实上，考虑下面这个由 Whitney 给出的例子 [Whi15]。令 $X \subseteq \mathbb{R}^3$ 为代数簇

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xy(x - y)(y - xz) = 0\}$$

这个代数簇由 4 个“片”组成，它们都在z轴上相交。

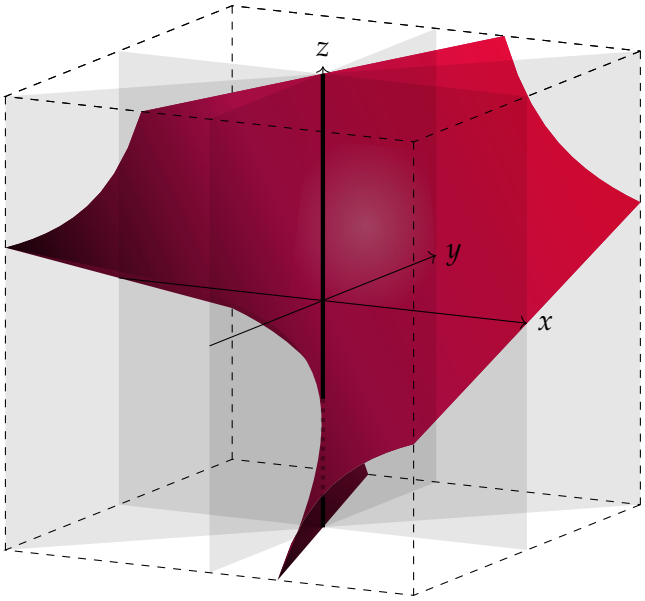


图 7.1：代数簇 $xy(x-y)(y-xz)=0$

利用X，我们得到 $\mathbb{R}^3$ 的如下分层。令

$$Z=\{(0,0,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z\in\mathbb{R}\}$$

表示z轴，并令

$$\Sigma=\pi_0(\mathbb{R}^3\setminus X)\cup\pi_0(X\setminus Z)\cup\{Z\}.$$

那么 Σ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一个分层，其中一个一维分层为 z轴，二维分层为 $X\setminus Z$ 的连通分支，而三维分层为 X 的补集的连通分支。然而， Σ 不是叶状结构。事实上，Whitney 利用交比给出的论证表明，我们无法找到一个非平凡向量场，其流始终与这些片及z轴相切，这违反了定理 3 中的（7.22）。

定义 7.26 (叶状映射)。 设$(M1,\mathscr{F}_1)$ 和$(M2,\mathscr{F}_2)$ 是两个叶状空间，且$F:M_1\to M_2$ 是一个光滑映射。若对于每个F ，对每个$x\in M$ ，都有

$$F(L_x^1)\subseteq L^2_{F(x)},$$

其中 $L_x^1\in\mathscr{F}_1$ 和 $L^2{}_{F(x)}\in\mathscr{F}_2$。若$F$ 是微分同胚，且其逆映射F^{-1} 也是叶状的，则称F 为叶状微分同胚。

例子 7.27. 作为一个简单的例子，考虑 $\mathbb{R}^2$，其轨道叶状结构来自绕$t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$，由旋转给出的典范$S^1$ 作用。标量乘法映射

$$\mu_t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; \quad (x, y) \mapsto (tx, ty)$$

由于它保持原点不变并将圆映射为圆，因此它是保叶的。特别是，保叶微分同胚不必保持叶不变。

推论 7.28. 两个叶状空间$(M_1, \mathscr{F}_1)$ 与$(M_2, \mathscr{F}_2)$ 之间的光滑映射 $F : M_1 \to M_2$ 是保叶的 $\iff$

$$TF(T\mathscr{F}_1) \subseteq T\mathscr{F}_2.$$

7.2.2 奇异黎曼叶状结构

正如我们在例子 7.20 中所见，通常奇异叶状结构可能具有任意程度的奇异性。因此，为了得到更易处理的对象，自然需要施加正则性和相容性条件。由 Molino [Mol88] 提出的奇异黎曼叶状结构（SRF）是一类性质良好、内涵极为丰富（且刚性很强）的奇异叶状结构。接下来，我们将介绍奇异叶状结构的基本定义和结构性结果，然后说明每个 SRF 背后都有一个性质极佳的分层，称为“维数类型”分层。

定义 7.29 （奇异黎曼叶状结构）。设 M 为一个流形，g 为 M上的黎曼度量，且 $\mathscr{F}$ 为 M上的奇异叶状结构。若三元组 $(M、g、\mathscr{F})$ 满足以下正交条件，则称其为奇异黎曼叶状结构（SRF）。

（O）设 $\gamma : (a, b) \to M$ 是一条测地线，满足 $\dot{\gamma}(t_0) \perp T_{\gamma(t_0)}\mathscr{F}$，其中某个 $t_0 \in (a, b)$。则对于所有 $t \in (a, b)$，都有 $\dot{\gamma}(t) \perp T_{\gamma(t)}\mathscr{F}$。

例子 7.30。 任何适当群作用都可以构造出一个奇异黎曼叶状结构 [Pal61]。

现在，奇异黎曼叶状结构都带有一个按叶的维数划分的典范分层。为建立这一点，设 $(M、g、\mathscr{F})$ 为一个奇异黎曼叶状结构，并设 $0 \leq k \leq n$为一个整数。定义

$$M_{(k)} := \{x \in M \mid \dim L_x = k\}.$$

定义 7.31 (维数划分)。 设$(M,$ 李代数 $g,$ $\mathscr{F})$ 是一个奇异黎曼叶状结构。定义与 $\mathscr{F}$ 相关联的维数类型划分如下：

$$\mathcal{S}_{dim}(M, \mathscr{F}) := \bigcup_{k=0}^{n} \pi_0(M_{(k)}).$$

我们的目标是证明，对于任意奇异黎曼叶状结构 $\mathscr{F}$， $\mathcal{S}_{dim}(M, \mathscr{F})$ 都是一个分层。首先，我们来讨论奇异黎曼叶状结构的一项基础结构性结果。为此，固定$x \in M$ 以及$L \in \mathscr{F}$，其中L是包含x的叶。由于叶是浸入的，我们可以找到一个包含x 的开邻域$P \subseteq L$，它作为子流形嵌入M 中。我们称这样的子集为一个**片**。利用测地线，我们可以定义指数管状邻域嵌入

$$\exp_x : \nu_x(M, P) \to M$$

它将零截面映到P。由于 $\nu_x(M,P)$ 是P上的向量丛，因此它带有数乘 μ_t。将由此在像上诱导的幺半群作用称为**位似变换**。也就是说，对于$t \in \mathbb{R}$，位似变换h_t 是指数映射x 像上的微分同胚，使图表交换

$$\begin{array}{ccc} \nu_x(M,P) & \xrightarrow{\exp_x} & \exp_x(\nu_x(M,P)) \\ \downarrow{\scriptstyle \mu_t} & & \downarrow{\scriptstyle h_t} \\ \nu_x(M,P) & \xrightarrow{\exp_x} & \exp_x(\nu_x(M,P)) \end{array}$$

引理 7.32 (位似引理 [Mol88]). 设$\exp_x : \nu_x(M,P) \to M$是如上所述的片的指数管状邻域嵌入。那么，对于$t \in [0,1]$，位似变换$h_t$ 是保叶微分同胚。

位似引理的结论是，奇异黎曼叶状结构在局部可以线性化。

定理 7.33 ([LT10]). 设$(M,$ 李代数 $g, \mathscr{F})$ 是一个奇异黎曼叶状结构，$S \in \mathcal{S}_{dim}(M, \mathscr{F})$ 是一个维数类型分层，且$x \in S$。

(1) 关于诱导线性度量，法空间 $\nu_x(M, S)$ 上存在一个典范的奇异黎曼叶状结构 $\nu_x\mathscr{F}$，满足 $\nu_x(M, S)$ 上的性质：$\{0\}$ 是一个孤立的0维叶，并且非零实数的数乘定义了一个叶状微分同胚。

(2) 在 T_xS 上赋予正则叶状结构 $\mathscr{F}_x^{reg}$，它由经过 x 的叶 T_xL_x 的切空间的平移给出。于是，存在 x 的开邻域 $U \subseteq M$、$(M, S) \times \nu_x(M, S)$ 中 $(0,0)$ 的开邻域 $V \subseteq T_xS$，以及一个叶状微分同胚

$$\phi : U \subseteq M \to V \subseteq (T_xS \times \nu_x(M,S), \mathscr{F}_x^{reg} \times \nu_x\mathscr{F})$$

关于限制叶状结构。

定义7.34 （无穷小奇异黎曼叶状结构）。 我们将类似于（1）的奇异叶状结构称为无穷小奇异黎曼叶状结构。

就奇异叶状结构而言，无穷小奇异黎曼叶状结构的性质相当良好。它们与所在欧几里得空间的底层线性结构相得益彰，并且可以通过将其限制在球面上来理解。

引理 7.35 ([Rad12]). 设 $(V,$ 李代数 $g_{Euc}, \mathscr{F})$ 是一个无穷小奇异黎曼叶状结构，并令 $S(V)$ 表示 V 中的单位球面。则有以下结论。

(1) 对每个 $x \in V \setminus \{0\}$，都有 $L_x \cap S(V) \neq \emptyset$。

(2) 将划分 $\widehat{\mathscr{F}} S(V)$ 的各连通分支作为划分的元素，所得的划分

$$\{L_x \cap S(V)\}_{x \in V}$$

定义了一个关于 $S(V)$ 上诱导度量 $\hat{g}$ 的奇异黎曼叶状结构。

(3) 对每个 $S \in \mathcal{S}_{dim}(V, \mathscr{F})$，$S \cap S(V)$ 的连通分支都包含在 $\mathcal{S}_{dim}(S(V), \widehat{\mathscr{F}})$ 中。

有了这一结果，我们现在可以证明，维数类型划分确实是一个具有嵌入叶的局部有限奇异叶状结构，因此也是一个分层。

定理 7.36 ([MR25]). 维数类型划分 $\mathcal{S}_{dim}(M, \mathscr{F})$ 是一个具有嵌入叶的局部有限奇异叶状结构。

证明。 我们先证明 $\mathcal{S}_{dim}(M, \mathscr{F})$ 是局部有限的。这是一个基于局部标准形的归纳论证。首先，只需证明无穷小叶状结构的维数类型划分是有限的。事实上，若此成立，那么对于维数类型分层 $S \in \mathcal{S}_{dim}(M, \mathscr{F})$ 中的任意点 $x \in M$，其邻域 $U \subseteq M$ 与 x 的一个邻域之间存在局部叶状微分同胚，该邻域为 $V \subseteq T_xM$

$$\phi : U \subseteq M \to V \subseteq T_xS \oplus \nu_x(M, S) \tag{7.4}$$

那么，由于 $\mathcal{S}_{\nu_x \mathscr{F}}(\nu_x(M, S))$ 是有限的，可知只有有限多个 $\mathcal{S}_{dim}(M, \mathscr{F})$ 中的元素与 U 有非平凡交集。

现在固定一个无穷小叶状结构 (V, $\mathscr{F}$)。我们通过对 dim V 使用归纳法，证明 $\mathcal{S}_{\mathscr{F}}$(V) 是有限的。首先，如果 dim V $= 0$，那么 $\mathcal{S}_{\mathscr{F}}(\{0\})$ 是单点集，因此是有限的。现在假设对于任意 k $<$ n， $\mathbb{R}^k$ 上的无穷小叶状结构都满足该结论。取 V 的球面 S(V) 上一点 x，并应用定理 7.33 中的局部标准形，我们得到 (V, $\mathscr{F}$) 在局部微分同胚于一个正则叶状结构与一个无穷小奇异

维数严格小于V的黎曼叶状结构，因此在那里是有限的。由于$S(V)$ 是紧致的，我们可以用有限个邻域覆盖它，使得交集都是有限的。利用齐次性（见引理7.32），我们可以推得 $\mathcal{S}_{\mathscr{F}}(V)$ 是有限的。

现在证明 $\mathcal{S}_{dim}(M, \mathscr{F})$ 是一个奇异叶状结构。由方程（7.4）中的局部标准形可知，只需假设

$$(M, \mathscr{F}) = (V_1 \times V_2, \mathscr{F}_1 \times \mathscr{F}_2)$$

其中V_1,V_2 是向量空间， $\mathscr{F}_1$ 是V_1, 上的正则叶状结构，而 $\mathscr{F}_2$ 是V_2 上的奇异叶状结构，且 $\{0\}$ 是唯一的叶。

断言 1： 若$W \in \mathfrak{X}(V_1 \times V_2)$ 是叶状的，即对所有t，流 ϕ_t^W都是叶状微分同胚，则$W \in \mathfrak{X}(\mathscr{F})$。

固定一个叶状向量场W。只需证明

$$W|_{V_1 \times \{0\}} \in \mathfrak{X}(V_1 \times \{0\}).$$

事实上，固定一点$(x_0, 0) \in V_1 \times \{0\}$，并设$(x_t, y_t)$ 是经过$(x_0, 0)$的W 的积分曲线。注意，由于W 是叶状的，我们有

$$\dim L_{(x_0,0)} = \dim L_{(x_t,y_t)}$$

对所有t均成立。特别地，由于 $\{0\}$ 是 $\mathscr{F}_2$ 唯一的零维叶，且$\mathscr{F}_1$ 是正则的，因此对所有t，都有$y_t = 0$ 。特别地，

$$W_{(x_0,0)} = (\dot{x}_0, \dot{y}_0) = (\dot{x}_0, 0) \in T_{(x_0,0)}(V_1 \times \{0\}).$$

断言 2：对于所有 $v \in T_{(0,0)}V_1 \times \{0\}$，我们都可以找到一个叶状向量场 $W \in \mathfrak{X}(\mathscr{F})$，使得 $W_{(0,0)} = (v, 0)$。

固定 $v \in V_1$。注意，沿 v 的方向导数，记作∂_v，是叶状的。事实上，如果 L'_{v_2} 表示 $v_2 \in V_2$，的叶，那么对于每个$(v_1, v_2) \in V_1 \times V_2$,

$$L_{(v_1,v_2)} = (L + v_1) \times L'_{v_2}.$$

那么，对于任意t，若 ϕ_t 表示 $\partial/\partial v$的流，则有

$$\phi_t(L_{(v_1,v_2)}) = (L + v_1 + tv) \times L'_{v_2} = L_{\phi_t(v_1,v_2)}.$$

Clearly $\left.\frac{\partial}{\partial v}\right|_{(0,0)} = (v, 0)$.

使用命题 1 和命题 2 共同表明，定义7中的条件（S）。15 在局部由叶状向量场满足。利用单位分解，我们推得 $\mathcal{S}_{dim}(M)$ 是一个奇异叶状结构。□

推论 7.37： 维数类型划分 $\mathcal{S}_{dim}(M, \mathscr{F})$ 是由全测地子流形构成的分层。

证明。 由于 $\mathcal{S}_{dim}(M, \mathscr{F})$ 是局部有限的，且叶是嵌入子流形，因此该结果可由推论 7.24立即得到。□

注 7.38： (1) 今后，我们将把 SRF 的划分 $\mathcal{S}_{dim}(M)$称为**维数类型分层**。

(2) 给定流形 M上的任意奇异叶状结构 $\mathscr{F}$，我们可以按照定义7.31定义维数类型划分 $\mathcal{S}_{dim}(M, \mathscr{F})$。然而，一般而言，这些划分并不是分层。事实上，考虑例子7.20 中的奇异叶状结构 $\mathscr{F}$，其位于 $\mathbb{R}$ 上，其中 0 维叶由康托尔集中的点C 构成，而 1 维叶由$\mathbb{R} \setminus C$的连通分支构成。我断言 $\mathcal{S}_{dim}(M, \mathscr{F})$ 不是局部有限的。事实上，注意到由于C 是完全不连通的，我们有

$$\mathcal{S}_{dim}(M, \mathscr{F}) = \mathscr{F}$$

在这种情况下，我们看到，如果$x \in C$，且U 是包含$\mathbb{R}$ x的任意开子集，那么$U \cap C$ 是无限的。因此，$\mathscr{F}$ 不是局部有限的，这意味着维数类型划分不是局部有限的。

尽管维数类型划分可能不是分层，但它仍然是奇异叶状结构！或许可以证明一个更一般的结果：维数类型划分总是奇异叶状结构，并且可以像定理 7.36. 的证明中那样利用叶状向量场。

(3) 最后，关于奇异黎曼叶状结构的维数类型分层，还值得指出的是，尽管维数类型分层 $\mathcal{S}_{dim}(M, \mathscr{F})$ 是一个奇异叶状结构，但它几乎从来都不是奇异黎曼叶状结构。事实上，考虑 $\mathbb{R}^2$ 上的标准无穷小奇异黎曼叶状结构 $\mathscr{F}$，其叶由原点和

以原点为圆心的同心圆组成。在这种情况下，维数类型分层很容易计算，给出为

$$\mathcal{S}_{dim}(M,\mathscr{F}) = \{\{(0,0)\}, \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\}.$$

现在考虑测地线

$$\gamma(t) = (t,0), \quad t \in \mathbb{R}$$

显然， γ 与零维叶 $\{(0,0)\}$正交，但与稠密叶 $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$不正交。因此， $\mathcal{S}_{dim}(M, \mathscr{F})$不满足定义7.29中的条件（O）。

7.3 适当群作用产生的分层

现在我们来讨论一类由适当群作用产生的有趣分层，即轨道类型、无穷小类型和约化轨道类型。为了展开分析，我们首先需要深入探讨对称流形叶化。

在下文中，我们均设G 为连通李群，$\mathfrak{g}$ =李(G) 为其李代数，且M 为一个适当的G-空间。

7.3.1 适当群作用产生的轨道类型分层

设 G 是一个连通李群，且 M 是一个适当的 G-空间。尽管商空间 M/G 未必是流形，但它确实具有一个典范分解，即分解为称为**典范分层**的流形。此分解的主要要素是例子 7.18 中讨论的轨道类型划分。现在我们给出正式定义，并引入一些记号。

定义 7.39 (轨道类型与典范划分)。 将M 的轨道类型划分定义为

$$\mathcal{S}_G(M) := \bigcup_{H \leq G} \pi_0(M_{(H)}).$$

于是，我们将M/G 的典范划分定义为

$$\mathcal{S}_G(M/G) := \{S/G \mid S \in \mathcal{S}_G(M)\}.$$

现在我们将证明， $\mathcal{S}_G(M)$ 和 $\mathcal{S}_G(M/G)$ 分别是其子笛卡尔空间上的可微分层。

引理 7。40。 轨道类型 $\mathcal{S}_G(M)$ 和典范分层$\mathcal{S}_G(M/G)$ 中的各片在子空间拓扑下都是拓扑流形。此外，这些片上的诱导子笛卡尔结构是光滑流形结构。

证明。 正如推论 2.15所示，轨道类型片是嵌入子流形。此外，给定一点$x \in M$，我们有一个极大切片邻域 $\phi: U \to G \times_{G_x} \nu_x(M,G)$，在其中，包含$x$ 的轨道类型片$S \in \mathcal{S}_G(M)$ 具有如下形式

$$\phi(U \cap S) = G \times_{G_x} \nu_x(M,G)^{G_x} \cong (G/G_x) \times \nu_x(M,G).$$

因此，在商空间M/G中，相应的典范片S/G 局部具有如下形式

$$(U \cap S)/G \cong ((G/G_x) \times \nu_x(M,G)^{G_x})/G \cong \nu_x(M,G)$$

因此，M/G 的典范片也是拓扑流形。注意，根据推论6.33，若我们选取一个希尔伯特映射$p: \nu_x(M,G) \to \mathbb{R}^N$，那么限制定义了一个从光滑流形$p: \nu_x(M,G)^{G_x} \hookrightarrow \mathbb{R}^N$ 到.....的嵌入。特别地，我们看到，若$S \in \mathcal{S}_G($ $M/G)$ 是一个典范片，那么S 在子空间拓扑下是拓扑流形，而诱导子笛卡尔结构$C^\infty(S) = \langle C^\infty(M/G)|_S \rangle$ 是S上的光滑流形结构。

□

为继续证明 $\mathcal{S}_G(M)$ 和 $\mathcal{S}_G(M/G)$ 都是可微分分层，我们现在需要证明它们满足以下条件。

- 二者都是局部有限的
- 二者都满足边界公理。

由于 $\pi: M \to M/G$ 是由群作用诱导的商映射，因此只需证明轨道类型分层 $\mathcal{S}_G(M)$ 满足这些公理。

引理 7.41. 轨道类型分层 $\mathcal{S}_G(M)$ 是局部有限的。

证明。 如切片定理（定理2.13）中那样转到切片坐标后，只需证明：若 K 是一个紧群，且 V 是一个有限维K-表示，那么

$$\mathcal{S}_K(V) = \bigcup_{H \leq K} \pi_0(V_{(H)})$$

是有限的。根据引理 4.3.6 中的 [Pflo1]，，存在有限个子群 $K_1, \ldots, K_N \leq K$，使得

$$V = \bigsqcup_{i=1}^{N} V_{(K_i)}.$$

因此，只需证明，对于任意紧子群 $\pi_0(V^{(H)})$，其$H \leq K$是有限的。这一点已在定理 1.5中由 [Sch80]. 证明。 □

既然局部有限性已经得到确立，我们还需要证明边界公理成立。为此，我们将运用对例子 7.18 中轨道类型分解的讨论。具体而言，我们给出了 Jotz-Ratiu-Sniatycki 以下结果的另一种证明。

定理 7.42 ([JRS11]). $\mathcal{S}_G(M)$ 是一个奇异叶状结构。

现在我们已准备好证明，定义 7.39 中的两个划分确实都是分层。

定理 7.43。 两者 $(M, \mathcal{S}_G(M))$ 和 $(M/G, \mathcal{S}_G(M/G))$ 都是可微分层空间，并且商映射 $\pi : M \to M/G$ 是一个可微分层态射。

证明。 应用引理 7.40 和 7.41，再结合定理7.42，可得轨道类型划分 $\mathcal{S}_G(M)$ 是一个局部有限、具有嵌入叶的奇异叶状结构，因此根据推论 7.24，相对于光滑结构 $C^\infty(M)$，它是一个可微分层。现在讨论商空间 M/G 的典范划分 $\mathcal{S}_G(M/G)$ 。

再次应用引理7.40 ，我们知道 $\mathcal{S}_G(M/G)$ 的各个部分都是拓扑流形。由于 $\pi : M \to M/G$ 是开商映射，我们很容易推出 $\mathcal{S}_G(M/G)$ 继承了 $\mathcal{S}_G(M)$的局部有限性和边界条件。因此，最后应用一次引理7.40 即可证明 $(M/G, \mathcal{S}_G(M/G), C^\infty(M/G))$ 是一个可微分层空间，其中

$$C^\infty(M/G) = \{f : M/G \to \mathbb{R} \mid \pi^* f \in C^\infty(M)^G\}.$$

□

在结束关于轨道类型分层的讨论之前，我将记下适当 G-空间的最后一个局部标准形，稍后讨论正则性条件时会用到它。

引理 7.44. 设 G 是一个连通李群，$K \leq G$ 是一个紧子群，V 是一个有限维 K-表示。选取 $\mathfrak{g}$ 上的一个 K-不变度量，并令 $\mathfrak{k}^\perp \subseteq \mathfrak{g}$ 为 $\mathfrak{k} = Lie(K)$ 的正交补。则映射

$$\phi : \mathfrak{k}^\perp \times V \to G \times_K V; \quad (\xi, v) \mapsto [\exp(\xi), v]$$

具有以下性质。

(1) ϕ 是一个 K-等变光滑映射，并在（0,0）的某个邻域内定义了一个微分同胚。

(2) 如果 $U \subseteq \mathfrak{k}^{\perp} \times V$ 是 $(0,0)$ 的一个邻域，使得 ϕ 是从 U 到开集 $W = \phi(U)$ 上的微分同胚，那么对于任意闭子群 $H \leq K$，我们有

$$\phi(U \cap (\mathfrak{k}^{\perp} \oplus V)_{(H)}) = W \cap (G \times_K V)_{(H)}.$$

证明。 (1) 令 $\xi \in \mathfrak{k}^{\perp}$ 和 $v \in V$。那么对于任意 $k \in K$，我们得到

$$k \cdot \phi(\xi, v) = \phi(\mathrm{Ad}_k(\xi), k \cdot v) = [k \exp(\xi) k^{-1}, k \cdot v].$$

接下来，我们看到，如果将 $T_{[e,0]}G \times_K V = \mathfrak{g}/\mathfrak{k} \oplus V$ 进行识别，那么 $T_{(0,0)}\phi$ 可以与如下映射相识别

$$T_{(0,0)}\phi : \mathfrak{k}^{\perp} \oplus V \to (\mathfrak{g}/\mathfrak{k}) \oplus V; \quad (\xi, v) \mapsto (\xi + \mathfrak{k}, v)$$

这显然是一个同构。因此，ϕ 在 $(0,0)$ 的某个邻域内定义了一个微分同胚。

(2) 由等变性可得。

□

7。3。2 约化轨道型与无穷小分层

我们可以从适当的群作用中得到另一种分层，即由诱导的李代数作用产生的分层。我们称之为无穷小分层。设 G 是一个连通李群，$\mathfrak{g}$ 是其李代数，且 M 是一个适当的 G-空间。对于任意李子代数 $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$，定义

$$M_{(\mathfrak{h})} := \{x \in M \mid \mathfrak{g}_x \text{ is conjugate to } \mathfrak{h}\}.$$

利用这一点，我们以类似于定义轨道类型分层的方式，定义 M 的无穷小型划分。

定义 7.45（无穷小分割）。 将 M 的无穷小型划分定义为

$$\mathcal{S}_{\mathfrak{g}}(M) := \bigcup_{x \in M} \pi_0(M_{(\mathfrak{g}_x)}).$$

注7.46. 请注意，$\mathcal{S}_{\mathfrak{g}}(M)$ 仅取决于诱导的李代数作用

$$\mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(M); \quad \xi \mapsto \xi_M$$

由于两个不同的李群 G_1,G_2 可能诱导出相同的李代数作用，因此一般而言，无穷小型划分应比轨道类型划分更粗。

在证明无穷小型分割是一个分层之前，我们需要为无穷小类型片建立一个局部线性模型。

命题 7.47. 设 G 是一个连通李群，$K \leq G$ 是一个紧子群，$\mathfrak{k} = \text{李}(K)$ 是其李代数，V 是一个有限维 K-表示。设

$$V^{\mathfrak{k}} := \bigcap_{\xi \in \mathfrak{k}} \ker(\xi_V).$$

于是，

$$(G \times_K V)_{(\mathfrak{k})} = G \times_K V^{\mathfrak{k}}.$$

证明。 令 $[g,v] \in (G \times_K V)^{(\mathfrak{k})}$。由于 $G_{[g,v]}$ 与 $G_{[e,v]}$ 共轭，因此 $\mathfrak{g}_{[g,v]}$ 与 $\mathfrak{g}_{[e,v]}$ 共轭，我们不妨假设 $g = e$。注意到 $\mathfrak{g}_{[e,v]} = \mathfrak{k}_v \subseteq \mathfrak{k}$。由于 $\mathfrak{k}_v$ 和 $\mathfrak{k}$ 共轭，因而维数相同，所以 $\mathfrak{k}_v = \mathfrak{k}$，进而 $v \in V^{\mathfrak{k}}$。

□

命题 7.48. 设 M 是一个适当 G-空间。

(1) 那么， $\mathcal{S}_{\mathfrak{g}}(M)$ 的元素都是嵌入的 G-不变子流形。

(2) 轨道类型分层 $\mathcal{S}_G(M)$ 是 $\mathcal{S}_{\mathfrak{g}}(M)$ 的细化。一般而言，这是一种严格细化。

证明。 应用切片定理和命题7。47，即可得到 (1) 以及 (2) 中的第一条结论。为了说明 $\mathcal{S}_G(M)$ 一般是 $\mathcal{S}_{\mathfrak{g}}(M)$ 的严格细化，设 $G = S^1$ 且 $M = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$。定义 S^1在 M上的作用如下:

$$S^1 \times M \to M; \quad (z, x_1, x_2) \mapsto (zx_1, z^2x_2).$$

于是我们看到 $\mathcal{S}_{S^1}$(M) 有三个部分: $\{(0,0)\}$、 $\{(x_1, x_2) \mid x_1 \neq 0\}$，以及$\{(0, x_2) \mid x_2 \neq 0\}$。反过来，若令 $i\mathbb{R}$ 表示 S^1, 的李代数，则 $\mathcal{S}_{i\mathbb{R}}$(M) 仅由两部分组成: $\{(0,0)\}$ 和 $M \setminus \{(0,0)\}$。

□

在证明 $\mathcal{S}_{\mathfrak{g}}(M)$ 是M的一个分层之前，让我们讨论由G的作用自然得到的另一种划分。对于任意李群G，记G° 为包含单位元的连通分支。等价地，它是极大连通子群。给定一个连通子群$K \leq G$，定义

$$M^{\circ}_{(K)} := \{x \in M \mid G^{\circ}_x \text{ is conjugate to } K\}.$$

定义7.49（约化轨道类型）。 设M 是一个适当的G-空间。定义

$$\mathcal{S}_G(M)^\circ := \bigcup_{x\in M} \pi_0(M^\circ_{(G^\circ_x)}).$$

命题 7.50。 设 G 是一个连通李群，$K \leq G$ 是一个紧子群，V 是一个有限维 K-表示。那么，

$$(G \times_K V)_{(K^\circ)} = G \times_K V^{K^\circ}.$$

证明。 首先证明 $G \times_K V^{K^\circ} \subseteq (G \times_K V)_{(K^\circ)}$。固定 $[g、v] \in G \times_K V^{K^\circ}$，有

$$G_{[g,v]} = gK_vg^{-1}.$$

根据定义，$K_v \subseteq K$，因此 $K^\circ_v \subseteq K^\circ$。然而，由于假设 $v \in V^{K^\circ}$，我们也有 $K^\circ \subseteq K_v$。因此，$G^\circ_{[g,v]} = gK^\circ g^{-1}$，从而 $[g、v] \in (G \times_K V)_{(K^\circ)}$。

反向包含关系显然成立。 □

利用定理 2.13中的切片坐标，结合命题 7.50，我们很容易推出以下推论。

推论 7.51。 约化轨道类型划分 $\mathcal{S}_G(M)^\circ$ 是将 M 划分为嵌入的 G-不变子流形的一种划分。

因此，对于一个适当群作用，我们现在有两个相关的辅助划分：无穷小型分割 $\mathcal{S}_\mathfrak{g}(M)$ 和约化轨道类型划分 $\mathcal{S}_G(M)^\circ$。事实证明，我们可以利用关于奇异黎曼叶状结构的结果，证明这两个划分相同，并且它们定义了 M 的一个分层。

命题 7.52 ([PTW17])。 对于适当 G-空间 M，令 $\mathscr{F}_G$ 表示由轨道构成的奇异叶状结构。则无穷小型分割 $\mathcal{S}_\mathfrak{g}(M)$、约化轨道类型划分 $\mathcal{S}_G(M)^\circ$以及维数类型划分 $\mathcal{S}_{dim}(M, \mathscr{F}_G)$ 全部相同。也就是说，

$$\mathcal{S}_\mathfrak{g}(M) = \mathcal{S}_G(M)^\circ = \mathcal{S}_{dim}(M, \mathscr{F}_G).$$

证明。 我们首先证明 $\mathcal{S}_\mathfrak{g}(M) = \mathcal{S}_G(M)^\circ$。事实上，令 $x、y \in M$，并设G°_x 和 G°_y 共轭。由于 $\mathfrak{g}_x$ 和 $\mathfrak{g}_y$ 分别是 G°_x 和 G°_y 的李代数，因此可知 $\mathfrak{g}_x$ 和 $\mathfrak{g}_y$ 共轭。逆命题是，假设 $\mathfrak{g}_x$ 和 $\mathfrak{g}_y$在$g \in G$下共轭。也就是说，$\mathrm{Ad}_g(\mathfrak{g}_x) = \mathfrak{g}_y$。记

$$c_g : G \to G; \quad a \mapsto gag^{-1}$$

共轭映射为g。由于指数映射 $\exp: \mathfrak{g}_x \to G_x^\circ$ 和 $\exp: \mathfrak{g}_y \to G_y^\circ$ 的像均稠密，并且对所有 $\xi \in \mathfrak{g}_x$ 都有

$$\exp(\mathrm{Ad}_g(\xi)) = c_g(\exp(\xi)),$$

由此可知，图表交换

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g}_x & \xrightarrow{\exp} & G_x^\circ \\ {\scriptstyle \mathrm{Ad}_g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle c_g} \\ \mathfrak{g}_y & \xrightarrow{\exp} & G_y^\circ \end{array}$$

因此，G_x° 和G_y° 共轭。

现在，我们使用论文 $\mathcal{S}_{dim}(M, \mathscr{F}_G) = \mathcal{S}_G(M)^\circ$ 中给出的论证来证明 [PTW17]。为此，注意到对于任意$x \in M$，都有

$$\begin{aligned} \dim(G \cdot x) &= \dim(G/G_x) \\ &= \dim(G) - \dim(G_x) \\ &= \dim(G) - \dim(G_x^\circ). \end{aligned} \tag{7.5}$$

特别地，若$S \in \mathcal{S}_G(M)^\circ$ 是包含x 的约化轨道类型片，且$R \in \mathcal{S}_{dim}(M, \mathscr{F}_G)$ 是包含x的维数类型分层，则$S \subseteq R$。为证明$S = R$，我们证明S 在R中既是闭集又是开集。由于假设R 是连通的，这将表明$S = R$。

事实上，设 $y \in S \cap R$ 位于 S 在 R 中的相对闭包内。我们选取 y 周围的一个切片邻域 $U \subseteq M$，该邻域与 $G \times_{G_y} \nu_y(M, G)$ 等变微分同胚，并令 $[g, v] \in G \times_{G_y} \nu_y(M, G)$ 对应于 $x \in S \cap U$。于是 $G_x = G_{[g,v]} = g(G_y)_v g^{-1}$。根据公式（7.5），我们看到，经过 x 的轨道维数为 $\dim(G) - \dim((G_y)_v)$，而经过 y 的轨道维数为 $\dim(G) - \dim(G_y)$。由于 x、y 位于同一维数类型中，这意味着

$$\dim((G_y)_v) = \dim(G_y).$$

由于 $(G_y)^\circ_v \subseteq G_y^\circ$ 和 $(G_y)^\circ_v$ 是闭的，我们得到 $(G_y)^\circ_v = G_y^\circ$，因此$G_x^\circ$ 与G_y°共轭。因此，$y \in S$。所以$S \cap R = S \cap \overline{R}$，且$S$ 在R中是闭的。

要证明S 是开的，我们使用相同的论证。 □

推论 7.53. 无穷小分割 $\mathcal{S}_{\mathfrak{g}}(M)$ 是一个奇异叶状结构，因此也是 M 的可微分层。

证明。 由于 G 在 M 上的作用是适当的，根据 Palais 的一个定理[Pal61]，存在一个 G-不变黎曼度量，使得 M 上的轨道叶状结构 $\mathscr{F}_G$ 成为奇异黎曼叶状结构。根据定理7.36，维数划分 $\mathcal{S}_{dim}(M, \mathscr{F}_G)$ 是一个奇异叶状结构，因而是一个分层。应用命题 7.52，即可得到所需结论。 □

7.4 分层切向量和向量场

正如我们为子笛卡尔空间和叶状结构构造了切丛一样，我们也可以为可微分层空间定义切丛的概念，从而得到向量场。这些结构将继承扎里斯基切丛的许多性质。设(X, Σ) 是一个弱可微分层空间，且$S \in \Sigma$ 是一个分层。对包含映射$S \hookrightarrow X$求微分，可得到一个自然的单射$TS \hookrightarrow TX$。这使我们能够作如下定义。

定义 7.54 （分层切丛）. 设(X, Σ) 是一个弱可微分层空间。将分层切丛定义为

$$T\Sigma := \bigcup_{S \in \Sigma} TS$$

赋予典范子笛卡尔结构$C^\infty(T\Sigma) := \langle C^\infty(TX)|_{T\Sigma} \rangle$

例子 7.55. 给定一个光滑流形M 及其按连通分支划分的典范分层 $\pi_0(M)$ ，则分层切丛

$$T\pi_0(M) = \bigcup_{S \in \pi_0(M)} TS$$

与通常的切丛TM 完全相同，这由引理6.54得出。

例子7.56. 若 $(M, \mathscr{F})$ 是一个满足推论 $\mathscr{F}$ 的假设条件的叶状流形7.24，那么叶状切丛与分层切丛相同。

定义 7.57. 设(X, Σ) 是一个弱可微分层空间。

(1) 固定$S \in \Sigma$ 和$x \in S$。则x 处的一个分层切向量是T_xS中的一个元素。将$T_x\Sigma$ 记作x处的分层切向量集。**(2)** 分层向量场是典范投影 $\pi : T\Sigma \to X$的光滑截面$V : X \to T\Sigma$ 。将所有分层向量场组成的集合记为 $\mathfrak{X}(X, \Sigma)$ ，或者在上下文明确时记为 $\mathfrak{X}(\Sigma)$ 。

命题 7.58. 设(X,Σ) 是一个弱可微分层空间。则$\mathfrak{X}(\Sigma) \subseteq \mathfrak{X}(X)$，其中包含映射一般是严格的。此外，

$$\mathfrak{X}(\Sigma) = \bigcap_{S\in\Sigma} \mathfrak{X}(X,S), \tag{7.6}$$

其中 $\mathfrak{X}(X, S)$ 如定义 6.57 中所述。

证明。 由于$T\Sigma$ 上的可微结构是TX上可微结构的限制，由命题6.56可得 $\mathfrak{X}(\Sigma) \subseteq\mathfrak{X}(X)$。

一般来说，上述包含关系是严格的。事实上，考虑$X = \mathbb{R}^2$及其分层

$$\Sigma = \{\{(0,0)\}, \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\}.$$

任何分层向量场$V \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ 都必须在原点处消失，而一般向量场在 $\mathbb{R}^2$上显然不一定如此。

方程（7.6）中的单位元是由 $\mathfrak{X}(X,S)$的定义直接得出的。

□

回顾定义6.49，我们知道，扎里斯基向量场的集合上具有自然的李代数结构；具体而言，对于$V,W \in \mathfrak{X}(X)$，我们定义$[V,W] \in \mathfrak{X}(X)$ 为

$$[V,W](f) = V(W(f)) - W(V(f)), \quad f \in C^\infty(X).$$

现在利用推论 6.59，我们得到如下结论。

推论 7.59. 设 (X, Σ) 是一个弱可微分层空间，且 $V,W \in\mathfrak{X}(\Sigma)$。那么对每个分层 $S \in \Sigma$，都有

$$[V|_S, W|_S] = [V,W]|_S$$

最后，我们陈述施瓦茨定理的一个较难结果，其所用的技术超出了本论文的范围。

定理 7.60 ([Sch80])**.** 设 G 是一个连通李群，M 是一个适当 G-空间。设 $\pi : M \to M/G$ 为商映射。

(1) 如果 $V \in \mathfrak{X}(M)^G$ 是一个 G-不变向量，那么导数映射 $T\pi : T\mathcal{S}_G(M) \to T\mathcal{S}_G(M/G)$ </style}的逐纤维应用定义了一个分层向量场 V $(\mathcal{S}_G(M/G))$。

(2) 映射

$$\pi_* : \mathfrak{X}(M)^G \to \mathfrak{X}(\mathcal{S}_G(M/G)); \quad V \mapsto \pi_* V$$

是一个满射。

7.5 正则性条件

一般而言，可微分层空间在某种程度上具有病态性，而实际出现的空间通常经过了约束。因此，我们对分层空间施加各种正则性条件。其中最著名的是惠特尼条件（见定义7.63）。我们还将讨论一种更实用的正则性假设，称为光滑局部平凡且具有锥形纤维，由 [Zim24]提出。

7.5.1 *Whitney* 条件

惠特尼条件是一些局部条件，用来限制分层中的分层如何彼此衔接。它们以一种非平凡的方式运用了格拉斯曼流形的拓扑学，因此我们先来回顾这一基本概念。

定义 7.61 （秩为k 的格拉斯曼流形）。 设V 为一个有限维向量空间，且$k \leq \dim(V)$。定义V上的秩为k 的格拉斯曼流形，记作 $\mathrm{Gr}_k(V)$，为V的所有k维子空间的集合。用符号表示，

$$\mathrm{Gr}_k(V) = \{W \subseteq V \mid W \text{ linear subspace and } \dim(W) = k\}.$$

给定一个向量空间 V 和一个整数 $k \leq \dim(V)$，我们可以通过在V上赋予一个内积，为 $\mathrm{Gr}_k(V)$ 赋予拓扑。于是，给定一个子空间$W \in \mathrm{Gr}_k(V)$，令 $P_W : V \to V$ 表示到W上的正交投影。这定义了一个单射

$$\mathrm{Gr}_k(V) \hookrightarrow \mathrm{End}(V); \quad W \mapsto P_W \tag{7.7}$$

因此，我们可以为 $\mathrm{Gr}_k(V)$ 赋予从向量空间 $\mathrm{End}(V)$继承的子空间拓扑。现在令

$$O(V) = \{T : V \to V \mid T \text{ is an isometry}\}$$

于是，O（V）通过共轭在 End（V）上自然地产生一个作用

$$\mathrm{O}(V) \times \mathrm{End}(V) \to \mathrm{End}(V); \quad (g, T) \mapsto g \circ T \circ g^{-1}.$$

容易证明，如果$W \in \mathrm{Gr}_k(V)$，且$g \in \mathrm{O}(V)$是一个等距变换，那么

$$g \circ P_W \circ g^{-1} = P_{g(W)}.$$

显然，对于任意两个k维子空间W、$W' \in \mathrm{Gr}_k(V)$，我们都可以找到一个等距变换g，使得$g(W) = W'$。因此，$\mathrm{Gr}_k(V)$是线性群$\mathrm{O}(V)$作用下的轨道，因而自然是一个紧致、连通的光滑流形。至此，我们可以开始讨论惠特尼条件。

定义 7.62. 设R、$S \subseteq \mathbb{R}^n$是两个嵌入子流形，且$x \in S$。若以下两个条件成立，则称(R, S)在x处惠特尼正则。

(A) 若$\{x_k\} \subseteq R$是R中收敛于x的一个序列，且$\tau \subseteq T_x\mathbb{R}^n$是一个子空间，使得$\{T_{x_k}R\}$收敛于$\tau$，其中$\tau$属于$T\mathbb{R}^n$的dim(R)维格拉斯曼流形，则$T_xS \subseteq \tau$。(B) 设$\{y_k\} \subseteq S$是另一个收敛于x的序列，且对所有k都有$x_k \neq y_k$，并记$\ell_k$为连接$x_k$与$y_k$的直线。若序列$\{\ell_k\}$收敛于一条直线$\ell$，其中$\ell$属于$T\mathbb{R}^n$的一维格拉斯曼流形，则$\ell \subseteq \tau$。

如果(实数集,S)仅在x处满足(A)，则称它们在x处满足惠特尼(A)。

定义 7.63（惠特尼正则分层空间）。设(X, Σ)是一个可微分层空间。若对每一对分层(R, S)，其中$S \subseteq R$，对任意$x \in S$以及任意图卡$\phi : U \hookrightarrow \mathbb{R}^N$，有序对$(\phi(S \cap U), \phi(R \cap U))$在x处满足惠特尼(A)（分别为(B)），则称$(X, \Sigma)$满足惠特尼(A)（分别为(B)）。如果(X, Σ)在x处同时满足(A)和(B)，则称(X, Σ)是惠特尼正则的。

例子 7.64. 正如我们将看到的，到目前为止讨论过的大多数空间都是惠特尼正则的。在[Whi15], [Mat12], 或[Pflo1]中可以找到的非惠特尼正则空间的例子，在我们的语境下并不成立，因为我们要求：如果$S, R \in \Sigma$是满足$S \neq R$且$S \subseteq R$，那么$\dim S < \dim R$。

在我们所研究的子笛卡尔情形中，上文表述的Whitney条件显得不太自然。现在，我们将通过讨论一个更强的条件来结束本节；该条件类似于奇异叶状结构定义中的条件（S）（见定义 7.15）。

命题 7.65。 设(X, Σ)是一个可微分层空间。如果映射

$$\mathfrak{X}(\Sigma) \times X \to T\Sigma; \quad (V, x) \mapsto V_x$$

是满射，则(X, Σ)是惠特尼*(A)*。

证明。 在下文中，固定一个可微分层空间(X, Σ)。首先注意，如果

$$\mathfrak{X}(\Sigma) \times X \to T\Sigma; \quad (V, x) \mapsto V_x$$

是满射，那么对于任意开子集$U \subseteq X$ 也如此

$$\mathfrak{X}(\Sigma_U) \times U \to T\Sigma_U; \quad (V, x) \mapsto V_x.$$

因此，通过转到坐标图，我们可以假设$X \subseteq \mathbb{R}^N$ 是一个子集。现在假设$S,R \in \Sigma$ 是两个分层，$x \in S$，且 $\{y_n\} \subseteq R$ 是一个序列，并且$\tau \subseteq T_x\mathbb{R}^N$ 是一个子空间，使得

$$\lim_n y_n = x$$

and

$$\lim_n T_{y_n} R = \tau$$

在 $\mathbb{R}^N$的维数为(R) 的格拉斯曼流形中。我们要证明$T_xS \subseteq \tau$。为此，选取 $v \in T_xS$ ，并令$V \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ 为一个分层向量场，且$V_x = v$。对所有$z \in \mathbb{R}^N$ ，将$T_z\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^N$ 视为如此；对于任意子空间$W \subseteq \mathbb{R}^N$，记$P_W \colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ 为相对于 $\mathbb{R}^N$上的标准度量投影到W 的正交投影。根据 $\mathbb{R}^N$的维数为(R)的格拉斯曼流形上的拓扑学定义，我们有

$$\lim_{n\to\infty} \|P_{T_{y_n}R} - P_\tau\| = 0,$$

其中 $\|\cdot\|$ 是标准算子范数。由$V \in \mathfrak{X}(\Sigma)$的连续性，我们有

$$\lim_{n\to\infty} V_{y_n} = v$$

特别地，我们得出

$$\lim_{n\to\infty} (V_{y_n} - P_W(V_{y_n})) = V_x - P(V_x) = v - P(v)$$

此外，由于 $P_{T_{y_n}\text{实数集}}(V_{y_n}) = V^{y_n}$，对任意 n

$$\|V_{y_n} - P_\tau(V_{y_n})\| \le \|V_{y_n} - P_{T_{y_n}R}(V_{y_n})\| + \|P_{T_{y_n}R}(V_{y_n}) - P_\tau(V_{y_n})\| \le \|P_{T_{y_n}R} - P_\tau\| \cdot \|V_{y_n}\|.$$

因此，

$$\lim_{n\to\infty} \|V_{y_n} - P_\tau(V_{y_n})\| = \|v - P_\tau(v)\| \le 0 \cdot \|v\| = 0.$$

因此，$P_\tau(v) = v$ ，从而$v \in \tau$。 □

例子 7.66. 现在让我们回到$\mathbb{R}^2$ 中的坐标轴X 的并集，以及由 Σ 给出的分层

$$\Sigma = \{\{(0,0)\}, H_-, H_+, V_-, V_+\}$$

来自例子 7.3。我们在例子6.63 中看到，扎里斯基向量场不能张成扎里斯基切丛。也就是说，映射

$$X \times \mathfrak{X}(X) \to TX; \quad (x, V) \mapsto V_x$$

不是满射。正如我们所见，这是因为 $T_{(0,0)}X = T_{(0,0)}\mathbb{R}^2$，但如果 $V \in \mathfrak{X}(X)$，那么 $V_{(0,0)} = 0$。然而，现在很容易看出，分层向量场确实张成分层切丛，即映射

$$X \times \mathfrak{X}(\Sigma) \to T\Sigma$$

是满射。因此，(X, Σ) 是惠特尼 (A)。

因此，任何同时也是奇异叶状结构的流形分层都是惠特尼 (A)。事实上，这一结论在更一般的情形下也成立。

推论 7.67。 以下对象均满足惠特尼 *(A)* 条件。

(1) 设 $(M,$ 李代数 $g, \mathscr{F})$ 为一个奇异黎曼叶状结构。则维数类型分层 $\mathcal{S}_{dim}(M, \mathscr{F})$满足惠特尼 *(A)* 条件。

(2) 如果 G 是连通李群，且 M 是适当 G-空间，那么轨道类型分层 $\mathcal{S}_G(M)$ 和无穷小分层 $\mathcal{S}_{\mathfrak{g}}(M)$ 都是惠特尼 *(A)*。

证明。 (1) 根据定理 7.36，维数类型分层 $\mathcal{S}_{dim}(M, \mathscr{F})$是奇异叶状结构，因此满足命题7.65 ，所以是惠特尼 (A)。

(2) 对轨道类型分层 $\mathcal{S}_G(M)$也有相同的论证。对于典范分层，令 $\pi : M \to M/G$ 为商映射，$x \in M$，且 $v \in T_{[x]}\mathcal{S}_G(M/G)$ 是一个分层切向量。特别地，若$S \in \mathcal{S}_G(M)$ 是包含 x 的轨道类型分层，则 $v \in T_{[x]}(S/G)$，因此可提升到

$$\widetilde{v} \in T_x S$$

因为映射 $S \to S/G$ 是一个满射浸没。如例子 7.18所示，存在等变向量场 $\widetilde{V} \in \mathfrak{X}(M)^G$ 和李代数元素 $\xi \in \mathfrak{g}$，使得

$$\widetilde{V}_x + \xi_M(x) = \widetilde{v}.$$

~根据定理 7.60，V 投影为 $\mathfrak{X}(\mathcal{S}_G(M/G))$ 中的一个元素，显然

$$T_x\pi(\widetilde{v}) = T_x\pi(\widetilde{V}_x + \xi_M(x)) = T_x\pi(\widetilde{V}_x) = V_{[x]}.$$

特别是，我们刚刚证明了该映射

$$M/G \times \mathfrak{X}(\mathcal{S}_G(M/G)) \to T\mathcal{S}_G(M/G); \quad ([x], V) \mapsto V_{[x]}$$

是满射，因此 $(M/G, \mathcal{S}_G(M/G))$ 根据命题 7.65，满足惠特尼 (A)

□

至于 Whitney (B) 条件，我们也将尝试通过与奇异叶状结构作另一种类比来处理它，即在某种意义上它们是“局部平凡的”。要实现这一跨越，我们需要一个必要的结果，该结果归功于 Pflaum。

命题 *7.68*（[*Pflaum01*]）。设 (X, Σ) 是一个可微分层空间，S、$R \in \Sigma$ 是两个分层，且 $S \subseteq R$，$x \in S$。若存在一个图卡 $\phi : U \subseteq X \hookrightarrow \mathbb{R}^N$，其覆盖 x，并且 $(\phi(S \cap U), \phi(R \cap U))$ 在 x 处满足 *Whitney (B)* 条件，那么对于任意覆盖 x 的图卡 $\psi : W \hookrightarrow \mathbb{R}^M$，$(\phi(S \cap W), \phi(R \cap W))$ 均满足 *Whitney (B)* 条件。

7.5.2 局部平凡性

我们关注 Whitney (B) 的一个主要原因，主要在于它带来的后果，尤其是控制数据的存在 [Mat73]。这不是本文将要讨论的内容。值得庆幸的是，Zimhony 提出了一种比 Whitney (B) 更强（在我看来也更自然）的条件，称为光滑局部平凡且具有锥形纤维[Zim24]，，我们将在下文讨论这一条件。这个条件的优妙之处在于，它不仅意味着存在类似 Whitney (B) 所保证的控制数据，而且这些控制数据实际上是光滑的！关于光滑控制数据的更多信息，请参见 [Zim24] 。

首先，我们来讨论光滑局部平凡且具有锥形纤维这一条件的一个较弱版本，即局部平凡。

定义 7.69 (局部平凡性)。设 (X, Σ) 是一个可微分层空间。称 X 为（光滑）局部平凡的，如果对于每个分层 $S \in \Sigma$ 以及点 $x \in S$，我们都能找到一个图卡

$$\phi : U \subseteq X \hookrightarrow \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^M$$

使得 $\phi(x) = (0, 0)$

(1) 存在 0 的开邻域 $V \subseteq \mathbb{R}^k$，使得

$$\phi(S \cap U) = V \times \{0\};$$

(2) 若实数集 $\in \Sigma$ 满足$S \subseteq$ 实数集，则存在子流形$C \subseteq \mathbb{R}^M$，使得

$$\phi(U \cap R) = V \times C.$$

我们将奇异图 $\phi : U \hookrightarrow \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^M$ 称为以x 和S为中心的**分裂图**。

例子 7.70. 设 $(M, \mathscr{F})$ 是流形上的奇异叶状结构，且 $\mathscr{F}$ 也是一个分层。根据 Stefan 的结果 [Ste74], $\mathscr{F}$ 满足局部平凡性。

备注7.71. 很快，我们将介绍一种更强的局部平凡性条件，因此较不平凡的例子留待以后讨论。

命题 7.72. 设(X, Σ) 是一个局部平凡的可微分层空间，并且存在可微的单位分解。那么映射

$$X \times \mathfrak{X}(\Sigma) \to T\Sigma$$

是满射。

证明。 固定一个分层 $S \in \Sigma$，$x \in S$，并令 $v \in T_xS$。令 $\phi : U \subseteq X \hookrightarrow \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^M$ 为一个以 x 和 S 为中心的分裂图，如定义 7.69所述。记作$\phi(S \cap U) = \Omega \times \{0\}$，它是 0 附近的开邻域 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^k$。

由于S 是一个光滑流形，我们可以找到一个向量场$V \in \mathfrak{X}(S \cap U)$，使得 $V_x = v$。通过 ϕ 将V 推前，得到一个向量场$W \in \mathfrak{X}(\Omega)$。我们可以将$W$ 延拓为 $\Omega \times \mathbb{R}^M$ 上的一个向量场，方法是

$$W_{(a,b)} = (W_a, 0) \in T_{(a,b)}(\Omega \times \mathbb{R}^M),$$

对于$(a,b) \in \Omega \times \mathbb{R}^M$。显然，$W$ 与各分层的像相切$\phi(R \cap U)$，其中$R \in \Sigma$。因此，我们可以通过 ϕ^{-1} 将W 推前，得到一个分层向量场$V \in \mathfrak{X}(U)$。利用隆起函数，我们随后可以$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$将V 延拓为一个全局分层向量场，使得$V_x = v$。 □

推论 7.73. 局部平凡的可微分层空间满足惠特尼 *(A)* 条件。

证明。 命题7的一个简单推论。65。 □

7.5.3 局部圆锥形与拟齐次性

局部平凡性是分层空间的一项重要性质，因为它蕴含惠特尼 (A)，但不一定蕴含惠特尼 (B) 条件成立。为确保满足这一更强条件，我们还需要施加局部平凡化也是齐次的条件。

定义 7.74. 设 (X,Σ) 是一个局部平凡的可微分层空间，$x \in X$，$S \in \Sigma$，且 $\phi : U \hookrightarrow \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^M$ 是以x 和S为中心的分裂图。记 $\phi(U \cap S) = V \times \{0\}$ 为 $\mathbf{0}$ 的一个开邻域$V \subseteq \mathbb{R}^k$。

称 $\phi : U \to \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^M$ 具有权 $\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_M)$的拟齐次性，是指对任意分层$R \in \Sigma$，都存在一个子流形$C \subseteq \mathbb{R}^M \setminus \{0\}$，它在 $\mathbb{R}_{>0}$-作用下保持闭

$$\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^M; \quad (t, (x_1, \ldots, x_M)) \mapsto (t^{d_1} x_1, \ldots, t^{d_M} x_M)$$

使得

$$\phi(R \cap U) = V \times C.$$

若对任意$S \in \Sigma$ 和$x \in S$，我们都能找到某个权为$\mathbf{d}$ 的拟齐次图，其中$\mathbf{d}$为某个值，则称(X,Σ) 为拟齐次的。若总能选取$\mathbf{d}$ 使得$\mathbf{d} = (1, \ldots, 1)$，则称$(X, \Sigma)$ 为局部圆锥形。

例子 7.75。 考虑坐标轴

$$X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$$

及其分层

$$\Sigma = \{\{(0,0)\}\} \cup \pi_0(X \setminus \{(0,0)\})$$

例子 7.3。包含映射 $\iota : X \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ 定义了一个以$(0,0)$ 为中心的局部圆锥形图卡，因为包含$(0,0)$ 的分层是单点集 $\{(0,0)\}$，而其他任意分层（即从$(0,0)$ 发出的开射线）在正标量乘法下均封闭。

为了证明定义 7.74中的拟齐次条件强于 Whitney 正则条件，我们首先需要一个引理。

引理 7.76。 设 $\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_n) \in \mathbb{Z}^n_{>0}$ 并考虑 $\mathbb{R}_{>0}$-作用

$$\mu : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n; \quad (t,x) \mapsto \mu_t(x) = (t^{d_1} x_1, \ldots, t^{d_n} x_n). \tag{7.8}$$

假设 $C \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 是一个 $\mathbb{R}_{>0}$-不变嵌入子流形。那么 $C \cap S^{n-1}$ 是一个嵌入子流形。

证明。 首先考虑加权类欧拉向量场 $E \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$，它由对函数的以下作用定义。若 $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 且 $x_0 \in \mathbb{R}^n$，定义

$$E_{x_0} f := \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f \circ \mu_{c^t}(x_0).$$

用坐标表示为（x_1,.....，x_n），我们有

$$E = \sum_{i=1}^{n} d_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

特别要注意，$E = 0$ 仅在 $\{0\}$。此外，由于C 在李代数 $\mathfrak{g}$ 的作用下是闭的，因此E 与C相切。

现在考虑映射

$$R : C \to \mathbb{R}; \quad c \mapsto \|c\|^2,$$

其中 $\|\cdot\|$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的标准范数。我断言 1 是实数集的正则值。事实上，若c = （c_1,.....，c_n） $\in$ 实数集$^{-1}$（1），那么我们可以证明

$$T_c R(E_c) = 2\left(\sum_{i=1}^{n} d_i c_i^2\right) \left.\frac{d}{d\lambda}\right|_{\lambda=1}.$$

注意，由于d_1, ..., $d_n \geq 1$，我们有

$$\sum_{i=1}^{n} d_i c_i^2 \geq \sum_{i=1}^{n} c_i^2 = R(c) = 1 > 0.$$

特别地，T_c实数集 $\neq 0$，因此 1 是正则值。所以，

$$R^{-1}(1) = C \cap S^{n-1}$$

是一个嵌入子流形。 □

现在我们可以证明本节的主要结果。

定理 7.77. 若 (X, Σ) 按照定义 7.74 的意义是拟齐次的，则 (X, Σ) 是惠特尼正则的。

证明。 这是对 David Miyamoto 所提出论证的一种改编。

假设(X, Σ) 是拟齐次的，并固定两个分层S、$R \in \Sigma$ 以及$x \in S$。根据命题7.68，我们可以在以x 和S为中心、权为$\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_M) \in \mathbb{Z}_{>0}^M$ 的准齐次图中进行讨论。也就是说，我们可以假设

$$S = \mathbb{R}^k \times \{0\},$$

and

$$R = \mathbb{R}^k \times C$$

对于某个在作用下闭合的子流形$C \subseteq \mathbb{R}^M \setminus \{0\}$

$$\mu : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^M; \quad y \mapsto \mu_t(y) = (t^{d_1} y_1, \ldots, t^{d_M} y_M).$$

设 $\{(x_n、y_n)\} \subseteq R$ 和 $\{(x'_n、0)\} \subseteq S$ 是两个序列，满足

(1) 对所有n，$x_n \neq x'_n$。

(2) 两个序列都收敛于$(0,0)$

(3) 切空间$T_{(x_n,y_n)}R$ 收敛于某个 $\tau \subseteq T_{(0,0)}\mathbb{R}^N$。

(4) 连接 $\ell_n\,(x_n、y_n)$ 与$(x'_n、0)$ 的直线收敛于某条直线$\ell \subseteq T_0\mathbb{R}^k \oplus T_0\mathbb{R}^M$。

首先，我断言存在$y \in S^{M-1} \subseteq \mathbb{R}^M$ 和一个子空间 $\tau' \subseteq T_0\mathbb{R}^M$，使得

$$\tau = T_0\mathbb{R}^k \oplus (T_0\mathbb{R} \cdot \{\overline{y}\} + \tau'). \tag{7.9}$$

为此，首先注意到，由于

$$T_{(x_n,y_n)}R = T_{x_n}\mathbb{R}^k \oplus T_{y_n}C$$

我们必有

$$\tau = T_0\mathbb{R}^k \oplus \tau'',$$

其中 $\tau'' \subseteq T_0\mathbb{R}^M$。现在注意到，由于所有$y_n$都不为零，而且$C$ 在李代数 $\mathfrak{g}$ 的作用下是闭的，利用连续性论证可知，存在$t_n \in \mathbb{R}_{>0}$，使得对所有n，

$$\mu_{t_n}(y_n) \in C \cap S^{M-1}$$

对所有n。由于S^{M-1} 是紧致的，因此存在 $\{\mu_{t_n}(y_n)\}$的一个子序列，它收敛到某个$y \in S^{M-1}$。此外，利用格拉斯曼流形的紧致性和引理7.76，我们可以假设子空间的序列$T_{\mu_{t_n}(y_n)}C \cap S^{M-1}$ 收敛到某个 τ'。现在我们断言

$$\tau'' = T_0(\mathbb{R} \cdot \overline{y}) + \tau'. \tag{7.10}$$

事实上，τ' 与S^{M-1} 相切，而直线 $\mathbb{R} \cdot y$ 与其垂直。因此，$T_0(\mathbb{R} \cdot y)$ 与 τ' 的交为平凡交。因此，方程（7.10）两边的维数都等于S的维数。此外，显然两者$T_0(\mathbb{R} \cdot y)$、$\tau' \subseteq \tau''$。因此，等式成立。

两个结果：

(1) $T_{(0,0)}S \subseteq \tau$.

事实上，这由以下事实可知：$T_{(0,0)}S = T_0\mathbb{R}^k \oplus \{0\}$ 和$\tau = T_0\mathbb{R}^k \oplus \tau''$。

(2) $\ell \subseteq \tau$。

注意，每条直线 ℓ_n 的方向向量为

$$(x_n, y_n) - (x'_n, 0) = (x_n - x'_n, y_n).$$

显然，$x_n - x'_n \in \mathbb{R}^k$ 仍然如此，并且每个$y_n \in T_0\mathbb{R} \cdot y_n/\|y_n\|$ 都收敛于 $T_0\mathbb{R} \cdot y$。因此，它们全部收敛。

□

到目前为止我们所考虑的每个分层空间都是拟齐次的。

定理 7.78 ([MR25])。 设$(M, g, \mathscr{F})$ 为一个奇异黎曼叶状结构，且 $\mathcal{S}_{dim}(M, \mathscr{F})$ 为按维数类型的分层。则$(M, \mathcal{S}_{dim}(M, \mathscr{F}))$ 是局部圆锥形的。

证明。 设$S \in \mathcal{S}_{dim}(M, \mathscr{F})$ 是一个维数分层，且$x \in S$。设

$$\phi : U \subseteq M \to V \subseteq T_xS \oplus \nu_x(M, S)$$

是以x为中心的局部标准形邻域。则，

$$\phi(U \cap S) = V \cap (T_xS \oplus \{0\}).$$

现在假设$R \in \mathcal{S}_{dim}(M, \mathscr{F})$ 是另一个维数类型分层，且$S \subseteq R$。若 $\dim(R) = \dim(S) + d$，则

$$\phi(U \cap R) = V \cap (T_xS \oplus \Sigma_d),$$

其中 $\Sigma_d \subseteq \nu_x(M,S)$ 是包含 d 维叶的 $\nu_x(M,S)$中的维数类型分层。由位似引理（引理 7.32）， Σ_d 是一个锥形子流形。因此 $\phi : U \to V$ 是一个锥形邻域。

□

推论 7.79. 设 G 是一个连通李群，M 是一个适当 G-空间。则无穷小分层 $\mathcal{S}_g(M)$ 是局部圆锥形的。

证明。 直接应用推论 7.53。 □

定理 7.80 ([齐姆24])**.** 设 G 是一个连通李群，M 是一个适当 G-空间。记 $\mathcal{S}_G(M)$ 为 M 的轨道类型分层。那么$(M, \mathcal{S}_G(M))$是局部圆锥形的。

证明。 设 $S \in \mathcal{S}_G(M)$ 是一个轨道类型分层，$x \in S$，且$U \subseteq M$ 是 $\mathbf{x}$ 附近的一个极大切片图，即一个G-等变微分同胚

$$\phi : U \to G \times_{G_x} \nu_x(M, G).$$

将x 映射到 $[e, 0]$。为方便起见，记 $K = G_x$，并记 $V = \nu_x(M, G)$。在 V 上选取一个 K-不变度量，令$V' := (V^K)^\perp$ 为不动点集V^K的正交补。于是，存在一个典范的G-等变微分同胚

$$G \times_K V = (G \times_K V') \times V^K.$$

令$A_1 = (G/K) \times V^K$ 和$A_2 = G \times_K V')$，可知我们有一个微分同胚

$$\phi : U \to A_1 \oplus A_2$$

从U 到G/K上的两个向量丛的直和。注意，

$$\phi(U \cap S) = G \times_K V^K = (G \times_K V^K) \oplus (G \times_K \{0\}) = A_1 \oplus \{0\}$$

接下来，若$R > S$，并设$R \in \pi_0(M^{(H)})$，其中$H \leq K$是某个紧子群，则首先

$$\phi(U \cap M_{(H)}) = (G \times_K V'_{(H)}) \times V^K$$

因此存在一个连通分支$R' \in \pi_0(V'_{(H)})$，使得

$$\phi(U \cap R) = (G \times_K R') \times V^K = A_1 \oplus C,$$

其中$C = G \times_K R'$。C 显然是A_2 的一个子流形，并且由于K 在V 上的作用是线性的，轨道类型分层都是锥形的。 □

定理 7.81 ([Zim24])。 设 G 为连通李群，M 为适当 G-空间，并令 $\mathcal{S}_G(M)$ 表示 M/G 的典范分层。那么，$(M/G, \mathcal{S}_G(M/G))$是拟齐次的。

证明。 不妨设 $M = G \times_K V$，其中 $K \leq G$ 是一个紧子群，且 V 是有限维线性的 K-表示。选取 K-不变度量于 V 上，并令 $F = (V^K)^\perp$。注意到

$$G \times_K V = (G \times_K F) \times V^K.$$

因此，

$$(G \times_K V)/G \cong V^K \times (F/K)$$

现在，正如 Duistermaat 所示 [Dui，第 16], 页，我们可以找到一个生成集$q_1, \ldots, q_M \in \mathbb{R}[F]^K$ 使得

(1) 每个q_i都是齐次的

(2) 若$x_1,\dots,x_n$是V^K上的坐标，则

$$x_1,\dots,x_n,q_1,\dots,q_M$$

是$\mathbb{R}[V^K\times F]^K$的一组基。

因此，我们得到一个希尔伯特映射（见定义6.31）

$$p:V^K\times F\to V\times\mathbb{R}^M;\quad (v,w)\mapsto(v,q_1(w),\dots,q_M(w))$$

它诱导出一个嵌入

$$p:V^k\times F/K\to V^K\hookrightarrow\mathbb{R}^M$$

对于每个$i=1,\dots,M$，令$d_i=\deg(q_i)$，并记为$\mathbf{d}=(d_1,\dots,d_M)$。令$M=V^K\times\mathbb{R}^M$，我们可以定义一个幺半群作用$\mu\colon\mathbb{R}\times M\to M$，定义如下：

$$\mu_t(v,y_1,\dots,y_M)=(v,t^{d_1}y_1,\dots,t^{d_M}y_M).$$

现在我断言，$p:V^K\times F/K\hookrightarrow V^K\times\mathbb{R}^M$是分层$V^K\times\{0\}$附近的一个拟齐次图，其权为$\mathbf{d}$。我们首先注意到

$$p(V^K\times\{0\})=V^K\times\{0\}$$

这就是定义7.74中的第一个条件。对于第二个条件，首先令$R\subseteq V^K\times F/K$为任意另一个分层。于是，对于某个紧子群$K\leq H$，R是轨道类型$V^K\times F^{(H)}/K$的连通分支。$F^{(H)}$在$\mathbb{R}_{>0}$的数乘下封闭，因此R也立即可知具有这一性质。因此，由于p由齐次多项式构成，我们有$p(R)$是拟齐次的。

□

8

分层赝丛束

伪丛是将光滑向量丛推广到子笛卡尔情形的一种自然方式。子笛卡尔空间 X 上的伪丛E 几乎可以看作一个向量丛，区别在于其纤维的秩可以变化。对于我们后续讨论奇异量子化，伪丛的用处在于，它为讨论我们需要考虑的许多“奇异向量丛”提供了一种方便的语言，例如分层切丛和分层极化。

伪丛的研究最初由 Marshall 发起 [Mar75] ，与较早的子笛卡尔文献中的典型做法一致，伪丛是通过局部平凡化图册来定义的。我在论文[Ros 24]中沿用了这一方法，并定义了“分层向量丛”。后来我意识到，伪丛这一术语早已存在，因此我们将改用这一术语。我还给出了一个更一般的伪丛定义，该定义通过可微函数来表述，这与通过底层微分结构来定义子笛卡尔结构的方式类似。

8.1 伪丛

定义 8.1 （伪丛）。 设X 为一个子笛卡尔空间，且 $\mathbb{K} \in\{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$。一个 $\mathbb{K}$-伪丛在X 上由以下数据组成

（i）一个子笛卡尔空间E 以及一个满射可微映射 $\pi : E \to X$；以及
（ii）赋予每个纤维$E_x = \pi^{-1}(x)$的一个 $\mathbb{K}$-向量空间结构，其中$x \in X$；

满足以下条件。

(1) 写作

$$E \times_\pi E := \{(e_1, e_2) \in E \times E \mid \pi(e_1) = \pi(e_2)\}$$

并赋予$E \times_\pi E$ 从$E \times E$继承的子笛卡尔子结构，则相应诱导出的全局数乘和加法映射

$$\mu : \mathbb{K} \times E \to E; \quad (t, e) \mapsto \mu_t(e) = t \cdot e$$
$$+ : E \times_\pi E \to E; \quad (e_1, e_2) \mapsto e_1 + e_2$$

是可微的。

(ii) 映射 $\pi : E \to M$ 是拓扑商映射。

(iii) 子笛卡尔结构 $C^\infty(E)$ 由 X 上函数的拉回（ $\pi^* C^\infty(X)$）以及实线性函数 $C^\infty_{(1)}(E)$生成，其中

$$C^\infty_{(1)}(E) := \{f \in C^\infty(E) \mid f(t \cdot e) = t \cdot f(e) \text{ for all } (t, e) \in \mathbb{K} \times E\}.$$

也就是说，对于任意函数 f $\in$ C∞(E) 以及任意点 e $\in$ E，都存在 e 的一个开邻域 U $\subseteq$ E、函数 g_1,.....、$g_n \in$ C∞(X)、线性函数 α_1，... ...， $\alpha_m \in$ C∞(E)(1)(E)，以及一个光滑函数 F $\in$ C∞($\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$)，使得

$$f|_U = F(\pi^* g_1, \ldots, \pi^* g_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_m)$$

我们将 $\mathbb{R}$-伪丛简称为伪丛，将 $\mathbb{C}$-伪丛称为复伪丛。

伪丛是向量丛的一种直接推广。向量丛的最后一个条件，即其光滑结构由底空间上光滑函数的拉回和线性函数生成，实质上是转而使用平凡化邻域，并采用与引理 6.54. 的证明中相同的技巧。对于更一般的伪丛，现在我们来讨论扎里斯基切丛。

例子 8.2. 设 X 是一个子笛卡尔空间。根据定理 6.55，扎里斯基切丛 $\pi : TX \to X$ 满足子伪丛的大部分公理，但根据定义，TX 上的子笛卡尔结构定义为

$$C^\infty(TX) = \langle \pi^* C^\infty(X) \cup dC^\infty(X) \rangle$$

其中 $dC^\infty(X)$ 是形如以下形式的函数集合

$$df : TX \to \mathbb{R}; \quad v \mapsto v(f)$$

对于 $f \in C^\infty(X)$。显然 $dC^\infty(X) \subseteq C^\infty_{(1)}(TX) \subseteq C^\infty(TX)$，因此

$$C^\infty(TX) = \langle \pi^* C^\infty(X) \cup dC^\infty(X) \rangle \subseteq \langle \pi^* C^\infty(X) \cup C^\infty_{(1)}(TX) \rangle \subseteq C^\infty(TX).$$

因此，$\pi : TX \to X$ 定义了一个伪丛。

例子 8.3. 借助前面的例子，我们现在可以用扎里斯基切丛说明，伪丛未必是向量丛。事实上，考虑 $\mathbb{R}^2$中坐标轴的并集，

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}.$$

正如我们在例子6.40中所见，

$$\dim(T_{(x,y)}X) = \begin{cases} 1, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 2, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

到目前为止，我们考察过的许多其他“奇异向量丛”都是向量丛或扎里斯基切丛的子集。因此，要确认它们确实都是伪丛，我们需要给出以下定义。

定义 8.4 （子丛）**.** 设 $\pi : E \to X$ 是一个伪丛。子丛是一对子集$A \subseteq E$ 和$Y \subseteq X$，满足 $\pi(A) = Y$，并且限制 $\pi|_A : A \to Y$ 是一个伪丛，其中 A 和Y 配备子集的子笛卡尔结构。

命题 8.5. 设 $\pi : E \to X$ 是一个伪丛，且 $A \subseteq E$ 是满足 $Y = \pi(A)$ 的子集。若 A 在数乘和纤维逐点加法下封闭，则 $\pi|_A : A \to Y$ 是一个子丛。

证明。 取一个在数乘和纤维逐点加法下封闭的子集 $A \subseteq E$。赋予 A 及其像$Y = \pi(A) \subseteq X$ 子空间子笛卡尔结构后，我们看到 $\pi|_A : A \to Y$ 已满足子丛的大多数条件，除了我们还需要证明

$$C^\infty(A) = \langle (\pi|_A)^* C^\infty(Y) \cup C^\infty_{(1)}(A) \rangle.$$

显然，$\langle (\pi|_A)^* C^\infty(Y) \cup C^\infty_{(1)}(A) \rangle \subseteq C^\infty(A)$，因此我们只需证明反向包含。为此，取 $f \in C^\infty(A)$ 和 $a \in A$。于是，在 a 的某个邻域 $U \subseteq E$ 中，我们可以找到 $g_1, \ldots, g_k \in C^\infty(X)$、$h_1, \ldots, h_m \in C^\infty_{(1)}(E)$ 以及一个函数 $G \in C^\infty(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m)$，使得

$$f|_{U \cap A} = G(\pi^* g_1, \ldots, \pi^* g_k, h_1, \ldots, h_m)|_{U \cap A}$$

通过适当缩小U，我们可以假设 $\pi(U) \subseteq X$ 是一个开子集。在这种情况下，我们注意到，对所有 $i = 1, \ldots, k$ 以及 $j = 1, \ldots, m$,

$$\pi^* g_i|_A = (\pi|_A)^*(g_i|_Y) \in (\pi|_A)^* C^\infty(Y)$$

and

$$h_j|_A \in C^\infty_{(1)}(A)$$

特别地，$f \in \langle (\pi|_A)^* C^\infty(Y) \cup C^\infty_{(1)}(A) \rangle$。 □

例子 8.6. 给定流形M上的任意奇异叶状结构 $\mathscr{F}$，该叶状结构的切丛$T\mathscr{F} \subseteq TM$ 借助子空间微分结构以及将向量丛运算限制到TM上的限制$T\mathscr{F}$，赋有伪丛结构。

例子 8.7. 与例子 8.6类似，给定一个可微分层空间(X, Σ)，分层切丛$T\Sigma \subseteq TX$ 继承了扎里斯基切丛TX的伪丛结构。

定义8.8 （伪丛态射）. 设 $\pi_1 : E^1 \to X_1$ 和 $\pi_2 : E^2 \to X_2$ 是两个伪丛。一个态射是一对可微映射$f : X_1 \to X_2$ 和 $\phi : E^1 \to E^2$，使得

(1) 图表交换

$$\begin{array}{ccc} E^1 & \xrightarrow{\phi} & E^2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_1 & \xrightarrow{f} & X_2 \end{array}$$

(2) 对所有 $x_1 \in X_1$, ，诱导映射

$$\phi_x = \phi|_{E^1_x} : E^1_x \to E^2_{f(x_1)}$$

是线性的。

例子 8。9. 用这种语言来说，推论 7。28的另一种解释是：两个叶状空间 $F : M_1 \to M_2$ 之间的光滑映射 $(M1, \mathscr{F}_1)$和 $(M2, \mathscr{F}_2)$ 是保叶的 $\iff$，其导数 TF: $TM_1 \to TM_2$限制为一个伪丛态射 $TF : T\mathscr{F}_1 \to T\mathscr{F}_2$。

定义 8.10 (伪丛的限制). 设 $\pi : E \to X$ 是一个伪丛，且$Y \subseteq X$ 是一个子集。定义限制伪丛$\pi_Y : E|_Y \to Y$ 如下：

$$E|_Y := \pi^{-1}(Y) \qquad \pi_Y := \pi|_{E|_Y}.$$

容易验证，将伪丛限制到一个子集后，得到的仍然是一个伪丛。

定义8.11（次平凡伪丛）。设 $\pi : E \to X$ 是一个伪丛。若对任意$x \in X$，都能找到x 的一个邻域$U \subseteq X$ 以及一个伪丛态射

$$\begin{array}{ccc} E|_U & \xrightarrow{\phi} & U \times \mathbb{C}^N \\ & {\scriptstyle \pi_U} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle pr_1} & \\ & U & \end{array}$$

使得对于某个N，$\phi : E_U \to \phi(E_U)$ 是覆盖U的伪丛同构。称这对(U, ϕ) 为一个**局部平凡化**。如果在每个点$x \in X$ 附近，都能找到局部平凡化，使得 $\phi(E|_U) = U \times \mathbb{R}^N$，则称$\pi : E \to X$ 为**X** 上的**可微向量丛**。

例子 8.12。回顾一下，对于子笛卡尔空间X，任意局部图$\phi : U \hookrightarrow \mathbb{R}^N$ 都可微化为局部图$T\phi : TU \hookrightarrow T${v25>。按构造，这些$TX$ 的坐标图在TX上定义了一个次平凡结构。

命题 8.13。设 $\pi : E \to X$ 是一个次平凡伪丛，且 $\pi|_A : A \to Y$ 是一个子丛。则 $\pi|_A : A \to Y$ 也是次平凡的。

证明。设 $y \in Y$，并设 $(\phi、U)$ 是 $\pi : E \to X$ 在y附近的一个局部平凡化。显然，复合映射

$$A|_{U\cap Y} \hookrightarrow E|_U \hookrightarrow U \times \mathbb{R}^N$$

定义了一个局部平凡化

$$\begin{array}{ccc} A|_{U\cap Y} & \xrightarrow{\phi} & (U \cap Y) \times \mathbb{R}^N \\ & {\scriptstyle \pi|_A} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle pr_1} & \\ & U \cap Y & \end{array}$$

□

推论 8.14。例子 *8.2*、*8.6*和 *8.7* 中的所有伪丛均为次平凡。

作为最后一个初等定义，我们定义伪丛的截面。

定义 8.15 (伪丛的截面)。设 $\pi : E \to X$ 为一个伪丛。**截面** 是一个可微映射 $\sigma : E \to X$，满足 $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_X$。用 $\Gamma(E)$ 表示全体截面构成的空间。

例子 8.16。 设 X 是一个子笛卡尔空间，则由命题 6.56，扎里斯基向量场 $\mathfrak{X}(X)$ 的集合等于扎里斯基切丛的截面 $\Gamma(TX)$ 。

注意，由于例子 6.63，我们看到，一般而言，给定一个伪丛 $\pi : E \to X$，映射

$$X \times \Gamma(E) \to E; \quad (x, \sigma) \mapsto \sigma(x)$$

不一定是满射。因此，我们给出最后一个定义。

定义8.17(充足截面)。 设 $\pi : E \to X$ 是一个伪丛。若 $\pi : E \to X$ **具有充足截面**，则映射

$$X \times \Gamma(E) \to E; \quad (x, \sigma) \mapsto \sigma(x)$$

是满射。

例子 8.18。 显然，可微向量丛以及奇异叶状结构的切丛都具有充足截面。同样，若 (X, Σ) 是一个局部平凡分层空间，则由命题 7.72， $T\Sigma \to X$ 也具有充足截面。

8.2 等变向量丛的商空间

现在我们已具备必要的准备，可以回到第 2.5 节关于等变向量丛的讨论。以下内容均设 G 是一个连通李群，且 $\pi : E \to M$ 是一个适当的等变向量丛。在定义2.34 中，我们定义了 E 内的一个特殊伪丛：

$$\widetilde{E} := \bigcup_{x \in M} E_x^{G_x}$$

~正如定理 2.35 所示，若 M 只有一种轨道类型，则 E 是一个~G-等变向量丛，基空间为 M。一般而言，E 仅是一个伪丛。

例子8.19. 事实上，考虑 S^1-等变向量丛

$$pr_1 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,$$

其中每个 $\mathbb{R}^2$ 都带有通过绕原点旋转的自然 S^1 作用。由于原点 0 是 S^1 作用的不动点，我们有

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} &= \bigcup_{x\in\mathbb{R}^2} \{x\} \times (\mathbb{R}^2)^{S^1_x} \\ &= (\{0\} \times (\mathbb{R}^2)^{S^1}) \bigsqcup_{x\in\mathbb{R}^2\setminus\{0\}} \{x\} \times \mathbb{R}^2 \\ &= (\{0\} \times \{0\}) \sqcup ((\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^2)\end{aligned}$$

因此，$\widetilde{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2}$ 在原点处的秩为 0，在其他位置的秩为 2。因此，限制

$$\widetilde{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} \to \mathbb{R}^2$$

不是向量丛。

尽管如此，我们在命题 2.39 中看到，E 由等变截面张成。也就是说，

$$M \times \Gamma(E)^G \to \widetilde{E}; \quad (x, \sigma) \mapsto \sigma(x)$$

$\widetilde{\ }$是满射，因此E 具有充足截面。此外，商空间$\widetilde{E/G} \to M/G$ 是一个向量丛，并且存在一个规范满射

$$\Gamma(E)^G \to \Gamma(\widetilde{E}/G).$$

现在我们想将这些结果推广到奇异情形。为此，我们需要以下定义。

定义8.20（等变生成）。设G 是一个连通李群，$\pi : E \to M$ 是一个适当的等变向量丛，而$A \subseteq M$ 是一个在G作用下闭的子集。若映射满足以下条件，则称 E 在A上等变生成：

$$A \times \Gamma(E|_A)^G \to E|_A; \quad (a, \sigma) \mapsto \sigma(a)$$

是满射。

现在假设 $A \subseteq M$ 是定义6.35中所述意义下的可切片子集。记 $\rho : M \to M/G$ 为商映射，回顾命题6.36 可知

$$C^\infty(A/G) = \{f : A/G \to \mathbb{R} \mid (\rho|_A)^* f \in C^\infty(M)^G|_A\}$$

是 A/G 上的子笛卡尔结构。由此，我们现在可以证明以下结论。

定理 8.21. 设 G 是一个连通李群，$\pi : E \to M$ 是一个真等变向量丛，$A \subseteq M$ 是一个可切片子集。假设 E 在 A 上等变生成。则以下结论成立。

(1) 诱导映射 $\pi : (E|_{\overline{A}})/G \to A/G$ 是 A/G 上的可微向量丛。

(2) 记 $\rho_M : M \to M/G$ 和 $\rho_E : E \to E/G$ 为商映射。则存在一个诱导的线性同构

$$(\rho_E)_* : \Gamma(E|_A)^G \to \Gamma((E|_A)/G).$$

证明。 **(1)** 首先注意，由于 A 是闭且可切片的，$E|_A$ 也如此。事实上，在任意$a \in A$ 附近，都可以找到a 的一个邻域，使得 $\pi : E \to M$ 局部等变同构于向量丛

$$\pi : G \times_K (V \times W) \to G \times_K V; \quad [g, (v, w)] \mapsto [g, v],$$

其中$K \leq G$ 是一个紧子群，V、W 是线性的K-表示，并且A 局部微分同胚于$G \times_K S$，其中$S \subseteq V$ 是一个闭的G-不变子空间。于是，在此局部同构下，$E|_A$ 变为

$$E|_A \cong G \times_K (S \times W) \tag{8.1}$$

因此$E|_A$ 是可切片的。

现在，令$A_0 := A/G$ ，且$E_0 := (E|_A)/G$。由于A 和$E|_A$均可切片，我们得到典范子笛卡尔结构$C^\infty(A_0)$ 和$C^\infty(E_0)$ ，由下式给出

$$C^\infty(A_0) = \{f : A_0 \to \mathbb{R} \mid (\rho_M|_A)^* f \in C^\infty(M)|_A^G\}$$
$$C^\infty(E_0) = \{f : E_0 \to \mathbb{R} \mid (\rho_E|_{E|_A})^* f \in C^\infty(E)|_{E|_A}^G\}$$

显然，诱导映射 $\pi : E_0 \to A_0$ 是可微的，并且是一个拓扑投影。现在为 $\pi : E_0 \to A_0$ 的纤维赋予向量空间结构。固定$\overline{a} \in A$，并考虑映射

$$E_a \to (E_0)_{[a]}; \quad e \mapsto \rho_E(e). \tag{8.2}$$

我断言 E_a 是一个双射。显然，方程（8.2）中的映射是满射，因此我们只需证明它是单射。现在假设 e,$e' \in E_a$ 所以

that $\rho_E(e) = \rho_E(e')$。根据定义，这意味着存在 $g \in G$，使得 $g \cdot e = e'$。由映射 $\pi : E \to M$ 的等变性可得 $g \cdot a = a$，因此 $g \in G_a$。由于 E 是在 A 上等变生成的，根据定理 2.35，我们有 $E^{G_a}a = E_a$。因此，$g \cdot e = e$，进而 $e = e'$。

因此，我们赋予 $(E_0)^{[a]}$ 以E_a中的向量空间结构。利用方程（8.1）中的标准形可知，在每个点 $a \in A$附近，都存在一个 G-等变的可微向量丛同构

$$\begin{array}{ccc} E|_{U\cap A} & \longrightarrow & G \times_K (S \times W) \\ \downarrow & & \downarrow \\ U \cap A & \longrightarrow & G \times_K S \end{array}$$

正如我们已经看到的，由于 E 在 A 上等变生成，对于所有 $a \in A$，都有 $E^{G_a}{}_a = E_a$。因此，由于 $e0]$ 上方的纤维对应于 W [，我们必有 $W^K = W$，从而 $G \times_K (S \times W) = (G \times_K S) \times W$。因此，我们得到子笛卡尔空间之间的微分同胚

$$\begin{array}{ccc} E_0|_{U\cap A/G} & \longrightarrow & (G/K) \times W \\ \downarrow & & \downarrow \\ (U \cap A)/G & \longrightarrow & G/K \end{array}$$

这立即证明了 E_0上的数乘和加法是可微的，同时也提供了表明 E_0 是一个向量丛的坐标图。

(2) 从这里开始的证明与命题2.39中的证明几乎完全相同。

□

8.3 分层伪丛

鉴于我们一直关注的许多奇异空间都带有自然的分层，自然会想到：伪丛何时与该分层相容？由此便引出了分层伪丛这一概念。

定义 8.22 (分层伪丛)。 设(X,Σ) 是一个可微分层空间，且 $\mathbb{K}\in\{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$。在$(X,\ \Sigma)$上的分层 $\mathbb{K}$-伪丛是一个 $\mathbb{K}$-伪丛 $\pi:E\ \to X$，使得其诱导分划

$$\pi^{-1}\Sigma=\{\pi^{-1}(S)\mid S\in\Sigma\}$$

满足以下条件。

(1) $(E,\ \pi^{-1}\Sigma,C^{\infty}(E))$ 是定义 7.10.意义下的弱可微分层空间。

(2) 对每个$S\ \in\Sigma$，映射

$$\pi_S:=\pi|_{\pi^{-1}(S)}:\pi^{-1}(S)\to S$$

是一个光滑 $\mathbb{K}$-向量丛。

例子 8.23. 设(X,Σ) 是一个可微分层空间，且 $\pi:\ E\ \to X$ 是一个秩为k的可微向量丛。那么对每个分层$S\ \in\Sigma$，限制$E|_S\ \to\ S$ 显然是一个光滑向量丛，因为局部上$E|_S$ 与$U\ \times\mathbb{R}^k$ 微分同胚，后者提供了光滑图册。这也表明，$\pi^{-1}\Sigma$ 是一个分层，因为对于任意点$x\ \in X$，我们都有一个平凡化$E|_U\cong U\ \times\mathbb{R}^k$。在这个平凡化中，$\pi^{-1}\Sigma$ 的各部分具有形式 $\{S\ \times\mathbb{R}^k\}$，满足边界公理。

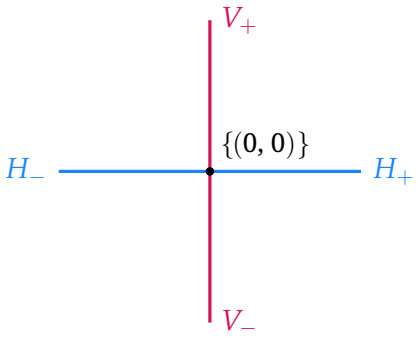
例子8.24. 设X 为 $\mathbb{R}^2$中坐标轴的并集，即

$$X=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid xy=0\}.$$

给X 赋予如下分层

$$\Sigma=\{\{(0,0)\},H_+,H_-,V_+,V_-\}$$

来自例子7。3具体来说，



$$
\begin{aligned}
H_+ &= (0,\infty)\times\{0\}\\
H_- &= (-\infty,0)\times\{0\}\\
V_+ &= \{0\}\times(0,\infty)\\
V_- &= \{0\}\times(-\infty,0)
\end{aligned}
$$

那么，分层切丛$T\Sigma$ 自然地划分为若干光滑向量丛

$$T\Sigma = T\{(0,0)\}\sqcup TH_+\sqcup TH_-\sqcup TV_+\sqcup TV_-.$$

很容易看出，$T\Sigma$ 满足成为分层伪丛的公理，或许边界条件除外。为此，注意到作为$T\mathbb{R}^2$的子集，

$$
\begin{aligned}
\overline{T\{(0,0)\}} &= \{(0,0,0,0)\}\\
\overline{TH_+} &= ([0,\infty)\times\{0\})\times(\mathbb{R}\times\{0\})\\
\overline{TH_-} &= ((-\infty,0]\times\{0\})\times(\mathbb{R}\times\{0\})\\
\overline{TV_+} &= (\{0\}\times[0,\infty))\times\{0\}\times\mathbb{R})\\
\overline{TV_-} &= (\{0\}\times(-\infty,0])\times\{0\}\times\mathbb{R})
\end{aligned}
$$

因此，我们可以直接检验划分 $\pi^{-1}\Sigma$ 满足边界条件：唯一与其他任何分层的闭包相交的分层是 $\{(0,0,0,0)\}$，显然它包含在其他分层的闭包中。

更一般地，设 (X,Σ) 是一个可微分层空间。根据例子 8.7，分层切丛 $\pi : T\Sigma\to X$ 是一个伪丛。此外，划分

$$\pi^{-1}\Sigma = \{TS \mid S\in\Sigma\}$$

显然是 $T\Sigma$ 的一个划分，在 X的每个分层上构成光滑向量丛。因此，$T\Sigma$ 可能不满足分层伪丛条件的唯一情形，是划分 $\pi^{-1}\Sigma$ 不构成分层。在这种情况下，很容易看出，唯一可能不满足的条件是边界条件。

定理 8.25 ([Pflo1])**.** 设 (X,Σ) 是一个可微分层空间，且令$\pi : T\Sigma\to X$ 为其分层切丛。那么，划分

$$\pi^{-1}\Sigma = \{TS \mid S\in\Sigma\}$$

使 $(T\Sigma, \pi^{-1}\Sigma, C^\infty(T\Sigma))$ 成为一个弱可微分层空间 $\Longleftrightarrow (X,\Sigma)$ 满足 *Whitney A* 条件。

正如我们在小节 7.5.1 中讨论的那样，非 Whitney A 分层空间的例子相当病态，在本论文中不会出现。因此，以下所有分层切丛都是分层空间。由此，以下结果成立。

推论 8.26. 设 (X,Σ) 是一个可微分层空间。那么 $\pi : T\Sigma \to (X, \Sigma)$ 是一个分层伪丛，且 $\Longleftrightarrow (X,\Sigma)$ 满足 *Whitney (A)*。

Whitney 条件 (A) 可以非常自然地推广到更一般的分层伪丛。

定义 8.27 (线性 Whitney A). 设 (X,Σ) 是一个可微分层空间，且 $\pi : E \to X$ 是一个伪丛，使得对所有 $S \in \Sigma$，限制$\pi_S : E|_S \to S$ 都是光滑向量丛。若对于任意两个分层 S,实数集 $\in \Sigma$、$x \in S$以及局部平凡化， $\pi : E \to X$ 满足线性 Whitney A，则称其满足该条件

$$\begin{array}{ccc} E|_U & \xrightarrow{\phi} & U \times \mathbb{R}^N \\ & {\scriptstyle \pi_U} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle pr_1} & \\ & U & \end{array}$$

以下条件成立。令r 表示$E|_R$ 的秩，s 表示$E|_S$的秩。

(A) 若 $\{x_k\} \subseteq$ 实数集 是一个序列，使得 $\{\phi(E^{x_k})\}$ 收敛到 $\tau \subseteq \{x\} \times \mathbb{R}^N$ 在 $\mathrm{Gr}_r(\mathbb{R}^N)$中，则 $E_x \subseteq \tau$。

这个定义只是将分层切丛直接替换为更一般的伪丛。因此，可微分层空间是 Whitney (A) $\Longleftrightarrow$ 其分层切丛为线性 Whitney A，这并不令人意外。正如预期，Pflaum 定理也可以轻松推广到这一更一般的背景中。

命题 8.28. 设 $\pi : E \to (X,\Sigma)$ 是 (X, Σ)上的线性 *Whitney A* 伪丛。则 $\pi : E \to (X,\Sigma)$ 是一个分层伪丛。

证明。 这里唯一可能出错的地方是，定义 $(E, \pi^{-1}(\Sigma))$ 给出的诱导分划 8.22 并非分层。关于这一点，很容易看出唯一可能的问题是边界条件。因此，为了证明 $\pi^{-1}\Sigma$ 满足边界条件，取两个分层 $S,R \in \Sigma$ 使得 $E|_S \cap E|_R \neq \emptyset$。我们证明 $E|_S \subseteq E|_R$。为此，固定 $e_0 \in E|_S$。

由于丛映射 $\pi: E \to X$ 的连续性，我们得到 $S \cap R \neq \emptyset$，因此 $\overline{S} \subseteq R$。因此，若我们记 $x_0 = \pi(e_0)$，则存在一个序列 $\{x_k\} \subseteq R$，使得

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x_0.$$

现在转到以 x 为中心的局部平凡化，

$$\phi : E|_U \to U \times \mathbb{R}^N$$

考虑序列 $\{\phi(\mathrm{E}_{x_k})\} \subseteq \mathrm{Gr}_r(\mathbb{R}^N)$，其中 r 是光滑向量丛 $\mathrm{E}|_R \to \mathrm{R}$ 的秩。正如我们在第 7.5.1 节开头的讨论中所见，$\mathrm{Gr}_r(\mathbb{R}^N)$ 是紧致的，因此取一个子序列后，我们可以假设 $\{\phi(\mathrm{E}_{x_k})\}$ 收敛到某个 $\tau \in \mathrm{Gr}_r(\mathbb{R}^N)$。由 Whitney(A)，我们有 $\mathrm{E}_{x_0} \subseteq \tau$，因此 $\mathrm{e}_0 \in \tau$。

回忆一下，$\mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^N)$ 上的拓扑是来自 $\mathrm{End}(V)$ 的子空间拓扑。利用 $\mathbb{R}^N$ 上的标准内积，$\mathrm{End}(V)$ 上的拓扑由算子范数生成

$$\|T\| := \inf_{v\in\mathbb{R}^N\setminus\{0\}} \frac{\|T(v)\|}{\|v\|}.$$

特别地，

$$\lim_k E_{x_k} = \tau$$

当且仅当

$$\lim_k \|P_{E_{x_k}} - P_\tau\| = 0 \tag{8.3}$$

其中，对于任意子空间 $W \subseteq \mathbb{R}^N$，我们记 P_W 为投影到 W 上的正交投影。特别地，注意到 $\{P^{E_{x_k}}(e_0)\} \subseteq E|_R$ 是 $E|_R$ 上的一个序列，并且根据方程（8.3），我们有

$$0 = \lim_k \|P_{E_{x_k}}(e_0) - P_\tau(e_0)\| = \lim_k \|P_{E_{x_k}}(e_0) - e_0\|$$

因为 $e \in \tau$。因此，$\{P^{E_{x_k}}(e_0)\}$ 收敛到 e_0，于是 $e_0 \in E|_S$。因此，$\overline{\pi^{-1}\Sigma}$ 满足边界条件。 □

正如我们在小节7.5.1中所讨论的，惠特尼条件对于光滑几何学家而言可能显得有些不自然。然而，值得庆幸的是，我们为通常的 Whitney A 所讨论的同一种叶状结构理论升级，对于线性的 Whitney A 仍然成立。

定理 8.29. 设 (X, Σ) 是一个可微分层空间，且 $\pi : E \to X$ 是一个伪丛。假设以下两个条件成立。

(1) 对每个分层 $S \in \Sigma$，限制 $\pi_S : E|_S \to S$ 是一个光滑向量丛。

（2） $\pi : E \to X$ 具有充足截面，即该映射

$$X \times \Gamma(E) \to E; \quad (x, \sigma) \mapsto \sigma(x)$$

是满射。

于是， $\pi : E \to X$ 是线性 *Whitney A*。

证明。 与命题7。65中的证明几乎相同。 □

例 8。30。 设G 是一个连通李群，且 $\pi : E \to M$ 是一个适当的等变向量丛。回忆一下，

$$\widetilde{E} = \bigcup_{x \in M} E_x^{G_x}$$

~具有充足截面。因此，如果我们证明对于所有轨道类型分层 S $\in \mathcal{S}_G$ (M)，$E|_S \to S$ 是一个光滑向量丛~，那么就证明了 E $\to$(M, $\mathcal{S}_G$(M)) 是一个 Whitney (A) 分层伪丛。事实上，固定 x $\in$M，我们可以转到适当向量丛的局部标准形，并假设 E $= G \times_K (V \times W)$，M $= G \times_K V$，且 π : E $\to$ M 是映射$\pi([g, v, w]) = [g, v]$，其中 K $\leq$ G 是紧群 K，V 和 W 是线性 K-表示。在这种情况下，包含 x 的分层具有局部形式

$$S = G \times_K V^K \cong (G/K) \times V^K.$$

注意，由于S 中各点的稳定子都与K共轭，因此

$$\widetilde{E}|_S = G \times_K (V^K \times W^K) = (G/K) \times V^K \times W^K.$$

~ ~这为$E|_S$ 提供了局部平凡化，因此$E|_S \to S$ 是一个光滑向量丛。

例子8.31. 接着前一个例子，设G 是一个连通李群，$K \leq G$ 是一个紧子群，且V 是一个K-表示。记$M = G \times_K V$。正如我们在例子2.30中所见，

$$TM = G \times_K (V \times (\mathfrak{g}/\mathfrak{k}) \times V).$$

现在注意，如果我们令 $S = G \times_K V^K$，那么一方面，根据命题2.21，

$$\widetilde{TM}|_S = G \times_K (V^K \times (\mathfrak{g}/\mathfrak{k})^K \times V^K) \cong (G/K) \times V^K \times (\mathfrak{n}_G(K)/\mathfrak{k}) \times V^K$$

而

$$TS \cong (G/K) \times V^K \times (\mathfrak{g}/\mathfrak{k}) \times V^K.$$

因此，切丛$|_S \subseteq TS$。由此，我们很容易推得，对于任意适当的G-空间M，都有切丛 $\subseteq T\mathcal{S}_G(M)$，其中 $\mathcal{S}_G(M)$ 是轨道类型分层；当且仅当所有作为稳定子出现的子群都是正规子群时，等号成立。特别地，我们证明了以下结论。

推论 8.32. 设 G 是一个连通阿贝尔李群，M 是一个适当 G-空间。那么 $TM = T\mathcal{S}_G(M)$。

我们已经证明，迄今遇到的许多伪丛都具有充足截面。因此，只要伪丛与底空间上的某个分层相容，所得结构就是分层伪丛。

推论 8.33. 设(M,Σ) 是一个分层空间，且 $\mathscr{F}$ 是 M 上的奇异叶状结构。对每个 $x \in M$，记 $L_x \in \mathscr{F}$ 为经过 x 的叶。此外，设每个分层 $S \in \Sigma$ 都满足以下两个条件

(1) $S = \bigcup_{x\in S} L_x$

(2) S 上的诱导叶状结构 $\mathscr{F}_S$ 是正则的。

于是，切丛 $T\mathscr{F} \to M$ 是 (M, Σ) 上的分层伪丛。

这为更多分层伪丛的例子打开了大门。

例 8.34. 设 $(M, g, \mathscr{F})$ 为一个奇异黎曼叶状结构。则维数类型分层 $\mathcal{S}_{dim}(M, \mathscr{F})$ 满足推论8.33的条件，因而给出一个分层伪丛。

例 8.35. 设G 为一个连通李群，且M 是一个适当的G-空间。则轨道叶状结构 $\mathscr{F}_G = \{G \cdot x \mid x \in M\}$ 饱和轨道类型分层 $\mathcal{S}_G(M)$。也就是说，任意轨道类型分层 $S \in \mathcal{S}_G(M)$ 都是轨道的并集，这些轨道具有相同的维数，因此由弗罗贝尼乌斯定义了一个正则叶状结构。

8.4 复化与分层分布

在此前的讨论中，伪丛的基域可以是 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$。本节将说明如何由一个实伪丛构造一个复伪丛。这样，我们就可以讨论子笛卡尔空间上的复分布；随着我们逐步探讨分层极化，这是一个重要的概念。

定义 8.36（复化）。设 $\pi : E \to X$ 为一个实伪丛。定义其复化，记作 $\pi_{\mathbb{C}} : E \otimes \mathbb{C} \to X$，使其为以下不交并

$$E \otimes \mathbb{C} := \bigcup_{x \in X} E_x \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C},$$

借助 $\pi_{\mathbb{C}} : E \otimes \mathbb{C} \to X$ 自然投影。

我们希望赋予 $\pi_{\mathbb{C}} : E \otimes \mathbb{C} \to X$ 复伪丛结构。为此，我们首先需要给 $E \otimes \mathbb{C}$ 赋予子笛卡尔结构。为此注意，对所有$x \in X$，都有

$$E_x \otimes \mathbb{C} = E_x \oplus iE_x$$

其中$i \in \mathbb{C}$ 是 -1的平方根。因此，我们可以将$E \otimes \mathbb{C}$ 视为$E \times_\pi E \subseteq E \times E$。在此认同下，$\pi_{\mathbb{C}}$ 可视为

$$\pi_{\mathbb{C}} : E \otimes \mathbb{C} \to X; \quad (e_1, e_2) \mapsto \pi(e_1).$$

回忆一下例子 6.6，若记 $pr_1, pr_2 : E \times E \to E$ 分别为到第一个因子和第二个因子的投影，则

$$C^\infty(E \times E) = \langle pr_1^* C^\infty(E) \cup pr_2^* C^\infty(E) \rangle.$$

根据 $\pi : E \to X$ 为伪丛的定义，我们有

$$C^\infty(E) = \langle \pi^* C^\infty(X) \cup C^\infty_{(1)}(E) \rangle.$$

因此，利用$E \times_\pi E \subseteq E \times E$ 是闭子集这一事实，以及$\pi \circ pr_1|_{E \times_\pi E} = \pi \circ pr_2|_{E \times_\pi E}$，我们可推得

$$C^\infty(E \otimes \mathbb{C}) = \langle \pi_{\mathbb{C}}^* C^\infty(X) \cup pr_1^* C^\infty_{(1)}(E) \cup pr_2^* C^\infty_{(1)}(E) \rangle \tag{8.4}$$

接下来，将复数标量乘法定义为

$$\mu^{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \times E_{\mathbb{C}} \to E_{\mathbb{C}}; \quad (x + iy, e_1 + ie_2) \mapsto (xe_1 - ye_2 + i(xe_2 + ye_1)) \tag{8.5}$$

这是 E 上的加法和数乘的组合，因此是可微的。最后，定义加法

$$(E \otimes \mathbb{C}) \times_{\pi_{\mathbb{C}}} (E \otimes \mathbb{C}) \to E \otimes \mathbb{C}; \quad (e_1 + ie_2, u_1 + iu_2) \mapsto e_1 + u_1 + i(e_2 + u_2). \tag{8.6}$$

定理 8.37. 设 $\pi : E \to X$ 是一个实伪丛。那么 $\pi_{\mathbb{C}} : E \otimes \mathbb{C} \to X$ 配备方程（8.4）中的子笛卡尔结构、方程（8.5）中的复数标量乘法以及方程（8.6）中的加法后，是一个复数

X 上的伪丛。此外，如果 $\pi : E \to X$ 满足以下任一性质，那么 $\pi_{\mathbb{C}} : E \otimes \mathbb{C} \to X$ 也满足该性质。

- 次平凡
- 向量丛
- 充足截面
- 线性惠特尼*(A)*条件

证明。 我们已经完成了大部分证明，现在只需验证

$$C^\infty(E \otimes \mathbb{C}) = \langle \pi_{\mathbb{C}}^* C^\infty(X) \cup C^\infty_{(1)}(E \otimes \mathbb{C}) \rangle,$$

其中 $C^\infty_{(1)}(E \otimes \mathbb{C})$ 关于诱导的实数标量乘法是线性的。显然，

$$\langle \pi_{\mathbb{C}}^* C^\infty(X) \cup C^\infty_{(1)}(E \otimes \mathbb{C}) \rangle \subseteq C^\infty(E \otimes \mathbb{C})$$

因此我们只需证明反向包含关系。根据 $C^\infty(E \otimes \mathbb{C})$ 在方程（8.4）中的定义，显然有 $pr_1^* C^\infty_{(1)}(E)$、$pr_2^* C^\infty(E) \subseteq C^\infty_{(1)}(E \otimes \mathbb{C})$，这显然是平凡的。

其他条件都显然成立。 □

由$E \otimes \mathbb{C}$ 可与$E \times E$的一个子集等同这一事实，可得如下结论。

推论 8.38。 设 $\pi : E \to X$ 是一个伪丛。则任意截面 $\sigma \in \Gamma(E \otimes \mathbb{C})$ 都可以唯一地写成如下形式

$$\sigma = \sigma_1 + i\sigma_2.$$

也就是说，作为实向量空间，$\Gamma(E \otimes \mathbb{C}) = \Gamma(E) \otimes \mathbb{C}$。

到目前为止，我们关于伪丛的主要例子是扎里斯基切丛和分层切丛，因此现在可以应用定理8.37 将它们复化。

定义 8.39 （复 Zariski/分层切丛）。 （1）设X为一个子笛卡尔空间。称 $TX \otimes \mathbb{C}$ 为X的**复化扎里斯基相切丛**。记 $\mathfrak{X}_{\mathbb{C}}(X)$ 为$TX \otimes \mathbb{C}$ 的截面，并将 $\mathfrak{X}_{\mathbb{C}}(X)$ 的元素称为**复 Zariski 向量场**。

(2) 设 (X, Σ) 是惠特尼正则的。称 $T\Sigma \otimes \mathbb{C}$ 为**（X,）的复化分层切丛**。用 $\mathfrak{X}_{\mathbb{C}}(\Sigma)$ 表示 $T\Sigma \otimes \mathbb{C}$的截面，并称 $\mathfrak{X}_{\mathbb{C}}(\Sigma)$ 中的元素为复分层向量场。

设 X 是子笛卡尔空间。回顾一下，扎里斯基切丛 TX 中的元素可解释为 $C^\infty(X)$的导子。我们可以用可微复值函数 $C^\infty(X,\mathbb{C})$对 $TX\otimes\mathbb{C}$ 作类似解释。

命题 8.40. 设 X 是一个子笛卡尔空间，且 $x\in X$。则我们有一个从 $T_x\otimes\mathbb{C}$ 到满足下述条件的导子空间的典范识别：$v:C^\infty(X,\mathbb{C})\to\mathbb{C}$，使得

$$v(fg)=v(f)g(x)+f(x)v(g). \tag{8.7}$$

证明。首先，给定 $v\in T_xX\otimes\mathbb{C}$，定义导子

$$v:C^\infty(X,\mathbb{C})\to\mathbb{C}$$

如下。利用推论 8.38，将 $v=v_1+iv_2$ 写作 $v_1,v_2\in\mathfrak{X}(X)$。然后，给定一个函数 $f\in C^\infty(X,\mathbb{C})$，我们也可以将 $f=f_1+if_2$ 写作 $f_1,f_2\in C^\infty(X)$。现在定义

$$v(f):=v_1(f_1)-v_2(f_2)+i(v_1(f_2)+v_2(f_1))$$

接下来，直接检验即可得出 v 满足方程（8.7）。反过来，给定一个满足方程（8.7）的复导子 $v:C^\infty(X,\mathbb{C})\to\mathbb{C}$，容易验证，由下式定义的 $v_1,v_2:C^\infty(X)\to\mathbb{R}$

$$v_1(f)=\frac{v(f)+\overline{v(f)}}{2}\qquad v_2(f)=\frac{v(f)-\overline{v(f)}}{2i}$$

对于$f\in C^\infty(X)$，定义T_xX 中的元素，使其满足$v=v_1+iv_2$。 □

由此我们可以得出以下结论。

推论 8.41. 设 X 为一个子笛卡尔空间。那么，复扎里斯基向量场 $\mathfrak{X}_{\mathbb{C}}(X)$ 可与 $C^\infty(X,\mathbb{C})$的复导子集合自然地对应起来。

证明。逐纤维应用命题8.40 。 □

现在我们转向分层情形。给定一个惠特尼正则分层空间，复化分层切丛 $T\Sigma\otimes\mathbb{C}$ 具有自然的分层，即

$$T\Sigma\otimes\mathbb{C}=\bigcup_{S\in\Sigma}TS\otimes\mathbb{C}.$$

在接下来的章节中，我们将研究第 4 章中极化概念的推广，这些推广将是分层切丛的复子丛。为此，我们先定义分布。

定义 8。42 （分层复分布）。 设 (X,Σ) 是一个惠特尼正则分层空间。**分层复分布** 是 $D \subseteq TX \otimes \mathbb{C}$ 上的一个子丛，其中 X 满足：$D \to (X,\Sigma)$ 是一个复分层伪丛。也就是说，$D \subseteq T\Sigma \otimes \mathbb{C}$ 是一个伪丛；对于每个分层 $S \in \Sigma$ $D|_S \subseteq TS \otimes \mathbb{C}$ 是一个光滑复子丛，并且该划分

$$D = \bigcup_{S\in\Sigma} D|_S$$

是 D 的弱可微分层。

例子 8.43. 设 (X,Σ) 是惠特尼分层空间，且 $E \subseteq T\Sigma$ 是一个子丛，使得 $E \to (X,\Sigma)$ 是分层伪丛。那么显然，复化后的 $E \otimes \mathbb{C} \subseteq T\Sigma \otimes \mathbb{C}$ 是一个分层复分布。我们称这类分布为**实** 分布。

例子 8.44. 设 G 是一个连通阿贝尔李群，且 (M,I) 是一个复流形，使得 M 是一个适当的 G-空间，而 I 是一个 G-不变复结构。于是我们得到两个复 G-不变分布，定义在M上，分别为全纯切丛和反全纯切丛 $T^{1,0}M$和 $T^{0,1}M$。由例子 8.30 可知

$$\widetilde{T^{1,0}M} = \bigcup_{x\in M} (T^{1,0}_x M)^{G_x}$$

and

$$\widetilde{T^{0,1}M} = \bigcup_{x\in M} (T^{0,1}_x M)^{G_x}$$

是定义在 $(M,\mathcal{S}_G(M))$ 上的分层分布。正如推论 8.32，$\widetilde{TM} = T\mathcal{S}_G(M)$ 中所见。因此，对于每个轨道类型分层 $S \in \mathcal{S}_G(M)$

$$TS \otimes \mathbb{C} = \widetilde{T^{1,0}M}|_S \oplus \widetilde{T^{0,1}M}|_S.$$

由此可见，上述分解在每个分层上定义了复结构$\{I_S\}$。

注意，对于惠特尼正则分层空间 (X,Σ)，$\mathfrak{x}(X)$ 和 $\mathfrak{x}(\Sigma)$都具有自然的李括号结构，其定义如下：

$$[V,W]f = V(W(f)) - W(V(f))$$

对于$f \in C^\infty(X)$。根据推论 8.38，我们有 $\mathfrak{x}_{\mathbb{C}}(X) = \mathfrak{x}(X) \otimes \mathbb{C}$，且$\mathfrak{x}_{\mathbb{C}}(\Sigma) = \mathfrak{x}(\Sigma) \otimes \mathbb{C}$，因此可以将李括号按复线性方式延拓。通过将 $\mathfrak{x}_{\mathbb{C}}(X)$ 与$C^\infty(X,\mathbb{C})$上的复导子相对应，也可以实现这个括号。

定义 8.45 （对合的）。 设$D \subseteq T\Sigma \otimes \mathbb{C}$ 是一个复分层分布。若对于所有分层$S \in \Sigma$，$D|_S \subseteq TS \otimes \mathbb{C}$ 都是对合的，则称D 是对合的。

例子 8。46。 现在回到连通李群 G 以及来自例子 G-空间 (M, I) 8。44的适当复 $T^{1,0}M$和 $T^{0,1}M$ 是对合分层分布的例子，因为在每个分层上，它们都由诱导复结构的全纯切丛和反全纯切丛给出。

现在，为了得到对合分布的例子，我们首先需要一个引理。

引理 8。47。 设 (X, Σ) 是一个惠特尼正则分层空间，且 $V,W \in \mathfrak{X}_{\mathbb{C}}(\Sigma)$。那么，对每个分层 $S \in \Sigma$，我们有

$$[V|_S, W|_S] = [V, W]|_S \in \mathfrak{X}_{\mathbb{C}}(S).$$

证明。 这直接源于这样一个事实：复李括号只是通常李括号的复线性延拓，并且也源于推论 7。59。

□

命题 8。48。 设 (X, Σ) 是一个惠特尼分层空间，且 $D \subseteq T\Sigma \otimes \mathbb{C}$是一个对合复分层分布。那么，对于任意 $V,W \in \Gamma(D)$，我们有 $[V,W] \in \Gamma(D)$。

证明。 逐分层应用引理8.47 。 □

最后，我想给出一个刻画，说明流形上的复分布何时会在某个子集上诱导出分层分布。

引理 8.49. 设 $X \subseteq \mathbb{R}^N$ 是一个局部闭子空间，配备了一个由 $\mathbb{R}^N$ 的嵌入子流形构成的分层 Σ，使得 (X, Σ) 是惠特尼正则的。此外，假设 $D \subseteq T^{\mathbb{C}}\mathbb{R}^N$ 是 $\mathbb{R}^N$ 上的一个复分布，且作为子空间也是闭的；对每个 $S \in \Sigma$，令

$$D_S := D \cap T^{\mathbb{C}}S.$$

假设以下性质成立

(1) $D_S \subseteq T^{\mathbb{C}}S$ 是一个复分布。

(2) 若 $S \subseteq$ 实数集，则 $rank(D_S) \leq rank(D_R)$。

那么，该并集

$$D_X := \bigcup_{S \in \Sigma} D_S \subseteq T^{\mathbb{C}}\Sigma$$

是 (X, Σ) 上的分层复分布。

证明。 我们只需证明 D_X 满足边界条件。由于这是一个局部条件，我们可以假设 $X \subseteq \mathbb{R}^N$，其中 N。

为证明前沿条件，设S和$R \in \Sigma$ 是两个分层，并假设$D_S \cap D_R \neq \emptyset$。我们证明$D_S \subseteq D_R$。由连续性可得$S \cap R \neq \emptyset$，因此$S \subseteq R$。

设$x \in S$，且令 $\{x_k\} \subseteq R$ 为一个收敛到x的序列。由于格拉斯曼流形是紧致的，经过选取子序列后，我们可以找到$W \subseteq T_x\mathbb{R}^N$，使得$T_{x_k}R$ 在 $\mathbb{R}^N$的维数为(R) 的格拉斯曼流形中收敛到W。利用 $\mathbb{R}^N$上的典范度量，我们可以典范地找到正交投影

$$\Pi_k : T_{x_k}R \to (D_R)_{x_k}$$

对每个k均如此。将其延拓为零，得到正交投影 $\Pi_k : T_{x_k}\mathbb{R}^N \to (D_R)^{x_k}$。根据假设，$D|_R$ 沿R具有常秩，记为r。因此，投影序列 $\{\Pi_k\}$ 属于 $\mathbb{R}^N$ 的、由维数为r 的子空间构成的格拉斯曼流形。由于该流形是紧致的，经过可能的子序列选取后，我们可以假设 $\{\Pi_k\}$ 收敛到某个正交投影 Π_∞，该投影投到A 这一$T_x\mathbb{R}^N$的秩为r 的子空间上。由连续性可得$A \subseteq W$。

现在，注意对于任意 $w \in \mathbb{R}^N$， $\{\Pi_k(w)\}$ 都是 D_R 中的一个序列，并且

$$\Pi_\infty(w) = \lim_{k\to\infty} \Pi_k(w).$$

由于假设 D 是闭的，因此可得 $\Pi_\infty(v) \in D$。再次利用连续性，还可得 $\Pi_\infty(v) \in D_x$。根据维数假设，可知 Π_∞ 可视为到 $W \cap D_x$ 上的投影，因此包含 $(D_S)_x$，因为 $T_xS \subseteq W$。

特别地，对于任意 $v \in (D_S)_x$，令 $v_k = \Pi_k(v) \in (D_R)_x$。于是

$$\lim_{k\to\infty} v_k = \Pi_\infty(v)$$

由于 v 属于 Π_∞ 的像且 Π_∞ 是一个投影，因此可得$\Pi_\infty(v) = v$，从而 $v \in D_R$。因此，$D_S \subseteq D_R$。 □

第三部分

奇异量子化

9 辛普莱克特分层空间

现在，我们已经为研究奇异空间奠定了基础（至少从子笛卡尔和分层的视角来看），可以开始研究辛分层空间了。这类空间源于 Sjamaar 和 Lerman [SL91] 对奇异约化空间的研究。他们的构造将在第 9.2、9.3 和第 9.4 节中详加考察。Mol [Mol24]通过其“哈密顿分层”的概念，将他们的思想大幅拓展到辛群胚的情形；本文不讨论这一内容。

鉴于第 6 章提到，子笛卡尔空间并不特别适合建立微分形式理论，因此我们甚至能够讨论辛几何——这一由特殊的 2-形式所定义的领域——似乎令人惊讶。关键在于，我们研究的是分层空间，即由流形划分而成、微分形式理论在其中适用的空间。此外，泊松结构具有“协变”性质，因此很容易在子笛卡尔情形下定义。因此，借鉴泊松结构的辛叶状结构理论，我们将辛分层空间定义为：在每个分层上取一族辛形式，并在全空间上取一个泊松结构，且包含映射为泊松映射。由此，辛分层空间类似于局部有限辛叶状结构。借助 Mol [Mol24]所研究的哈密顿分层，这一思想还可以进一步完善（并得到严格的形式化）。

9.1 辛分层空间

定义 9.1 (分层辛空间)。 设$(X, \Sigma, C^\infty(X))$ 是一个惠特尼分层空间。X 上的辛结构由以下数据组成。

(1) 每个分层 $S \in \Sigma$ 上的辛形式 ω_S。

（2）$C^\infty(X)$上的泊松括号 $\{\cdot,\cdot\}$。

满足相容条件：对于任意分层 $S \in \Sigma$，包含映射 $S \hookrightarrow X$ 是泊松的。若根据上下文已知分层和子笛卡尔结构，我们将用 $(X, \{\cdot,\cdot\})$ 表示一个辛分层空间。

例子 9.2. 设 (M, π) 是一个泊松流形。回忆例子7.19 中，我们得到一个将 M 分解为辛子流形的典范叶状结构 $\mathscr{F}_\pi$。根据命题7.65，若 $\mathscr{F}_\pi$ 局部有限且其叶为嵌入叶，则$(M, \mathscr{F}_\pi)$ 是一个 Whitney (A) 分层空间。若进一步假设 $\mathscr{F}_\pi$ 是惠特尼正则的，则$(M, \mathscr{F}_\pi, \{\cdot,\cdot\})$ 是一个辛分层空间。

例子 9.3. 考虑泊松结构

$$\pi = r^2 \frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y}$$

在 $\mathbb{R}^2$ 上，该结构来自例子3.27。正如我们所见，辛叶状结构 $\mathscr{F}_\pi$ 有两个辛叶，分别是原点 $\{0\}$ 及其补集 $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$。这等同于由典范$S^1$-作用产生的 $\mathbb{R}^2$ 的轨道类型分层，因此是一个 Whitney 分层。因此，$(\mathbb{R}^2, \mathscr{F}_\pi, \{\cdot,\cdot\})$ 是一个辛分层空间。

例子 9.4. 由同时为辛的子流形构成的泊松流形分层，不一定是辛分层空间。事实上，记作

$$\mathbb{R}^4 = \{(x_1, y_1, x_2, y_2) \mid x_i, y_j \in \mathbb{R}\}$$

并令 $\{\cdot,\cdot\}_{can}$ 为由典范辛形式诱导的典范泊松括号

$$\omega_{can} = dx_1 \wedge dy_1 + dx_2 \wedge dy_2.$$

此外，令

$$S = \{(x_1, y_1, 0, 0) \in \mathbb{R}^4\}$$

为辛$\mathbb{R}^2$的一个嵌入副本。事实上，我们可以看到

$$\omega_S = \omega_0|_S = dx_1 \wedge dy_1$$

因此 $(S,\ \omega_S)$ 是辛的。然而，$S \hookrightarrow \mathbb{R}^4$ 不是泊松的。事实上，考虑$f = x_1 + x_2$ 和 $g = y_1 + y_2$。那么，我们可以很容易地计算出

$$\{f, g\}_{can} = -2$$

而

$$\{f|_S, g|_S\}_S = -1,$$

其中 $\{\cdot,\cdot\}_S$ 是由 ω_S在S 上诱导的泊松结构。特别是，$\{f,\ g\}|_S \neq \{f|_S,\ g|_S\}_S$，因此$S \hookrightarrow \mathbb{R}^4$不是泊松的。因此，分层

$$\Sigma = \{S, \mathbb{R}^2 \setminus S\}$$

尽管每个分层都有典范辛形式，但它并不是辛分层。

与泊松流形的情形一样，辛分层空间也有哈密顿向量场这一概念。

定义 9.5. 设 X 是一个辛分层空间，且$f \in C^\infty(X)$ 是一个光滑映射。由f定义的（扎里斯基）哈密顿向量场，记为V_f，是导子

$$V_f : C^\infty(X) \to C^\infty(X);\quad g \mapsto \{f, g\}.$$

引理 9.6. 设 X 是一个辛分层空间，且$f \in C^\infty(X)$。那么 $V_f \in \mathfrak{X}(\Sigma)$，并且对任意分层 $S \in \Sigma$，若 $V^S f|_S \in \mathfrak{X}(S)$ 表示由辛形式 ω_S诱导的哈密顿向量场，则

$$V^S|_{f|_S} = V_f|_S.$$

证明。 设$f \in C^\infty(X)$。首先证明$V_f \in \mathfrak{X}(\Sigma)$，取一个分层$S \in \Sigma$。令$g \in I_S$ 为任意一个在S上恒为零的函数，我们有

$$V_f(g)|_S = \{f, g\}|_S = \{f|_S, g|_S\}_S = \{f|_S, 0\}_S = 0, \tag{9.1}$$

其中 $\{\cdot,\cdot\}_S$ 是由辛形式 $\omega_S \in \Omega^2(S)$所诱导的泊松括号。由命题6.58，进而可得$V_f \in \mathfrak{X}(X,S)$。由于$S$ 是任意的分层，因此可得$V_f \in \mathfrak{X}(\Sigma)$。

再次固定一个分层$S \in \Sigma$，为证明$V^S|_{f|_S} = V_f|_S$，我们使用公式（9.1）。事实上，由于$C^\infty(S) = \langle C^\infty(X)|_S \rangle$，只需证明

$$V^S_{f|_S}(g|_S) = V_f|_S(g|_S)$$

对于任意李代数 $g \in C^\infty(X)$。为此，注意到由于$\mathrm{V}_f \in \mathfrak{X}(X,S)$，再次应用命题6.58 可得

$$V_f|_S(g|_S) = V_f(g)|_S = \{f, g\}|_S$$

另一方面，

$$V^S_{f|_S}(g|_S) = \{f|_S, g|_S\}_S = \{f, g\}|_S.$$

因此结论得证。 □

命题 9.7. 设$(X, \Sigma, \{\cdot,\cdot\})$是一个辛分层空间。那么映射

$$X \times C^\infty(X) \to T\Sigma; \quad (x, f) \mapsto V_f(x)$$

是满射。

证明。设 $x \in X$，$S \in \Sigma$ 为包含 x 的分层，且 $v \in T_xS$。由于 S 是辛的，我们可以找到一个函数 $f \in C^\infty(S)$，使得 $V_f^S(x) = v$，其中 $V_f^S \in \mathfrak{X}(S)$ 表示关于 S 的哈密顿向量场。由于 $C^\infty(S) = \langle C^\infty(X)|_S \rangle$ 是一个 Sikorski 结构，我们可以找到 x 的一个开邻域 $U \subseteq X$，以及一个函数 $F \in C^\infty(X)$，使得

$$f|_{S\cap U} = F|_{S\cap U}.$$

根据引理9.6，$V_F|_{S\cap U} = V_f^S|_{S\cap U}$ 因此$V_F(x) = v$。 □

由此可见，辛分层空间是具有局部有限辛叶状结构的泊松流形的一种推广。

9.2 动量映射的轨道类型分层与典范分层

到目前为止，我们讨论的辛分层空间，其底层可微空间都是流形。如今我们有了定理3.49中的哈密顿切片定理作为依据，现在可以讨论一些真正奇异的例子。对于下文所有内容，我们令$J : (M, \omega) \to \mathfrak{g}^*$ 为连通李群G作用下的一个适当G-空间。现在假设$J^{-1}(0)$ 非空，令$M_0 = J^{-1}(0)/G$，并用 $\pi_0 : J^{-1}(0) \to M_0$ 表示商映射。

引理 9.8. $J^{-1}(0)$ 和 M_0 都是典范的子笛卡尔空间，其中

$$C^\infty(J^{-1}(0)) = C^\infty(M)|_{J^{-1}(0)}$$

and

$$C^\infty(M_0) = \{f : M_0 \to \mathbb{R} \mid \pi_0^* f \in C^\infty(J^{-1}(0))^G\}.$$

证明。$C^\infty(J^{-1}(0)) = C^\infty(M)|_{J^{-1}(0)}$ 具有子笛卡尔结构，这是命题6.17 的推论，因为$J^{-1}(0)$ 是闭集。至于$C^\infty(M_0)$具有子笛卡尔结构，这正是命题6.36所述的内容。 □

现在我们要证明，M_0 是一个典范的辛分层空间。事实证明，得益于适当哈密顿量空间的局部标准形

（参见定理 3。49），定义分层的过程与在 M/G 上得到典范分层的过程几乎完全相同。

定义 9.9. 将**轨道类型**分层定义为动量映射$^{-1}(0)$的分层，记作$\mathcal{S}_G$(动量映射$^{-1}(0)$)，即划分

$$\mathcal{S}_G(J^{-1}(0)) = \bigcup_{S\in\mathcal{S}_G(M)} \pi_0(S \cap J^{-1}(0)).$$

此外，将**典范分层** 定义为M_0 上的分层，其定义如下：

$$\mathcal{S}_G(M_0) = \{\pi_0(S) \mid S \in \mathcal{S}_G(J^{-1}(0))\}.$$

尽管我们将上述定义的两个划分称为分层，但仍需证明它们确实是分层，例如，它们相对于引理9.8.中的子笛卡尔结构是由子流形构成的划分。

引理 9.10. 轨道类型划分 $\mathcal{S}_G$(动量映射$^{-1}(0)$) 的各部分都是 G-不变嵌入子流形。此外，对于任意 $S \in \mathcal{S}_G$(动量映射$^{-1}(0)$) 以及 $x \in S$，存在一个 G_x-等变线性辛同胚，它是线性 G_x 辛表示之间的映射

$$\phi_x : (T_xM, \omega_x) \to ((\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_x) \times (\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_x)^* \oplus S\nu_x(M, G))$$

在该映射下，

$$T_x\phi(T_xS) = (\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_x) \times \{0\} \times S\nu_x(M, G)$$

证明。取定 S $\in \mathcal{S}_G$(动量映射$^{-1}$(0)) 和 x $\in$ X。由于嵌入子流形的性质以及切空间的结构都是局部问题，我们转而考察以 x 为中心的辛切片。也就是说，可以假设 M $=$G$\times_{G_x}$($\mathfrak{g}_x^\circ \times$ Sν_x(M, G))，x $=$ [e, 0, 0], 其辛形式由引理 3.47 给出，动量映射由下式给出

$$J : G \times_{G_x} (\mathfrak{g}_x^\circ \times S\nu_x(M, G)) \to \mathfrak{g}^*; \quad [g, p, v] \mapsto \mathrm{Ad}_g^*(p + \mathfrak{p} \circ J_x(v)),$$

其中 $\mathfrak{p}$: $\mathfrak{g}_x^* \to \mathfrak{g}^*$ 是短正合列的 K-等变分裂

$$0 \to \mathfrak{g}_x^\circ \to \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}_x^* \to 0$$

且 动量映射$_x$: $S\nu_x(M, G) \to \mathfrak{g}_x^*$ 是二次动量映射。注意到

$$J^{-1}(0) = G \times_{G_x} (\{0\} \times J_x^{-1}(0))$$

因此，由引理3.43，

$$S = J^{-1}(0)_{(G_x)} = G \times_{G_x} (\{0\} \times (J_x^{-1}(0))^{G_x}) \cong (G/K) \times S\nu_x(M, G)^{G_x} \quad (9.2)$$

因此，S 是一个嵌入子流形。现在，注意到

$$T_{[e,0,0]}G \times_K (\mathfrak{g}_x^\circ \times S\nu_x(M,G)) = (\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_x) \times \mathfrak{g}_x^\circ \times S\nu_x(M,G)$$

注意，我们可以将 $\mathfrak{g}_x^\circ$ 与 $(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_x)^*$ 等同起来；根据辛形式在标准形邻域上的构造，辛形式 ω限制在 $(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_x) \times (\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_x)^* = T^*(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_x)$上就是典范辛形式。因此，

$$T_{[e,0,0]}M = (\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_x) \times (\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_x)^* \times S\nu_x(M,G).$$

接下来，根据我们在方程（S ）中对9.2的描述，有

$$T_{[e,0,0]}S = (\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_x) \times \{0\} \times S\nu_x(M,G).$$

□

推论 9.11. 令 $S \in \mathcal{S}_G$(动量映射$^{-1}(0)$)。那么 $\omega|_S$ 是基本的，且诱导的 2-形式$\omega_S \in \Omega^2(S/G)$ 是辛的。

证明。 由于 ω 是不变的，因此 $\omega|_{G\cdot x} = 0$ 对所有 $x \in M$均成立。特别地，由于引理9.10，可得对任意 $x \in S$ ，都有

$$\ker((\omega|_S)^\flat_x) = T_x(G \cdot x).$$

因此， $\omega|_S$ 是基本的，所以存在唯一的 2-形式 $\omega_S \in \Omega^2(S/G)$ 满足

$$\pi_S^*\omega_S = \omega|_S.$$

这种形式是辛形式，是线性辛约化的结果（命题 3.12）。

□

利用一些结果，我们现在已经证明， $\mathcal{S}_G$(动量映射$^{-1}(\mathbf{0})$) 和$\mathcal{S}_G(M_0)$ 是由连通光滑流形构成的划分，并且 $\mathcal{S}_G(M_0)$ 的每个部分都是辛的。要证明每个划分都是一个分层空间，我们只需证明它们都是局部有限的，并满足边界公理。为此，我们先证明线性辛表示具有这些性质。

引理 9.12. 设 K 是一个紧李群，且 (V,ω) 是一个辛 K-表示。记 $J_V : V \to \mathfrak{k}^*$ 为二次动量映射。那么，划分

$$\mathcal{S}_K(J^{-1}(0)) = \bigcup_{H\leq K} \pi_0(J_V^{-1}(0) \cap V_{(H)})$$

是 $J^{-1}(0)$ 的有限分层。此外， $\mathcal{S}_K(J^{-1}(0))$ 的每个部分在 $t \in (0,1)$ 的数乘下均保持不变。

证明。 参见 [Mol24]，其中给出了 $\mathcal{S}_K(J^{-1}(0))$ 是有限集的证明。

现在我们将证明 $\mathcal{S}_K\left(J^{-1}\left(0\right)\right)$ 是一个分层，并且其分层同时对 $\left(0,1\right)$ 中的元素进行数乘保持闭。首先，回顾引理 3.43 V^K 是一个辛子空间，而其辛补空间$W = \left(V^K\right)^{\omega}$ 是一个辛子表示。此外，令 $J_W : W \to \mathfrak{k}^*$ 为二次动量映射，则有

$$J_V^{-1}(0) = V^K + J_W^{-1}(0).$$

特别地，对于任意子群 $H \leq K$，我们有

$$J_V^{-1}(0)_{(H)} = V^K + J_W^{-1}(0)_{(H)}$$

and

$$J_V^{-1}(0)_{(K)} = V^K.$$

现在，由于 J_W是不变二次映射（即对于所有$t \in \mathbb{R}$ 和$w \in W$，都有 $J_W\left(tw\right) = t^2 J_W\left(w\right)$），因此轨道类型片 $J^{-1}{}_W\left(0\right)^{(H)}$对非零标量的数乘保持闭。因此，它们的连通分支也是如此。利用这一点，我们现在可以证明，对于任意$R \in \mathcal{S}_K\left(J^{-1}\left(0\right)\right)$，有

$$J_V^{-1}(0)_{(K)} \subseteq \overline{R}.$$

事实上，假设$R \subseteq V^{(H)}$ 对于某个$H \leq K$成立，则存在一个连通分支$R' \subseteq J^{-1}{}_W\left(0\right)^{(H)}$，使得

$$R = V^K + R'.$$

任取$v \in V^K$和$w \in$ 实数集′，现在考虑序列 $\{v + w/n\}_{n>0}$。由于实数集′在非零实数的数乘下封闭，因此该序列属于实数集。因此，极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(v + \frac{w}{n}\right) = v$$

属于实数集。因此，动量映射$_V^{-1}(0)_{(K)} \subseteq$ 实数集。

现在，对于任意两个分层 $S,R \in \mathcal{S}_K($动量映射$^{-1}(0))$，若满足 $\overline{S} \cap R \neq \emptyset$，则转到 $x \in S \cap R$ 周围的辛切片邻域。然后，在辛法空间 $S\nu_x$ (V,K) 中重复相同的论证，可得 $S \subseteq R$。

□

定理 9.13 ([SL91, Zim24]). $\mathcal{S}_G(J^{-1}(0))$ 和 $\mathcal{S}_G(M_0)$ 都是准齐次分层。此外，对于每个分层 $S \in \mathcal{S}_G(J^{-1}(0))$，存在唯一的辛形式 $\omega_{S/G} \in \Omega^2(S/G)$ 使得

$$(\pi_0|_S)^*\omega_{S/G} = \omega|_S.$$

证明。 首先证明 $\mathcal{S}_G(\text{动量映射}^{-1}(0))$ 是拟齐次分层。设$x \in \text{动量映射}^{-1}(0)$，并设$S \in \mathcal{S}_G(\text{动量映射}^{-1}(0))$ 为包含x的分层。转到一个辛切片邻域后，我们可以假设

$$M = G \times_{G_x} (\mathfrak{g}_x^\circ \times S\nu_x(M, G))$$

with

$$J^{-1}(0) = G \times_{G_x} (\{0\} \times J_x^{-1}(0)),$$

其中动量映射$_x : S\nu_x(M,G) \to \mathfrak{g}_x^*$ 是二次动量映射。因此，由于$\mathcal{S}_{G_x}(\text{动量映射}_x^{-1}(0))$ 是由不变子集构成的有限分层，立即可得 $\mathcal{S}_G(\text{动量映射}^{-1}(0))$ 是拟齐次分层。

由于商映射 $\pi_0 : \text{动量映射}^{-1}(0) \to M_0$ 是开商映射，因此 $\mathcal{S}_G(M_0)$ 也是一个分层。现在采用与定理 7.81中的论证几乎完全相同的论证，可知 $\mathcal{S}_G(M_0)$ 也是拟齐次的。

□

9.3 对称流形与奇异约化空间

设 $J : (M, \omega) \to \mathfrak{g}^*$ 是一个真哈密顿 G-空间。约化空间 $M_0 = J^{-1}(0)/G$ 的分层也可以通过通常的 Marsden-Weinstein-Meyer 约化来实现，但我们需要先转到对称流形。事实上，固定 $x \in J^{-1}(0)$，并记 $K = G_x$。回忆推论 2.15 和命题 2.22，对称流形 $M_K = \{y \in M \mid G_y = K\}$ 是 M 的一个子流形，而且，

$$T_y M_K = (T_y M)^K$$

对于任意 $y \in M_K$。正如我们所见，辛表示的不动点集仍然是辛的，因此M_K 是M的一个辛子流形。现在，根据推论2.15，M_K 是一个自由的$N_G(K)/K$-空间，其中$N_G(K)$是K的正规化子群。由于G的作用保持辛形式，因此$N_G(K)/K$ 也保持M_K 上的形式。

现在我们将证明这是一个哈密顿作用。为此，令$\xi \in \mathfrak{k}$。由于K 在M_K上的作用是平凡的，很容易得出 $\xi_M|_{M_K} = 0$。特别地，对于任意$y \in M_K$ 以及任意 $\xi \in \mathfrak{k}$，我们有

$$\langle J(y), \xi \rangle = 0$$

因此 $J(M|_K) \subseteq \mathfrak{k}^\circ$。现在令 $\iota : \mathfrak{n}_G(K) \hookrightarrow \mathfrak{g}$ 为包含映射，那么由于ι 是 K-等变的，可知

$$\iota^* \circ J(M|_K) \subseteq \mathfrak{k}^\circ \subseteq \mathfrak{n}_G(K)^*$$

利用同一性 $\mathfrak{k}^\circ \cong (\mathfrak{n}_G(K)/\mathfrak{k})^*$，我们得到一个典范的 K-等变映射

$$J_K : M_K \to (\mathfrak{n}_G(K)/\mathfrak{k})^*.$$

由于 G 在 M 上的作用是哈密顿的，因此 $N_G(K)$ 在 M_K 上的作用也是哈密顿的，从而 $N_G(K)/K$也是如此。因此，我们得到以下结论。

命题 9.14. 设 $K \leq G$ 是一个紧子群，且 $M_K \neq \emptyset$。则 $J_K : M_K \to (\mathfrak{n}_G(K)/\mathfrak{k})^*$ 是 $N_G(K)/K$ 作用于 M_K上的动量映射。

由于 $N_G(K)/K$ 在 M_K 上的作用是自由且适当的，因此通常的 Marsden-Weinstein-Meyer 约化适用，从而 $J_K^{-1}(0)/(N_G(K)/K)$ 自然地是一个辛流形。事实证明，这个辛流形恰好是奇异约化空间的一个典范层！

定理 9.15. 设 $x \in$ 动量映射$^{-1}(0)$，并记 $K = G_x$。

(1) 动量映射$^{-1}(0) \cap M_K =$ 动量映射$_K^{-1}(0)$。

(2) 将$(M_K)_0$ 记作动量映射$_K$： $M_K \to (\mathfrak{n}_G(K)/\mathfrak{k})^*$的约化空间。若 $x \in$ 动量映射$_K^{-1}(0)$，且 $S \in \mathcal{S}_G($动量映射$^{-1}(0))$ 是经过且包含 x 的轨道类型分层，则 S/G 与 $(M_K)_0$ 中包含 $[x]$ 的连通分支之间存在典范辛同胚。

证明。 **(1)** 这直接源于动量映射$_K$ 是通过限制动量映射得到的这一事实。

(2) 回顾推论 2.15 可知 $G \cdot M_K = M^{(K)}$. 因此，我们得到一个G-等变双射

$$G \times_{N_G(K)} J_K^{-1}(0) \to J^{-1}(0)_{(K)}$$

此外，这个双射必须在 动量映射$^{-1}(0)^{(K)}$ 的每个连通分支上保持限制辛形式。因此，结论随即得证。

□

9.4 约化空间上的泊松括号

设 J : (M, ω) $\to$ $\mathfrak{g}^*$ 是一个真哈密顿 G-空间。我们几乎已经证明 (M0, $\mathcal{S}_G$ (M$_0$)) 是一个辛分层空间。事实上，根据定理 9.13，M$_0$ 是拟齐次的，且每个分层都配备了典范辛形式。此外，正如我们在定理 7.77 中所见，拟齐次意味着惠特尼正则。因此，最后尚待解决的关键问题就是泊松括号。为此，我们首先需要在 C$^\infty$(动量映射$^{-1}$(0))^G = C$^\infty$(M)$^G|_{J^{-1}}$(0) 上定义一个泊松括号。

回忆一下，若 M 只有一种轨道类型，则 $J^{-1}(0)$ 是 M的一个余各向同性子流形。特别地，这意味着若 $f \in C^\infty(M)$，则其哈密顿向量场 $V_f \in \mathfrak{X}(M)$ 与 $J^{-1}(0)$相切。特别地，对于任意 f、$g \in C^\infty(M)$，我们可以定义

$$\{f|_{J^{-1}(0)}, g|_{J^{-1}(0)}\}_{J^{-1}(0)} := V_f|_{J^{-1}(0)}(g|_{J^{-1}(0)}),$$

这使 $C^\infty(J^{-1}(0))$ 具有泊松结构。在奇异情形下，类似的构造未必适用于整个子代数 $C^\infty(J^{-1}(0)) = C^\infty(M)|_{J^{-1}(0)}$，但我们可以在 $C^\infty(J^{-1}(0))^G$上定义泊松括号。首先，我们需要确立对称流形与 $J^{-1}(0)$之间的关系。

引理 9.16. 设 $f \in C^\infty(M)^G$，且 $S \in \mathcal{S}_G(J^{-1}(0))$。那么，哈密顿向量场 V_f 与 S 相切。记作 $V_f \in \mathfrak{X}(M,S)^G$。

证明。 固定 $f \in C^\infty(M)^G$ 以及 $S \in \mathcal{S}_G$(动量映射$^{-1}$(0))。由V_f的定义方程，

$$df = \omega(V_f, \cdot)$$

并且由于 ω 是不变的，可知 $V_f \in \mathfrak{X}(M)^G$。现在固定 $x \in S$，我们将证明 $V_f(x) \in T_xS$。

正如我们在命题2.39中所示，等变向量场与对称流形相切。因此，若记 $K = G_x$，则 $V_f(x) \in T_xM_K$。此外，由定理 9.15，我们得到

$$J^{-1}(0) \cap M_K = J_K^{-1}(0)$$

注意，对于任意 $\xi \in \mathfrak{n}_G(K)$，由$f$ 的等变性可知$\xi_M(f) = 0$。这意味着，对于所有 $\xi \in \mathfrak{n}_G(K)$，都有$V_f|_{M_K}$(动量映射$^\xi{}_K$)$= 0$。因此，由于 0 是动量映射$_K$的正则值，我们得到$V_f$ 与动量映射$_K^{-1}$(0)相切。结论由此得证。

□

推论 9。17。 若 $f \in C^\infty(M)^G$，则 f 的哈密顿向量场作为扎里斯基向量场与动量映射 $J^{-1}(0)$ 相切，且其限制是一个等变分层向量场。记作 $V_f \in \mathfrak{X}(M, J^{-1}(0))^G$，且 $V_f|_{J^{-1}(0)} \in \mathfrak{X}(\mathcal{S}_G(J^{-1}(0)))^G$。

由命题 6.58 可知，如果 X 是一个子笛卡尔空间，$Y \subseteq X$ 是一个子空间，并且 $V \in \mathfrak{X}(X,Y)$，那么对于任意 $f \in C^\infty(X)$，都有

$$V|_Y(f|_Y) = V(f)|_Y.$$

利用这一点，我们现在可以在 $C^\infty(M)^G|_{J^{-1}(0)}$ 上定义泊松括号

定义 9.18. 在 $C^\infty(M)^G|_{J^{-1}(0)}$ 上定义泊松括号 $\{\cdot,\cdot\}_{J^{-1}(0)}$，其定义为

$$\{f|_{J^{-1}(0)}, g|_{J^{-1}(0)}\}_{J^{-1}(0)} := V_f(g)|_{J^{-1}(0)},$$

其中 f、$g \in C^\infty(M)^G$。

现在，我们终于可以在约化空间上赋予一个泊松括号。

定义 9.19（约化空间上的泊松括号）。令 f、$g \in C^\infty(M_0)$。将它们的泊松括号 $\{f, g\}_0 \in C^\infty(M_0)$ 定义为满足以下条件的唯一函数

$$\pi_0^*\{f,g\}_0 = \{\pi_0^* f, \pi_0^* g\}_{J^{-1}(0)}$$

在证明本节的主要结果之前，我们需要讨论 M_0 各分层上的泊松括号。

命题 9.20. 设 $S \in \mathcal{S}_G(\text{动量映射}^{-1}(0))$ 是一个轨道类型分层，$\pi_S : S \to S/G$ 为商映射，而 $\omega_S \in \Omega^2(S/G)$ 是满足 $\pi_S^*\omega_S = \omega|_S$ 的唯一辛形式。那么，给定 $f \in C^\infty(M)^G$，有

$$(\pi_S)_*(V_f|_S) = V_{f_0},$$

其中 $f_0 \in C^\infty(S/G)$ 满足 $\pi_S^* f_0 = f|_S$，且 $V_{f_0} \in \mathfrak{X}(S/G)$ 是 f_0 关于 ω_S 的哈密顿向量场。

证明。取 $f \in C^\infty(M)^G$ 并设 $f_0 \in C^\infty(S/G)$ 满足 $\pi_S^* f_0 = f|_S$。首先注意，由于假设 S 只有一种轨道类型，根据推论 2.40，映射

$$(\pi_S)^* : \mathfrak{X}(S)^G \to \mathfrak{X}(S/G)$$

是满射。特别地，存在向量场 $\widetilde{V} \in \mathfrak{X}(S)^G$ 使得 $\widetilde{(\pi_S)_* V} = V_{f_0}$。由此，我们可以很容易地推导出

$$\pi_S^*(\omega_S(V_{f_0}, \cdot)) = (\pi_S^*\omega_S)(\widetilde{V}, \cdot) = \omega|_S(\widetilde{V}, \cdot).$$

另一方面，根据定义，$df_0 = \omega_S(V^{f_0}, \cdot)$ 因此

$$\pi_S^*(\omega_S(V_{f_0}, \cdot)) = \pi_S^*(df_0) = df|_S.$$

利用Vf与S相切这一事实，我们得到$df|_S = \omega|_S(V_f|_S, \cdot)$，因此有

$$\omega|_S(\widetilde{V}, \cdot) = \omega|_S(V_f|_S, \cdot)$$

$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$将V 局部延拓，并利用 ω的非退化性，我们得到$V = V_f|_S$，由此即可得到结论。 □

定理 9.21. 约化空间$(M_0, \mathcal{S}_G(M_0), \{\cdot,\cdot\}_0)$ 是一个辛分层空间。

证明。 我们需要证明各分层的包含映射是泊松的。为此，设$S \in \mathcal{S}_G(J^{-1}(0))$ 为一个轨道类型分层， $\omega_S \in \Omega^2(S/G)$ 为诱导的辛形式，并令f、$g \in C^\infty(M_0)$。记 $\{\cdot,\cdot\}_S$ 为$C^\infty(S/G)$上的泊松括号，我们来证明

$$\{f,g\}_0|_{S/G} = \{f|_{S/G}, g|_{S/G}\}_S$$

为此，令 $F, G \in C^\infty(M)^G$ 满足 $\pi_0^* f = F|_{J^{-1}(0)}$ 且 $\pi_0^* g = G|_{J^{-1}(0)}$。若记 $\pi_S := \pi_0|_S$，则由命题9.20，可得

$$\pi_S^*\{f|_{S/G}, g|_{S/G}\}_S = \pi_S^*(V_{f|_{S/G}}(g|_{S/G})) = V_{F|_S}(G|_S) = \{F,G\}|_S$$

反之，根据M上的泊松括号的定义$_0$，

$$\pi_S^*\{f,g\}_0|_{S/G} = (\pi_0^*\{f,g\}_0)|_{S/G} = \{\pi_0^* f, \pi_0^* g\}_{J^{-1}(0)}|_S = \{F,G\}|_S$$

因此，

$$\pi_S^*\{f|_{S/G}, g|_{S/G}\}_S = \pi_S^*(\{f,g\}_0|_{S/G})$$

因此，由于 π_S 是满射浸没，我们得到

$$\{f|_{S/G}, g|_{S/G}\}_S = \{f,g\}_0|_{S/G}$$

这就完成了证明。 □

9.5 哈密顿模

现在我们来介绍辛分层空间上一类重要的向量场，称为哈密顿模。这是一类特殊的向量场，既包含所有哈密顿向量场，也包含分层切丛的一组生成集。由于微分形式在子笛卡尔情形下表现不佳，

这些向量场将使我们能够在后文给出线丛联络的“光滑性”判据。

定义 9.22（哈密顿模）。 设$(X, \Sigma, \{\cdot,\cdot\})$为一个辛分层空间。哈密顿模是一个子李代数 $\mathcal{H} \subseteq \mathfrak{X}(\Sigma)$，满足

(1) $\mathcal{H}$ 包含所有哈密顿向量场。

(2) 对任意分层$S \in \Sigma$、$x \in S$以及光滑向量场$V \in \mathfrak{X}(S)$，都可以找到一个向量场$W \in \mathcal{H}$ 和$U \subseteq X$ 的一个邻域，使得x

$$V|_{U\cap S} = W|_{U\cap S}.$$

例子 9.23。 设(M, π) 是一个泊松流形，其辛叶状结构 $\mathscr{F}_\pi$ 是M的惠特尼正则分层。那么，所有与叶相切的光滑向量场 $\mathfrak{X}(\mathscr{F}_\pi)$ 构成$(M, \mathscr{F}_\pi, \{\cdot,\cdot\})$的一个哈密顿模。

例子 9.24。 现在回到泊松结构

$$\pi = r^2 \frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y}$$

来自例子 3.27。辛叶状结构有两个叶， $\{0\}$ 和$\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ，并定义了一个辛分层。因此，一个可能的哈密顿模是

$$\mathfrak{X}(\mathscr{F}_\pi) = \{V \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2) \mid V_0 = 0\}.$$

不过，我们可以通过控制在原点处的消失阶数，构造一个更小的哈密顿模。

设 $V \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$。我们称$V$ 在原点处的消失阶数为 2。若在原点的某个邻域$U \subseteq \mathbb{R}^2$ 内，可以找到一个向量场$W \in \mathfrak{X}(U)$ ，使得

$$V|_U = r^2 W.$$

于是定义

$$\mathcal{H} = \{V \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2) \mid V \text{ vanishes to order 2 at the origin}\}.$$

我断言 $\mathcal{H}$ 是一个哈密顿模。事实上，对于任意$f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$，哈密顿向量场 Vf 由下式给出

$$V_f = r^2 \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} - r^2 \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}$$

因此，$Vf = r^2 V_f^{can}$，其中 $V_f^{can} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$ 是关于 $\mathbb{R}^2$上的典范辛形式的哈密顿向量场。接下来，给定任意向量场 $W \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ 和 $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$，利用隆起函数，我们可以找到 $A \subset B \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ 的开邻域以及一个向量场$V \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$，使得

$$V|_A = W|_A$$

并且使得 $V|_{\mathbb{R}^2 \setminus B} = 0$。根据定义，$V \in \mathcal{H}$，因为它在 0 处的消失阶为 ∞。因此，$\mathcal{H}$ 是一个哈密顿模。

在以下讨论中，令 G 为一个连通李群，$J : (M, \omega) \to \mathfrak{g}^*$为一个真哈密顿 G-空间，并令 $(\mathcal{L}, \nabla) \to (M, \omega)$ 为一个等变预量子线丛。本节将证明 L 在奇异约化空间 $M_0 = J^{-1}(0)/G$ 上诱导出一个分层预量子线丛。为此，我们首先需要构造哈密顿模。回顾一下，我们在推论 9.17 中看到，M 上等变函数的哈密顿向量场与 $J^{-1}(0)$ 的分层相切。这一结果可以作一定程度的推广。

命题 9.25. 设 $V \in \mathfrak{X}(M$,动量映射$^{-1}(0))^G$，则 $V|_{J^{-1}(0)} \in \mathfrak{X}(\mathcal{S}_G($动量映射$^{-1}(0))^G$。

证明。设 $V \in \mathfrak{X}(M, J^{-1}(0))^G$，且 $K \leq G$ 是一个紧子群。由于 V 是 G-不变的，我们有 $V|_{M_K} \in \mathfrak{X}(M_K)$。因此，只需证明 $V|_{M_K}$ 与 $J^{-1}(0) \cap M_K$相切。由定理 9.15 可知

$$J^{-1}(0) \cap M_K = J_K^{-1}(0),$$

其中 动量映射$_K : M_K \to (\mathfrak{n}_G(K)/\mathfrak{k})^*$ 是由自由的 $N_G(K)/K$ 作用于 M_K所诱导的动量映射。由于$N_G(K)/K$ 对 M_K 的作用是自由的，因此对于任意 $x \in$ 动量映射$_K^{-1}(0)$，我们有

$$T_x J_K^{-1}(0) = \ker(T_x J_K).$$

特别地，$V|_{M_K}$ 与 动量映射$_K^{-1}(0)$ 相切，当且仅当 $V|_{M_K}$动量映射$_K$ 沿着 动量映射$_K^{-1}(0)$。这直接由以下事实得出：$VJ = 0$ 沿着动量映射$^{-1}(0)$，且动量映射$|_{M_K} =$ 动量映射$_K$。因此结论成立。 □

推论 9.26. $J^{-1}(0)$ 上的等变扎里斯基向量场与等变分层向量场一致。也就是说，$\mathfrak{X}(J^{-1}(0))^G = \mathfrak{X}(\mathcal{S}_G(J^{-1}(0)))^G$。

证明。取 $V \in \mathfrak{X}(J^{-1}(0))^G$。由于 $J^{-1}(0)$ 是闭的，我们可以将 V 扩展为 M 上的向量场 $W \in \mathfrak{X}$。经过平均化后，我们可以假设 $W \in \mathfrak{X}(M)^G$。根据假设，$W|_{J^{-1}(0)} = V$。因此，由命题 9.25 可知，$V \in \mathfrak{X}(\mathcal{S}_G(J^{-1}(0)))^G$。反向包含显然成立。 □

因此我们看到，与$J^{-1}(0)$ 相切的等变扎里斯基向量场必须与$J^{-1}(0)$ 自身的分层相切。这在一定程度上是意料之中的，因为定义在整个M 上的等变向量场本身必须与轨道类型分层相切。这为我们提供了一类自然的向量场，可以将其推至分层商空间上。

命题 9.27. 设 $V \in \mathfrak{X}(J^{-1}(0))^G$ 且 $\pi : J^{-1}(0) \to M_0$ 是商映射，则 V 的逐纤维推前 π_*定义了 M_0上的一个分层向量场。

证明。 取定 $V \in \mathfrak{X}(J^{-1}(0))^G$。由于 V 是 G-不变的，因此有 $(\pi_0)_* V \in \mathfrak{X}(M_0)$。此外，根据推论 9.26，$V$ 与各分层相切。因此，若 $S \in \mathcal{S}_G(J^{-1}(0))$ 是一个轨道类型分层，则有

$$(\pi_0|_S)_*(V|_S) \in \mathfrak{X}(S/G).$$

现在我声称，$(\pi_0)_* V$ 也是分层的，并且

$$(\pi_0)_* V|_{S/G} = (\pi_0|_S)_*(V|_S) \tag{9.3}$$

首先，设 $f \in C^\infty(M_0)$ 满足 $f|_{S/G} = 0$。将 f 提升为 $F \in C^\infty(J^{-1}(0))^G$，可知 $F|_S = 0$。因此，对任意 $x \in S$，有

$$T_x \pi_0(V) f = V_x(\pi_0^* f) = V_x(F) = 0.$$

因此，$(\pi_0)_* V \in \mathfrak{X}(\mathcal{S}_G(M_0))$。现在证明等式（9.3）。设 $f \in C^\infty(S/G)$是一个光滑函数，并设 $F \in C^\infty(S)^G$ 是一个提升。注意到

$$\begin{aligned}((\pi_0)_* V)|_{S/G}(f|_{S/G}) &= V|_S(\pi_0^* f|_{S/G}) \\ &= V|_S(F|_S)\end{aligned}$$

此外，

$$\begin{aligned}(\pi_0|_S)_*(V|_S)(f|_{S/G}) &= V|_S((\pi_0|_S)^* f|_{S/G}) \\ &= (V|_S)(F|_S)\end{aligned}$$

这两个表达式相等，因此等式（9.3）成立。

□

根据上述构造，我们得到一个自然映射

$$\pi_* : \mathfrak{X}(M, J^{-1}(0))^G \to \mathfrak{X}(\mathcal{S}_G(M_0)) \tag{9.4}$$

将向量场限制到 动量映射$^{-1}(0)$，然后按照命题 9.27.

引理 9.28. 设 $f \in C^\infty(M)^G$ 是一个不变光滑函数。那么在方程（9.4）中的映射下，我们有

$$\pi_*(V_f) = V_{f_0},$$

其中 $f_0 \in C^\infty(M_0)$ 是满足以下条件的唯一光滑函数：

$$\pi_0^* f_0 = f|_{J^{-1}(0)}.$$

证明。 逐分层应用命题9。20 。 □

定义 9。29 (奇异约化的哈密顿模**)。** 定义哈密顿模 $\mathcal{H}_G(M_0)$ 为 M_0 上等式（ π_* 9。4）中的映射的像。我们将 π_* **称为可提升分层向量场**。

注9.30。 在本论文的早期版本中，我曾给出了一个错误的证明，声称$\mathfrak{X}(\mathcal{S}_G(M_0)) = \mathcal{H}_G(M_0)$。我仍然相信这一结论成立；当$M_0$是带角流形时，我原先的证明确实成立。对于本论文所考虑的更一般的商空间，或许还需要提出其他论证。

定理 9。31。 $\mathcal{H}_G(M_0)$ 在定义 9。29中确实是一个哈密顿模。

证明。由引理 9.28，M_0 上的哈密顿向量场属于 $\mathcal{H}(M_0)$。因此现在只需证明，M_0 各分层上的向量场都可延拓为 $\mathcal{H}(M_0)$中的元素。设 $S \in \mathcal{S}_G(J^{-1}(0))$是一个轨道类型分层，且 $V \in \mathfrak{X}(S/G)$是一个紧支撑向量场。那么我们可以找到一个不变提升 $W \in \mathfrak{X}(S)^G$。取 $x \in S$，使得 $\pi(x)$位于 V 的支撑集中。由于$J^{-1}(0)$是光滑局部平凡的，我们可以找到 x 的一个开邻域 $U \subseteq M$，以及一个微分同胚，将其映到 $(0,0)$ 周围的一个开邻域 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$

$$\phi : U \to \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$$

使得 $\phi(x) = (0,0)$， $\phi(U \cap S) = \Omega \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})$，并且，如果 $S \subseteq$实数集$\}$，则 $\phi(U \cap$实数集$) = \Omega \cap (\mathbb{R}^n \times L)$，其中 $L \subseteq \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ 是一个子流形。然后，我们可以通过 ϕ将 W 向前推到 $\Omega \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})$。接着，只需规定，即可将 W 在 ϕ 下的像平凡延拓到整个 Ω

$$(\phi_* W)_{(x,y)} = (\phi_* W)_{(x,0)} \in T_{(x,y)}\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m.$$

推回到 Ω 后，我们便得到了延拓后的W。因此，在任意点$x \in S$的某个邻域内，我们可以将不变提升W 延拓到x 在M中的某个邻域内，并且该延拓仍与$J^{-1}(0)$的分层相切。利用不变隆起函数，我们可以在必要时缩小U，从而得到一个G-不变的

向量场$W \in \mathfrak{X}(M,J^{-1}(0))^G$，满足 $\pi_*(W|_{U\cap S}) = V|_{(U\cap S)/G}$。由此得证。□

9.6 余切丛的奇异约化

在第 3.6 节中，我们详细讨论了基流形只有一种轨道类型时余切丛的辛约化。现在我们希望将这一讨论推广到一般情形。本节讨论基于以下文献中的工作： [PROSD07]。

在以下所有内容中，设 G 为一个连通李群，Q 为一个适当的 G-空间，且 $J: T^*Q \to Q$ 为到余切丛上的哈密顿提升。记

- $\tau_Q: T^*Q \to Q$ 为丛投影映射。
- $\theta_Q \in \Omega^1(T^*Q)$ 为刘维尔 1-形式，且 $\omega_Q = -d\theta_Q$ 为典范辛形式。

回顾一下，对于任意 $\alpha \in T^*Q$，我们将 $J(\alpha) \in \mathfrak{g}^*$ 定义为以下配对

$$\langle J(\alpha), \xi\rangle = \langle \alpha, \xi_Q(\tau(\alpha))\rangle,$$

其中 $\xi_Q \in \mathfrak{X}(Q)$ 是与 $\xi \in \mathfrak{g}^*$ 相关联的基本向量场。特别地，由于基本向量场张成Q上轨道的切空间，因此我们有

$$J^{-1}(0) = \bigsqcup_{q\in Q} (T_q(G\cdot q))^\circ.$$

因此，$J^{-1}(0)$ 是Q上的一个伪丛。注意，由于Q 的轨道类型分层由维数相同的G-轨道饱和，因此对于每个轨道类型分层 $S \in \mathcal{S}_G(Q)$，其限制$J^{-1}(0)|_S \to S$ 是一个G-等变向量丛。因此，$J^{-1}(0)$ 可以被规范地划分为等变光滑向量丛

$$J^{-1}(0) = \bigcup_{S\in\mathcal{S}_G(Q)} J^{-1}(0)|_S.$$

然而，需要注意的是，尽管这是G-不变的动量映射$^{-1}(0)$ 向嵌入子流形的划分，但这**并非**动量映射$^{-1}(0)$的轨道类型分层。事实上，考虑以下例子。

例子 9.32. 考虑S^1 通过绕原点旋转而在 $\mathbb{R}^2$ 上给出的典范作用。将 $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ 视为复数后，这个作用就是乘以S^1中的元素：

$$S^1 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; \quad (e^{it}, x) \mapsto e^{it}x.$$

令 $J : T^*\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 为该作用的哈密顿提升。利用典范平凡化 T $^*\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$，$S^1$ 作用变为

$$e^{it} \cdot (x, y) = (e^{it}x, e^{it}y)$$

动量映射变为

$$J(x, y) = x_1y_2 - x_2y_1.$$

其中 $x = (x_1, x_2)$ 且 $y = (y_1,y_2)$。容易看出，底空间 $\mathbb{R}^2$ 的轨道类型分层为

$$\mathcal{S}_{S^1}(\mathbb{R}^2) = \{\{0\}, \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}\}$$

根据动量映射的描述可知，将$J^{-1}(0)$限制到分层 $\{0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ 上，得到

$$J^{-1}(0)|_{\{0\}} = \{0\} \times \mathbb{R}^2.$$

显然，$J^{-1}(0)|_{\{0\}}$ 与 $\mathbb{R}^2$ 等变同构，因此还可以进一步细分为各个分层。

为了简洁地描述$J^{-1}(0)$的轨道类型分层，我们引入另一个伪丛。

定义9.33（余法丛）。 将底空间上轨道类型分层 $\mathcal{S}_G(Q)$ 的**余法丛**定义为伪丛$\nu^*(\mathcal{S}_G(Q))$，其逐纤维定义如下：

$$\nu_q^*(\mathcal{S}_G(Q)) := \bigcup_{q \in Q} (T_q\mathcal{S}_G(Q))^\circ \subseteq T^*Q.$$

记 $\nu^*(S) := \nu^*(\mathcal{S}_G(Q))|_S$，对任意分层 $S \in \mathcal{S}_G(Q)$ 均如此，并称 $\nu^*(S)$ 为S的余法丛。

容易看出，如果 $S \in \mathcal{S}_G$（Q）是一个轨道类型分层，那么 ν^*（S）是 G上的等变向量丛，并且因此具有其自身的轨道类型分层 $\mathcal{S}_G$（ν^*（S））。现在让我们考察J^{-1}（0）和 ν^*（$\mathcal{S}_G$（Q））的局部结构。

回忆一下切片定理（定理 2.13），对于任意 $q \in Q$ 满足 $G_q = K$，存在一个 G-等变微分同胚，将 q的一个邻域与 $[e$的一个邻域对应起来，$0]$ 位于 $G \times_K V$ 中，其中 $V = \nu_q(Q, G)$。正如我们在例子 2.30中所看到的，切片邻域的余切丛具有如下形式

$$T^*(G \times_K V) = G \times_K (V \times \mathfrak{k}^\circ \times V^*)$$

如命题 2.11所示，若 $S \in \mathcal{S}_G(Q)$ 是包含 q 的唯一轨道类型分层，那么在此邻域中，S 可识别为 $G \times_K V^K$。因此，我们有

$$T^*Q|_S = G \times_K (V^K \times \mathfrak{k}^\circ \times V^*)$$

and

$$T^*S = G \times_K (V^K \times \mathfrak{k}^\circ \times (V^K)^*)$$

因此，典范投影 $T^*Q|_S \to T^*S$ 由包含映射 $V^K \hookrightarrow V^*$所诱导的典范投影 $V^* \to (V^K)^*$ 给出。因此，在此邻域中，我们有

$$\nu^*(S) = G \times_K (V^K \times \{0\} \times (V^K)^\circ). \tag{9.5}$$

命题 9.34. 设 $S \in \mathcal{S}_G(Q)$ 是一个轨道类型分层，且 $\tau\colon \nu^*(S) \to S$ 为余法丛。假设 $S \subseteq Q^{(K)}$，其中 $K \leq G$ 为某个紧群。

(1) 轨道类型 $\nu^*(S)^{(K)}$ 是零截面 $S \hookrightarrow \nu^*(S)$的像。

(2) 若 $R \in \mathcal{S}_G(\nu^*(S))$ 是一个轨道类型分层，则 $R \subseteq \nu^*(S)^{(H)}$，其中 $H \leq K$ 为某个紧子群。此外，投影$\tau\colon \nu^*(S) \to S$ 的限制诱导出一个 G-等变纤维丛 $\tau|_R : R \to S$。

证明。 **(1)** 这由公式（9.5）得出。事实上，典范投影 $V^* \to (V^K)^*$ 限制后给出一个线性同构 $(V^*)^K \to (V^K)^*$。因此，在 K 作用下，湮灭子 $(V^K)^\circ$ 的不动点集仅为原点。特别地，

$$\nu^*(S)_{(K)} = G \times_K (V^K \times \{0\} \times ((V^K)^\circ)^K) = G \times_K (V^K \times \{0\} \times \{0\})$$

因此是零截面。

(2) 由于投影 $\tau\colon \nu^*(S) \to S$ 是等变的，因此对于任意 $\alpha \in \nu^*(S)$，必有$G_\alpha \subseteq G^{\tau(\alpha)}$。因此，如果$R \subseteq \mathcal{S}_G(\nu^*(S))$ 是一个轨道类型分层，那么对于某个子群$H \leq K$，就有$R \subseteq \nu^*(S)^{(H)}$。

方程（9.5）中的局部形式为

$$\nu^*(S)_{(H)} = G \times_K (V^K \times \{0\} \times (V^K)^\circ_{(H)})$$

投影 $\tau : \nu^*(S) \to S$ 的限制局部具有如下形式

$$G \times_K (V^K \times \{0\} \times (V^K)^\circ_{(H)}) \to G \times_K V^K; \quad [g, v, 0, \lambda] \mapsto [g, v]$$

因此，限制到连通分支后，我们显然得到一个位于S上的G-等变纤维丛。

□

引理 9.35. 假设 Q 配备了一个 G-不变度量，并令 $\iota_S : T^*S \hookrightarrow T^*Q|_S$ 为短正合序列的诱导分裂

$$0 \to \nu^*(S) \to T^*Q|_S \to T^*S \to 0.$$

记 $J_S : T^*S \to S$ 为 G-作用在 S 上的哈密顿提升，则有以下结论。

(1) $\iota_S^* \theta_Q = \theta_S$, *where* $\theta_S \in \Omega^1(T^*S)$ *is the Liouville* 1*-form.*

(2) 该图表交换。

$$\begin{array}{ccc} T^*S & \xrightarrow{J_S} & \mathfrak{g}^* \\ \downarrow{\scriptstyle \iota_S} & \nearrow{\scriptstyle J} & \\ T^*Q & & \end{array}$$

证明。 (1) 令 $x \in S$、 $\alpha \in T_x^*S$，且 $v \in T_\alpha(T^*S)$。记 $\tau_S : T^*S \to S$，回顾

$$\theta_S(v) = \langle \alpha, (\tau_S)_* v \rangle.$$

现在，我们有

$$\iota_S^* \theta_Q(v) = \theta_Q((\iota_S)_* v) = \langle \iota_S(\alpha), (\tau_Q)_* (\iota_S)_* v \rangle$$

显然， $\tau_Q \circ \iota_S = \tau_S$ 因此

$$\langle \iota_S(\alpha), (\tau_Q)_* (\iota_S)_* v \rangle = \langle \iota_S(\alpha), (\tau_S)_* v \rangle.$$

根据分裂的定义，由于 $(\tau_S)_* v \in TS$，我们有

$$\langle \iota_S(\alpha), (\tau_S)_* v \rangle = \langle \alpha, (\tau_S)_* v \rangle$$

由此得出结果。

（2）与（1）类似。

□

因此，如果我们定义

$$T^*\mathcal{S}_G(Q) := \bigcup_{S\in\mathcal{S}_G(Q)} \iota_S(T^*S)$$

我们就得到如下结果。

命题 9.36. 假设 Q 具有 G-不变黎曼度量。那么，$T^*Q = T^*\mathcal{S}_G(Q) \oplus \nu^*(\mathcal{S}_G(Q))$。也就是说，对于每个分层 $S \in \mathcal{S}_G(Q)$，

$$T^*Q|_S = \iota_S(T^*S) \oplus \nu^*(S).$$

此外，

$$J^{-1}(0)|_S = J_S^{-1}(0) \oplus \nu^*(S)$$

证明。 由 ι_S 的定义以及引理9.35可得。 □

既然我们已经掌握了这些结果，现在可以陈述如下定理。

定理 9.37 ([PROSD07])**.** 对于每个轨道类型分层 $S \in \mathcal{S}_G(Q)$，存在唯一的轨道类型分层 $Z_S \in \mathcal{S}_G(J^{-1}(0))$，满足以下性质。

(1) 若 $\tau : T^*Q \to Q$ 是丛投影，则 $\tau(Z_S) = \overline{S}$。此外，

$$\tau|_{Z_S} : Z_S \to \overline{S}$$

是一个开 G-不变满射。

(2) 对每个 S，$R \in \mathcal{S}_G(Q)$，若 $S \leq R$，则存在一个轨道类型分层 $C_S^R \in \mathcal{S}_G(\nu^*(S))$，使得

$$Z_R|_S = J_S^{-1}(0) \oplus C_S^R$$

其中 $C_R^R \subseteq \nu^*(R)$ 是零截面的像。

(3) 映射

$$\mathcal{S}_G(Q) \to \mathcal{S}_G(J^{-1}(0)); \quad S \mapsto Z_S$$

是一个双射。

推论 9.38. 设 $S \in \mathcal{S}_G(Q)$ 是底空间的一个轨道类型分层，$Z_S \in \mathcal{S}_G(\text{动量映射}^{-1}(0))$ 是定理 9.37 中对应的分层。于是，$J^{-1}S(0) \subseteq Z_S$ 是一个开稠密集。

证明。 由于S 在其闭包S中是一个开稠密集，由（1）可得$Z_S|_S \subseteq Z_S$ 是一个开稠密集。由（2），$Z_S|_S =$ 动量映射$^{-1}$ s $(0)\oplus \{0\}$。因此得证。

□

现在我们希望对约化空间作出描述。正如我们从定理 3.61 已知的，给定一个轨道类型分层 $S \in \mathcal{S}_G(Q)$，约化空间 J^{-1} s $(0)/G$ 在典范意义下与余切丛 $T^*(S/G)$ 辛同构。由于 J^{-1} s $(0) \subseteq Z_S$ 是一个开稠密集，我们便得到以下结果。

引理 9.39. 设 $S \in \mathcal{S}_G(Q)$ 是一个轨道类型分层，并考虑由典范辛同胚诱导的典范嵌入 $\phi : T^*(S/G) \hookrightarrow Z_S/G$，即 $T^*(S/G) \cong J^{-1}$ S $(0)/G$。则存在一个 1-形式 $\alpha_S \in \Omega^1(Z_S)$，满足以下条件。

(1) $(\pi_0|_{Z_S})^*\alpha_S = \theta_Q|_{Z_S}$.

(2) $d\alpha_S = -\omega_{Z_S/G}$，其中 $\omega_{Z_S/G} \in \Omega^2(Z_S/G)$ 是由奇异约化得到的典范辛形式。

(3) $\phi^*\alpha_S = \theta_{S/G}$，其中 $\theta_{S/G} \in \Omega^1(T^*(S/G))$ 是李维尔 *1*-形式。

证明。 (1) $\theta_Q|_{Z_S}$ 是等变的，并且在包含于Z_S中的G-轨道上消失。因此，显然可得 $\theta_Q|_{Z_S}$ 是基本的。于是，存在 $\alpha_S \in \Omega^1(Z_S/G)$ 使得

$$(\pi_0|_{Z_S})^*\alpha_S = \theta_Q|_{Z_S}$$

(2) 注意，$(\pi_0|_{Z_S})^*d\alpha_S = d\theta_Q|_{Z_S} = -\omega_Q|_{Z_S}$。$\omega_{Z_S/G}$是满足$(\pi_0|_{Z_S})^*\omega_{Z_S/G} = \omega_Q|_{Z_S}$ 的唯一 2-形式，因此结论成立。

(3) 记 $\tau_S : T^*S \to S$ 为丛映射，记 $\pi_S : S \to S/G$ 为商映射。回想一下，辛同胚 $\phi : T^*(S/G) \to$动量映射$^{-1}$ s $(0)/G$ 是由典范映射诱导的

$$\widetilde{\phi} : \pi_S^{-1}T^*(S/G) \to J_S^{-1}(0)$$

通过对偶化导数映射$T\pi$: $TS \to \pi^{-1}$ s $T(S/G)$。此外，回想引理3。60 指出

$$\pi_S^{-1}T^*(S/G) \subseteq S \times T^*(S/G)$$

并且我们证明了 $\widetilde{\phi}^*\theta_S = pr_2^*\theta_{S/G}$，其中 $\theta_S \in \Omega^1(T^*S)$ 是刘维尔 1-形式。应用 (1) 即完成证明。

□

因此，对于每个分层 $S \in \mathcal{S}_G(Q)$，相应的典范层$Z_S/G \in \mathcal{S}_G((T^*Q)_0)$包含余切丛 $T^*(S/G)$ 作为一个开稠密集。除非S 是一个极小层，否则Z_S/G 将严格大于S/G的余切丛，正如下一个结果所示。

定理 9.40 ([PROSD07]). 固定一个轨道类型分层 $S,R \in \mathcal{S}_G(M)$，满足 $R < S$。那么，$(Z_S|_R)/G$ 在 Z_S/G 中是余各向同性的。

10

预量子线丛的奇异约化

本章旨在构建分层预量子线丛的初等理论。Sniatycki [Śni13] 为本章奠定了大部分基础，不过我的工作与他的不同之处在于，对预量子联络施加了光滑性条件。

10.1 分层预量子线丛

现在，我们定义辛分层空间上的预量子线丛。我们可以自然地将 Vaisman [Vai91]给出的泊松流形预量子线丛定义推广过来。遗憾的是，我们必须处理的唯一技术问题是：定义预量子联络时，无法使用所有向量场。因此，我们必须将使用范围限制在哈密顿模上。

定义 10.1 (分层预量子线丛)。 设$(X, \Sigma, \{\cdot,\cdot\})$ 为一个辛分层空间， $\mathcal{H} \subseteq \mathfrak{X}(X)$ 为一个哈密顿模。预量子线丛由三元组$(\mathcal{L}, \nabla, \{\nabla^S\}_{S\in\Sigma})$ 组成，其中

(i) $\mathcal{L} \to X$ 是一个可微复线丛。

(ii) $\nabla : T\Sigma \times \Gamma(\mathcal{L}) \to \mathcal{L}$ 是一个双线性映射，使得对于任意$v \in T_x\Sigma$、$f \in C^\infty(X、\mathbb{C})$以及 $\sigma \in \Gamma(\mathcal{L})$ ，都有

$$\nabla_v(f\sigma) = v(f)\sigma(x) + f(x)\nabla_v\sigma$$

(iii) ∇^S 是 $\mathcal{L}|_S \to S$ 上每个分层$S \in \Sigma$的预量子联络，满足

(1) 对任意$V \in \mathcal{H}$ 和 $\sigma \in \Gamma(\mathcal{L})$，映射

$$\nabla_V\sigma : X \to \mathcal{L}; \quad \mapsto \nabla_{V_x}\sigma$$

是 Γ（$\mathcal{L}$） 的一个元素。

（2）对于任意 $\sigma \in \Gamma(\mathcal{L})$ 和f、李代数 $g \in C^\infty(X)$，我们有

$$[\nabla_{V_f}, \nabla_{V_g}]\sigma - \nabla_{V_{\{f,g\}}}\sigma = -i\{f,g\}\sigma$$

(3) 如果$S \in \Sigma$ 是一个分层，$V \in \mathcal{H}(\Sigma)$，那么

$$(\nabla_V \sigma)|_S = \nabla^S_{V|_S}(\sigma|_S).$$

例 10.2。如果(M, ω) 是一个辛流形，且 Σ 是由辛子流形构成的M 的一个分层，那么在$(M, \Sigma, \{\cdot,\cdot\})$ 上的分层预量子线丛与通常的预量子线丛相同。

例 10.3。我们可能在泊松流形中发现潜在的新颖且有趣的内容，其中辛叶状结构定义了一个分层。这里的定义似乎与泊松流形的预量子线丛的定义相似，如 [Vai91], 所述，但在那里，预量子线丛不必对每个辛叶进行量子化。

例 10.4。令

$$\pi_{can} = \frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y}$$

为 $\mathbb{R}^2$ 上的典范辛泊松结构，并令 $\pi = r^2\pi_{can}$如例 3.27中所述9.3。正如我们在例 9.3中看到的，辛叶状结构$\mathscr{F}_\pi = \{\{0\}, \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}\}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的一个辛分层；在例9.24 中， $\mathcal{H}$ 在原点二阶消失的向量场集合定义了一个哈密顿模。现在让我们使用这个模来定义一个预量子线丛。

令 (r, θ) 为 $\mathbb{R}^2$ 上由以下定义的极坐标

$$x = r\cos(\theta)$$
$$y = r\sin(\theta)$$

在分层$S = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$上，令$d\theta \in \Omega^1(S)$ 为由以下定义的 1-形式

$$d\theta = \frac{-ydx + xdy}{r^2}.$$

注意，在S上，我们有

$$d\left(\frac{r^2}{2}d\theta\right)) = rdr \wedge d\theta = dx \wedge dy = \omega_{can},$$

定义在 $\mathbb{R}^2$上的典范辛形式。在例子3.27中，我们看到辛形式 ω_S 在S 上由 π 诱导，其形式为

$$\omega_S = \frac{\omega_{can}}{r^2} = \frac{dr \wedge d\theta}{r}$$

因此，我们可以将原函数 $\alpha_S \in \Omega^1(S)$ 定义为

$$\alpha_S = \ln(r)d\theta.$$

有了这一设定，我们现在可以定义预量子线丛。

令 $\mathcal{L} = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{C}$ 并识别 $\Gamma(\mathcal{L}) = C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$。定义映射

$$\nabla : \mathcal{H} \times C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$$

by

$$\nabla_v f = \begin{cases} 0, & v \in T_0\mathscr{F}_\pi \\ v(f) + i\alpha(v)f(x), & v \in T_xS \end{cases}$$

对于$f \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$。我们可以直接看出，$\nabla$ 在每个分层上都诱导出预量子联络。联络 ∇ 也与哈密顿模中的元素光滑配对。事实上，若 $V \in \mathcal{H}$，则根据定义，存在原点的一个邻域$U \subseteq \mathbb{R}^2$ 以及一个向量场$W \in \mathfrak{X}(U)$，使得

$$V|_U = r^2 W|_U.$$

因此，在 $U \setminus \{0\}$ 上，我们有

$$\nabla_V f = V(f) + i\alpha(V)f$$

注意到

$$\alpha(V) = \alpha(r^2 W) = r^2 \ln(r)d\theta(W) = \ln(r)(-ydx(W) + xdy(W))$$

写作

$$W = W_x \frac{\partial}{\partial x} + W_y \frac{\partial}{\partial y}$$

因此我们得到

$$\alpha(V) = \ln(r)(-yW_x + xW_y)$$

利用 $x = r\cos(\theta)$ 和 $y = r\sin(\theta)$，我们随后可以证明

$$\lim_{r \to 0^+} \ln(r)(-yW_x + xW_y) = 0.$$

特别地，由此可知 $\alpha(V)$ 可以通过赋值 0 光滑延拓到原点。特别地， $\nabla_V f$ 可以通过赋值 0 光滑延拓到原点。因此， $\nabla_V f \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$。

现在，正如通常的预量子线丛那样，我们在这里也得到如下预量子算子。固定$f \in C^\infty(X, \mathbb{C})$ 并定义

$$\mathcal{Q}pre(f) : \Gamma(\mathcal{L}) \to \Gamma(\mathcal{L}); \quad \sigma \mapsto -i\nabla_{V_f}\sigma + f\sigma. \tag{10.1}$$

命题 10.5. 方程（10.1）中的预量子算子满足以下性质。

(1) $\mathcal{Q}_{pre}(1_X) = id_{\Gamma(\mathcal{L})}$，其中 $1_X \in C^\infty(X)$ 是常数1 函数。

(2) 若 $f, g \in C^\infty(X)$，则

$$i[\mathcal{Q}_{pre}(f), \mathcal{Q}_{pre}(g)] = \mathcal{Q}_{pre}(\{f, g\}).$$

证明。 **(1)** 首先，注意到$V_{1_X} = 0$。事实上，任取$f \in C^\infty(X)$，我们有

$$\{1_X, f\} = \{1_X \cdot 1_X, f\} = 2\{1_x, f\}$$

这意味着 $\{1_x, f\} = 0$，从而$V_{1_x} = 0$。因此，由于 $\nabla_{V_{1_x}}$ 是逐点定义的，可得 $\nabla_{V_{1_x}} = 0$。于是，对任意截面$\sigma \in \Gamma(\mathcal{L})$，我们有

$$\mathcal{Q}_{pre}(1_X)\sigma = -i\nabla_{V_{1_X}} + 1_X\sigma = \sigma.$$

（2）与命题5.7的证明相同。

□

分层预量子线丛的最后一个性质是，我们可以将各个分层上的预量子联络粘合起来，从而得到一个从复化分层切丛到预量子线丛的可微映射。

命题 10.6. 对于每个分层 $S \in \Sigma$ 和 $\sigma \in \Gamma(\mathcal{L})$，我们得到一个复向量丛之间的光滑映射

$$\nabla^S\sigma : T^{\mathbb{C}}S \to \mathcal{L}; \quad v \mapsto \nabla^S_v\sigma$$

这些映射拼合成一个复伪丛之间的（不一定可微的）映射

$$\nabla\sigma : T^{\mathbb{C}}\Sigma \to \mathcal{L} \tag{10.2}$$

定义为

$$\nabla\sigma|_{T^{\mathbb{C}}S} = \nabla^S\sigma.$$

证明。 第一条结论直接由推论 5。 11 应用于每个分层即可得到。 □

注10.7。 我怀疑方程（10.2）中的映射实际上是可微的，但迄今为止，我试图证明这一点的努力都没有结果。

10.2 预量子线丛的奇异约化

现在我们证明，如果预量子线丛由其等变截面生成，那么它就下降为奇异约化空间上的分层预量子线丛。现在固定一个连通李群G、一个适当的哈密顿量 G-空间 动量映射 $: (M, \omega) \to \mathfrak{g}^*$以及一个等变预量子线丛 $(\mathcal{L}, \nabla)$ $\to (M, \omega)$。利用第 5.3节中的思想，我们可以构造 Guillemin 和 Sternberg 的预量子线丛约化的奇异版本。

命题 10.8。 设 $(\mathcal{L}, \nabla)$ 在 $J^{-1}(0)$上等变生成。也就是说，该映射

$$J^{-1}(0) \times \Gamma(\mathcal{L})^G \to \mathcal{L}|_{J^{-1}(0)}; \quad (x, \sigma) \mapsto \sigma(x)$$

是满射的。因此

(i) $\mathcal{L}_0 := (\mathcal{L}|_{J^{-1}(0)})/G$ *is naturally a differentiable complex line bundle over* $J^{-1}(0)/G$.

(ii) 投影 $\pi_{\mathcal{L}}: \mathcal{L}|_{J^{-1}(0)} \to \mathcal{L}_0$ 诱导一个双射

$$(\pi_{\mathcal{L}})_! : \Gamma(\mathcal{L}|_{J^{-1}(0)})^G \to \Gamma(\mathcal{L}_0).$$

(iii) 映射

$$\kappa : \Gamma(\mathcal{L})^G \to \Gamma(\mathcal{L}_0); \quad \sigma \mapsto (\pi_{\mathcal{L}})_!(\sigma|_{J^{-1}(0)})$$

是满射。

证明。 这些陈述都只是定理8.21.的特例。 □

现在我们将尝试利用 κ 在 $\mathcal{L}_0$ 上定义一个预量子联络。具体而言，给定一个等变截面 $\sigma \in \Gamma(\mathcal{L})^G$ 以及一个分层切向量 $v \in T\mathcal{S}_G(J^{-1}(0))$，投影 $(\pi_0)_* v \in T\mathcal{S}_G(M_0)$ 是一个分层切向量，而 $\kappa(\sigma) \in \Gamma(\mathcal{L}_0)$ 是约化丛的一个截面。因此，我们希望定义

$$\nabla^0_{(\pi_0)_* v} \kappa(\sigma) := \pi_{\mathcal{L}}(\nabla_v \sigma). \tag{10.3}$$

逐层处理并应用5.22 （来自非奇异情形），我们证明如下。

引理 10.9 ([Śni13])。 方程（10.3）给出了一个良定义的映射

$$\nabla^0 : T\mathcal{S}_G(M_0) \times \Gamma(\mathcal{L}_0) \to \mathcal{L}_0; \quad (v, \sigma) \mapsto \nabla^0_v \sigma.$$

回忆一下，我们将奇异量子化 $\mathcal{H}(M_0)$ 的哈密顿模定义为映射的像

$$\pi_* : \mathfrak{X}(M, J^{-1}(0))^G \to \mathfrak{X}(\mathcal{S}_G(M_0))$$

该映射通过将向量场限制到动量映射$^{-1}(0)$上，再逐点求导来定义。现在我们想证明，对于任意$V \in \mathcal{H}(M_0)$ 和截面 $\sigma \in \Gamma(\mathcal{L}_0)$，自然配对 $\nabla^0_V \sigma$ 是 $\mathcal{L}_0$ 的光滑截面。首先，我们需要一个引理。

引理 10.10. 假设$(\mathcal{L}, \nabla)$ 在$J^{-1}(0)$上等变生成。固定$\sigma_1, \sigma_2 \in \Gamma(\mathcal{L})^G$ 以及 V_1, $V_2 \in \mathfrak{X}(M, J^{-1}(0))^G$。若

$$\pi_*(V_1) = \pi_*(V_2) \text{ and } \sigma_1|_{J^{-1}(0)} = \sigma_2|_{J^{-1}(0)},$$

then

$$\nabla_{V_1}\sigma_1|_{J^{-1}(0)} = \nabla_{V_2}\sigma_2|_{J^{-1}(0)}.$$

证明。 利用与引理 5.19中类似的技巧，可得

$$\nabla_{V_1}\sigma_1 - \nabla_{V_2}\sigma_2 = \nabla_{V_1 - V_2}\sigma_1 + \nabla_{V_2}(\sigma_1 - \sigma_2).$$

由于 $\mathfrak{X}(M,$动量映射$^{-1}(0))^G$ 和 $\Gamma(\mathcal{L})^G$ 都是$C^\infty(M)^G$ 模，因此只需证明

$$\nabla_V \sigma|_{J^{-1}(0)} = 0$$

对所有 $V \in \mathfrak{X}(M,$动量映射$^{-1}(0))^G$ 以及 $\sigma \in \Gamma(\mathcal{L})^G$ 当 $\pi_*(V) = 0$ 或$\sigma|_{J^{-1}(0)} = 0$时。逐层进行论证后，这可归结为定理 5.24第 (i) 部分的证明。 □

推论 10.11。 给定任意向量场 $V \in \mathcal{H}(M_0)$ 以及任意截面 $\sigma \in \Gamma(\mathcal{L}_0)$，配对 $\nabla^0_V \sigma$ 是一个光滑截面。更具体地，若 $W \in \mathfrak{X}(M,$动量映射$^{-1}(0))^G$和 $\tau \in \Gamma(\mathcal{L})^G$ 满足 $\pi_* W = V$且 $\kappa(\tau) = \sigma$，则

$$\nabla^0_V \sigma = \kappa(\nabla_W \tau).$$

证明。 固定 V，W，σ，τ如陈述所述，令 $x \in$动量映射$^{-1}(0)$ 以及 $[x] \in M_0$其在商映射下的像。于是，由引理 10.9

$$\nabla^0_{V_{[x]}} \sigma = \pi_{\mathcal{L}}(\nabla_{W_x} \tau)$$

根据定义， $\kappa(\nabla_W \tau)([x]) = \pi_{\mathcal{L}}(\nabla_{W_x} \tau)$ □

推论 10.12. 给定任意两个函数 $f,\ g\ \in C^\infty(M_0)$ 以及任意截面$\sigma \in \Gamma(\mathcal{L}_0)$，我们有

$$[\nabla^0_{V_f}, \nabla^0_{V_g}]\sigma - \nabla^0_{V_{\{f,g\}_0}} = -i\{f,g\}_0\sigma.$$

证明。设 F、$\mathrm{G}\ \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{M})^G$ 是 f 和 g 的提升，且 $\tau \in \Gamma(\mathcal{L})^G$ 是 σ 的提升。注意 $\pi_*\mathrm{V}_F = \mathrm{V}f$ 和 $\pi_*\mathrm{V}_G = \mathrm{V}g$。因此，连续应用推论 10.11 可得

$$\nabla^0_{V_f}(\nabla^0_{V_g}\sigma) = \nabla^0_{V_f}\kappa(\nabla_{V_G}\tau) = \kappa(\nabla_{V_F}\nabla_{V_G}\tau)$$

因此,

$$\begin{aligned}[\nabla^0_{V_f}, \nabla^0_{V_g}]\sigma - \nabla^0_{V_{\{f,g\}_0}} &= \kappa([\nabla_{V_F}, \nabla_{V_G}]\tau - \kappa(\nabla_{V_{\{F,G\}}}\tau) \\ &= \kappa(-i\{F,G\}\tau)\end{aligned}$$

注意，对于任意 $x\ \in$ 动量映射$^{-1}(0)$，若 $[x] \in M_0$ 是其在商映射 π_0 : 动量映射$^{-1}(0)\ \to M_0$，下的像，那么根据 $\pi_{\mathcal{L}}$ 的纤维线性性以及 M_0, 上泊松括号的定义，我们得到

$$\begin{aligned}\kappa(-i\{F,G\}\tau)([x]) &= \pi_{\mathcal{L}}(-i\{F,G\}(x)\tau(x)) \\ &= -i\{F|_{J^{-1}(0)}, G|_{J^{-1}(0)}\}_{J^{-1}(0)}(x)\pi_{\mathcal{L}}(\tau(x)) \\ &= -i\{f,g\}_0\sigma(x)\end{aligned}$$

因此结论成立。 □

现在我们需要建立分层预量子线丛。

命题 10.13. 设 $K\ \leq G$ 是一个紧子群，且 M_K 表示对称流形。令 $N_G(K)\ \leq G$ 表示 K 的正规化子子群，$\mathfrak{n}_G(K)\ = Lie(N_G(K))$ 表示其李代数，并记作

$$J_K : M_K \to \mathfrak{n}_G(K)^*$$

对于诱导的哈密顿自由 *Hamiltonian* $N_G(K)$-空间结构。因此，$\mathcal{L}|_{M_K}\ \to M_K$ 是一个典范的、等变生成的 $N_G(K)$-等变预量子线丛，定义在动量映射$J_K^{-1}(0)$上。

证明。 由于M_K 是辛子流形，限制 $\mathcal{L}|_{M_K} \to M_K$自动构成预量子线丛。由于 $\mathcal{L}$ 是G-等变的,

因此自动可知 $\mathcal{L}|_{M_K}$ 是$N_G(K)$ 等变的。最后，为了证明$\mathcal{L}|_{M_K}$ 在$J_K^{-1}(0)$上由动量映射生成等变截面，令$x \in J)K^{-1}(0)$。那么，

$$(\mathcal{L}|_{M_k})_x^{N_G(K)_x} = \mathcal{L}_x^{N_G(K)_x} = \mathcal{L}_x^K = \mathcal{L}_x.$$

由此得证。 □

推论 10.14。 假设$(\mathcal{L}, \nabla)$ 在动量映射$J^{-1}(0)$ 上等变生成，且 $S \in \mathcal{S}_G$(动量映射$J^{-1}(0)$) 是一个轨道类型分层，那么$(\mathcal{L}|_S)/G \to S/G$ 在典范意义下是 S/G 上的预量子线丛，其预量子联络 ∇^S 满足

$$\pi_0^{-1}\nabla^S = \nabla|_S.$$

证明。根据命题 10.13， $\mathcal{L}_0 = (\mathcal{L}|_{J^{-1}}(0))$/G 是 $J^{-1}(0)$ 上的可微复线丛。特别地，这意味着限制到 S/G 后，$\mathcal{L}_0|_{S/G} = (\mathcal{L}|_S)$/G 是 S/G 上的光滑复线丛。采用与定理 5.24 第 (ii) 部分几乎完全相同的证明，我们可以轻易证明 $\nabla|_S$ 在 $\mathcal{L}_0$ 上诱导出一个满足以下条件的联络 ∇^S

$$\pi_0^{-1}\nabla^S = \nabla|_S.$$

为证明 ∇^S 是预量子的，取 $x \in S$ 并写作 $K = G_x$。那么根据定理9.15，映射

$$J_K^{-1}(0) \hookrightarrow S$$

诱导出一个辛同胚

$$(M_K)_0 = J_K^{-1}(0)/N_G(K) \to S/G. \tag{10.4}$$

根据命题 10.13， $\mathcal{L}|_{M_K} \to M_K$ 在 $J_K^{-1}(0)$上是等变生成的，因此根据定理 5.24，

$$(\mathcal{L}|_{M_K})_0 := (\mathcal{L}|_{J_K^{-1}(0)})/N_G(K)$$

是 $(M_K)_0$ 上的规范复线丛，带有满足以下条件的预量子联络 ∇^K

$$\pi_K^{-1}\nabla^K = \nabla|_{J_K^{-1}(0)},$$

其中 π_K ： 动量映射$_K^{-1}(0) \to (M_K)_0$ 是商映射。接下来只需追踪图表，即可直接证明线丛映射

$$\mathcal{L}|_{J_K^{-1}(0)} \to \mathcal{L}|_S$$

诱导出线丛的同构

$$(\mathcal{L}|_{M_K})_0 \to \mathcal{L}_0|_{S/G}$$

并且，在此映射下， ∇^S 的拉回与 ∇^K相同。由此即可得出结论。

□

定理10.15. 设$(\mathcal{L}, \nabla)$ 是定义在动量映射$^{-1}(0)$ 上的等变生成的预量子线丛，并设

$$\mathcal{L}_0 := (\mathcal{L}|_{J^{-1}(0)})/G.$$

那么存在一个典范的 $\mathcal{H}_G(M_0)$-联络 ∇^0 ，以及每个 $\mathcal{L}|_S \to S$ （$S \in \mathcal{S}_G(M_0)$）上的预量子联络 ∇^S ，使得$(\mathcal{L}_0, \nabla^0, \{\nabla^S\}_{S\in\mathcal{S}_G(M_0)})$ 是定义在M_0上的分层预量子线丛。

证明。应用定理9.31 和推论10.14。 □

例子10.16. 与非奇异情形一样，余切丛上的预量子线丛约化尤其清晰。设 G 为连通李群，Q 为适当的G-空间，且动量映射 : $T^*Q \to \mathfrak{g}^*$ 为哈密顿提升。记 $\theta_Q \in \Omega^1(T^*Q)$ 为刘维尔 1-形式，则平凡丛$\mathcal{L} = T^*Q \times \mathbb{C}$ 连同联络 $\nabla = L - i\theta_Q$ 构成定义在T^*Q上的等变预量子线丛。由于G 只作用于$\mathcal{L}$的第一因子，因此显然 $\mathcal{L}$ 是奇异可约的。事实上，我们有

$$\mathcal{L}_0 = (\mathcal{L}|_{J^{-1}(0)})/G = (T^*Q)_0 \times \mathbb{C}.$$

现在，回顾定理 9.37，若 S $\in$ $\mathcal{S}_G$(Q) 是 Q 的一个轨道类型分层，则存在唯一的轨道类型分层 $Z_S \in \mathcal{S}_G(J^{-1}(0))$，使得 J^{-1} S (0) 是其中的开稠密集，其中 J_S : T*S $\to$ $\mathfrak{g}^*$ 是 G 在 S 上的作用的哈密顿提升。此外，我们还回顾，商空间 Z_S/G 带有典范 1-形式 $\alpha_S \in \Omega^1(Z_S/G)$，使得 $d\alpha_S = -\omega_S$，其中 $\omega_S \in \Omega^2(Z_S/G)$ 是约化辛形式，并且

$$(\pi_0|_{Z_S})^*\alpha_S = \theta_Q|_{Z_S}$$

对于约化映射 π_0 : 动量映射$^{-1}(0) \to (T^*Q)_0$。由此立即可知，约化预量子联络 ∇^0 在 $\mathcal{L}_0$ 上限制为预量子联络

$$\nabla^0 = L - i\alpha_S$$

在 Z_S/G 上。

最后，我想对未来的工作做些推测。设 $\mathfrak{g}_{J^{-1}(0)} \subseteq T\mathcal{S}_G(J^{-1}(0))$ 为分层切丛的子丛，其纤维由轨道的切空间给出。很容易证明，$\pi_* : T\mathcal{S}_G(J^{-1}(0)) \to T\mathcal{S}_G(M_0)$ 在伪丛之间诱导出一个可微等变映射

$$\pi_* : T\mathcal{S}_G(J^{-1}(0))/\mathfrak{g}_{J^{-1}(0)} \to T\mathcal{S}_G(M_0)$$

它在每个纤维上都是同构。对其取商空间 G 后，我们得到一个映射

$$\pi_* : (T\mathcal{S}_G(J^{-1}(0))/\mathfrak{g}_{J^{-1}(0)})/G \to T\mathcal{S}_G(M_0). \tag{10.5}$$

我猜想，这个映射实际上是一个同构。如果确实如此，那么我们就可以将 ∇^0 扩展到所有分层向量场上。

推论 10.17. 假设方程（*10.5*）中的映射是伪丛的一个同构。那么，对于每个 $\sigma \in \Gamma(\mathcal{L}_0)$，映射

$$\nabla\sigma : T^{\mathbb{C}}\mathcal{S}_G(M_0) \to \mathcal{L}_0$$

如命题*10.6* 所示，是复伪丛之间的可微映射。因此，∇ 可以扩展为一个完整的联络

$$\nabla : \mathfrak{X}(\mathcal{S}_G(M_0)) \times \Gamma(\mathcal{L}_0) \to \Gamma(\mathcal{L}_0).$$

10.3 环面流形上预量子线丛的奇异约化

回顾第 5.4.2 节中环面流形上预量子线丛的构造。设 $\Delta \subseteq \mathbb{R}^n$ 是由下式定义的 Delzant 多面体

$$\Delta = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, v_i\rangle \geq \lambda_i\},$$

其中 $v_1,\ldots,v_N \in \mathbb{R}^n$ 是顶点，并令

$$J : \mathbb{C}^N \to \mathbb{R}^N; \quad (z_1,\ldots,z_N) \mapsto \frac{1}{2}(|z_1|^2,\ldots,|z_n|^2) - \lambda,$$

其中 $\lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_N)$。如我们所见，$\mathbb{C}^N$ 连同 动量映射 和典范T^N 作用构成一个哈密顿 T^N-空间。进一步回忆一下，若令 $\mathfrak{k} \subseteq \mathbb{R}^N$为线性映射的核

$$\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^n; \quad e_i \mapsto v_i, \tag{10.6}$$

$\iota : \mathfrak{k} \hookrightarrow \mathbb{R}^N$ 包含映射，且 $\mathrm{K} = \exp(\mathfrak{k}) \subseteq \mathrm{T}^N$，那么 $\mathrm{M}_\Delta = (\iota^* \circ$动量映射$)^{-1}(0)/\mathrm{K}$ 在典范意义下是一个哈密顿 T^N 空间，其上通过由式 (10.6) 诱导的同态 $\mathrm{T}^N \to \mathrm{T}^n$，赋予了一个诱导的有效 T^n 作用。为方便起见，我们将把 M_Δ 视为哈密顿 T^N空间。

至于预量子线丛，回顾一下，$\mathbb{C}^N$ 具有一个典范的 T^N等变预量子线丛 $(\mathcal{L}_{can}, \nabla^{can}) \to \mathbb{C}^N$，其中

$$\mathcal{L}_{can} = \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}$$

and

$$\nabla^{can} = d + i \sum_{j=1}^{N} \frac{r_j^2}{2} d\theta_j$$

其中 (rj, θ_j) 是极坐标。正如我们所见，若 λ 和 $\iota^*(\lambda)$ 均为整的，则可以通过同态赋予 $\mathcal{L}_{can}$ 一个 T^N 作用

$$\rho : T^N \to S^1; \quad (e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_N}) \mapsto e^{-i\langle \lambda, (\theta_1, \ldots, \theta_N)\rangle} \tag{10.7}$$

在此作用下，$(\mathcal{L}_{can}, \nabla^{can})$ 在 $J^{-1}(0)$ 上可约，因此诱导出一个预量子线丛

$$\mathcal{L}_\Delta := (\mathcal{L}_{can}|_{(\iota^* \circ J)^{-1}(0)})/K$$

其定义在 M_Δ 上，预量子联络为 ∇^Δ。这是一个 T^N-等变（因而也是 T^n-等变）预量子线丛。与我们对 M_Δ的讨论类似，出于方便，我们将把 $\mathcal{L}_\Delta$ 视为一个 T^N-等变预量子线丛。

鉴于 $(\mathcal{L}_\Delta, \nabla^\Delta) \to M_\Delta$ 是 T^N-等变的，它也必然对任意子群 $H \leq T^N$ 是 H-等变的。也就是说，若我们固定$H \leq T^N$ 并令

$$J_{\Delta,H} : M_\Delta \to \mathfrak{h}^* \tag{10.8}$$

设其为诱导动量映射，则$(\mathcal{L}_\Delta, \nabla^\Delta) \to M_\Delta$ 是一个H等变预量子线丛。现在我们希望探讨，哪些子群 $\mathcal{L}_\Delta$ 在J_Δ^{-1} 上等变生成，$_H(0)$。

定理 10.18。令 $H \leq T^N$ 为一个子环面，并记 $\mathfrak{h} = Lie(H)$。此外，记

$$J_{\Delta,H} : M_\Delta \to \mathfrak{h}^*$$

诱导动量映射。如果 $H \leq \ker(\rho)$，其中 $\rho: T^N \to S^1$ 是式(10.7) 中的同态，则 $\mathcal{L}_\Delta \to M_\Delta$ 关于 J_Δ^{-1}，$H(0)$是奇异可约的。

证明。 设$x \in (\iota^* \circ$ 动量映射$)^{-1}(0)$，并设 $[x] \in M_\Delta$ 为其在商映射 $(\iota^* \circ$ 动量映射$)^{-1}(0) \to M_\Delta$下的像。我们证明

$$(\mathcal{L}_\Delta)_{[x]}^{H_{[x]}} = (\mathcal{L}_\Delta)_{[x]}$$

为证明这一点，设

$$\pi_{\mathcal{L}} : (\iota \circ J)^{-1}(0) \times \mathbb{C} \to \mathcal{L}_\Delta$$

为商映射。则我断言，对任意$x \in (\iota \circ$ 动量映射$)^{-1}(0)$，有

$$\pi_{\mathcal{L}}(\{x\} \times \mathbb{C}^{(KH)_x}) = (\mathcal{L}_\Delta)_{[x]}^{H_{[x]}}.$$

这直接由$(KH)_x = H_{[x]}$ 这一事实以及 $\pi_{\mathcal{L}}$的等变性得出。此外，由于H 在 $\mathbb{C}$ 上作用平凡，且K 在$(\iota^* \circ$ 动量映射$)^{-1}(0)$上自由作用，我们得出所需结果。

□

注意，尽管H 在 $\mathcal{L}_\Delta$ 上作用“平凡”，但它在M_Δ上的作用未必平凡。此外，我们无法保证它具有良好的稳定子，因此约化空间动量映射$_\Delta^{-1}$，$_H(0)/H$ 通常会是一个分层辛空间。

11

极化的奇异约化

现在我们已经探讨了预量子线丛的奇异约化，接下来转向极化这一更微妙得多的问题。正如我们将会看到的，构造预量子线丛能够按照定理10.15 进行约化的例子，要比找到可约极化的例子容易得多。我认为，这表明我们可以将极化的概念进一步推广，得到一种更一般化（而且想必行为更糟）的概念，它可能很适合余切丛之类的对象。

11.1 分层极化

首先，我们给出一个看似简单的分层极化定义。说它看似简单，是因为验证起来可能相当棘手。

定义 11.1（分层极化）。设 $(X,\Sigma,\{\cdot,\cdot\})$ 是一个辛分层空间，且 $\mathcal{P}\subseteq T^{\mathbb{C}}\Sigma$ 是 X 上的复分层分布。若对每个 $\in\Sigma$，$\mathcal{P}$ $\mathcal{P}|_S\subseteq T^{\mathbb{C}}S$ 都是极化，则称 $\mathcal{P}$ 为分层极化。

给定一个极化 $\mathcal{P}$，将极化函数定义为

$$\mathcal{O}_{\mathcal{P}}(X):=\{f\in C^\infty(X,\mathbb{C})\mid v(f)=0 \text{ for all } v\in\mathcal{P}\}.$$

我们可以看出，这是对定义4.11的最直观推广。假设 $\mathcal{P}$ 是**分层的**，在例子中实际上很难验证（而且通常并不成立）。尤其是，是否满足边界条件往往很难一目了然。不过，在该条件成立时，我们就能得到一些强有力的结论。

命题 11。2. 设 $\mathcal{P}$ 是分层辛空间 $(X,\Sigma,\{\cdot,\cdot\})$上的分层极化。

(i) $\Gamma(\mathcal{P})$ *is involutive. That is, if* $V,W\in\Gamma(\mathcal{P})$, *then* $[X,Y]\in\Gamma(\mathcal{P})$.

(ii) $\mathcal{O}_{\mathcal{P}}(X)$ 是 $C^\infty(X,\mathbb{C})$的泊松子代数。

证明。 (1) 设V、$W \in \Gamma(\mathcal{P})$。由于 $\Gamma(\mathcal{P}) \subseteq \mathfrak{X}^{\mathbb{C}}(\Sigma)$ 和 $\mathfrak{X}^{\mathbb{C}}(\Sigma)$ 是对合的，因此可得 $[V,W] \in \mathfrak{X}^{\mathbb{C}}(\Sigma)$。特别地，对所有$S \in \Sigma$，我们有

$$[V,W]|_S = [V|_S, W|_S].$$

由于我们假设 $V|_S, W|_S \in \Gamma(\mathcal{P}|_S)$ 且 $\mathcal{P}|_S$ 是对合的，因此可得 $[V|_S, W|_S] \in \Gamma(\mathcal{P}|_S)$。由于 S 任意，我们得出 $[V, W] \in \Gamma(\mathcal{P})$。

(2) 设$f, g \in \mathcal{O}_{\mathcal{P}}(X)$，$x \in X$，$S \in \Sigma$为包含$x$的唯一分层，且$v \in \mathcal{P}_x$。我们证明 $v(\{f,g\}) = 0$。事实上，注意到由于$v \in T^{\mathbb{C}}S$ 且包含映射 $S \hookrightarrow X$ 是泊松的，我们得到

$$v(\{f,g\}) = v(\{f,g\}|_S) = v(\{f|_S, g|_S\}).$$

再次利用 $v \in T^{\mathbb{C}}S$ 这一事实，我们有 $v(f) = v(f|_S)$，且 $v(g) = v(g|_S)$。由于我们假设 $f, g \in \mathcal{O}_{\mathcal{P}}(X)$，因此可得 $f|_S, g|_S \in \mathcal{O}_{\mathcal{P}|_S}(S)$，进而由命题 4.15 可得，$\{f|_S, g|_S\} \in \mathcal{O}_{\mathcal{P}|_S}(S)$。因此，

$$v(\{f,g\}) = v(\{f,g\}|_S) = v(\{f|_S, g|_S\}) = 0.$$

由于x、S和v均为任意选取，我们得出 $\{f, g\} \in \mathcal{O}_{\mathcal{P}}(X)$。

□

例子 11.3. 设(M, ω) 为一个配备了按连通分支划分的典范分层 Σ 的辛流形。若 $\mathcal{P} \subseteq T^{\mathbb{C}}M$ 是任意极化，那么它自动就是一个分层极化。

例子 11.4. 对我而言，最典型的分层极化源自托里克几何。设 $\mathbb{T}$ 为一个环面，其李代数为 $\mathfrak{t}$，并假设

$$J : (M, \omega) \to \mathfrak{t}^*$$

按照定义3.53，这是一个环面流形。由于 $\mathbb{T}$ 是阿贝尔的，轨道类型分层 $\mathcal{S}_{\mathbb{T}}(M)$ 是由辛子流形构成的分层。正如我们在例子9.4中所讨论的，$\mathcal{S}_{\mathbb{T}}(M)$ 并非辛分层，因为哈密顿向量场不与分层相切。尽管如此，我们仍可以在这一情形中精彩地阐明分层极化的原理。

首先，实分层极化。令 $\mathscr{F}_{\mathbb{T}}$ 表示由M 上的 $\mathbb{T}$-轨道给出的奇异叶状结构，并定义

$$\mathcal{P}_{\mathbb{R}} := T\mathscr{F}_{\mathbb{T}} \otimes \mathbb{C} \subseteq T^{\mathbb{C}}\mathcal{S}_{\mathbb{T}}(M).$$

由于 $\mathcal{P}_{\mathbb{R}}$ 是奇异叶状结构的切丛的复化，显然它是对合的。现在证明 $\mathcal{P}_{\mathbb{R}}$ 在每个分层上限制为极化。固定一个轨道类型分层$S \in \mathcal{S}_T(M)$，并令$x \in S$。则商群$N = \mathbb{T}/\mathbb{T}_x$ 在S 上自由作用。利用 Delzant 构造，我们容易看出 $\dim(S) = 2\dim(\mathbb{T}/\mathbb{T}_x)$。因此，根据例子4.14，商映射

$$\pi_S : S \to S/N$$

是一个拉格朗日纤维化。特别地，$\ker(T\pi_S) \otimes \mathbb{C} \subseteq T^{\mathbb{C}}S$ 是一个极化，并且 $\mathcal{P}_{\mathbb{R}}|_S = \ker(T\pi_S) \otimes \mathbb{C}$。因此，除去 $\mathcal{S}_{\mathbb{T}}(M)$ 并非严格意义上的分层辛空间这一点外，$\mathcal{P}_{\mathbb{R}}$ 它是一个分层极化。最后，对于极化函数，注意到

$$C^\infty_{\mathcal{P}}(M) = C^\infty(M)^{\mathfrak{t}}$$

the $\mathfrak{t}$-不变函数。由于T 在M 上的作用是辛的，因此$C^\infty(M)^{\mathfrak{t}}$ 是一个泊松子代数。注意，由于 $\mathbb{T}$-作用的叶在一个开稠密集上是拉格朗日的，因此很容易看出$C^\infty_{\mathcal{P}}(M)$ 具有平凡的泊松括号。

由此，我们现在得到了一个实分层极化的典型例子。托里克几何还为我们提供了一个自然的分层凯勒极化族。设J 是M上的一个 $\mathbb{T}$-不变相容复结构。由于从其矩多面体进行（M、ω）的Delzant 构造，这些结构确实存在。令 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 为诱导的黎曼度量。将度量拉回到任意一个分层上，我们得到另一个相容度量，从而得到另一个 Kähler 结构。

因此，对于每个 $S \in \mathcal{S}_{\mathbb{T}}(M)$，令 J_S 为所诱导的相容且 $\mathbb{T}$-不变的复结构，并令 $T^{1,0}{}_{J_S} S$ 表示关于 J_S 的全纯切丛。我们定义

$$\mathcal{P}_{\mathbb{C}} := \bigcup_{S \in \mathcal{S}_T(M)} T^{1,0}_{J_S} S$$

正如我们在例子 8.44 中已经看到的，我们还可以实现

$$\mathcal{P}_{\mathbb{C}} = \bigcup_{x \in M} ((T^{1,0}_J)_x M)^{\mathbb{T}_x}$$

正如我们所看到的，这是一个分层复分布。从对 $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}$ 全纯切丛的并集 $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}$ 的描述来看，它显然是一个分层极化。注意，如果$f \in \mathcal{O}_{\mathcal{P}_{\mathbb{C}}}(M)$ 是一个复极化

函数，那么 f 在一个开稠密集上是反全纯的。这意味着 f 必定是全局反全纯的。此外，由于分层 $S \hookrightarrow M$ 的包含映射是反全纯的，我们可以得出结论：这就是全部的极化函数。也就是说， $\mathcal{P}$ 极化函数与 M 上的反全纯函数重合。这是一个泊松子代数。

例子11.5. 我们可以对上述例子稍作调整，从而得到一个真正的分层极化例子。具体来说，让我们回到测试例子 $\mathbb{R}^2$，以及其上的泊松结构

$$\pi = r^2 \frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y}.$$

对于实分层极化，令

$$\partial_\theta := -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2).$$

令 $\mathcal{P}_{\mathbb{R}} \subseteq T^{\mathbb{C}}\mathbb{R}^2$ 为映射的像

$$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{C} \to T^{\mathbb{C}}\mathbb{R}^2; \quad (x, \lambda) \mapsto \lambda \partial_\theta(x)$$

则 $\mathcal{P}_{\mathbb{R}}$ 是一个分层极化。当然，这是由典范 S^1 作用在 $\mathbb{R}^2$ 上所诱导的叶状结构的切丛的复化，因此是对合的。$\mathcal{P}_{\mathbb{R}}$ 在 0 处为零，在其他地方的秩为 1，因此是拉格朗日的。对于复情形，令 I_{can} 为 $\mathbb{R}^2$ 上的典范复结构。令

$$\mathcal{P}_{\mathbb{C}} = \widetilde{T^{0,1}_{I_{can}}\mathbb{R}^2}$$

关于 S^1 作用，我们看到 $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}$ 也是一个极化。

回想一下，辛分层空间 $(X, \Sigma, \{\cdot,\cdot\})$ 假定为惠特尼正则。具体来说，假定它们满足惠特尼 A 条件。该条件使我们能够证明以下结论。

命题 11.6. 设 $(X, \Sigma, \{\cdot,\cdot\})$ 是一个辛分层空间， $\mathcal{P} \subseteq T^{\mathbb{C}}\Sigma$ 是一个分层极化，且 $f \in C^\infty(X)$。如果对所有极大层 $S \in \Sigma$， $f|_S \in \mathcal{O}_{\mathcal{P}|_S}(S)$，那么 $f \in \mathcal{O}_{\mathcal{P}}(M)$。

证明。 固定一个在极大层上极化的 $f \in C^\infty(X)$，并令 $x \in X$ 且 $v \in \mathcal{P}_x$。我们证明 $v(f) = 0$。

记包含 x 的分层为实数集 $\in \Sigma$，我们可以找到一个极大分层 $S \in \Sigma$，使得实数集 $\subseteq S$。由于假设 $\mathcal{P}$ 是分层的，我们有

$\mathcal{P}|_R \subseteq \overline{\mathcal{P}|_S}$。因此，我们可以找到一个序列 $\{v_k\} \subseteq \mathcal{P}|_S$，它收敛到$v$。由于$S$ 是极大的，我们有

$$v_k(f) = 0$$

对所有k均成立。因此，取极限可得

$$v(f) = \lim_{k\to\infty} v_k(f) = \lim_{k\to\infty} 0 = 0.$$

因此，f 是极化的。 □

11.2 极化的奇异约化

现在，我们终于可以讨论极化的奇异约化。为明确记号，设$J : (M, \omega) \to \mathfrak{g}^*$ 是连通李群G的一个适当哈密顿G-空间，且 $\mathcal{P} \subseteq T^{\mathbb{C}}M$ 是一个G-不变极化。我们将$M_0 = J^{-1}(0)/G$ 记作约化空间，并将 $\pi_0 : J^{-1}(0) \to M_0$记作商映射。本小节接下来的内容将用于证明以下结果。

定理 11.7. 设子丛

$$\mathcal{P}_{J^{-1}(0)} := \mathcal{P} \cap T^{\mathbb{C}}\mathcal{S}_G(J^{-1}(0))$$

是(0)上的分层复分布，其中J^{-1}

$$\mathcal{P}_0 := T\pi_0(\mathcal{P}_{J^{-1}(0)}) \subseteq T^{\mathbb{C}}\mathcal{S}_G(M_0)$$

是 M_0上的分层极化。

证明的主要要点是证明如下结论。

引理 11.8. 在定理 *11.7*的设定下，对于每个 $x \in J^{-1}(0)$ 以及分层 $S \in \mathcal{S}_G(J^{-1}(0))$，我们有

$$T\pi(\mathcal{P}_x \cap T_x^{\mathbb{C}}S) \subset T^{\mathbb{C}}_{[x]}(S/G)$$

是一个复拉格朗日子空间。

证明。固定 x ∈ 动量映射$^{-1}$(0) 以及包含 x 的分层 S ∈ $\mathcal{S}_G$(动量映射$^{-1}$(0))。令 K = G$_x$，并记 V = Sν_x(M,G) 为辛法空间。根据定理 9.15 中的局部标准形，我们有一个 K-等变线性辛同构

$$T_xM \cong (\mathfrak{g}/\mathfrak{k}) \oplus (\mathfrak{g}/\mathfrak{k})^* \oplus V.$$

记 $W = (\mathfrak{g}/\mathfrak{k}) \oplus (\mathfrak{g}/\mathfrak{k})\{\text{v17>}$。于是， $\mathcal{P}_x$ 可识别为 K-不变的复拉格朗日子空间 $L \subseteq W_{\mathbb{C}} \oplus V_{\mathbb{C}}$。记 $F = (\mathfrak{g}/\mathfrak{k}) \oplus \{0\} \subseteq W$，我们还可以识别出

$$T_x S = F \oplus V^K$$

以及 $T^{[x]}(S/G)$ 与 $W \oplus V$ 沿 $F \oplus V^K$的约化。因此，我们处于定理 4.10 的情形。于是，L 在约化中的像是一个复拉格朗日子空间。该像恰好对应于 $T\pi(\mathcal{P}_x \cap T_x^{\mathbb{C}} S)$。

□

由引理 11.8，我们可以立即证明定理 11.7。

证明。 定理 11.7取一个分层$S \in \mathcal{S}_G(J^{-1}(0))$。则

$$\mathcal{P}_{J^{-1}(0)}|_S = \mathcal{P} \cap T^{\mathbb{C}} S$$

是S上的复对合分布。由于 $\mathcal{P}$ 是 G-不变的，并利用引理 11.8，我们得到映射

$$T\pi : \mathcal{P}_{J^{-1}(0)}|_S \to T^{\mathbb{C}}(S/G)$$

具有常秩，并且在 $\pi : S \to S/G$的各纤维上为常数。因此，根据引理 4.29，

$$\mathcal{P}_0|_S = T\pi(\mathcal{P}_{J^{-1}(0)}|_S) \subseteq T^{\mathbb{C}}(S/G)$$

是一个对合的复分布。再次根据引理 11.8， $\mathcal{P}_0|_{S/G}$ 的纤维是复拉格朗日子空间，因此 $\mathcal{P}_0|_{S/G}$ 是一个极化。

现在来证明 $\mathcal{P}_0$ 是一个复分层分布。我们已经有

$$\mathcal{P}_0 \subseteq T^{\mathbb{C}} \mathcal{S}_G(J^{-1}(0))$$

并且 $\mathcal{P}_0|_S \subseteq T^{\mathbb{C}} S$ 是一个光滑的复分布。由于 $\mathcal{P}_0$ 继承了$T^{\mathbb{C}} \mathcal{S}_G(M_0)$的可微结构和分层向量丛结构，我们只需证明 $\mathcal{P}_0$的典范分解：

$$\mathcal{P}_0 = \bigsqcup_{S \in \mathcal{S}_G(M_0)} \mathcal{P}_0|_S$$

是一个分层。为此，假设$S,R \in \mathcal{S}_G(J^{-1}(0))$ 满足

$$\mathcal{P}_0|_{S/G} \cap \overline{\mathcal{P}_0|_{R/G}} \neq \emptyset$$

由于从 $\mathcal{P}_0$ 到 M_0, 的投影具有$(S/G) \cap R/G \neq \emptyset$ 的连续性，因此 $S/G \subseteq \overline{R/G}$。因此，$S \subseteq \overline{R}$ 也成立。

现在，固定 $x \in S$ 以及 $v \in (\mathcal{P}_0)_{[x]}$。我们可以找到一个提升 $w \in \mathcal{P}_x \cap T_x^{\mathbb{C}} S$。根据假设，$\mathcal{P}_{J^{-1}(0)}$ 是一个分层分布，因此我们可以找到一个序列 $\{w_k\} \subseteq \mathcal{P}_{J^{-1}(0)|_R}$，它收敛于 w。应用投影 π 并令 $v_k = \pi(w_k)$，我们得到一个序列 $\{v_k\} \subseteq \mathcal{P}_0|_R$，它收敛于 v，因此 $\mathcal{P}_0|_S \subseteq \mathcal{P}_0|_R$。 □

受此前关于非奇异约化的讨论，以及为确保约化仍为极化而对极化施加的唯一条件启发，我们给出以下定义。

定义11.9（奇异可约性）。设 $\mathcal{P}$ 是一个 G-不变极化。若 $\mathcal{P}$ 满足以下条件，则称其为奇异可约的：

$$\mathcal{P}_{J^{-1}(0)} = \mathcal{P} \cap T^{\mathbb{C}} \mathcal{S}_G(J^{-1}(0))$$

是 动量映射$^{-1}(0)$的复分层分布。

例子 11.10。如下文将要讨论的，通过考察等变 Kähler 结构，我们可以得到许多有趣的奇异可约极化。遗憾的是，我们现在将看到第一个非常自然的等变极化例子，它并非奇异可约。事实上，回顾例 S^1-在$\mathbb{R}^2$上的作用的典范 Hamiltonian 提升动量映射：$T^*\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$。9。32。在此情形下，动量映射$^{-1}(0)$ 有两个分层：

$$J^{-1}(0) = \{(0,0)\} \sqcup S$$

并且 S 还可以进一步作等变分解

$$S = (\{0\} \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})) \sqcup R. \tag{11.1}$$

由于 动量映射$(x,x) = 0$，不难看出

$$R = \{(x, tx) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0 \text{ and } tin\mathbb{R}\}.$$

到第一因子的投影

$$pr_1 : R \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$

显然，这使得 实数集 成为一个自由的 S^1-等变向量丛，因此商空间 实数集/$S^1 \to (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})/S^1$ 是一个光滑秩 1 向量丛。通过第 9.6 节中的讨论，我们可以看出，实数集/$S^1 \cong T^*(0,\infty)$ 可通过映射

$$(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})/S^1 \to (0,\infty); \quad [x] \mapsto \|x\|^2.$$

注意，0 是将 动量映射 限制在 $\mathbb{R}^4 \setminus \{(0,0)\}$ 上所得映射的正则值，因此利用这一点，我们可以推得

$$T_{(x,y)}S = \{(v,w) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mid J(x,w) - J(y,v) = 0\}$$

对于任意 $(x,y) \in S$。利用这一描述以及如下事实：若$(x,y) \in S$ 且$x \neq 0$，则y 是x的倍数，我们得到

$$T_{(x,y)}S = \begin{cases} \{(\lambda y, w) \mid \lambda \in \mathbb{R} \text{ and } w \in \mathbb{R}^2\}, & x = 0 \\ \{(v, tv + \lambda x) \mid \lambda \in \mathbb{R} \text{ and } v \in \mathbb{R}^2\}, & y = tx \text{ for some } t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

现在来看看典范极化 $\mathcal{P}$ 与S的切丛复化之间的交。

记 $pr_1 \colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 为到第一因子的投影，则此时的典范实极化为

$$\mathcal{P} = \ker(Tpr_1) \otimes \mathbb{C} = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \{0\} \times \mathbb{C}^2.$$

利用S的切空间描述，我们进而得到

$$\mathcal{P}_{(x,y)} \cap T^{\mathbb{C}}_{(x,y)}S = \begin{cases} \{0\} \times \mathbb{C}^2, & x = 0 \\ \{0\} \times \operatorname{span}_{\mathbb{C}}(x), & \text{else.} \end{cases}$$

因此，$\mathcal{P} \cap T^{\mathbb{C}}S$ 不具有常秩，因此 $\mathcal{P}$ 不是奇异可约的。不过，这里有一点值得注意。令 $\pi_S : S \to S/S^1$ 表示商映射，则对于任意 $(x,y) \in S$，我们有

$$\dim_{\mathbb{C}} T_{(x,y)}\pi_S(\mathcal{P}_{(x,y)} \cap T^{\mathbb{C}}_{(x,y)}S) = 1$$

这怎么可能？在开子集$R \subseteq S$ 上，若$x \neq 0$，这显然成立，因为S^1 作用的轨道与余切纤维的交仅为零。在$\{0\} \times \mathbb{R}^2$上，很容易看出

$$T^{\mathbb{C}}_{(0,y)}S^1 \cdot (0,y) \subseteq \mathcal{P}_{(0,y)} \cap T^{\mathbb{C}}_{(0,y)}S$$

因此

$$T_{(0,y)}\pi_S(\mathcal{P}_{(0,y)} \cap T^{\mathbb{C}}_{(0,y)}S \cong \mathbb{C}^2 / T^{\mathbb{C}}_y(S^1 \cdot y)$$

这显然是一维的。正如我们即将看到的，$\pi_*(\mathcal{P} \cap T^{\mathbb{C}}R)$ 实际上是一个极化，因此如果 $\pi_*(\mathcal{P} \cap T^{\mathbb{C}}S)$ 是光滑的，那么它也是定义在S/S^1上的一个极化。

11.3 奇异约化下类型的保持

命题11。11。 设 $K \leq G$ 是一个紧子群，并设

$$J_K : M_K \to (\mathfrak{n}_K(G)/\mathfrak{k})^*$$

是对称流形 M_K上的典范动量映射。定义

$$\mathcal{P}_K := \mathcal{P} \cap T^{\mathbb{C}} M_K. \tag{11.2}$$

于是，

(1) $\mathcal{P}_K$ 是 M_K上的 $N_G(K)/K$-不变极化。

(2) 如果 $\mathcal{P}$ 是实的，那么 $\mathcal{P}_K$也是实的。

(3) 如果 $\mathcal{P}$ 是全复的，那么 $\mathcal{P}_K$也是全复的。

(4) 若 $\mathcal{P}$ 是奇异可约的，则 $\mathcal{P}_K$ 是可约的。

证明。 设$x \in$ 动量映射$_K^{-1}(0)$ ，并设$S \subseteq \mathcal{S}_G($动量映射$^{-1}(0))$ 为包含x的轨道类型分层。

$$(\mathcal{P}_K)_x = \mathcal{P}_x \cap T_x^{\mathbb{C}} M_K = \mathcal{P}_x \cap (T_x^{\mathbb{C}} M)^K = \mathcal{P}_x^K.$$

因此， $\mathcal{P}_K$ 是M_K上的拉格朗日复分布。由于 $\mathcal{P}$和$T^{\mathbb{C}}M_K$ 都是对合的，因此 $\mathcal{P}_K$ 也是对合的，故为一种极化。 $\mathcal{P}_K$ 在$N_G(K)/K$ 作用下不变，因为 $\mathcal{P}$ 是不变的。它也是可约的，因为

$$(\mathcal{P}_K)_x \cap T_x^{\mathbb{C}} J_K^{-1}(0) = (\mathcal{P}_x \cap T_x^{\mathbb{C}} S)^K.$$

关于实极化或全复极化保持类型的论述，依据的是对每个$x \in M_K$都有$(\mathcal{P}_K)_x = \mathcal{P}_x^K$这一识别，以及复共轭保持不动点集这一事实。

□

命题 11.12. 设 $\mathcal{P}$ 是一个奇异可约极化，$S \in \mathcal{S}_G(J^{-1}(0))$ 是一个轨道类型分层，$x \in S$，且令$K = G_x$。那么，在典范辛同胚下

$$S/G \cong J_K^{-1}(0)/(N_G(K)/K) =: (M_K)_0$$

极化 $\mathcal{P}_0|_{S/G}$ 被映射到 $(\mathcal{P}_K)_0 \subseteq T^{\mathbb{C}}(M_K)_0$。

证明。 这里用到了局部形式。 □

推论 11.13. 假设 $\mathcal{P}$ 是奇异可约的，且 $S \in \mathcal{S}_G(M_0)$ 是奇异约化空间的一个分层。

(1) 如果 $\mathcal{P}$ 属于实数集，那么 $\mathcal{P}_0|_S$ 属于实数集。

(2) 如果 $\mathcal{P}$ 是全复的，那么 $\mathcal{P}_0|_S$ 是全复的。

(3) 如果对于 M 上某个相容的 G-不变复结构 J，有 $\mathcal{P} = T^{0,1}_J M$，那么 S 上存在相容的复结构 J_S，使得 $\mathcal{P}_0|_S = T^{0,1}_{J_S} S$。

证明。 每个陈述都只是命题11.12的逐层陈述。

□

11.4 何时可以约化极化

命题 11.14. 假设 $\mathcal{P}$ 满足如下性质：对于任意分层 $S,R \in \mathcal{S}_G(J^{-1}(0))$，其中 $S \subseteq R$，以及任意 $(x,\overline{y}) \in S \times R$，均有

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{P}_x \cap T^{\mathbb{C}}_x S) \leq \dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{P}_y \cap T^{\mathbb{C}}_y R).$$

那么，当且仅当对于所有 $S \in \mathcal{S}_G(J^{-1}(0))$，$\mathcal{P}$ 是奇异可约的，且 $\mathcal{P} \cap T^{\mathbb{C}} S$ 是 S 的复分布。

证明。 由于 $\mathcal{P}$ 是逐纤维拉格朗日，因此可直接推出 $\mathcal{P}$ 是 $T^{\mathbb{C}}M$的闭子集。因此，逐图卡应用引理 8。49即可完成证明。

□

现在我们将以讨论不变极化何时是奇异可约的作为结束。

引理 11.15. 固定 $x \in$ 动量映射$^{-1}(0)$ 并令 $K = G_x$。令 $S \in \mathcal{S}_G($动量映射$^{-1}(0))$ 为包含 x 的轨道类型分层。那么，

$$\mathcal{P}_x \cap T^{\mathbb{C}}_x S = (\mathcal{P}_x \cap T^{\mathbb{C}}_x S)^K + \mathcal{P}_x \cap T^{\mathbb{C}}_x (G \cdot x). \tag{11.3}$$

证明。 显然，由于 S 和 $\mathcal{P}$ 都在G-作用下保持不变，因此有

$$(\mathcal{P}_x \cap T^{\mathbb{C}}_x S)^K + \mathcal{P}_x \cap T^{\mathbb{C}}_x (G \cdot x) \subseteq \mathcal{P}_x \cap T^{\mathbb{C}}_x S.$$

对于反向包含关系，由局部标准形可知，存在一个K-等变线性辛同胚

$$T_x M \cong V \oplus W, \tag{11.4}$$

其中$V = \mathfrak{k} \times \mathfrak{k}^*$ 和$W = S\nu_x(M,G)$ 分别带有其典范辛形式 ω_V 和 ω_W。在此辛同胚下，$T_x(G \cdot x)$被映射到$F \oplus 0$，其中$F = \mathfrak{k} \times \{0\} \subseteq V$，而$T_x S$ 被映射到$F \oplus W^K$。令$L \subseteq V^{\mathbb{C}} \oplus W^{\mathbb{C}}$ 表示K-不变的拉格朗日子空间

$\mathcal{P}_x$ 被映射到。由于C 和L 都是K-不变的，我们自动得到

$$L \cap C^{\mathbb{C}} = (L \cap C^{\mathbb{C}})^K + L \cap C^{\mathbb{C}} \cap ((V^{\mathbb{C}})^K \oplus (W^{\mathbb{C}})^K)^\omega.$$

显然，

$$C^{\mathbb{C}} \cap ((V^{\mathbb{C}})^K \oplus (W^{\mathbb{C}})^K)^\omega = (F^{\mathbb{C}} \cap ((V^{\mathbb{C}})^K)^{\omega_V}) \oplus 0 \subseteq F^{\mathbb{C}} \oplus 0$$

因此，

$$L \cap C^{\mathbb{C}} \cap ((V^{\mathbb{C}})^K \oplus (W^{\mathbb{C}})^K)^\omega \subseteq L \cap F^{\mathbb{C}} \oplus 0$$

通过辛同胚将其变换回 $T_x^{\mathbb{C}}M$ ，该辛同胚由方程（11.4）给出，便得到所需结果。 □

推论 11.16. 若 $\mathcal{P}$ 与 M 的轨道类型分层上的轨道叶状结构相交时秩为常数，并且对每个 $K \leq G$，诱导的极化 $\mathcal{P}_K$ 在 M_K 按照定义 11.9 的意义是可约的，则 $\mathcal{P}$ 是奇异可约的。

证明。 由于每个轨道类型分层 $S \in \mathcal{S}_G(\text{动量映射}^{-1}(0))$ 都是 $\text{动量映射}_K^{-1}(0) \subseteq M_K$ 在某个 K 下的扫掠集，利用引理 11.3中的方程（11.15，可得$\mathcal{P} \cap T^{\mathbb{C}}S$ 具有如下形式

$$\mathcal{P} \cap T^{\mathbb{C}}S = G \cdot (\mathcal{P}_K \cap T^{\mathbb{C}}J_K^{-1}(0) + \mathcal{P} \cap \mathfrak{g}_S|_{J_K^{-1}(0)})$$

利用 $\mathcal{P}$ 的 G-不变性以及假设，即可得到所需结果。

□

有了这些初步结果，我们就可以推广 Guillemin 和 Sternberg 的结果。

命题 11.17. 设 $\mathcal{P}$ 是正 G-不变极化。那么 $\mathcal{P}$ 是可约的。

证明。 由于 G-作用的轨道是各向同性的，根据推论4.33可立即得出， $\mathcal{P}_K$ 对于所有紧致 $K \leq G$ 均为可约极化，且 $\mathcal{P}$与轨道叶状结构的交集平凡。因此， $\mathcal{P}$ 是奇异可约的。 □

推论 11.18. *G-不变 Kähler极化总是奇异可约的，并在约化空间上逐层诱导出 Kähler 结构。*

备注11.19. 利用上述发展出的内容，我们可以恢复 Mayrand [May20]所讨论的超 Kähler 约化。

11.5 不可约化极化

正如我们在例子 11.10 中所见，余切丛的典范极化未必可约。不过，对于量子化而言，我们仍能得到一些有用的结果

。为此，设 G 是一个连通李群，Q 是一个适当的 G-空间，而 动量映射 : $T^*Q \to \mathfrak{g}^*$ 是哈密顿提升。记 $\tau : T^*Q \to Q$ 为丛投影。回忆一下，T^*Q 上的典范极化具有如下形式

$$\mathcal{P} := \ker(T\tau) \otimes \mathbb{C}.$$

这并非奇异可约，但它是等变的，因此我们可以在约化上定义一个伪丛。

定义11.20. 令 π_0 : 动量映射$^{-1}(0) \to (T^*Q)_0$ 为约化映射。定义伪丛 $\mathcal{P}_0 \subseteq T^{\mathbb{C}}\mathcal{S}_G((T^*Q)_0)$如下

$$T^{\mathbb{C}}\pi_0(\mathcal{P} \cap T^{\mathbb{C}}\mathcal{S}_G(J^{-1}(0))).$$

利用这样一个事实：对于任意分层$S \in \mathcal{S}_G(Q)$，都存在相应的分层$Z_S \in \mathcal{S}_G$(动量映射$^{-1}(0)$)，满足$T^*(S/G) \subseteq Z_S/G$ 是一个开稠密集，我们可以证明如下结论。

定理11.21. 对于任意分层 $S \in \mathcal{S}_G(Q)$，$\mathcal{P}_0|_{T^*(S/G)}$ 与 $T^*(S/G)$上的典范极化一致。

证明。 由于黎曼度量的选取会导出向量丛的一个嵌入$T^*S \hookrightarrow T^*Q|_S$，这就归结为非奇异情形，因此我们可以应用命题4.39 来完成证明。

□

注记11。22。再次需要指出， $\mathcal{P}_0$ 定义 11。20并未按照定义$T^*Q)_0$ 的含义在(11。1中定义出分层极化。定理 11。21 所证明的是，对于$(T^*Q)_0$ 的每个分层，都存在一个开稠密集，使得 $\mathcal{P}_0$ 在该集合上限制为一种极化；但它未必在整个分层上定义出极化（甚至向量丛）。建议读者参阅例子 11。10，了解这一现象的例子。

12 奇异约化与量子化

现在我们已经为辛流形、极化和预量子线丛的分层版本奠定了基础，接下来可以深入探讨量子化的分层版本。正如我们将看到的，这本质上与经典量子化定义相同。

12.1 辛分层空间的量子化

首先，让我们仿照定义5.12.来建立分层量子化数据的概念。

定义12.1（分层量子化数据）。分层量子化数据由四部分组成。

（1）一个辛分层空间（$X, \Sigma, \{\cdot,\cdot\}$）；（2）一个哈密顿模 $\mathcal{H} \subseteq \mathfrak{X}(X)$。（3）一个分层极化 $\mathcal{P} \subseteq T^{\mathbb{C}}\Sigma$。（4）一个位于 X 上的分层预量子线丛（$\mathcal{L}, \nabla, \{\nabla^S\}_{S\in\Sigma}$）。

将此数据记作（X, $\mathcal{H}, \mathcal{P}, \mathcal{L}$）。

例子 12.2. 定义 5.12意义下的通常量子化数据，都是分层量子化数据的例子。

定义 12.3. 给定分层量子化数据 $(X, \mathcal{H}, \mathcal{P}, \mathcal{L})$，定义其量子化为

$$\mathcal{Q}(X, \mathcal{H}, \mathcal{P}, \mathcal{L}) = \{\sigma \in \Gamma(\mathcal{L}) \mid \nabla_v \sigma = 0 \text{ for all } v \in \mathcal{P}\}. \tag{12.1}$$

若不会造成混淆，我们将简写为 $\mathcal{Q}(X)$，表示对 X 的量子化。

例子 12.4. 通过讨论例子 9.3、9.24、10.4和11.5，我们已经有了非平凡的量子化数据例子。

事实上，在例子 9.3 中，我们看到了泊松结构

$$\pi = r^2 \frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y}$$

在 $\mathbb{R}^2$ 通过其辛叶状结构诱导出辛分层 $\mathscr{F}_\pi = \{\{0\}, \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}\}$。接着，在例子 9.24 中，我们看到这一分层配备了一个哈密顿模

$$\mathcal{H} = \{V \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2) \mid V \text{ vanishes to order 2 at } 0\}.$$

在例子 10.4 中，我们得到了一个分层预量子线丛$(\mathcal{L}, \nabla)$，其中

$$\mathcal{L} = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{C}$$

并且 ∇ 由下式给出

$$\nabla|_{\{0\}} = 0$$

and

$$\nabla|_{\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}} = L + i\alpha$$

for

$$\alpha = \ln(r) d\theta$$

其中 (r, θ) 是极坐标。接着，在例子 11.5中，我们看到这个辛分层空间有两种自然极化：一种实极化 $\mathcal{P}_\mathbb{R}$ 由 ∂_θ 张成，另一种复极化 $\mathcal{P}_\mathbb{C}$ 源自 $\mathbb{R}^2$上的典范复结构。

那么量子化是什么？首先，让我们考察实极化。在这种情况下，若$f \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^2, \mathcal{P}_\mathbb{R}) \subseteq C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$，我们看到，由于 ∂_θ张成 $\mathcal{P}_\mathbb{R}$,

$$0 = \nabla_{\partial_\theta} f = \frac{\partial f}{\partial \theta} + i\alpha(\partial_\theta) f = \frac{\partial f}{\partial \theta} + i \ln(r) f.$$

因此，我们必然有

$$f = g(r) e^{-i \ln(r) \theta}. \tag{12.2}$$

注意，由于 θ 是 2π-周期的，函数 f 只有在 12.2) 中的方程成立时才可能满足 $f = 0$。因此， $\mathcal{Q}(\mathbb{R}^2, \mathcal{P}_\mathbb{R}) = 0$。注意，正如 [Śn75], 所示，这是意料之中的，因为 $\mathcal{P}_\mathbb{R}$ 在 $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$上限制为拉格朗日环面纤维化。我们仍然可以在这类情形下得到有趣的量子化，但不同于定义 12.3中所采用的经典量子化定义，我们应采用下文将讨论的上同调方法，或者可以根据 $\mathcal{P}_\mathbb{R}$ 的特选叶来定义量子化，这些叶称为 **玻尔-索末菲叶**。对于后一种方法，我们首先找出

所有叶 $S \subseteq \mathbb{R}^2$ 的 $\mathcal{P}_{\mathbb{R}}$，它们在限制丛 $(\mathcal{L}|_S, \nabla|_S) \to S$上具有非零平坦截面。在这种情况下，很容易看出 $\{0\}$ 是一个玻尔-索末菲叶，所有半径为 r 的圆 $S_r \subseteq \mathbb{R}^2$ 且 $\ln(r) \in 2\pi\mathbb{Z}$的情形也是如此。因此，玻尔-索末菲量子化将是

$$\mathcal{Q}_{BS}(\mathbb{R}^2, \mathcal{P}_{\mathbb{R}}) = \mathbb{C} \oplus_{\mathbb{Z}} \mathbb{C},$$

我在此处添加下标“BS”，以将这种量子化与通过定义12.3获得的量子化区分开来。对于这两种方法的更多信息，感兴趣的读者可参阅[Śn75] 或 [Ham10] 。

至于复极化，记作

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y},$$

不难看出，$\mathcal{P}_{\mathbb{C}}$ 例子11.5中的极化由下列元素张成：

$$r^2\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$$

注意，这属于哈密顿模 $\mathcal{H}$ 的复化。注意，在 $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ 上有

$$\alpha\left(r^2\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) = i\ln(r)z,$$

其中 $z = x + iy$。由此可见，$f \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^2, \mathcal{P}_{\mathbb{C}}) \subseteq C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ 当且仅当

$$0 = \nabla_{r^2\frac{\partial}{\partial \bar{z}}} f = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} - \ln(r)zf$$

由此可知，$f = ge^{r\ln(r)}$，其中g 是定义在$\mathbb{R}^2$上的全纯函数。由于$e^{r\ln(r)}$ 是光滑函数，我们于是得到 $\mathcal{Q}(\mathbb{R}^2, \mathcal{P}_{\mathbb{C}})$ 与定义在 $\mathbb{R}^2$上的全纯函数集合之间的一个典范识别。注意，根据命题11.6，这恰好就是极化函数集合$\mathcal{O}_{\mathcal{P}_{\mathbb{C}}}(\mathbb{R}^2)$。

注记12.5。对于每个 $\sigma \in \Gamma(\mathcal{L})$，映射

$$\nabla\sigma : T^{\mathbb{C}}\Sigma \to \mathcal{L}$$

是连续的，因此我们可以定义一个层

$$\mathcal{S}(U) = \{\sigma \in \Gamma(\mathcal{L}|_U) \mid \nabla_v\sigma = 0 \text{ for all } v \in \mathcal{P}|_U\}$$

在这种情况下，我们便可以使用量子化的其他定义，例如 Kostant 的上同调波函数

$$\mathcal{Q}^\bullet(X) = \bigoplus_i H^i(X, \mathcal{S})$$

利用 $\mathcal{S}$的层上同调。对于本论文，我们倾向于采用定义12。3中的定义。

命题 12.6. 设 $(X,\ \mathcal{H},\ \mathcal{P},\ \mathcal{L})$ 为量子化数据。令 $\mathcal{H}^{\mathbb{C}} \subseteq \mathfrak{X}^{\mathbb{C}}(\Sigma)$表示形如以下形式的分层向量场集合

$$\mathcal{H}^{\mathbb{C}} := \{f_1 V + f_2 V_2 \mid f_1, f_2 \in C^\infty(X, \mathbb{C}),\ V_1, V_2 \in \mathcal{H}\}.$$

此外，假设这些截面

$$\mathcal{H}_{\mathcal{P}} := \Gamma(\mathcal{P}) \cap \mathcal{H} \otimes \mathbb{C}$$

张成 $\mathcal{P}$。最后，设 S，$R \subseteq \Sigma$ 为两个分层，且 $S \subseteq \overline{R}$，并假设 $\sigma \in \Gamma(L)$ 满足 $\sigma|_R \in \mathcal{Q}(R)$。则 $\sigma|_S \in \mathcal{Q}(S)$。

证明。取 $x \in S$ 以及 $v \in \mathcal{P}_x$。选取截面 $V \in \mathcal{H}_{\mathcal{P}}$，使得 $V_x = v$。根据假设，必有 $(\nabla_V \sigma)|_R = \nabla^R_{V|_R}(\sigma|_R) = 0$。令 $\{x_n\} \subseteq R$为 R中任意一个收敛到 S的序列。于是，由 $\nabla_V \sigma$ 的连续性，

$$0 = \lim_{n\to\infty} \nabla_V \sigma(x_n) = \nabla_V \sigma(x) = \nabla^S_v(\sigma|_S).$$

由于 x 和 v 是任意的，我们得出 $\sigma|_S \in \mathcal{Q}(S)$。 □

推论 12.7。 在命题12.6的设定下，给定 $\sigma \in \Gamma(\mathcal{L})$，对于每个正则层 $S \in \Sigma$，我们有$\sigma \in \mathcal{Q}(X) \iff \sigma|_S \in \mathcal{Q}(S)$ 。

证明。每个分层都包含于某个正则层的闭包中。现在应用命题 12。6。 □

注记12.8。这本质上就是我们在例子 12.4 中已经看到的情形：整个空间的量子化由开稠密层的量子化决定。

12.2 $[Q, R] = 0$

现在我们希望为量子化与约化可交换这一性质建立一个一般性表述。正如我们将看到的，这是一个一般框架，可以应用于环面流形等情形。

现在让我们回到奇异约化的情形。以下讨论中，我们固定如下条件。

- 一个李代数为 $\mathfrak{g}$ 的连通李群G 。
- 适当的哈密顿 G-空间 动量映射 : $(M,\omega) \to \mathfrak{g}^*$
- 一个 G-不变极化 $\mathcal{P} \subseteq$ 切丛$^{\mathbb{C}}M$。

记 π : 动量映射$^{-1}(0) \to$ 动量映射$^{-1}(0)/G = M_0$ 为商映射， $\mathcal{L}_0 = (\mathcal{L}|_{J^{-1}(0)})/G$，并且

$$\mathcal{P}_0 = \pi_*(\mathcal{P} \cap T^{\mathbb{C}}\mathcal{S}_G(J^{-1}(0))).$$

回顾一下，如果 $(\mathcal{L},\nabla)$ 在 动量映射$^{-1}(0)$上等变生成，也就是说，

$$J^{-1}(0) \times \Gamma(L)^G \to L|_{J^{-1}(0)}; \quad (x,\sigma) \mapsto \sigma(x)$$

是满射，那么我们就得到一个满射映射

$$\kappa : \Gamma(L)^G \to \Gamma(L_0) \tag{12.3}$$

有了这些准备，现在可以陈述如下结论。

定理 12.9. 假设 (L,∇) 在 J 上等变生成$^{-1}(0)$ ，并假设 $\mathcal{P}$ 在零水平处可约（见定义 *11.9*）。那么 κ 诱导一个线性映射

$$\kappa : \mathcal{Q}(M)^G \to \mathcal{Q}(M_0). \tag{12.4}$$

证明。令 $\sigma \in \mathcal{Q}(M)^G$、$x \in J^{-1}(0)$，以及 $v \in (\mathcal{P}_0)[x]$ 为约化极化中的一个元素。我们可以将 v 提升为 $\tilde{}v \in \mathcal{P}^{G_x}x$ 中的一个元素。根据构造，

$$\nabla^0_v \kappa(\sigma) = \kappa(\nabla_{\tilde{v}}\sigma) = \kappa(0) = 0.$$

因此， κ 定义了一个映射

$$\kappa : \mathcal{Q}(M)^G \to \mathcal{Q}(M_0).$$

□

定义 12.10(量子化与约化可交换**)**。 如果映射 κ在方程（12.4）是双射，那么我们称量子化与约化可交换。（通常用符号 $[Q,R] = 0$ 来表示。）

作为本章的结尾，我们现在将证明，对于本文中考察的两类主要例子——环面流形和余切丛， $[Q,\ R] = 0$ 。

12.3 环面流形与 $[Q, R] = 0$

设 $\Delta \subseteq \mathbb{R}^n$ 为一个 Delzant 多面体，且动量映射$_\Delta$：$(M_\Delta, \omega_\Delta) \to \mathbb{R}^n$ 是由 Delzant 构造诱导的环面T^n-流形，具体见第3.6.1节。记

$$\Delta = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, v_i \rangle \geq \lambda_i \text{ for all } i = 1, \ldots, N\},$$

令 k 为映射 $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^n$ 的核，该映射将每个标准基向量 e_i 映到 v_i ： $e_i \in \mathbb{R}^N$, ι ： $\mathfrak{k} \hookrightarrow \mathbb{R}^N$，即包含映射，以及$\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_N) \in \mathbb{R}^N$。那么，如果我们定义

$$J : \mathbb{C}^N \to \mathbb{R}^N; \quad (z_1, \ldots, z_N) \mapsto \frac{1}{2}(|z_1|^2, \ldots, |z_N|^2) - \lambda,$$

由此可得

$$M_\Delta = (\iota^* \circ J)^{-1}(0)/K$$

是一个带有动量映射的环面 T^N/K 流形

$$J_\Delta : M_\Delta \to \mathbb{R}^N; \quad [x] \mapsto J(x),$$

其中 $K = \exp(\mathfrak{k}) \subseteq T^N$。我们还在第 5.4.2节看到，典范复结构 I^{can} 在 $\mathbb{C}^N$ 上相对于 K 的哈密顿作用是可约的，因此诱导出一个 T^N/K 等变凯勒结构I_Δ。

现在讨论预量子线丛。正如我们在公式（10.7）中看到的，如果 λ和 $\iota^*(\lambda)$ 是整的，那么我们便得到一个诱导同态

$$\rho : T^N \to S^1$$

这使典范预量子线丛 $\mathbb{C}^N \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 成为可约预量子线丛，从而使我们能够定义预量子线丛

$$\mathcal{L}_\Delta = ((\iota^* \circ J)^{-1}(0) \times \mathbb{C})/K$$

在 M_Δ 上。此外，正如我们所见，对于任意子环面 $H \leq \ker(\rho)$， $\mathcal{L}_\Delta$ 相对于H 在M_Δ上的诱导作用是奇异可约的。记

$$J_H : M_\Delta \to \mathfrak{h}^*$$

对于这一诱导的哈密顿量 H-结构。此外，源自 Delzant 构造的规范 Kähler 结构 I_Δ 在M_Δ 上也是等变的，因此同样可约。由此，我们得到一个量子化映射

$$\mathcal{Q}(M_\Delta)^H \to \mathcal{Q}((M_\Delta)_0),$$

其中 $(M_\Delta)_0 := J_H^{-1}(0)/H$ 是关于H作用的M_Δ 的辛约化。现在我们证明，只要满足某些假设，这就是一个双射。首先讨论M_Δ的另一种构造。

对于每个面 $F \subseteq \Delta \subseteq \mathbb{R}^n$，定义

$$I_F := \{i \in \{1, \ldots, n\} \mid \langle x, v_i \rangle = \lambda_i \text{ for all } x \in F\}.$$

利用这一点，我们可以定义闭子集 $Z_F \subseteq \mathbb{C}^N$ 为

$$Z_F := \{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^N \mid z_i = 0 \text{ for all } i \in I_F\}.$$

现在令

$$U_\Delta := \mathbb{C}^N \setminus \bigcup_F Z_F.$$

令 $K_\mathbb{C} \subseteq (\mathbb{C}^\times)^N$ 为 K 的复化。于是，$K_\mathbb{C}$ 自然作用于U_Δ。此外，$J^{-1}(0) \subseteq U_\Delta$。

命题 12。11 ([Kir98])。 包含映射 $(\iota^* \circ J)^{-1}(0) \subseteq U_\Delta$ 诱导出一个微分同胚

$$M_\Delta \to U_\Delta / K_\mathbb{C}.$$

这同样可以扩展到等变线丛。回顾一下， $\mathcal{L}_\Delta$ 的定义同态由下式给出

$$\rho : T^N \to S^1; \quad (t_1, \ldots, t_N) \mapsto t_1^{-\lambda_1} \cdots t_N^{-\lambda_N},$$

其中 $\lambda = (\lambda_1, \ldots\ldots, \lambda_N) \in \mathbb{Z}^N$。这显然可推广到复化

$$\rho_\mathbb{C} : (\mathbb{C}^\times)^N \to \mathbb{C}^\times; \quad (z_1, \ldots, z_N) \mapsto z_1^{-\lambda_1} \cdots z_N^{-\lambda_N}$$

因此，我们得到一个线丛的T^N-等变同态

$$(\iota^* \circ J)^{-1}(0) \times \mathbb{C} \hookrightarrow U_\Delta \times \mathbb{C},$$

其中 $U_\Delta \times \mathbb{C}$ 具有由 $(\mathbb{C}^\times)^N$ 诱导的作用 $\rho_\mathbb{C}$。由于 $K_\mathbb{C}$ 在左侧自由作用，结合命题 12.11 可得以下结果

命题 12.12. 包含映射$(\iota^* \circ$ 动量映射$)^{-1}(0) \subseteq U_\Delta$ 诱导出一个复线丛的同构

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}_\Delta & \longrightarrow & (U_\Delta \times \mathbb{C})/K_\mathbb{C} \\ \downarrow & & \downarrow \\ M_\Delta & \longrightarrow & U_\Delta / K_\mathbb{C} \end{array}$$

其中底部箭头是命题 12.11.中的微分同胚。

因此，$(\mathbb{C}^\times)^N$ 的作用下降为在 $\mathcal{L}_\Delta \to M_\Delta$ 上的作用，并延拓了T^N的作用。因此，$H_{\mathbb{C}}$（H 的复化）自然地作用于 $\mathcal{L}_\Delta \to M_\Delta$。

命题 12.13. 设 $\sigma \in \Gamma(\mathcal{L}_\Delta)$。则，$i\xi \in i\mathfrak{h} \subseteq Lie(H_{\mathbb{C}})$ 通过下式作用于 σ

$$(i\xi) \cdot \sigma = \nabla^{\Delta}_{I_\Delta(\xi_{M_\Delta})}\sigma$$

特别地，如果 σ 是全纯的，则

$$(i\xi) \cdot \sigma = i(\xi \cdot \sigma).$$

证明。 固定 $\xi \in \mathfrak{h}$ 和 $\sigma \in \Gamma(\mathcal{L})$。根据命题2.39，截面 σ 提升为平凡丛 $U_\Delta \times \mathbb{C} \to U_\Delta$的$K_{\mathbb{C}}$-等变截面；该截面可视为$f: U_\Delta \to \mathbb{C}$上的$K_{\mathbb{C}}$ -等变函数，其中作用取为扩展后的$K_{\mathbb{C}}$ 作用于 $\mathbb{C}$。由于 σ 是将f 限制在$(\iota^* \circ J)^{-1}(0)$上得到的，我们将证明

$$(i\xi) \cdot f|_{(\iota^*\circ J)^{-1}(0)} = \nabla^{can}_{I^{can}(\xi_{\mathbb{C}^N})} f|_{(\iota^*\circ J)^{-1}(0)}$$

回忆一下，令$(r1, \theta_1, \ldots, r_N, \theta_N)$ 表示 $\mathbb{C}^N$上的极坐标，则有

$$I^{can}(\partial_{\theta_j}) = \partial_{r_j}$$

特别地，记作 $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_N) \in \mathbb{R}^N$，我们有

$$I^{can}(\xi_{\mathbb{C}^N}) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j I^{can}(\partial_{\theta_j}) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \partial_{r_j}.$$

因此，

$$\begin{aligned}
\nabla^{can}_{I^{can}(\xi_{\mathbb{C}^N})} f &= I^{can}(\xi_{\mathbb{C}^N}) f + \frac{i}{2}\sum_{j=1}^{N} r_j^2 d\theta_j(I^{can}(\xi_{\mathbb{C}^N}))f \\
&= \sum_{j=1}^{N} \xi_j \partial_{r_j} f + \frac{i}{2}\sum_{j=1}^{N} r_j^2 d\theta_j\Big(\sum_{k=1}^{N} \xi_k \partial_{r_k}\Big) f \\
&= \sum_{j=1}^{N} \xi_j \partial_{r_j} f.
\end{aligned}$$

反过来，如果我们固定 $z = (z_1, \ldots, z_N) \in$ 动量映射$^{-1}(0)$ 那么

$$\begin{aligned}(i\xi) \cdot f(z) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \rho(\exp(it\xi)) f(\exp(-it\xi) \cdot z) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} e^{t\langle \lambda, \xi \rangle} f(e^{t\xi_1} z_1, \ldots, e^{t\xi_N} z_N) \\ &= \langle \lambda, \xi \rangle f(z) + \sum_{j=1}^{N} \xi_j \partial_{r_j} f(z)\end{aligned}$$

注意，根据定义，由于 $H \leq \ker(\rho)$ ，因此有 $\langle \lambda, \xi \rangle \in 2\pi\mathbb{Z}$。然而，属于核是李代数层面上的线性关系，因此可得 $\langle \lambda, \xi \rangle = 0$。

现在来证明全纯截面的公式。设 $\sigma \in \Gamma(\mathcal{L}_\Delta)$是全纯的，并注意到

$$I_\Delta(\xi_{M_\Delta} + iI_\Delta(\xi_{M_\Delta})) = -i(\xi_{M_\Delta} + iI_\Delta(\xi_{M_\Delta}))$$

因此， $\xi_{M_\Delta} + iI_\Delta(\xi_{M_\Delta})$ 是反全纯切丛 $T^{0,1}{}_{I_\Delta} M_\Delta$ 的一个截面，所以根据 σ 全纯的定义，我们有

$$\nabla_{\xi_{M_\Delta} + iI_\Delta(\xi_{M_\Delta})} \sigma = 0.$$

因此，根据联络在第一个变量上的线性性，

$$\nabla_{\xi_{M_\Delta}} \sigma = -i \nabla_{I_\Delta(\xi_{M_\Delta})} \sigma$$

因此结论成立。 □

推论 12.14. 如果 $\sigma \in \mathcal{Q}(M_\Delta)^H$，那么 σ 是 $H_{\mathbb{C}}$-等变的。

证明。 固定 $\sigma \in \mathcal{Q}(M_\Delta)^H$。由于 H 是标准环面 $(S^1)^N$的子环面，我们有 $H_{\mathbb{C}} = H \cdot \exp(i\mathfrak{h})$。因此，由于假设$H$ 是连通的，只需证明若 $\xi_1, \xi_2 \in \mathfrak{h}$，则

$$(\xi_1 + i\xi_2) \cdot \sigma = 0.$$

在这种情况下，我们很容易看出 $\xi_1 \cdot \sigma = 0$ 因为 σ 是 H-等变的。此外，由于 σ 按定义是全纯的，由命题 12.13可得

$$(i\xi_2) \cdot \sigma = i(\xi_2 \cdot \sigma) = 0.$$

因此， σ 是$H_{\mathbb{C}}$-等变的。 □

利用这一结果，我们现在几乎可以证明量子化与约化可交换。

定理 12.15。假设

$$M_\Delta^s := H_{\mathbb{C}} \cdot J_H^{-1}(0)$$

是一个开子集。那么

$$\kappa : \mathcal{Q}(M_\Delta)^H \to \mathcal{Q}((M_\Delta)_0)$$

如定理 12.9中所述，是单射。

证明。 若 $\sigma \in \mathcal{Q}(M_\Delta)^H$ 满足 $\kappa(\sigma) = 0$，则有 $\sigma|_{J_H^{-1}(0)} = 0$，因为该映射逐纤维地

$$\mathcal{L}_\Delta|_{J_H^{-1}(0)} \to (\mathcal{L}_\Delta)_0$$

是一个双射。由推论 12.14， σ 是 $H_{\mathbb{C}}$ 等变的，因此 $\sigma|_{M_\Delta^s} = 0$。因此，我们得到一个在开集上消失的全纯截面，所以$\sigma = 0$。因此， κ 是单射。 □

12.4 余切丛与 $[Q$、实数集 $] = 0$

设G 是一个连通李群，Q 是一个适当的G-空间，而$J : T^*Q \to \mathfrak{g}^*$ 是哈密顿提升。我们几乎得到了约化空间$(T^*Q)_0$上分层量子化数据的典范选择。特别地，令$\mathcal{L} = T^*Q \times \mathbb{C}$ 为带有典范预量子联络$\nabla = L - i\theta_Q$的平凡丛，其中 $\theta_Q \in \Omega^1(T^*Q)$ 是刘维尔 1-形式，根据例10.16，我们有 $\mathcal{L}$ 在$J^{-1}(0)$ 上奇异可约，因此得到一个典范预量子线丛

$$\mathcal{L}_0 = (T^*Q)_0 \times \mathbb{C}.$$

此外，令 $\tau_Q : T^*Q \to Q$ 为丛映射，我们有一个典范极化

$$\mathcal{P} = \ker(T\tau_Q) \otimes \mathbb{C}$$

正如我们在例 11.10中所见， $\mathcal{P}$ 通常不可约。不过，我们仍然得到一个伪丛

$$\mathcal{P}_0 = T^{\mathbb{C}}\pi_0(\mathcal{P} \cap T^{\mathbb{C}}\mathcal{S}_G(J^{-1}(0)))$$

它在每个分层的开稠密集上限制为一个极化 $(T^*Q)_0$。因此，我们仍然可以定义

$$\mathcal{Q}((T^*Q)_0) = \{\sigma \in \Gamma(\mathcal{L}_0) \mid \nabla_v \sigma = 0 \text{ for all } v \in \mathcal{P}_0\}$$

注意，在此情形下， $\mathcal{L}$ 和 $\mathcal{L}_0$ 的截面分别可以与 T^*Q 和 $(T^*Q)_0$, 上的复值可微函数对应起来。进一步地，回顾定理 5.14， $\mathcal{Q}(T^*Q) = \tau_Q^* C^\infty(Q, \mathbb{C})$ 以及 $\mathcal{Q}(T^*Q)^G = \tau_Q^* C^\infty(Q)^G$。利用对应关系 $\tau_Q^* C^\infty(Q) = C^\infty(Q)$ 以及 $C^\infty(Q, \mathbb{C})^G = C^\infty(Q/G, \mathbb{C})$，我们可以将 $\mathcal{Q}(T^*Q)^G$ 视为商空间 Q/G 上的光滑复值函数集。事实证明，这一见解使我们能够证明，在此处量子化与约化同样可交换。

定理 12.16。 映射 $\mathcal{Q}(T^*Q)^G \to \mathcal{Q}((T^*Q)_0)$ 是一个双射。特别地，$\mathcal{Q}((T^*Q)_0)$ 可以与 $C^\infty(Q/G)$等同。

证明。 首先，我们来证明 κ是单射。设$f \in \mathcal{Q}(T^*Q)^G$满足 $\kappa(f) = 0$。那么$f \in \tau_Q^* C^\infty(Q)^G$ 且$f|_{J^{-1}(0)} = 0$。由于f 在余切纤维上为常数，且所有余切纤维都与 动量映射$^{-1}(0)$ 非平凡相交，因此$f = 0$。故 κ 是单射。

现在证明满射。令 $0_Q : Q \hookrightarrow T^*Q$ 为零截面。由于 动量映射$^{-1}(0)$是一个伪丛，零截面的像包含于 动量映射$^{-1}(0)$ 中，并且是光滑且等变的。特别地，我们有

$$0_Q^* C^\infty(J^{-1}(0))^G \subseteq C^\infty(Q)^G.$$

因此，我们得到子笛卡尔空间之间的一个可微映射

$$\overline{0_Q} : Q/G \to (T^*Q)_0$$

令$f \in \mathcal{Q}((T^*Q)_0)$ 和 $\pi_Q : Q \to Q/G$，我们得到一个函数 $\pi_Q^* 0_Q^* f \in C^\infty(Q)$。现在令

$$h = \tau_Q^* \pi_Q^* \overline{0_Q}^* (f) \in \mathcal{Q}(T^*Q)^G$$

我断言 $\kappa(h) = f$。事实上，如果我们将约化映射记为 $\pi_0 : J^{-1}(0) \to (T^*Q)_0$ ，只需证明

$$h|_{J^{-1}(0)} = \pi_0^* f$$

因此，归根结底，只需证明对于任意轨道类型分层 $S \in \mathcal{S}_G(Q)$，有 $h|_{Z_S} = \pi_0^* f|_{Z_S}$，其中 $Z_S \in \mathcal{S}_G(J^{-1}(0))$ 是定理 9.37中的轨道类型分层。回忆一下，我们已经证明了 $J^{-1}{}_S(0) \subseteq Z_S$ 是一个开稠密集，其中 $J_S : T^*S \to \mathfrak{g}^*$ 是 G 在 S 上的作用的哈密顿提升。因此，只需证明

$$h|_{J_S^{-1}(0)} = \pi_0^* f|_{J_S^{-1}(0)}.$$

这由定理 5.25 中的非奇异约化结论立即得出。因此， $\kappa(h) = f$，并且 κ 是一个双射。 □

参考文献

[AFT17] David Ayala、John Francis 和 Hiro Lee Tanaka，《分层空间上的局部结构》，《数学进展》**307**（2017年），903–1028（英文）。

[Arn78] V. I. Arnold，经典力学的数学方法，第四版《数学研究生教材》第60卷，施普林格出版社，柏林，1978年。

[AS61] Nachman Aronszajn 和 K. T. Smith，贝塞尔势理论。*I*，傅里叶研究所年刊**11**（1961年），385–475（英文）。

[Bie75] Edward Bierstone，从轨道空间提升同伦，拓扑学 **14**(1975年), 第3期, 245–252。

[CM18] Marius Crainic 和 João Nuno Mestre，轨形空间作为可微分层空间，《数学物理通讯》**108**（2018），第 3 期，805–859 页（英文），arXiv:1705.00466 [math]。

[Del88] Thomas Delzant，周期 Hamilton 系统与矩映射，《法国数学会通报》法国**116**（1988），第 3 期，315–339 页（英文）。

[Dir82] P. A. M. Dirac,《量子力学原理》，第四版——版，第四版，第4版，《国际专著丛书》《物理学》，牛津大学出版社，牛津、纽约，1982年2月1982年。

[DS08] Ana Cannas Da Silva，《辛几何学讲义》，讲座数学讲义，第1764卷，Springer，柏林，海德堡，2008年。

[Dui] J.J. Duistermaat，《带对称性的动力系统》。

[ER90] C. Emmrich 和 H. Römer，轨形作为……的构型空间具有规范对称性的系统，《数学物理通讯》129**卷**（1990），第1期，69–94页（英文）。

[GGK02] Victor Guillemin、Viktor Ginzburg 和 Yael Karshon，矩映射、配边与哈密顿群作用，《数学综述与专著，第98卷，美国数学学会，2002年。

[Got95] Mark J. Gotay，《环面的完全量子化》，载于《量子化、相干态与复结构》（J.-P. Antoine、S. Twareque Ali、W. Lisiecki、I. M. Mladenov 和 A. Odzijewicz 编），Springer US，波士顿，马萨诸塞州，1995年，第55–62页（英文）。[GR12] Janusz Grabowski 和 Mikołaj Rotkiewicz，分次丛与齐次结构，《几何与物理学杂志》62（2012），第1期，21–36页。[Gro46] H. J. Groenewold，论初等量子力学的原理，《物理学》12（1946），第7期，405–460页。[GS82] V. Guillemin 和 S. Sternberg，群表示的几何量子化与重数，《数学新进展》67（1982），第3期，515–538页（英文）。[GS84] Victor Guillemin 和 Shlomo Sternberg，《物理学中的辛技术》，剑桥大学出版社，1984。[Gui94] Victor Guillemin，哈密顿量 T^n-空间的动量映射与组合不变量，《数学进展》，第122卷，Birkhäuser，波士顿，马萨诸塞州，1994（英文）。[Hal13] Brian C. Hall，《数学家的量子理论》，数学研究生教材，第267卷，Springer，纽约，纽约州，2013（英文）。[Ham08] Mark D. Hamilton，环面流形的量子化由矩多面体中的整数格点给出，2008年2月，arXiv:0708.2710 [math].[Ham10] Mark Hamilton，局部托里流形与奇异玻尔–索末菲叶，《美国数学会回忆录》，第207卷，美国数学会，2010年9月（英文），ISSN：0065-9266，1947-6221，第971期。[HHS+98] W. Hazod、K. H. Hofmann、H.-P. Scheffler、M. Wünster 和 H. Zeuner，紧子群的正规化子、可交换自同构的存在性及其在算子半稳定测度中的应用，《李理论杂志》8（1998），189–209页。[Hud24] Daniel Hudson，《李群胚与李代数丛上的乘法权重》，博士论文，多伦多大学（加拿大），加拿大—安大略省，2024，ISBN：9798342756303。

[IZ13] Patrick Iglesias-Zemmour，《微分学》，数学调查与专著，第185卷，美国数学会，2013。[JRS11] M. Jotz、T. S. Ratiu 和 J. Sniatycki，《狄拉克结构的奇异约化》，美国数学学会会刊363（2011），第6期，2967–3013页，出版者：美国数学会。[Kir62] A. A. Kirillov，幂零李群的酉表示，《俄罗斯数学调查》17（1962），第4期，53页（英文），出版者：IOP出版社。[Kir98] Frances Kirwan，代数几何中的动量映射与约化，《微分几何及其应用》9（1998），第1期，135–171页。[KL23] Yael Karshon 和 Eugene Lerman，《子笛卡尔空间上的向量场与流》，2023年11月，arXiv:2307.10959 [math].[Kos09] Bertram Kostant，轨道、辛结构与表示论，载于《论文集：第一卷 1955–1966》（Bertram Kostant、Anthony Joseph、Shrawan Kumar 和 Michèle Vergne 编），Springer，纽约，纽约州，2009，第482–482页（英文）。[Lee13] John M. Lee，《光滑流形导论》，第2版，数学研究生教材，第218卷，Springer，纽约；伦敦，2013，OCLC：ocn800646950。[LT10] Alexander Lytchak 和 Gudlaugur Thorbergsson，商空间中的曲率爆炸及其应用，《微分几何杂志》85（2010），第1期，117–140页，出版者：Lehigh University。[Mar75] Charles D. Marshall，《子笛卡尔空间上的微积分》，《微分几何杂志》10（1975），551–574页。[Mat73] John N. Mather，《分层与映射》，载于《动力系统》（M. M. Peixoto 编），Academic Press，1973年1月，第195–232页。[Mat77] ，可微不变量，《拓扑学》16（1977），第2期，145–155页。[Mat12] John Mather，《拓扑稳定性札记》，《美国数学会通报》49（2012），第4期，475–506页（英文）。

[Max19] Laurenţiu G. Maxim，《交叉同调与反常层：奇点应用》，数学研究生教材，第 281 卷，Springer International Publishing，尚贝里，2019（英文）。[May20] Maxence Mayrand，《由半单李代数构造的分层超凯勒空间》，《变换群》25（2020），第 1 期，191–215（英文）。[Mey73] Kenneth R. Meyer，《力学中的对称性与积分》†，载于《动力系统》（M. M. Peixoto 编），Academic Press，1973 年 1 月，第 259–272 页。[Mic08] Peter W. Michor，《微分几何专题》，数学研究生研究丛书，第 93 卷，美国数学会，2008。[Miy23] David Miyamoto，《奇异叶状结构的基本德拉姆复形》，《国际数学研究通知》2023（2023），第 8 期，6364–6401。[MMO+07]Jerrold E. Marsden 、 Gerard Misiolek 、 Juan-Pablo Ortega、Matthew Perlmutter 和 Tudor S. Ratiu，《分阶段哈密顿约化》，《数学讲义》，第 1913 卷，Springer，柏林、海德堡，2007（英文）。[Mol88] Pierre Molino，《黎曼叶状结构》，《数学进展》，第 73 卷，Birkhäuser Boston, Inc.，波士顿，MA，1988。MR 932463[Mol24] Maarten Mol，《横向动量映射的分层》，《数学汇刊》160（2024），第 3 期，518–585（英文）。[MR25] David Miyamoto 和 Ethan Ross，《奇异黎曼叶状结构与分层》（编写中），2025。[MS99] Eckhard Meinrenken 和 Reyer Sjamaar，《奇异约化与量子化》，《拓扑学》38（1999），第 4 期，699–762。[MW74] Jerrold Marsden 和 Alan Weinstein，《具有对称性的辛流形约化》，《数学物理报告》5（1974），第 1 期，121–130。[Nes03] Jet Nestruev，《光滑流形与可观测量》，第 2 版，数学研究生教材，Springer，2003。

[NN57] A. Newlander 和 L. Nirenberg，《近复流形的复解析坐标》，《数学年刊》65（1957），第 3 期，391–404，出版方：[《数学年刊》，普林斯顿大学受托人代表《数学年刊》出版，普林斯顿大学数学系]。[Pal61] Richard S. Palais，《非紧李群作用的切片存在性》，《数学年刊》73（1961年），第 2 期，295–323，出版方：《数学年刊》。[Pfl01] Markus J. Pflaum，《分层空间的解析与几何研究》，《数学讲义》，第 1768 卷，Springer，柏林、海德堡，2001（英文）。[PROSD07] Matthew Perlmutter、Miguel Rodríguez-Olmos 和 M. Esmeralda Sousa-Dias，《零动量处约化余切丛的几何》，《几何与物理学杂志》57（2007），第 2 期，571–596。[PTW17] Hessel B. Posthuma、Xiang Tang 和 Kirsten J. L. Wang，《适当黎曼李群胚的解消》，2017 年 6 月，arXiv:1706.07843 [数学]。[Rad12] Marco Radeschi，《球面中的低维奇异黎曼叶状结构》，2012 年 3 月，arXiv:1203.6113 [数学]。[Ros24] Ethan Ross，《分层向量丛：例子与构造》，《几何与物理学杂志》（2024），105114。[Saf23] Pavel Safronov，《移位几何量子化》，《几何与物理学杂志》194（2023），104992。[Sch75] Gerald W. Schwarz，《紧李群作用下的不变光滑函数》，《拓扑学》14（1975），第 1 期，63–68（英文）。[Sch80] ，《轨道空间的光滑同伦提升》，《高等科学研究院数学出版物》51（1980），第 1 期，37–132（英文）。[Sch23] Torsten Schoeneberg，对“李子群不连通，且李代数的正规化子不是正规化子的李代数”的例子的回答，2023 年 6 月。[Seg68] Graeme Segal，《等变K理论》，高等科学研究院数学出版物（1968），第 34 期，129–151。MR 234452

[Sik67] Roman Sikorski, 《抽象协变导数》, Colloquium Mathematicae 18.1 (1967), 251 –272.[SL91] Reyer Sjamaar 和 Eugene Lerman, 《分层辛空间与约化》, 《数学年刊》134 (1991), no. 2, 375– 422, 出版者: 《数学年刊》.[Sou67] Jean-Marie Souriau, 《几何量子化: 应用》, 亨利·庞加莱研究所年刊, A辑, 理论物理 6 (1967), no. 4, 311–341 (en).[Sou70] J.-M. Souriau, 《动力系统结构: 物理学的辛观点》, Birkhäuser, 1970.[Ste74] P. Stefan, 《可达集、轨道与带奇点的叶状结构》, Proceedings of the London Mathematical Society s3-29 (1974), no. 4, 699–713.[Sus73] Héctor J. Sussmann, 《向量场族的轨道与分布的可积性》, Transactions of the American Mathematical Society 180 (1973), 171–188, 出版者: 美国数学会.[SW83] Jedrzej Sniatycki 和 Alan Weinstein, 《奇异动量映射的约化与量子化》, 《数学物理通讯》7 (1983), no. 2, 155–161, 出版者: 克吕维尔学术出版社.[Tho69] R. Thom, 《分层集合与态射》, 美国数学会通报 75 (1969), no. 2, 240–284 (en).[Vai91] Izu Vaisman, 《泊松流形的几何量子化》, 数学物理学杂志 32 (1991), no. 12, 3339–3345.[Vis05] Angelo Vistoli, 《格罗滕迪克拓扑、纤维范畴与下降理论》, 《基础代数几何: 格罗滕迪克的 FGA 释义》, 数学调查与专著, 第123卷, 美国数学会, 普罗维登斯, 罗得岛州, 2005, OCLC: ocm61362228.[Wei71] Alan Weinstein, 《辛流形及其拉格朗日子流形》, 数学进展 6 (1971), no. 3, 329–346.[Wei83] , 《泊松流形的局部结构》, 微分几何杂志 18 (1983), no. 3, 523–557, 出版者: 利哈伊大学。

[Wey16] Hermann Weyl, 《经典群：其不变量与表示》, 《经典群》, 普林斯顿大学出版社，2016年6月 (en).[Whi15] Hassler Whitney, 《解析簇的局部性质》, 《解析簇的局部性质》, 普林斯顿大学出版社, 2015年12月，第205–244页 (en).[Zim24] Yoav Zimhony, 《光滑局部平凡分层空间的交换控制数据》, 变换群 (2024) (en).[´Sn75] J. ´Sniatycki, 《几何量子化中的玻尔-索末菲条件》, 《数学物理报告》7(1975年), no. 2, 303–311.[´Sn13] , 奇异空间的微分几何与对称性约化，新数学专著，剑桥大学出版社，剑桥，2013。