arXiv:2601.03554v1 [math.GT] 7 Jan 2026

Baseilhac–Benedetti 不变量与 Bonahon–Liu–Wong–Yang 不变量之间的关系

STAVROS GAROUFALIDIS 和 TAO YU

ABSTRACT. Baseilhac–Benedetti 受 Kashaev 思想的启发，引入了依赖于奇数阶复单位根的带穿孔双曲曲面的伪阿诺索夫同胚不变量。大约在同一时期，Bonahon–Liu 引入了伪阿诺索夫同胚在单位根处的另一组不变量。稍后，Dimofte 与第一作者利用其几何表示，引入了带尖点双曲三维流形在单位根处的不变量。在另一项工作中，Bonahon–Wong–Yang 引入了伪阿诺索夫同胚在单位根处的另一组不变量。所有这些不变量被推测具有密切关系，而我们的目标是证明 Baseilhac–Benedetti 不变量、Bonahon–Liu–Wong–Yang 不变量与鲜为人知的阿贝尔$\mathfrak{gl}_1$不变量之间的精确关系。

CONTENTS

1. 引言 2 1.1. 伪阿诺索夫曲面同胚的不变量 2 1.2. 我们的结果 2 1.3. 论文结构 4 2. 量子环面 5 2.1. 定义 5 2.2. 表示 5 2.3. 对子环面的限制 7 3. 映射类的不变量 8 3.1. 曲面与三角剖分 8 3.2. Kashaev 代数 8 3.3. Chekhov–Fock 代数 9 3.4. Kashaev 代数与 Chekhov–Fock 代数之间的关系 9 3.5. 曲面特征标与中心特征 10 3.6. 坐标变换同构 11 3.7. BB 和 BLWY 映射类不变量 12 3.8. $\mathfrak{gl}_1$-映射类不变量 15 3.9. 主定理的证明 18 3.10. Chekhov–Fock 代数表示的进一步分解 19 4. 算子行列式是单位根 20 4.1. 翻转的分解 20 4.2. 坐标变换与交织算子的分解 22 4.3. 引理 3.19 的证明 23

日期：2026年1月1日。关键词和短语：双曲曲面、伪阿诺索夫同胚、量子不变量、拓扑量子场论、单位根、Baseilhac–Benedetti、Kashaev、Bonahon–Liu–Wong–Yang、阿贝尔不变量、单环不变量。

5. 示例与计算 24
5.1. 粘合方程与 Neumann–Zagier 数据 24
5.2. 分层三角剖分 25
5.3. 几何表示 25
5.4. 显式计算 26
5.5. $\Sigma_{1,\ 1}$上的示例 26
5.6. $\Sigma_{1,\ 2}$上的示例 28
致谢 28
参考文献 28

1. Introduction

1.1. **伪阿诺索夫曲面同胚的不变量**。 伪阿诺索夫（简称 pA）双曲曲面同胚是一颗连接二维与三维双曲几何的瑰宝，正如 Thurston 所发现的那样 [Thu97]。这一联系使我们能够具体描述 pA 同胚，并明确确定其不变量（例如，参见 [FM12]），例如曲面上的两种不变奇异叶状结构、其伸缩因子、其映射环面的双曲体积，以及用分层三角剖分表示的共轭类标准形式 [Ago11]。此外，遵循 Thurston 的设想，借助 `SnapPy` 和 `flipper` [CDGW、Bel18]等双曲几何标准软件，所有这些不变量都可以明确计算。特别是，pA 类的分类还配有易于查阅的实例，用以阐明已证明的定理。

因此，从某种意义上说，我们借助双曲几何已经了解了关于伪阿诺索夫曲面同胚的一切。我们还可能想了解什么呢？这个问题的部分答案，来自理解 2+1维拓扑量子场论（简称 TQFT）这一问题。后者会为三维流形，尤其是伪阿诺索夫曲面同胚的映射圆柱，赋予丰富但尚未得到充分理解的数值不变量。这些不变量通常依赖于一个复单位根，而对它们的细化则表明，可以利用基本群到 $SL_2(\mathbb{C})$ 的背景表示来延拓这些不变量。

Baseilhac–Benedetti 沿袭 Kashaev 的思想 [Kas95], 引入了带穿孔双曲曲面上的伪阿诺索夫同胚的不变量，这些不变量依赖于一个奇数阶复单位根 [BB05，BB18]。大约在同一时期，Bonahon–Liu 引入了另一组在单位根处定义的伪阿诺索夫同胚不变量 [BL07]。稍后，Dimofte 和第一作者利用其几何表示，引入了带尖点双曲三维流形在单位根处的不变量 [DG18]。与此同时，Bonahon–Wong–Yang 引入了另一组在单位根处定义的伪阿诺索夫同胚不变量。人们猜想，所有这些不变量都密切相关；我们的目标是证明 Baseilhac–Benedetti（简称 BB）不变量、Bonahon–Liu–Wong–Yang（简称 BLWY）不变量以及鲜为人知的阿贝尔 $\mathfrak{gl}_1$不变量之间的精确关系。

1.2. **我们的结果**。 本文中，我们始终在复数域 $\mathbb{C}$上工作，且q 为奇数阶复单位根 n。注意， q^2 在我们先前的工作 ζ 中记作 [GY]。

Baseilhac–Benedetti 和 Bonahon–Liu–Wong–Yang 不变量有着相似的起源。它们都利用带穿孔曲面 λ 的理想三角剖分 Σ 来定义，该曲面的亏格为 g，有 p个欧拉示性数为负的穿孔 $\chi(\Sigma) = 2-2g-p < 0$。这样的三角剖分导出两个量子环面（即由 q-对易算子构成的劳朗多项式代数），其中一个是 Chekhov–Fock 代数的商 $\mathbb{T}_q^{\mathrm{CFr}}(\lambda)$，另一个则是 Kashaev 代数，详见下文第 3.2 节和第 3.3 节。两者之间的关系由一个代数嵌入映射给出

$$\mathbb{T}_q^{\mathrm{CFr}}(\lambda) \otimes_{\mathbb{C}[P_\lambda]} \mathbb{T}_q(H) \hookrightarrow \mathbb{T}_q^{\mathrm{K}}(\lambda) \tag{1}$$

量子环面（见下文命题 3.3 ）其中 $\mathbb{T}_q(H)$ 是第三个量子环面，它取决于曲面的同调 $H = H_1(\Sigma,\ \mathbb{Z})$，而不取决于三角剖分。(1) 的像是一个余秩为 $p-1$ 的量子子环面，其中 p 是 Σ 的穿孔数。

一个重要之处在于，当 q 是单位根时，量子环面的表示论很容易描述：量子环面的不可约表示由其在中心上的限制诱导得到。中心是一个由多个变量构成的交换劳朗多项式环，而后者的表示由其特征标确定。

到目前为止，一切都取决于 λ 的理想三角剖分 Σ，但任意两个这样的三角剖分都可由一系列翻转相互关联（任意两个翻转序列又可由一系列平方变换和五边形变换相互关联），而量子环面 $\mathbb{T}_q^{\mathrm{CFr}}(\lambda)$ 与 $\mathbb{T}_q^{\mathrm{K}}(\lambda)$ 以及比较映射（1) 之间均可通过同构关联。这产生了相应群胚的作用，特别是，由此可以讨论在映射类作用下不变的特征标 $r\,\varphi$。

比较映射 (1) 将 $\mathbb{T}_q^{\mathrm{K}}(\lambda)$ 的一个表示分解为 $\mathbb{T}_q^{\mathrm{CFr}}(\lambda)$ 和 $\mathbb{T}_q(H)$ 的表示的张量积。此分解需要使用一般特征 r，它允许存在一种装饰 h，使得 (r,h) 在映射类φ作用下保持不变。完成这一步后，该分解将 BB不变量 $T^{\mathrm{K}}_{\varphi,r}(q)$（定义 3.7）表示为 BLWY不变量 $T\mathrm{CF}_{\varphi,r,\zeta_v}(q)$（定义 3.11）与 $\mathfrak{gl}_1$-不变量 $T^{H}_{\varphi,\zeta_v}(q)$（定义 3.13）的乘积之和。后两者还依赖于穿孔权重 $\zeta_v \in \mu_n^p$[1]，它为每个穿孔赋予一个 n 次单位根，且所有赋值的乘积为 1。$\mathfrak{gl}_1$- 不变量是基于阿贝尔群 $U(1)$ 的 $2{+}1$ 维拓扑量子场论的一部分，该理论多年前已定义 [MOO92, Goc90]。综合以上结果，我们得到以下结论。

定理 1.1. 在上述假设下，我们有

$$\pm T^{\mathrm{K}}_{\varphi,r}(q) = \sum_{\zeta_v} \eta_{\zeta_v} T^{\mathrm{CF}}_{\varphi,r,\zeta_v}(q) T^{H}_{\varphi,\zeta_v}(q) \tag{2}$$

其中，我们对满足以下条件的穿孔权重求和：ζ_v 在 φ作用下保持不变，且 $\eta_{\zeta_v} \in \mu_{n^{4g-4+2p}}$ 是单位根，用以处理不变量的不确定性。式 (2) 中的符号，是由 φ诱导的穿孔权重置换的符号。

这里有几点说明。

1. 上述定理中的恒等映射并非显然，因为其中涉及的映射类群在 $T_{\mathrm{K}\varphi,\ r}(q)$ 和 $T_{\mathrm{CF}\varphi,\ r,\ \zeta_v}(q)$ 上的表示，分别包含维数为 $n^{4g-4+2p}$ 和 n^{3g-3+p} 的向量空间的端同态。

[1]这里，μ_n 表示所有复数 n 次单位根的集合。

2. 设 $M_{\widehat{\varphi}}$ 为映射类 $\widehat{\varphi}$ 在 Σ 的映射环面，其中已将所有穿孔封口。则 $\left|T^{H}_{\varphi,\zeta_v}(q)\right| = \frac{1}{\sqrt{n}}\left|H_1(M_{\widehat{\varphi}}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})\right|^{1/2}$ 或为零（见下文推论 3.18）。当 Σ 只有一个穿孔时，则 $\zeta_v = 1$ 且方程（2）简化为

$$T^{\mathrm{K}}_{\varphi,r}(q) = \pm\eta_1 T^{\mathrm{CF}}_{\varphi,r,1}(q) T^{H}_{\varphi,1}(q)\,. \tag{3}$$

此外，当 $M_{\widehat{\varphi}}$ 具有最小的 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-同调时，也就是说，$H_1(M_{\widehat{\varphi}}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$，那么 $\left|T^{H}_{\varphi,1}(q)\right| = 1$，并且

$$\left|T^{\mathrm{K}}_{\varphi,r}(q)\right| = \left|T^{\mathrm{CF}}_{\varphi,r,1}(q)\right|\,, \tag{4}$$

这与根据表示维数得出的直观猜测有很大不同。3. 上述定理涉及映射类的数值不变量。还有一个更强的版本，涉及交织算子的共轭类；见下文公式（61）。

4. 当 φ 是一个 pA 穿孔曲面同胚时，存在一个规范选择的 (r, h)，它对应于映射环面的几何表示。下文第5 节将对此进行讨论。

5. 第二作者已给出了 BB 和 BLWY 不变量的计算机实现，并将在下文第 5.5 节和5.6 节讨论亏格为 1 且有 1 或 2 个穿孔的 pA 映射类示例。

我们以一则关于上述量子环面的表示中所涉及张量的性质的注记结束本节。

注记 1.2. 在先前的工作中，我们猜想 [DG18]的单环不变量与带穿孔曲面上一个伪阿诺索夫同胚的 BLWY 不变量一致，其中所用的是几何的 $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$-表示 [GY，猜想 1.1]。我们指出，单环不变量不过是每个单位根处幂级数的常数项；这些常数项可从阶为 n 的单位根算术地重新展开为阶为 pn的单位根处的幂级数，并且在相差一个 Frobenius 扭曲的意义下彼此确定 [GSWZ]。

从这个意义上说，单位根处的不变量是 ‘拓扑量子场论不变量 [GSWZ]的 étale 实现。

1.3. **论文结构**。 在第 2 节中，我们讨论量子环面的基础知识及其表示论。

在第3节中，我们介绍与带理想三角剖分的带穿孔曲面相关联的量子环面，讨论从一种三角剖分过渡到另一种三角剖分的连接映射，并定义 BB 和 BLWY 不变量。

在第4节中，我们给出前一节所述结论的证明，从而完成定理1.1的证明。

在第 5节中，我们讨论伪阿诺索夫曲面同胚的映射环面的分层理想三角剖分的组合学及其粘合方程，并利用它们将伪阿诺索夫同胚的自同态不变量转化为数值型 BB 和 BLWY 不变量。

2. Quantum tori

2.1. 定义。 设 L 是一个配备整数值斜对称双线性形式 ω 的格。那么，与这些数据相关联的量子环面 $\mathbb{T}_q$ 是一个 $\mathbb{C}$-代数

$$\mathbb{T}_q(L) = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{x^k \mid k \in L\}, \qquad x^k x^l = q^{\omega(k,l)} x^{k+l}. \tag{5}$$

量子环面按 L 分级，而 L 的子群定义了 $\mathbb{T}_q(L)$ 的子代数，这些子代数本身也是量子环面。$\mathbb{T}_q(L)$ 的秩（即 Gelfand–Kirillov 维数）等于 L 的秩。

一般而言，$\mathbb{T}_q(L)$ 是非交换的。它的中心，即交换环面的坐标环，由 $Z(\mathbb{T}_q(L)) = \mathbb{T}_q(L_n)$ 给出，其中

$$L_n = \{k \in L \mid \omega(k,l) = 0 \bmod n, \text{ for all } l \in L\}. \tag{6}$$

若 $\{\chi_i\}_{i\in I}$ 是 L 的一组基，则我们有如下表示

$$\mathbb{T}_q(L) = \mathbb{C}\langle x_i^{\pm 1}, i \in I\rangle / \langle x_i x_j - q^{2\omega_{ij}} x_j x_i\rangle, \qquad x_i = x^{\chi_i}, \tag{7}$$

其中我们使用简写 $\omega_{ij} = \omega(\chi_i, \chi_j)$。单项式由 Weyl 排序乘积给出

$$x^k = [x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}] := q^{-\sum_{i<j}\omega_{ij}k_i k_j} x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}. \tag{8}$$

Weyl 排序可更一般地定义于 q-交换元素上，并且在如下意义下满足交换律和结合律：

$$[\cdots ab \cdots] = [\cdots ba \cdots], \qquad [a[bc]] = [[ab]c] = [abc] \tag{9}$$

对于 q-交换元素 a、b、c。

现在假设 $(L,\ \omega)$、$(L',\ \omega')$ 是量子环面的定义格。满足 $f^*\omega = \omega'$ 的同态 $f : L' \to L$ 以显然的方式定义了量子环面之间的代数同态。事实上，我们可以插入标量，得到由下式定义的缩放单项式映射：

$$f_{\hat{s}\hat{s}'} : \mathbb{T}_q(L') \to \mathbb{T}_q(L), \qquad f_{\hat{s}\hat{s}'}(x'^k) = \frac{\hat{s}'(k)}{\hat{s}(f(k))} x^{f(k)}, \tag{10}$$

其中 $\hat{}s : L \to \mathbb{C}^\times$，$\hat{}s' : L' \to \mathbb{C}^\times$ 是群同态。

2.2. 表示。 本文中所有表示都是有限维 $\mathbb{C}$-向量空间。

使用量子环面的一个主要优点是，它们的表示易于描述。事实上，交换环面的不可约表示由特征标给出，而量子环面的不可约表示则由其对中心（一个交换环面）的限制唯一确定。更准确地说，众所周知，量子环面 $\mathbb{T}_q(L)$ 的每个有限维不可约表示 $\rho : \mathbb{T}_q(L) \to \mathrm{End}(W)$（在同构意义下）都由其对中心的限制唯一确定，而根据 Schur 引理，后者又由特征 $s \in \mathrm{Hom}(L_n,\ \mathbb{C}^\times)$ 唯一确定。量子环面的所有这类表示具有相同的维数 $D = |L/L_n|^{1/2}$。综上，我们得到如下对应关系：

$$\rho : \mathbb{T}_q(L) \to \mathrm{End}(W) \quad \leftrightarrow \quad s : L_n \to \mathbb{C}^\times, \qquad \dim(W) = |L/L_n|^{1/2}. \tag{11}$$

为与曲面的特征簇中的特征相区别，我们将 s称为中心特征。

给定一个中心 特征 s 如式（11）所示，存在一个同态 σ 由复合映射定义

$$\sigma : L \to \mathbb{C}^\times, \qquad s : L \xrightarrow{\times n} nL \subset L_n \xrightarrow{s} \mathbb{C}^\times \tag{12}$$

该同态与 Frobenius 同态有关。后者是嵌入

$$\Phi_q : \mathbb{T}_1(L) \hookrightarrow \mathbb{T}_q(L), \qquad \Phi_q(x^k) = x^{nk}. \tag{13}$$

Φ_q 的像是子环面 $\mathbb{T}_q(nL)$，它包含于中心中。根据定义，$\mathbb{T}_1(L)$ 是一个交换劳朗多项式环，它是经典代数环面的坐标环。经典环面中的一个点由代数映射 $\mathbb{T}_1(L) \to \mathbb{C}$ 表示，该映射由上面定义的群同态 $\sigma : L \to \mathbb{C}^\times$ 编码。

同态 σ 可用于定义在 σ 处的约化量子环面，定义为

$$\overline{\mathbb{T}}_{q,\sigma}(L) = \mathbb{T}_q(L)/\langle x^{nk} - \sigma(k)\rangle. \tag{14}$$

约化量子环面（尽管其本身不是量子环面）将在第 3.6 节中发挥重要作用。

注意到， $\mathbb{T}$的表示与 $\overline{\ }_{q,\sigma}(L)$以及 $\mathbb{T}_q(L)$的表示之间存在一一对应关系，后者的中心特征 s与 σ相容，即满足 $s(nk) = \sigma(k)$ 对所有 $k \in L$均成立。我们将根据哪种方式更为方便，在量子环面及其约化之间自由切换。类似地，我们称标量映射 $\hat{s} : L \to \mathbb{C}^\times$ 当 $\hat{s}(nk) = \sigma(k)$ 时，延拓 σ。

注 2.1。 约化的一个好处是 $1 + q^{2j-1}x^k$ 在 $\mathbb{T}_{q\Phi\sigma}(L)$ 当 $\sigma(k) \neq -1$时可逆。此性质将在第 3.6节中使用。

我们可以找到 L 的一个基 $\{\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_r, \beta_r, \gamma_1, \dots, \gamma_{p-1}\}$，使得 ω 具有分块对角形式 $\bigoplus_{i=1}^r d_i J_2 \oplus (0)$，其中 $J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ 是标准二维辛形式。假设

$$\text{all } d_i \text{ are powers of 2.} \tag{15}$$

那么 $L_n = L_\infty + nL$，其中 L_∞ 是 ω 的根基，且维数为 $D = n^r$。

给定如上所述的基，可以显式构造一个表示。令 $V = \mathbb{C}^n$ 取标准基 $\{e_j\}_{j\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$。为便于后续使用，令 $V_\ell = \mathbb{C}e_\ell$。

定义算子

$$Se_j = q^{2j}e_j, \qquad Te_j = e_{j+1}. \tag{16}$$

给定一个中心特征 $s : L_n \to \mathbb{C}^\times$，选择一个延拓 $\hat{s} : L \to \mathbb{C}^\times$；它仍是一个同态，因为 L 是一个自由阿贝尔群。于是，该表示

$$\rho : \mathbb{T}_q(L) \to \mathrm{End}(V^{\otimes r}) \tag{17}$$

由下式给出

$$\begin{aligned} \rho(x^{\alpha_i}) &= \hat{s}(\alpha_i) 1 \otimes \cdots \otimes S^{d_i} \otimes \cdots \otimes 1, \\ \rho(x^{\beta_i}) &= \hat{s}(\beta_i) 1 \otimes \cdots \otimes T \otimes \cdots \otimes 1, \\ \rho(x^{\gamma_i}) &= \hat{s}(\gamma_i). \end{aligned} \tag{18}$$

容易见，ρ 是具有中心特征 s 的不可约表示。

以下引理是该构造的直接推论。

引理 2.2. 设 $\rho : \mathbb{T}_{q,\sigma}(\overline{L}) \to \mathrm{End}(W)$ 是一个不可约表示，且 $x^k \in \mathbb{T}_q(L)$ 不属于中心。那么， $\rho(x^k)$ 的特征值均为 $\sigma(k)$ 的 n 次方根，且重数相同。

证明：不妨设 k 是原始的，此时它可以与$\alpha_1 = k$一起构成一个辛基。然后根据构造（18），结论显然成立。□

引理 2.3。为简单起见，假设 ω 是辛的。令 $\rho : \mathbb{T}_{q,\ \sigma}(L) \to \overline{\mathrm{End}}(V^{\otimes r})$ 为由（18）定义的不可约表示，并令 $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{T}_{q,\ \sigma}(L))$ 为一个缩放单项式映射。那么 ρ 和 $\rho \circ f$ 酉等价。

证明：它们同构是由于具有相同的中心特征，这是约化量子环面中隐藏的条件。因此，非平凡的部分在于酉性。

假设对所有 $x \in \mathbb{T}_{q,\ \sigma}(L)$，都有 $\rho(x) = B^{-1} \cdot \rho(f(\overline{x})) \cdot B$，则

$$v_k = B(e_{k_1} \otimes \cdots \otimes e_{k_r}) \tag{19}$$

是 $\rho(f(x^{\alpha_i}))$ 的同时特征向量，且具有互不相同的同时特征值 $q^{2d_i k_i}\hat{}s(\alpha_i)$。因此，相对于 $V^{\otimes r}$ 上的标准厄米形式，它们彼此正交。

另一方面，简单计算可得

$$\rho(\hat{s}(l \cdot \beta)^{-1} f(x^{l \cdot \beta}))v_k = v_{k+l} \qquad \text{where } l \cdot \beta = \sum_{i=1}^{r} l_i \beta_i. \tag{20}$$

由于 f 是缩放单项式映射， $C = \rho(\hat{s}(l \cdot \beta)^{-1} f(x^{l \cdot \beta}))$ 是由若干 $\rho(\hat{s}(\alpha_i)^{-1} x^{\alpha_i})$、 $\rho(\hat{s}(\beta_i)^{-1} x^{\beta_i})$ 以及 q 的若干次幂组合而成的乘积。这表明 C 是酉的。特别地，所有 v_k 的范数都相同。

综合两部分可知， B 在标准基下的各列彼此正交且范数相同。将范数缩放为 1 后，我们得到一个酉交织算子。□

2.3. **对子环面的限制**。 我们考察量子环面的不可约表示限制到子环面的一个特例。

引理 2.4. 设 (L, ω) 定义量子环面 $\mathbb{T}_q(L)$，其中 ω 是非退化的，并满足 (15)。假设 $P \subset L$ 是一个各向同性直和项，其正交补为$P^\perp$（相对于 ω），且 $\rho\colon \mathbb{T}_q(L) \to \mathrm{End}(W)$ 是一个中心特征为 $s\colon nL \to \mathbb{C}^\times$ 的不可约表示。那么

$$W = \bigoplus_{u : P \to \mathbb{C}^\times} W_u, \qquad W_u = \{w \in W \mid \rho(x^k)w = u(k)w \text{ for } k \in P\} \tag{21}$$

是 ρ 分解为 $\mathbb{T}_q(P^\perp)$ 的不可约表示，其中要求 $u = s$ 作用于 nP。

证明。 容易看出，每个 W_u 都是 $\mathbb{T}_q(P^\perp)$ 的一个表示。为证明它们不可约，我们使用显式构造（18）。取 α_i, β_i 的一个辛基 L，使得 P 由 α_i的一个子集张成。我们可以假设 ρ 是用这样的基构造的。在此构造中， $\mathbb{T}_q(P)$ 以对角形式作用，并且可以看出每个 W_u 都是非平凡的。然后通过简单的维数计数即可证明该分解。 □

推论 2.5。 将 $P^{\perp}$ 替换为 $P^{\perp}$ 的一个指数为 2 的幂的子格后，引理仍然成立。

证明。 经过这样的子格后，不可约表示的维数不会改变。□

3. Invariants of mapping classes

3.1. 曲面与三角剖分。 本文考虑亏格为 g 、具有非空 $\mathcal{P}$ p 穿孔集合的曲面$\Sigma_{g,\ p}$ （简记为 Σ），其欧拉示性数为负χ（Σ） $=2-2g-p<0$。此类曲面具有理想三角剖分 λ，它由一些边组成，这些边的起点和终点均为穿孔，并且 $\Sigma\setminus\lambda$ 的每个连通分支都是一个三角形。因此， λ 由 -3χ（Σ）条边组成，而 Σ 包含 -2χ（Σ）个三角形。

与这样的曲面及三角剖分相关联的有两个代数，即 Kashaev 代数和 Chekhov–Fock 代数，它们都是量子环面。此外，还有第三种$\mathfrak{gl}_1$-代数，它也是量子环面，只与曲面相关联。接下来我们将介绍这些代数，并讨论它们之间的关系。

3.2. **Kashaev 代数**。 我们分阶段介绍 Kashaev 所定义的代数 [Kas98] 。记 $F(\lambda)$ 为三角剖分 λ 中面 $t\in F(\lambda$ 的集合。对于每个面 $L_t=\mathbb{Z}^3/\mathbb{Z}\mathbf{1}$ ，我们赋予一个 $\mathbb{Z}^3$ 的副本，并配备由 $\mathbb{Z}^3$ 上的形式诱导的斜对称形式，其矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{22}$$

这里用黑体数字表示所有分量均为该数字的向量。 $\mathbb{Z}^3$ 的坐标基按照逆时针顺序与 t 的边相关联。L_t 与配备标准辛形式的 $\mathbb{Z}^2$ 同构，但我们暂不选定同构。令$L_\lambda=\bigoplus_{t\in F(\lambda)}L_t$配备直和形式 ω。Kashaev 代数 $\mathbb{T}_q^{\mathrm{K}}(\lambda)$定义为与$(L_\lambda,\omega)$相关联的量子环面。

注 3.1. Kashaev 代数通常通过装饰三角剖分来定义，即为面编号，并在每个面中点一个点来指定一个指定角。在面 t中，删去与该点相对的边，从而得到一个同构$L_t\cong\mathbb{Z}^2$，由$(x$、y、 $z)\mapsto(y$、 $-x)$给出。于是我们得到一个同构

$$L_\lambda=\bigoplus_{t\in F(\lambda)}L_t\cong\bigoplus_{i=1}^{|F(\lambda)|}\mathbb{Z}^2=\mathbb{Z}^{2|F(\lambda)|}, \tag{23}$$

且该形式 ω 是标准的辛形式。在通常的定义中，改变点的初等变换是不同 Kashaev 代数之间的同构，而在本文的定义中，它是同一个代数的另一种表示。如果我们利用（18）显式构造 Kashaev 代数的表示，那么这些点就变得十分重要，因为该构造取决于量子环面的表示。

3.3. **Chekhov–Fock 代数。** 存在一个斜对称函数 $\varepsilon : \lambda \times \lambda \to \mathbb{Z}$其定义为

$$\varepsilon_{ab} = \#\left(a \curlyvee b\right) - \#\left(b \curlyvee a\right), \tag{24}$$

其中，每个阴影部分都是一个面的角。我们也用 ε 表示在 $\mathbb{Z}^\lambda$上的双线性型的显然延拓。Chekhov–Fock 代数 $\mathbb{T}_q^{\mathrm{CF}}(\lambda)$ 是与 $(\mathbb{Z}^\lambda, \varepsilon)$ 相关联的量子环面。

$$\mathbb{T}_q^{\mathrm{CF}}(\lambda) = \mathbb{C}\langle X_a^{\pm 1}, a \in \lambda\rangle / \langle X_a X_b - q^{2\varepsilon_{ab}} X_b X_a\rangle. \tag{25}$$

对于一个穿孔 $v \in \mathcal{P}$，令 $c_v \in \mathbb{Z}^\lambda$ 为一个向量，其记录每条边以穿孔 v为端点的次数。于是显然

$$\sum_{v\in\mathcal{P}} c_v = \mathbf{2}. \tag{26}$$

命题3.2 ([BL07，命题 5])。 存在 $\mathbb{Z}^\lambda$ 的一个基，使得 ε 是块对角的，其中包含一个 p 维的零块、 g 个 $2J_2$块，以及 $2g+p-3$ 个 J_2块。 ε的根基，记作 $\mathbb{Z}^\lambda_\infty$ （采用第 2.1节的记号），由上文定义的 c_v 和**1**张成。特别地， ε满足（15）。

正如我们马上将看到的，中心元 $X^{\mathbf{1}}$ 与 Kashaev 代数结合考虑时是平凡的。我们将受限Chekhov–Fock代数定义为以下商

$$\mathbb{T}_q^{\mathrm{CFr}}(\lambda) = \mathbb{T}_q^{\mathrm{CF}}(\lambda) / \langle X^{\mathbf{1}} - 1\rangle. \tag{27}$$

它是基于格 $R_\lambda = \mathbb{Z}^\lambda/\mathbb{Z}\mathbf{1}$ 的量子环面。

如果三角剖分包含自折叠面，有时采用另一组生成元会更方便。折叠边以外的所有生成元均保持不变。如果某个自折叠面有边 i、 i、 b，则生成元 X_i 替换为 $X_i X_b$。经过这一修改，Chekhov–Fock 代数便成为簇代数结构的一部分。参见例如 [FG09]。

3.4. **Kashaev 代数与 Chekhov–Fock 代数之间的关系。** Kashaev 代数中有两个重要的嵌入子代数。第一个基于同调群 $H = H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$，其交叉型加倍，并满足（15）。该嵌入

$$i_H : H \hookrightarrow L_\lambda \tag{28}$$

将同调类 $h \in H$ 映射为如下构造。将 h表示为 Σ 上的定向简单多曲线，使其与三角剖分 λ处于最简位置。面角周围的每个线段都赋予与该角相对的边上的生成元。于是， $i_H(h)$ 是这些元素的带符号和，符号取决于线段是顺时针还是逆时针方向。由 [Kas98] 可知，该映射是良定义的嵌入，并且保持这些型。

第二个是受限Chekhov–Fock代数。映射

$$i_{\mathrm{CFr}} : R_\lambda \hookrightarrow L_\lambda \tag{29}$$

将每条边映射为相邻面中两侧之和，按照定义，这与格上的形式相容。显然， $\mathbf{1} \in \mathbb{Z}^\lambda$ 被映射到 $0 \in L_\lambda$，因此 i_{CFr} 是良定义的。正如下文所示，这是一个嵌入。

设 $P_\lambda = \mathbb{Z}^{\mathcal{P}}/\mathbb{Z}\mathbf{1}$。它自然嵌入到 R_λ 和 H中。具体而言， $v \in P_\lambda$ 与 $c_v \in R_\lambda$ 以及 H中环绕 v 的一条小圆 γ_v 相对应。分别与 i_{CFr} 和 i_H 复合后， P_λ 的两个嵌入在 L_λ中重合。在代数层面上，群代数$\mathbb{C}[P_\lambda]$嵌入到 $\mathbb{T}_q^{\mathrm{CFr}}(\lambda)$和 $\mathbb{T}_q(H)$的中心中。

命题 3.3。 格映射 i_H 和 i_{CFr} 结合起来，诱导出格的一个嵌入

$$i : (R_\lambda \oplus H)/\langle c_v = \gamma_v \rangle \hookrightarrow L_\lambda \tag{30}$$

以及相应的量子环面的一个嵌入

$$i_q : \mathbb{T}_q^{\mathrm{CFr}}(\lambda) \otimes_{\mathbb{C}[P_\lambda]} \mathbb{T}_q(H) \hookrightarrow \mathbb{T}_q^{\mathrm{K}}(\lambda). \tag{31}$$

证明。 众所周知（例如 [Tes07，引理 4]）， i_{CFr} 和 i_H 的像关于辛形式 ω 在 L_λ 下正交，这可由简单计算得出。注意，每个像都包含一个与 P_λ 互补的子群，使得 L_λ 上的形式限制是非退化的。然后，简单地比较秩即可得出 i是一个嵌入。 □

如果上下文清楚，我们将省略嵌入 i_H， i_{CFr}， i， i_q。

引理 3.4。 P_λ 是 L_λ 的直和项，而 $R_\lambda + H$ 是 $P_\lambda^\perp$ 的一个指数为 2^{2g} 的子格 .

证明。 为证明第一部分，我们可以利用 λ 中的一棵极大树构造与 P_λ 辛对偶的对象。选取 P_λ 中的 $p-1$ 个穿孔作为生成元，并将剩下的一个穿孔作为极大树的基点。从基点到每个生成元 v 都有一条路径，将路径左侧的边相加，得到 $b_v \in L_\lambda$ 的一个元素。容易验证， $\omega(b_v, c_w) = \delta_{vw}$。

第二部分可由秩的计数以及 ε 的分块分解和 H 上的交形式直接推出。□

3.5. **曲面特征与中心特征**。 我们考察 Σ 的装饰特征簇和框架特征簇。详情参见 [FG06]。

令 $\mathcal{A}$表示 $_2(\mathbb{C})$-特征簇 Σ。该空间中的点是装饰特征（r， h），由一个边界抛物同态 $r : \pi_1(\Sigma) \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ 以及与穿孔相关的附加数据 h 所确定。这是 Penner 装饰 Teich m¨uller 空间 [Pen87] 的复化版本。

给定一个外围子群 $C \subset \pi_1(\Sigma)$， $r(C)$ 在 $\partial_\infty \mathbb{H}^3$上有唯一的不动点。给定一条连接穿孔 a 与（可能是同一个）穿孔 b的理想弧，围绕C_a 的任意外围子群 a 都对应于围绕 C_b 的外围子群 b。我们称 r 为一般的，如果对于任意本质简单理想弧，两端对应的不动点都不同。例如，根据 [BL07，引理 34]， r 当 r 是单射时，它是一般的。

给定一个三角剖分 λ，装饰泛型特征可以用 Ptolemy 坐标 l_e， $e \in \lambda$参数化，它们是复化的 Penner 长度坐标。将面内一条边 a 的 Kashaev 坐标定义为：该面各边按逆时针顺序为 a， b， c时，其坐标为l_b/l_c。因此，装饰泛型特征定义了一个同态 $\sigma : L_\lambda \to \mathbb{C}^\times$。总 结如下：

$$(r, h) \in \mathcal{A}^{\mathrm{generic}} \mapsto \sigma \in \mathrm{Hom}(L_\lambda, \mathbb{C}^\times)\,. \tag{32}$$

现在考虑子环面。同调部分是平凡的。

命题 3.5 （摘自 [Kas98，命题 5]）。 拉回 $i_H^*\sigma \in \mathrm{Hom}(H, \mathbb{C}^\times)$ 是平凡特征。

为避免符号滥用，我们也将拉回 $i_{\mathrm{CFr}}^{*}\sigma \in \mathrm{Hom}(R_\lambda,\ \mathbb{C}^\times)$ 记作 σ。于是，σ利用剪切-弯曲坐标描述框架特征标簇中的一般位置点和边界抛物点 $\mathcal{X}$。这些点由 r 到 $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ 的投影决定，并且与装饰无关。一般位置条件意味着剪切-弯曲坐标从不为 -1。

由于 $(R_\lambda)_n = nR_\lambda + P_\lambda$，受限 Chekhov– Fock 代数的中心特征 $s : (R_\lambda)_n \to \mathbb{C}^\times$ 可由 σ 和穿孔权重 $\zeta_v,\ v \in \mathcal{P}$ 确定，使得

$$\prod_{v\in\mathcal{P}} \zeta_v = 1, \qquad \zeta_v^n = 1, \tag{33}$$

穿孔权重确定了一个映射 $P_\lambda \to \mathbb{C}^\times$，它与 σ相容。

3.6. 坐标变换同构。传统上，对于所有 q，坐标变换同构都由相同的公式定义，且不进行约化，但作为交换，需要进行某种局部化。我们还需要控制分母，才能使表示存在，这并非易事。为避免这类复杂问题，我们使用约化量子环面，其中逆元已经存在。

设 $(r,\ h)$ 为一个装饰泛型特征。给定两个三角剖分 $\lambda,\ \lambda'$，存在一个代数的坐标变换同构

$$\Theta_q^{\lambda\lambda'} : \overline{\mathbb{T}}^{\mathrm{K}}_{q,\sigma'}(\lambda') \to \overline{\mathbb{T}}^{\mathrm{K}}_{q,\sigma}(\lambda) \tag{34}$$

其中 $\sigma :\ L_\lambda \to \mathbb{C}^\times,\ \sigma' :\ L_{\lambda'} \to \mathbb{C}^\times$ 分别是对应三角剖分下（$r,\ h$）的坐标，如（32）所示。

只需给出 $\lambda' = \lambda\setminus\{e\}\cup\{e'\}$是 λ的翻转时的定义。一般的坐标变换是若干次翻转的复合。翻转的局部示意图见图 1。在这种情况下，如果 i 不在局部示意图中，则 $\Theta_q^{\lambda\lambda'}(x_i') = x_i$，并且

$$\Theta_q^{\lambda\lambda'}(x_i') = \begin{cases} x_i(1+qX_e), & i = a, c, \\ [x_iX_e](1+q^{-1}X_e)^{-1}, & i = b, d, \\ x_bx_c, & i = e_1', \\ x_ax_d, & i = e_2'. \end{cases} \tag{35}$$

这里用撇号来区分 $\mathbb{T}^{\mathrm{K}}_{q,\ \sigma'}(\lambda')$ 的生成元与 $\mathbb{T}^{\mathrm{K}}_{q,\ \sigma}(\lambda)$ 的生成元，而 $\overline{X_e} = x_{e_1}x_{e_2}$是 Chekhov–Fock 代数中生成元的像。注意，情形 $i = e_1',\ e_2'$ 是冗余的。

这些公式与 [Kas98] 中未经过约化的公式等价。经过约化后它们仍然定义良好，这归结为一个简单的计算，该计算表明它们与 Frobenius 同态相容，即

$$\Theta_q^{\lambda\lambda'} \circ \Phi_q = \Phi_q \circ \Theta_1^{\lambda\lambda'}, \tag{36}$$

并且 $\Theta_1^{\lambda\lambda'}$ 描述了 σ 与 σ'之间的经典坐标变换关系。如前所述，$1+q^{-1}X_e$ 在约化量子环面中可逆，因为 $t_e = \sigma(\chi_e)$ 是 e的剪切弯曲坐标，根据假设它不是 -1。

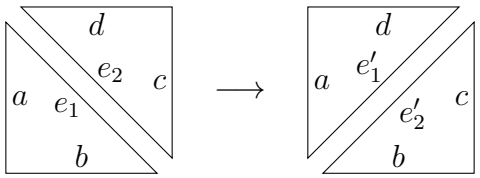


FIGURE 1. Kashaev 代数中的翻转

坐标变换可以拉回到 Chekhov–Fock 代数和同调量子环面。对同调部分的拉回就是恒等映射。在 Chekhov– Fock 代数上，拉回与簇变异的标准公式一致。如果不存在自折叠面，那么公式为

$$\Theta_q^{\lambda\lambda'}(X_i') = \begin{cases} X_e^{-1}, & i = e', \\ X_i \prod_{j=1}^{|\varepsilon_{ie}|}(1+q^{2j-1}X_e), & i \neq e',\ \varepsilon_{ie} \leq 0, \\ [X_i X_e^{\varepsilon_{ie}}] \prod_{j=1}^{|\varepsilon_{ie}|}(1+q^{1-2j}X_e)^{-1}, & i \neq e',\ \varepsilon_{ie} > 0\,. \end{cases} \tag{37}$$

如果存在自折叠的面,则需要使用前文所述的修正生成集 .

3.7. BB 和 BLWY 映射类不变量。本节以算子形式和数值形式定义 BB 不变量和 BL WY 不变量。我们首先讨论 BB 不变量。

我们固定一个装饰泛型特征（r, h），它在映射类 φ 下保持不变。给定一个三角剖分 λ，令 ρ_λ : $\mathbb{T}^{\mathrm{K}}_{q,\,\sigma}(\lambda) \to \mathrm{End}(W)$ 为具有约化σ： $L_\lambda \to \mathbb{C}^\times$ 的不可约表示，该约化由装饰特征（r, h）按照（32）确定。

存在一个显然的格同构 $\varphi_* : L_\lambda \to L_{\varphi(\lambda)}$。于是

$$\varphi_*\sigma : L_{\varphi(\lambda)} \cong L_\lambda \to \mathbb{C}^\times \tag{38}$$

根据不变性，它对应于同一个装饰特征标。复合映射

$$\overline{\mathbb{T}}^{\mathrm{K}}_{q,\sigma}(\lambda) \xrightarrow{\varphi_*} \overline{\mathbb{T}}^{\mathrm{K}}_{q,\varphi_*\sigma}(\varphi(\lambda)) \xrightarrow{\Theta_q^{\lambda\varphi(\lambda)}} \overline{\mathbb{T}}^{\mathrm{K}}_{q,\sigma}(\lambda) \tag{39}$$

是 $\mathbb{T}^{\mathrm{K}}_{q,\sigma}(\lambda)$ 的一个自同构。因此，我们得到代数 $\mathbb{T}^{\mathrm{K}}_{q,\sigma}(\lambda)$ 的另一个表示 $\rho_\lambda^\varphi = \rho_\lambda \circ \Theta_q^{\lambda\varphi(\lambda)} \circ \varphi_*$，且它与 ρ_λ 同构，因此存在一个交织算子 $A \in \mathrm{GL}(W)$，使得

$$\rho_\lambda(x) = A^{-1} \cdot \rho_\lambda^\varphi(x) \cdot A \qquad \text{for } x \in \overline{\mathbb{T}}^{\mathrm{K}}_{q,\sigma}(\lambda), \tag{40}$$

在缩放意义下唯一。

引理 3.6. 交织算子的共轭类和缩放等价类不依赖于

(1) 在同构类中选择 ρ_λ，(2) 选择 λ，或 (3) 选择装饰 h。

证明。 (1) 基本上由定义可知。(2) 若 λ' 是另一个三角剖分，则我们可以选择 $\rho_{\lambda'} = \rho_\lambda \circ \Theta_q^{\lambda\lambda'}$。容易验证 $\rho^\varphi_{\lambda'} = \rho^\varphi_\lambda \circ \Theta_q^{\lambda\lambda'}$，因此同一个交织算子仍然适用。

（3）任意两个装饰都通过一个 $(\mathbb{C}^\times)^p$-缩放作用相关联。其在 Ptolemy 坐标上的诱导作用为

$$(t_1, \dots, t_p) \cdot l_a = t_i t_j l_a, \tag{41}$$

其中 i, j 是弧 a的两个端点。由于每个卡沙耶夫坐标都是两个 Ptolemy 坐标之比，因此在卡沙耶夫坐标上还有一个进一步的作用。明确地说，如果 a 是某个面的边，且 a 的逆时针定向从穿孔 i 指向穿孔 j，那么

$$(t \cdot \sigma)(\chi_a) = (t_j/t_i)\sigma(\chi_a). \tag{42}$$

这个作用由约化卡沙耶夫代数上的一个作用覆盖

$$f_t : \overline{\mathbb{T}}^{\mathrm{K}}_{q,\sigma}(\lambda) \to \overline{\mathbb{T}}^{\mathrm{K}}_{q,t\cdot\sigma}(\lambda), \qquad f_t(x_a) = (t_j^{1/n}/t_i^{1/n})x_a. \tag{43}$$

注意，Chekhov–Fock 生成元 X_e 在此作用下是不变量。注意，作用 f_t 与坐标变换（35）相容。于是，与（2）中相同的论证表明，交织算子与 h无关。□

现在我们已经具备定义 BB 不变量的所有要素。

定义 3.7。 固定一个一般特征 r，它允许存在装饰 h，使得 (r, h) 在映射类 φ 作用下保持不变。

(a) 我们定义

$$A^{\mathrm{K}}_{\varphi,r}(q) \in \mathrm{GL}(W) \tag{44}$$

为方程 (40) 中的交织算子，其在共轭和数乘意义下良定义。

(b) 我们定义 $T^{\mathrm{K}}_{\varphi,r}(q)$ 为 $A^{\mathrm{K}}_{\varphi,r}(q)$ 经缩放使行列式为 1 后的迹。换言之，

$$T^{\mathrm{K}}_{\varphi,r}(q) = \operatorname{tr} A^{\mathrm{K}}_{\varphi,r}(q) / \left(\det A^{\mathrm{K}}_{\varphi,r}(q)\right)^{1/n^{4g-4+2p}} \in \mathbb{C}/\mu_{n^{4g-4+2p}}\,. \tag{45}$$

为简洁起见，如果上下文清楚，我们常在记号 $A^{\mathrm{K}}_{\varphi,r}(q)$ 中省略一些数据。对于之后定义的其他算子不变量，我们也会采用相同做法。

我们来谈谈一些历史，以及上面定义的不变量如何与 Baseilhac–Benedetti 不变量相一致。

注 3.8. 1. Baseilhac–Benedetti（简称 BB）[BB18]研究了所谓的 Chekhov–Fock 代数的局部表示。局部表示是一类由 Bai–Bonahon–Liu [BBL]引入的表示。它们是可约的，但在切割与粘合操作下表现得更好。由于表示的可约性，BB 无法依赖 Schur 引理，因此转而明确构造算子。

2. 局部交织算子并不唯一。Mazzoli [Maz16] 构造了一个局部交织算子的子集，该子集构成一个 $H_1(\Sigma, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$-挠子。BB 的构造选择了该子集中的一个元素，并通过三维推理论证其具有规范性。在这里，我们利用 Kashaev 代数，以一种不同的理由有效地给出了这一点。

3. Ishibashi [Ish25] 使用略有不同的语言给出了 $A^{\mathrm{K}}_{\varphi,r}(q)$ 的公式，其中 Kashaev 代数被称为韦尔代数。Ishibashi 进一步将算子 $A^{\mathrm{K}}_{\varphi,r}(q)$ 与约化 BB 不变量对应起来。约化 BB 不变量与完整 BB 不变量之间的差异，是 [BB17] 的对称性缺陷。然而，与映射环面 M_φ 的分层三角剖分相关联的对称性缺陷很容易计算为 1。4. 迹 $T^{\mathrm{K}}_{\varphi,r}(q)$ 通过构造 [BB18] 与映射环面 M_φ 的早先三维 BB 不变量 [BB15] 一致。注意，三维 BB 不变量取决于 M_φ 上同调类的某些选择，而纤维化则隐式地选择了这些同调类。

下一条备注讨论装饰 h的作用。

备注 3.9。 Kashaev 代数带来的一项额外限制是 r 必须允许一种装饰 h，尽管该不变量并不依赖于它。特别是， r 必须是边界抛物型。可以调整这里的定义，使其适用于其他一般特征，也可以采用 BB 的构造，该构造一开始就不需要装饰。不过，我们的主定理 1.1 的推广会变得更加复杂。为使表述清晰，我们选择不讨论这一推广。

下一条备注讨论 φ 的算子与数值不变量之间的区别。

备注 3.10。 注意

$$A^{\mathrm{K}}_{\varphi,r}(q)^m = A^{\mathrm{K}}_{\varphi^m,r}(q), \qquad \text{for all } m \in \mathbb{Z}\,. \tag{46}$$

因此，c 特征多项式由 $A^{\mathrm{K}}_{\varphi,r}$ 确定，对于所有整数 m，均有 $T^{\mathrm{K}}_{\varphi^m,r}$ 。

至此，BB 不变量的定义完成。现在我们讨论 BLWY 不变量，将相同的构造应用于 Chekhov–Fock 代数。回顾一下，Chekhov–Fock 中心特征可由 r 和满足（ ζ_v 的穿孔权重33）确定。假设这些数据具有 φ不变性，那么定义3.7 之前的相同步骤便给出如下定义。

定义 3.11。固定一个一般特征 r ，它允许一个装饰 h 以及满足（ζ_v 的穿孔权重33）。假设 (r,h) 在映射类 φ作用下不变。

（a）我们定义

$$A^{\mathrm{CF}}_{\varphi,r,\zeta_v}(q) \in \mathrm{GL}(W) \tag{47}$$

为 Chekhov–Fock 代数中方程（40）的类似情形所对应的交织算子，其定义在共轭和数乘意义下唯一。

（b）取迹后，我们定义

$$T^{\mathrm{CF}}_{\varphi,r,\zeta_v}(q) = \operatorname{tr} A^{\mathrm{CF}}_{\varphi,r,\zeta_v}(q) / \left(\det A^{\mathrm{CF}}_{\varphi,r,\zeta_v}(q)\right)^{1/n^{3g-3+p}} \in \mathbb{C}/\mu_{n^{3g-3+p}}. \tag{48}$$

这个不变量最初由 [BL07], 提出，在进一步的通用条件下，它与 [BWY] 一致。

下一条评注涉及方程（45）和（48）中数值不变量定义里的单位根歧义。

注记 3.12. 如注记 3.8所述，BB 通过显式公式定义算子。这种构造的优点是能够减少 BB 算子的相位歧义

（从而减少相应数值不变量的相位歧义）至 μ_n。注意 [BB18] 仅声称 μ_{4n}，但由于行列式条件，它不可能存在 μ_4 歧义。

同样地，[Ish25] 中的构造由显式算子给出，其定义良好到相差一个 μ_{6n}，这也是迹的歧义。不过，其中的行列式并未归一化为恰好 1。

定义（45）和（48）所呈现出的歧义非常大。由于$T^{\mathrm{K}}_{\varphi,\,r}(q)$ 等于 BB 不变量，因此可以将（45）中的歧义缩小到一个 n次单位根。我们预期 $T_{\mathrm{CF}\varphi,\,r,\,\zeta_v}(q)$ 也有同样的性质，不过可能需要改变行列式的归一化方式。参见注3.17。

用 $\det = 1$ 进行归一化，是消除交织算子射影歧义的最简单方法。不过，这未必是自然的选择。$T_{\mathrm{CF}\varphi、r、\zeta_v}(q)$ 与单环不变量 [DG18] 之间的关系便证明了这一点。在 [GY]，中，我们发现，为了得到合理的渐近展开并验证量子模性猜想，必须同时调整 $T_{\mathrm{CF}\varphi}$、r、$\zeta_v(q)$ 的绝对值和相位。

3.8. 量子环面的 $\mathfrak{gl}_1$映射类不变量。最后，我们考虑由量子环面 $\mathbb{T}_q(H)$ 的表示定义的不变量，并将其与 $\mathfrak{gl}_1$映射类不变量对应起来。回顾一下，$H = H_1(\Sigma,\mathbb{Z})$。

根据命题 3.5，我们只需考虑由平凡特征 $H \to \underline{1}$ 约化的约化量子环面 $\overline{\mathbb{T}_{q,1}}(H)$。于是，$\mathbb{T}_{q,1}(H)$ 的中心特征仅由穿孔权重ζ_v 指定。回顾一下，ζ_v 的乘积必须为 1。

将 Σ的穿孔编号为 $1,\dots,p$，并记 $\zeta_i = q^{\ell_i}$。令 $\rho\colon \mathbb{T}_{q,1}(H) \to \mathrm{End}(\overline{W})$ 为通过式（18）构造的不可约表示，其穿孔权重如上所述。我们稍微修改 ρ 的表示空间，使其成为

$$W^H_{\zeta_v} = V^{\otimes g} \otimes (V_{\ell_1} \otimes \cdots \otimes V_{\ell_p}) \tag{49}$$

以表示穿孔权重。相应地，$\rho \circ \varphi_*$ 的表示空间为$W^H_{\varphi\,(\zeta_v)}$。我们要寻找一个交织算子 $A \in \mathrm{Hom}(W^H_{\zeta_v}, W^H_{\varphi\,(\zeta_v)})$，使得

$$\rho(x) = A^{-1} \cdot \rho(\varphi_* x) \cdot A, \qquad x \in \overline{\mathbb{T}}_{q,1}(H). \tag{50}$$

对 [Goc90、MOO92] 的一个轻微延拓表明，$\mathfrak{gl}_1$-Reshetikhin–Turaev 算子不变量 [RT91]对应映射柱

$$C_\varphi = (\Sigma \times [0,1] \sqcup \Sigma \times \{*\})/(a,0) \sim (f(a),*) \tag{51}$$

正是我们所需的交织算子。下面回顾其定义。

令 G_0 为带有 g 个把手和 p 个松散端的带状图，如图2所示，并令 G_1为其镜像。G_i 的松散端对应于曲面 Σ相识别，其中 α 曲线是把手的子午线。

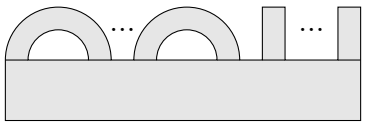


FIGURE 2. 带状图 G_0

令 G 为并 $G_0 \cup G_1$，其中松散端根据 φ的作用相连接。于是 C_φ 可由图示 $L \sqcup G \subset S^3$ 表示，其中 L 是用于手术的带框架链环，并移除 G 的一个小邻域以得到 ∂C_φ。例如，恒等映射类由图3表示，其中所有曲线均采用黑板框架。德恩扭转是在扭转核心上额外进行一次 ± 1-手术得到的。一般而言，可以通过改变穿孔的编织方式，并在 ± 1附近插入带 G_0 框架的曲线（德恩扭转）来得到手术图，因为它们生成映射类群。因此，我们可以假设整个图示都位于 $\mathbb{R}^2 \times [0,1]$ 中，只有顶部和底部优惠券部分与边界接触。

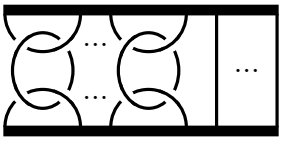


FIGURE 3. 恒等映射类的手术图

用于此 RT不变量的编织霍普夫代数为 $\mathbb{C}[K]/\langle K^n - 1\rangle$，其编织为$R = \frac{1}{n}\sum_{i,j=0}^{n-1} q^{ij} K^i \otimes K^j$。该代数的不可约表示与$V_\ell$ 相对应，其中 K 作用为 q^ℓ。因此，根据构造，$W^H_{\zeta_v} = V^{\otimes g} \otimes (V_{\ell_1} \otimes \cdots \otimes V_{\ell_p})$ 是 $\Sigma \times \{1\}$ 的拓扑量子场论空间，其穿孔由 ℓ_1、……、ℓ_p着色；类似地，$W^H_{\varphi(\zeta_v)}$ 是 $\Sigma \times \{*\}$的拓扑量子场论空间。

[MOO92，第 8] 节给出了曲面为闭曲面时 C_φ 的 RT 算子不变量的显式公式。我们可以将其推广到带穿孔情形，如下所示。对 $L \sqcup G$ 的着色，是指为 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 的每个分量以及 L的每条带状边指定一个数。它们组合成向量 $c = (k,\ h_0,\ h_1,\ \ell_1,\ \ldots\ldots,\ \ell_p)$，其中 k、h_0、h_1 分别是 L、G_0、G_1的颜色。

定义 3.13. 令 Q 为 $L \sqcup G$ 的链接矩阵，其行和列按照着色向量 c的分量排序。定义

$$A^H_{\varphi,\zeta_v}(q) : e_{h_1} \mapsto \frac{\delta(q)^{-\sigma(Q)}}{\sqrt{n^{g+\#L}}} \sum_{h_0 \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^g} \left(\sum_{k \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\#L}} q^{c^t Q c} \right) e_{h_0}. \tag{52}$$

这里，$\delta(q) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} q^{i^2}$ 是高斯和的相位，σ 表示对称矩阵 Q的符号数，$e_{h_1} \in W^H_{\zeta_v}$而 $\overline{e}_{h_0} \in W^H_{\varphi(\zeta_v)}$是标准基向量。注意，穿孔的着色 $\ell_1, \ldots, \ell_p$ 不参与求和。

和之前一样，我们定义

$$T^H_{\varphi,\zeta_v}(q) = \operatorname{tr} A^H_{\varphi,\zeta_v}(q) / \left(\det A^H_{\varphi,\zeta_v}(q)\right)^{1/n^g} \in \mathbb{C}/\mu_{n^g}. \tag{53}$$

注 3.14. 由于带状图为穿孔提供了一个框架，我们严格来说考虑的是带框架的穿孔点的映射类群，这与通常的映射类群相差绕穿孔的德恩扭转。这只会改变穿孔辫的框架，从而使 $A^H_{\varphi,\zeta_v}(q)$ 改变 μ_n。

在本节余下部分，我们使用该映射类的带框架的提升，这意味着对于无框架的映射类，结论也成立，但会多出一个 μ_n 歧义。

The定理 3.15. 假设所有映射类都按照上面的备注进行框架化.

(1) $A^H_{\varphi,\zeta_v}(q)$定义良好（不存在单位根歧义）。*(2)* $A^H_{\varphi\circ\psi,\zeta_v}(q) = A^H_{\varphi,\psi(\zeta_v)}(q)\circ A^H_{\psi,\zeta_v}(q)$相差一个 μ_4。*(3)* 在$W^H_{\zeta_v}, W^H_{\varphi}(\zeta_v)$的标准基下，若 $g \geq 1$，则 $\det\left(A^H_{\varphi,\zeta_v}(q)\right) \in \mu_{12}$。*(4)* $A^H_{\varphi,\zeta_v}(q)$是 ρ 和 $\rho\circ\varphi_*$的交织算子。

注意，若 $g = 0$，则 W，W'是一维的，而 A_φ是 q的幂。

证明。(1) 和 (2) 是定理 1.3 和命题 8.1 的直接推广，见[MOO92], ，只是我们假设 n 为奇数，以便高斯和的相位是 4 次单位根，而不是 8 次单位根。

根据 (2)，对于 (3) 和 (4)，只需检验映射类群的生成元。大多数生成元见 [MOO92 第 8], 节，因此我们只需补上图 4 中给出的德恩扭转以及穿孔的辫子。此处仅展示图 3 中恒等类对应情形的改动，其中蓝色曲线的框架为 ± 1。结果可通过逐一计算各个情形得到。□

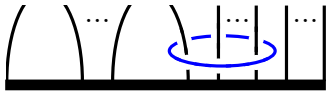


FIGURE 4. 映射类群的其他德恩扭转生成元

对于闭三维流形 M， [MOO92] 给出了数值 $\mathfrak{gl}_1$-RT 不变量的公式，该公式可推广到包含嵌入着色_ $\mathfrak{gl}_1$-链环 U的情形；不过，我们将他们的公式除以 $\sqrt{n}$，使得 $S^2\times S^1$ 的不变量为 1，而非 $\sqrt{n}$ 中的 [MOO92]。将这一广义化的重整化不变量记为 $Z_q(M,\ U)$。

定理 3.16。 设 φ是框架化的。则 $\operatorname{tr} A^H_{\varphi,\ \zeta_v}(q)$与 $Z_q(M_{\widehat{\varphi}}, \widehat{P}_\varphi)$相差一个无歧义的 4 次单位根。这里， $M_{\widehat{\varphi}}$ 是映射类 ⌢ ⌢$\widehat{\varphi}$ 的闭映射环面；$\widehat{\varphi}$ 作用于将所有穿孔封闭后得到的 Σ； P_φ 是 $M_{\widehat{\varphi}}$ 中由穿孔辫闭包得到的着色链环。

因此，$T^H_{\varphi,\ \zeta_v}(q)$与 $Z_q(M_{\widehat{\varphi}}, \widehat{P}_\varphi)$相差 μ_{12n^g}。

注 3.17。 我们强调，一旦选定 φ的框架化提升，算子 $A^H_{\varphi,\ \zeta_v}(q)$ 和数值不变量 $Z_q(M_{\widehat{\varphi}}, P_\varphi)$ 都不存在歧义。另一方面，$\det A^H_{\varphi,\ \zeta_v}(q)$ 一般并不等于 1，但在当前形式的主定理 1.1 中，我们需要将其归一化为恰好等于 1，这就是为什么 $T^H_{\varphi,\ \zeta_v}(q)$ 会存在 μ_{n^g}歧义。

^证明。 $(M_{\widehat{\varphi}},\ P_\varphi)$ 的手术图可通过对手术图$L\sqcup G$ 闭合，并加入一个额外的 0 框架化带环得到。见图 5。该带环与所有其他求和分量的链接数均为 0。此外，回顾一下，穿孔权重的乘积假定为 1。这表明，对带环的求和完全解耦，产生因子 n，它被前因子中的 $\sqrt{n}$ 以及根据我们的归一化选择得到的另一个 $\sqrt{n}$ 抵消。其余求和恰好是迹的定义。μ_4 的差异源于链接矩阵符号数的差异。□

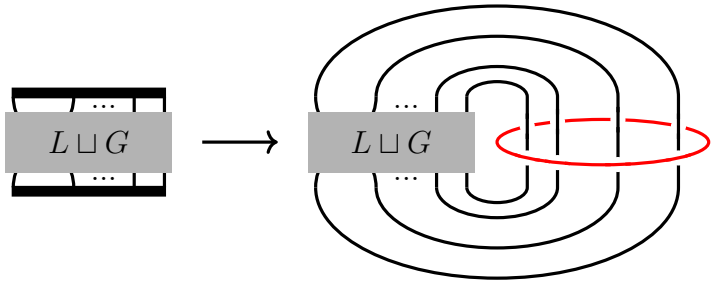


FIGURE 5. 映射环面的手术图

推论 3.18。 (a) $\left|T^H_{\varphi,\,\zeta_v}(q)\right|$ 的唯一可能取值是 $\frac{1}{\sqrt{n}}\,|H_1(M_{\widehat{\varphi}},\ \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})|^{1/2}$ 或 0。前一种情况在 $\zeta_v = 1$ 时成立。
(b) 若 $H_1(M_{\widehat{\varphi}},\ \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$，则 $\left|T^H_{\varphi,\,\zeta_v}(q)\right| = 1$ 对所有穿孔权重均成立。

证明。 (a) 首先，若所有穿孔权重均为 1，则 P_φ 不会对各项产生贡献，因此 $\mathfrak{gl}_1$-RT 不变量由 [MOO92], 给出，其重新归一化后得到上述公式。

由于 $\mathfrak{gl}_1$-RT 不变量由如下形式的二次和给出

$$\sum_{k\in(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\#L}} q^{k^tQk+2\ell^tk} \tag{54}$$

带有某个固定的前置因子，因此只有两种可能性。要么可以通过代换吸收线性项，要么在 Q 相对于 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 存在一个平坦方向，其中线性项非平凡。在第一种情况下，该和与穿孔权重无关，因此公式 $\zeta_v = 1$ 适用。在第二种情况下，平坦方向上的和为 0。

(2) 根据 [MOO92，引理3。3], 移除带环后， Q在 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$上非退化。因此，所有穿孔权重都属于第一种情形。□

3.9. **主定理的证明**。 本节将主定理 1.1 的证明归结为引理 3.19的证明。

固定一个一般特征 r ，它允许一个装饰 h和一组穿孔权重 ζ_v ，满足（33）。假设（r， h）在映射类 φ下不变。那么，我们得到一个表示

$$\rho_\lambda : \overline{\mathbb{T}}^{\mathrm{K}}_{q,\sigma}(\lambda) \to \mathrm{End}(W)\,. \tag{55}$$

利用引理 2.4和3.4， ρ_λ 分解为不可约表示

$$W = \bigoplus_{\zeta_v} W_{\zeta_v}, \qquad W_{\zeta_v} = \{w \in W \mid \rho(X^{c_v})w = \zeta_v w \text{ for } v \in \mathcal{P}\} \tag{56}$$

属于 $\mathbb{T}^{\mathrm{CFr}}_{q\,\sigma,\,\zeta}(\lambda)\otimes_{\mathbb{C}[P_\lambda]}\overline{\mathbb{T}}_{q,\,1}(H)$。

φ_* 作用会置换这些分量，而 $\Theta_q^{\lambda\varphi(\lambda)}$保持这些分量不变。因此，Kashaev 代数的交织算子 $A^{\mathrm{K}}_{\varphi,r}(q)\ \in \mathrm{GL}(W)$（在证明余下部分中简称为 A^{K} ）具有如下分块分解

$$A^{\mathrm{K}} = \bigoplus_{\zeta_v} A^{\mathrm{K}}_{\zeta_v}, \qquad A^{\mathrm{K}}_{\zeta_v} = A^{\mathrm{K}}|_{W_{\zeta_v}} : W_{\zeta_v} \to W_{\varphi(\zeta_v)} \tag{57}$$

它们是各分量的交织算子

$$\rho_\lambda(x)|_{W_{\zeta_v}} = (A^{\mathrm{K}}_{\zeta_v})^{-1} \cdot \rho^{\varphi}_{\lambda}(x)|_{W_{\varphi(\zeta_v)}} \cdot A^{\mathrm{K}}_{\zeta_v}, \qquad x \in \overline{\mathbb{T}}^{\mathrm{CFr}}_{q,\sigma}(\lambda) \otimes_{\mathbb{C}[P_\lambda]} \overline{\mathbb{T}}_{q,1}(H). \tag{58}$$

这里， $\varphi(\zeta_v)$ 表示穿孔权重的集合，该集合在 $\varphi(v)$ 上为 ζ_v 。

引理 3.19。 采用上述记号，存在一种 A^{K} 的选取方式以及 W_{ζ_v} 的基的选取方式，使得对于所有 ζ_v，$\det(A_{\zeta_v}) = 1$ 。

这是一个关键引理，下一整节 4都专门用于证明它。假设该引理成立，我们现在可以给出定理 1.1的证明。

定理*1.1*的证明。 每个分量 W_{ζ_v} 都可分解为不可约表示的张量积

$$W_{\zeta_v} \cong W^{\mathrm{CF}}_{\zeta_v} \otimes_{\mathbb{C}} W^{H}_{\zeta_v}, \tag{59}$$

其中， $W^{\mathrm{CF}}_{\zeta_v}$和 $W^{H}_{\zeta_v}$分别是$\mathbb{T}^{\mathrm{CFr}}_{q\,\sigma,}(\lambda)$和$\mathbb{T}_{q,\,1}(H)$的不可约表示。 φ_* 和 $\Theta_q^{\lambda\varphi(\lambda)}$都保持张量积 $\mathbb{T}^{\mathrm{CFr}}_{q\,\sigma,}(\lambda)\otimes_{\mathbb{C}[P_\lambda]}\mathbb{T}_{q,\,1}(H)$。因此，不变量块的交织算子可分解为

$$A^{\mathrm{K}}_{\zeta_v} = A^{\mathrm{CF}}_{\zeta_v} \otimes_{\mathbb{C}} A^{H}_{\zeta_v}, \qquad A^{\bullet}_{\zeta_v} \in \mathrm{Hom}(W^{\bullet}_{\zeta_v}, W^{\bullet}_{\varphi(\zeta_v)}). \tag{60}$$

换言之，

$$A^{\mathrm{K}} = \bigoplus_{\zeta_v} A^{\mathrm{CF}}_{\zeta_v} \otimes_{\mathbb{C}} A^{H}_{\zeta_v}. \tag{61}$$

这证明了定理1.1的一个更强的算子版本。

为得到定理1.1，我们根据引理选择 A^{K}。每个块的行列式均为 1，因此可以假设 $A^{\bullet}_{\zeta_v}$ 的行列式也为 1。另一方面，由于这些块会置换穿孔权重，我们只能得到 $\det A^{\mathrm{K}} = \pm 1$，所以 $T^{\mathrm{K}}_{\varphi,r}(q) = \pm \mathrm{tr}\ A^{\mathrm{K}}$。另一方面，只有被 φ 固定的分量会对迹有贡献；显然，对于有贡献的分量，$\mathrm{tr}(A^{\mathrm{CF}}_{\zeta_v} \otimes_{\mathbb{C}} A^{H}_{\zeta_v}) = T_{\mathrm{CF}\varphi,r,\zeta_v}(q) T^{H}_{\varphi,\zeta_v}(q)$。这就证明了主定理。□

3.10. **Chekhov–Fock 代数表示的进一步分解**。 本节讨论 BB 和 Ishibashi 定义的另外两个不变量；事实上，我们将看到它们并非新概念。首先，考虑 Kashaev 代数的一个不可约表示 W。如备注3.8所述，以往的研究仅将 W 视为 Chekhov–Fock 代数的一个可约表示。我们将讨论另外两个与 W的分解相关的定义。

我们继续 使用上一节中的记号。根据 [Tou18], , 存在一个分解

$$W \cong \bigoplus_{\zeta_v} n^g W^{\mathrm{CF}}_{\zeta_v} \tag{62}$$

作为 Chekhov–Fock 代数的表示。该分解并不唯一，但每个直和项 $n^g W^{\mathrm{CF}}_{\zeta_v}$，即等型分量，都是良定义的。显然，这些分量就是 W_{ζ_v}。因此，BB 的等型交织算子 $L^{\varphi}_{\rho_\lambda}(\mu)$ 在 [BB18] 中是$A^{\mathrm{K}}_{\zeta_v}$ 按照我们的记号表示的。如果穿孔权重保持不变，那么等型交织算子的迹为 $T_{\mathrm{CF}\varphi,\,r,\,\zeta_v}(q)T^{H}_{\varphi,\,\zeta_v}(q)$，如上一节末尾所述。

Ishibashi 在 W 中构造了一个具体的不可约分量分解，见 [Ish25]。这些分量被描述为 $\mathbb{T}_{q,1}(I)$ 的同时特征空间，其中 $I \subset H$ 为极大各向同性子空间。具体而言，给定 $c : I \to \mu_n$，

$$W_c = \{w \in W \mid \rho_\lambda(x^k)w = c(k)w \text{ for all } k \in I\} \cong W^{\mathrm{CF}}_{\zeta_v} \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{span}\{w_c\}, \tag{63}$$

其中 $w_c \in W^H_{\zeta_v}$ 是 $\mathbb{T}_{q,\sigma}(I)$ 的同时特征向量。注意，穿孔权重已包含在 c 中。

一般而言，分量 W_c 会被 A^{K}置换。然而，可以通过进一步选择来消去该置换。令 $B \in \mathrm{Sp}(H)$，使得 $\varphi_* \circ B$ 在 I上限制为恒等映射。令 $B^H_{\zeta_v} \in \mathrm{GL}(W^H_{\zeta_v}$为与由 $\mathbb{T}_{q,1}(H$诱导的 B的单项式自同构相关联的交织算子。根据引理 2.3中的构造，我们看到 $A^H_{\zeta_v} B^H_{\zeta_v} = \mathrm{diag}\{q^{\ell_c}\}$ 在基 $\{w_c\}$中是对角的。因此，

$$A^{\mathrm{K}}_{\zeta_v} \circ (1 \otimes B^H_{\zeta_v}) = A^{\mathrm{CF}}_{\zeta_v} \otimes_{\mathbb{C}} (A^H_{\zeta_v} B^H_{\zeta_v}) = \bigoplus_c A^{\mathrm{CF}}_{\zeta_v} \otimes q^{\ell_c} \tag{64}$$

这证明了 [Ish25，猜想 8。6] 在定理 1.1的条件下成立。

注 3.20。 我们指出，BB 和 Ishibashi 都隐含地假设穿孔权重在映射类作用下保持不变。在我们的设定中，不一定如此；参见亏格为一且有两个穿孔的曲面上的第 $\varphi = T_b^{-1} T_a T_c X$ 节的例 5.6 。

4. Operator determinants are roots of unity

本节致力于证明引理 3.19。

4.1. **翻转的分解**。 本节回顾 $\Theta_q^{\lambda\lambda'}$ 在两个三角剖分 34的翻转中（ λ 和 λ' ）的一种分解。这种分解由 Fock–Goncharov[FG09] 通过形式伴随作用给出。我们讨论这种分解的一个修改版本，其中采用具体伴随。

沿用第 3.6 节的记号，令 $\hat{s}' : L_{\lambda'} \to \mathbb{C}^\times$ 为 σ'的一个延拓，并选取一个 n 次根 $\theta = (1 + t_e)^{-1/n}$，其中 e 是将被翻转的边。

按照约定，伴随定义为

$$\mathrm{Ad}(A)(B) = ABA^{-1}. \tag{65}$$

坐标变换可分解为

$$\Theta_q^{\lambda\lambda'} = \mathrm{Ad}(\Psi_q^\theta(X_e)) \circ m^{\lambda\lambda'}_{\hat{s}\hat{s}^\theta} \tag{66}$$

如下。定义一个线性映射 $m^{\lambda\lambda'} : L_{\lambda'} \to L_\lambda$ 如下$m^{\lambda\lambda'}(\chi'_i) = \chi_i$ 若 i 不在图 1所示的局部图形中，则

$$\begin{aligned} m^{\lambda\lambda'}(\chi'_a) &= \chi_a, \quad m^{\lambda\lambda'}(\chi'_b) = \chi_b + \chi_e, \\ m^{\lambda\lambda'}(\chi'_c) &= \chi_c, \quad m^{\lambda\lambda'}(\chi'_d) = \chi_d + \chi_e. \end{aligned} \tag{67}$$

定义关系确定了 $m^{\lambda\lambda'}(\chi'_{e_1}) = \chi_b + \chi_c$ 和 $m^{\lambda\lambda'}(\chi'_{e_2}) = \chi_a + \chi_d$。设

$$\hat{s}^\theta : L_{\lambda'} \to \mathbb{C}^\times, \qquad \hat{s}^\theta(k) = \hat{s}(m^{\lambda\lambda'}(k))\theta^{\omega(m^{\lambda\lambda'}(k), \chi_e)}. \tag{68}$$

该公式的 n 次幂与 $\Theta_1^{\lambda\lambda'}$ 相容，因此 $\hat{}s^\theta$ 是 σ'的延拓。接着$m^{\lambda\lambda'}$ $_{\hat{s}\hat{s}^\theta}$：$\mathbb{T}^{\mathrm{K}}_{q,\sigma'}(\lambda') \to \mathbb{T}^{\mathrm{K}}_{q,\sigma}(\lambda)$ 是基于 $\overline{m^{\lambda\lambda'}}$ 的缩放单项式映射以及标量映射 $\hat{}s, \hat{}s^\theta$。（注意 $m^{\lambda\lambda'} \circ m^{\lambda'\lambda} \neq \mathrm{id}$。）

接下来，我们定义一个特殊函数，它是本文所考虑的量子环面的表示以及相应的 BB、BLWY 和单环不变量的基本构件。回顾一下，最早出现于 [KMS93]中的循环量子对数

$$D_q(x) = \prod_{j=1}^{n-1} (1 - q^j x)^j. \tag{69}$$

设 Ψ_q^θ： $\{x \mid x^n = t_e\} \to \mathbb{C}$ 是一个满足以下性质的函数

$$\Psi_q^\theta(q^2 x) = \theta(1 + qx)\Psi(x), \qquad \prod_{x^n = t_e} \Psi_q^\theta(x) = 1. \tag{70}$$

Φ_q^θ 在上述函数方程下（相差一个 μ_n倍数）唯一确定。事实上，该函数方程意味着

$$\Psi_q^\theta(x)^n = cD_{q^2}(-qx), \tag{71}$$

其中 c 是下文给出的归一化常数。为避免 n次方根带来的兼容性问题，固定一个 n次方根 $y = t_e^{1/n}$，并记为 $x = q^{2k}y$。于是

$$\Psi_q^\theta(q^{2k}y) = c_y \theta^k (-qy; q^2)_k = c_y \theta^k \prod_{j=1}^{k} (1 + q^{2j-1}y), \tag{72}$$

其中 c_y 是另一个归一化常数，使得

$$c_y^n = \theta^{n(n-1)/2} D_{q^2}(-qy), \tag{73}$$

它决定了常数

$$c = \theta^{n(n-1)/2} = (1 + t_e)^{-\frac{n-1}{2}}. \tag{74}$$

给定 $X \in \mathbb{T}^{\mathrm{K}}_{q,\sigma}(\lambda)$，使得 $X^n = t_e$，我们可以将 $\Psi_q^\theta(X) \in \mathbb{T}^{\mathrm{K}}_{q,\sigma}(\lambda)$ 定义为：对于任意多项式 f，只要 $f(x) = \Psi_q^\theta(x)$ 对 $x^n = t_e$ 成立，就有 $f(X)$。在每个表示中，$\Psi_q^\theta(X)$ 在 x-特征空间上的作用为 $\Psi_q^\theta(x)$。

容易验证，上述定义给出了因子分解（66）。该因子分解取决于延拓 $\hat{}s'$ 和根 θ的选择。元素 $\Psi_q^\theta(X_e)$ 存在 μ_n- 歧义，但伴随映射不存在歧义。

因子分解也可以类似地拉回到 Chekhov–Fock 量子环面和同调量子环面。对于同调部分，两个映射的拉回都是恒等映射。在 Chekhov–Fock 情形中，$m^{\lambda\lambda'}$ 的拉回由下式给出

$$m^{\lambda\lambda'}(\chi_i) = \begin{cases} -\chi_e, & i = e, \\ \chi_i + [\varepsilon_{ie}]_+ \chi_e, & i \neq e. \end{cases} \tag{75}$$

这里，$[n]_+ = \max(n, 0)$ 表示正部，自折叠面的相同调整也适用于此处。其余因子分解过程不变。

注 4.1。 q 为一般情形时的分解使用相同的单项式映射，但不进行重缩放；伴随是形式上的，用 $(-qX_e;q^2)_\infty$ 代替 $\Psi_q^\theta(X_e)$。

4.2. 坐标变换与交织算子的因子分解。给定一个三角剖分 λ和一个映射类 φ，用一列翻转连接 λ 与 $\varphi(\lambda)$

$$\lambda = \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{N-1}, \lambda_N = \varphi(\lambda) \tag{76}$$

其中 λ_{i+1} 是 λ_i 在 $e_i \in \lambda_i$处的翻转。对于一个装饰泛型特征（r, h），其坐标为 $\sigma_i : L_{\lambda_i} \to \mathbb{C}^\times$。为方便起见，记作 $\sigma = \sigma_0$。

选取一个延拓 $\hat{s}_0 : L_\lambda \to \mathbb{C}^\times$， σ 以及所有根 θ_i 如上一节所述，我们得到每次翻转对应的因子分解 (66)。按照式（68）记 $\hat{s}_{i+1} = \hat{s}^{\theta_i}$。令 $m_i = m^{\lambda_{i-1}\lambda_i}{}_{\hat{s}_{i-1}\hat{s}_i}$ 表示 $\Theta_q^{\lambda_{i-1}\lambda_i}$因子分解中的缩放单项式映射。于是

$$\begin{aligned}
\Theta_q^{\lambda\varphi(\lambda)} &= \Theta_q^{\lambda_0\lambda_1} \circ \cdots \circ \Theta_q^{\lambda_{N-1},\lambda_N} \\
&= \mathrm{Ad}(\Psi_q^{\theta_0}(X_{e_0})) \circ m_1 \circ \cdots \circ \mathrm{Ad}(\Psi_q^{\theta_{N-1}}(X_{e_{N-1}})) \circ m_N \\
&= \mathrm{Ad}\left(\Psi_q^{\theta_0}(X_0^\#) \cdots \Psi_q^{\theta_{N-1}}(X_{N-1}^\#)\right) \circ M_N,
\end{aligned} \tag{77}$$

其中

$$M_i = m_1 \circ \cdots \circ m_i : \overline{\mathbb{T}}^{\mathrm{K}}_{q,\sigma_i}(\lambda_i) \to \overline{\mathbb{T}}^{\mathrm{K}}_{q,\sigma}(\lambda), \qquad X_i^\# = M_i(X_{e_i}) \in \overline{\mathbb{T}}^{\mathrm{CFr}}_{q,\sigma}(\lambda). \tag{78}$$

注意，每个 M_i 也是一个缩放单项式映射。特别地， $X_i^\#$ 是$\mathbb{T}^{\mathrm{CFr}}_{q\,\sigma}$,(λ)中的一个缩放单项式。

选取一个不可约表示 $\rho_\lambda : \mathbb{T}^{\mathrm{K}}_{q,\ \sigma}(\lambda) \to \overline{\mathrm{End}}(W)$。那么，当（$r$， h）具有 φ-不变性时， $\rho' = \rho_\lambda \circ M_N \circ \varphi_*$ 是一个与 ρ 具有相同中心特征的表示。令 $B \in \mathrm{End}(W)$ 为它们之间的交织算子，即 $\rho_\lambda(x) = B^{-1} \cdot \rho'(x) \cdot B$。于是有

$$\begin{aligned}
\rho_\lambda(\Theta^{\lambda\varphi(\lambda)}(\varphi_* x)) &= \rho_\lambda\left(\mathrm{Ad}(\Psi_q^{\theta_0}(X_0^\#) \cdots \Psi_q^{\theta_{N-1}}(X_{N-1}^\#)) \circ M_N(\varphi_* x)\right) \\
&= \mathrm{Ad}\left(\rho_\lambda(\Psi_q^{\theta_0}(X_0^\#) \cdots \Psi_q^{\theta_{N-1}}(X_{N-1}^\#))\right) \rho_\lambda(M_N(\varphi_* x)) \\
&= \mathrm{Ad}\left(\rho_\lambda(\Psi_q^{\theta_0}(X_0^\#) \cdots \Psi_q^{\theta_{N-1}}(X_{N-1}^\#))B\right) \rho_\lambda(x).
\end{aligned} \tag{79}$$

换言之，对于 Kashaev 代数，我们在（40）中所需的交织算子为

$$A^{\mathrm{K}} = \rho_\lambda\left(\Psi_q^{\theta_0}(X_0^\#) \cdots \Psi_q^{\theta_{N-1}}(X_{N-1}^\#)\right) B. \tag{80}$$

注 4.2。 在 [Ish25], Ishibashi 强加了条件 $\hat{s}_N \circ \varphi_* = \hat{s}_0$。在 [BB18], 中，该条件由构造得到满足。在我们的情形中，这两个映射在 μ_n 中相差一个单位根。

Ishibashi 和 BB 都构造了两个 φ-等变表示序列之间的交织算子 $\mathbb{T}^{\mathrm{K}}_{q,\ \sigma_i}(\lambda_i)$（更准确地说，是到 Chekhov–Fock 代数的拉回）。由于表示中也使用了映射 $\hat{s}_i$，因此额外条件是必要的。证明中我们消去了中间表示，不过它对于数值计算非常有用。见第 5.3 节。

4.3. **引理 3.19 的证明。** 现在我们可以给出关键引理 3.19 的证明了。若 $p = 1$，则结论显然成立，因为只有一个穿孔权重。因此，我们假设 $p \geq 2$。

我们沿用上一节的记号。由于 P_λ 是 L_λ 的直和项（由引理 3.4可知），我们可以选取一个辛基 $\{\alpha_i, \beta_i\}$，它属于 L_λ，且包含 P_λ 的一个基作为 $p-1$ 的最后 α_i。我们可以用这个基通过（18）定义 ρ_λ，其表示空间为$W = V^{\otimes(4g-4+2p)}$。在这个构造中，$\mathbb{C}[P_\lambda]$ 的作用是对角的。因此，每个分量的形式为

$$W_{\zeta_v} = V^{\otimes(4g-3+p)} \otimes (V_{\ell_1} \otimes \cdots \otimes V_{\ell_{p-1}}) \tag{81}$$

其中 $\zeta_i = q^{\ell_i}$。

首先我们处理 $\rho_\lambda(\Psi_q^{\theta_i}(X_i^{\#}))$。由于 $X_i^{\#} \in \mathbb{T}^{\mathrm{CF}}_{q,\sigma,\cdot}(\lambda)$ 是一个缩放单项式，但不属于 $\mathbb{C}[P_\lambda]$的中心（由引理2.2可知，$\rho_\lambda(X_i^{\#})|_{W_{\zeta_v}}$ 的特征值是所有 n次 t_{e_i} 根，且重数相同 n^{4g-4+p}。因此，

$$\det\left(\rho_\lambda(\Psi_q^{\theta_i}(X_i^{\#}))|_{W_{\zeta_v}}\right) = \Big(\prod_{x^n = t_{e_i}} \Psi_q^{\theta_i}(x)\Big)^{n^{4g-4+p}} = 1. \tag{82}$$

存在一个基 W_{ζ_v}，使得每个 $|\det(A_{\zeta_v})| = 1$，这现在可由引理 2.3中的酉性结论得到。较难的部分是证明每个 $\det(A_{\zeta_v})$ 都是单位根。

继续证明，接下来我们处理 B 方程 (80中的对象。回想一下，它是与缩放单项式映射相关联的交织算子

$$M_N \circ \varphi_* = f_{\hat{s}_0, \hat{s}_N \circ \varphi_*}, \qquad f = m^{\lambda_0\lambda_1} \circ \cdots \circ m^{\lambda_{N-1}\lambda_N} \circ \varphi_* \in \mathrm{Sp}(L_\lambda). \tag{83}$$

将最后一个 $p-1$ β_i 的张成空间记为 P_λ。令 $f_1 \in \mathrm{Sp}(L_\lambda)$ 固定 α_i, β_i，对于 $i = 1, \ldots, 4g-3+p$，其作用如同 φ_* 在 P_λ 上的作用，并保持 P_λ。由辛性质，这确定了它在 P_λ 上的作用。定义 $\hat{s}''$：$L_\lambda \to \mathbb{C}^\times$，使其在 P_λ 上与 $\hat{s}_N \circ \varphi_*$ 相同，在其他辛基元素上与 $\hat{s}_0$ 相同。取 $f_2 = f_1^{-1} \circ f$，我们有

$$M_N \circ \varphi_* = (f_1)_{\hat{s}_0 \hat{s}''} \circ (f_2)_{\hat{s}'' \hat{s}''} \circ \mathrm{id}_{\hat{s}'', \hat{s}_N \circ \varphi_*} \tag{84}$$

其中每个映射都是 $\mathbb{T}^{\mathrm{K}}_{q,\sigma}(\lambda)$ 的自同构。因此，$B = B_1 B_2 B_3$ 其中 B_1 是 ρ_λ 与 $\rho_1 = \rho_\lambda \circ (f_1)_{\hat{s}_0 \hat{s}''}$ 之间的交织算子，B_2 是 ρ_1 与 $\rho_2 = \rho_1 \circ (f_2)_{\hat{s}'' \hat{s}''}$ 之间的交织算子，而 B_3 是 ρ_2 与 $\rho' = \rho_2 \circ \mathrm{id}_{\hat{s}'', \hat{s}_N \circ \varphi_*}$ 之间的交织算子。注意，每个 B_i 也相对于 W_{ζ_v} 有一个分块分解。此外，B_2 和 B_3 是分块对角的，因为它们保持穿孔权重。

首先，我们证明 B_1 的各个块都是单位矩阵。根据构造，对于最后一个 $p-1$ α_i，$\rho_\lambda(x^{\alpha_i})$ 和 $\rho_1(x^{\alpha_i})$ 都是对角的。令 P 为 $V^{\otimes(p-1)}$ 上实现其同时特征值置换的置换。于是容易验证 $B_1 = \mathrm{id} \otimes P$。特别地，在标准基下，块 $B_1|_{W_{\zeta_v}}$ 是单位矩阵。

现在考虑 B_2 的块。回想一下，辛群由对合变换 $T_a(b) = b + \omega(a, b)a$ 生成。$f_2 \in \mathrm{Sp}(L_\lambda)$ 属于这样一个子群，其中对 P_λ 的限制是恒等映射。容易看出，该子群由满足 $a \in P_\lambda^\perp$ 的对合变换 T_a 生成。

自同构 $(T_a)_{\hat{s}''\hat{s}''}$ 等于由以下元素进行的共轭

$$E_a = \sum_{k\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} q^{k^2}(\hat{s}''(a)^{-1}x^a)^k \in \overline{\mathbb{T}}_{q,\sigma}(P_\lambda^\perp). \tag{85}$$

另见 [Ish25，公式 (8.1)]，其中给出了另一种表述。因此，交织算子是该元素在相应表示中的像。由于 x^a 在每个 W_{ζ_v}上的特征值及其重数均相同，交织算子也具有这一性质。特别地，交织算子的各个块具有相同的行列式。

最后，对于 B_3，自同构 $\mathrm{id}_{\hat{s}'',\ \hat{s}_N\circ\varphi_*}$ 纯粹是单项式缩放。我们可以一次缩放一个生成元。如果标量映射仅在 α_i 上不同时，那么交织算子为 $1\otimes\cdots\otimes C_i\otimes\cdots 1$，其中 C_i 是一个循环置换矩阵。如果标量映射仅在 β_i 上不同时，那么交织算子具有相同的形式，只是其中 C_i =为 $\mathrm{diag}(\xi^j)$，且 $\xi\in\mu_n$ 是标量差。在这两种情况下，$\det C_i = 1$。结合所有生成元对应的交织算子，我们看到B_3 分解为 $C_1\otimes\cdots\otimes C_{4g-4+2p}$，且每个 $\det C_i = 1$。根据构造，最后一个 $p-1$ α_i 不进行缩放，这意味着最后的 $p-1$ C_i 是对角的。这表明每个块 $B_3|_{W_{\zeta_v}}$ 都具有类似的张量分解形式，因此每个块的行列式均为 1。

总之，我们构造了一个交织算子 A^{K}，使得每个块的行列式都相同。这通过整体缩放推出了引理 3.19 。□

5. Examples and computations

本节最后讨论示例与计算。一方面，映射类的示例可以通过 `flipper` [Bel18] 高效地描述。另一方面，相应的映射环面具有理想三角剖分，其粘合方程描述了该三角剖分的三维流形的 $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$-表示，所用方法见 `SnapPy` [CDGW]。

5.1. **粘合方程与 Neumann–Zagier 数据**。 本节简要回顾与理想三角剖分的三维流形相关的 Neumann–Zagier 数据。详细讨论见 [GZ23] (另见 [GY]，其中的描述与本文示例十分接近)。

令 Δ 为带尖点双曲三维流形 M 的一个理想三角剖分，其中有 N 个四面体。将每个四面体的顶点标记为 0、1、2、3，使得从顶点 0 观察时，1、2、3 按逆时针顺序排列。给 i号四面体的 01 边赋予变量 z_i，并令$z_i' = (1-z_i)^{-1}$, $z_i'' = 1 - z_i^{-1}$。

在每个尖点上选取一条外围曲线。与三角剖分 Δ 及这些外围曲线相关联的 Neumann–Zagier 数据是一个元组 $(A,\ B,\ \nu)$，其中 $A,\ B$ 是 $N\times N$整数矩阵，且 $\nu\in\mathbb{Z}^N$。它们定义了粘合方程

$$z^A z''^B = (-1)^\nu \tag{86}$$

其解（满足一些额外条件）可用于描述双曲结构。每个$z_i^{\square}$都是四面体顶点提升到 $\mathbb{H}^3$后的交比。

Neumann–Zagier 数据的一个重要性质是，矩阵 $(A|B)$ 在 $\mathbb{Z}$上具有满秩。这意味着，给定粘合方程的一个解，我们可以为所有 $z,\ z''$找到对数分支，使得对数方程 $A\log z + B\log z'' = \pi\mathrm{i}\nu$有解。

5.2. 分层三角剖分。设 M_φ 是映射类 φ的映射环面。若三角剖分 Δ 是 M_φ 的三角剖分，具有四面体 T_1、……、T_N，则称其为分层三角剖分：存在胞腔浸入$\lambda_i \to \Delta^{(2)}$、$i \in \mathbb{Z}$，它们将 Σ 的三角剖分 λ_i 浸入 Δ 的二维骨架 $\Delta^{(2)}$，使得 $\lambda_{i+N} = \varphi(\lambda_i)$、$\lambda_0$、……、$\lambda_N$ 构成翻转序列，并且 λ_i 与 λ_{i+1} 的浸入通过分层四面体 T_i 模 N关联，其标记方式如图 6 所示。这里，底部的两个面属于 λ_i，顶部的两个面属于 λ_{i+1}。

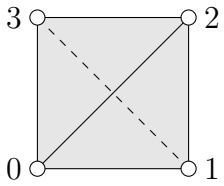


FIGURE 6. 分层四面体的标记。

显然，通过给每个四面体中的边 02 和 13 指派 Δ，分层三角剖分π 具有一个典范真角结构。事实上，还有更强的结论。分层三角剖分 Δ 中的每个面都从 λ_i的浸入继承一个定向。给定 $e \in \lambda_i$，令 F_1，F_2为 $\Delta^{(2)}$ 中 λ_i 与 e相邻的两个面在 e 中的像。与 F_1等同的四面体边集由 F_2 分为 λ_i上方和下方的部分。见图7。

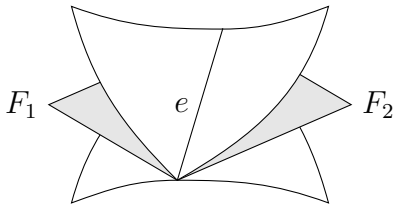


FIGURE 7. 边 $e \in \lambda_i$周围的四面体

5.3. **几何表示**。假设 φ 是伪阿诺索夫的。那么 M_φ 具有一个完备双曲结构，其整体单值化 $\pi_1(M_\varphi) \to \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ 是离散且忠实的。因此，限制映射 $r: \pi_1(\Sigma) \to \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ 是曲面Σ的一个 φ-不变一般特征。

设 Δ M_φ 的分层三角剖分。根据 [DGY 末尾的讨论，第 3],Δ 节存在托勒密赋值，因此 r 存在装饰。此外，Δ 的粘合方程有一个对应于双曲结构的解，并且可以根据此解计算所有 $e \in \lambda_i$ 的剪切-弯曲坐标 $t_e = \sigma_i(\chi_e)$。从图 7 可以看出，$e \in \lambda_i$ 的剪切-弯曲坐标等于 e 上方形状参数的乘积的负值。作为一个简单的例子，按照上述约定，λ_i 和 λ_{i+1} 中翻转边的剪切-弯曲坐标分别为 $-z_i'$ 和 $-1/z_i'$。反过来，给定 λ_0 的剪切-弯曲坐标后，所有 λ_i 的坐标都可通过坐标变换 $\Theta_1^{\lambda_0\lambda_i}$ 确定。然后，如上所述，z_i' 可由剪切-弯曲坐标确定。注意，这意味着 $\theta_i^n = z_i''$，其中 θ_i 来自第 4.2 节。

由于给定 Neumann–Zagier 方程的一个解时，我们总能找到对数分支，因此剪切-弯曲坐标也具有对数分支。我们的选择是：剪切-弯曲坐标的对数等于相应对数形状参数之和减去 $\pi\mathrm{i}$。继续翻转边的例子，对数剪切-弯曲坐标分别为 $\log(z_i') - \pi\mathrm{i}$ 和 $\pi\mathrm{i} - \log(z_i')$。

存在一致的对数分支，意味着标量映射 $\hat{}s_i$ 及根 θ_i 可以选择第 4.2 节中使用的，使得 $\hat{}s^N \circ \varphi_* = \hat{}s_0$。这对于构造并非必要，但能简化计算。

5.4. 显式计算。 本文所考虑的不变量适合进行计算。相关实现已经完成，代码可在 https://github.com/newcworld001/BBBLWY 获取。

映射类的翻转描述见 `flipper`，而 `SnapPy` 将 `flipper` 映射类转换为映射环面的分层三角剖分，并给出粘合方程的一个解。随后，我们可以按照上文所述计算所有剪切-弯曲坐标及其对数分支。

量子环面通过 SageMath [的23]，修改类实现，而表示则通过（18）实现。由此，根据引理 2.3，可以计算 $\mathfrak{sl}_1$-不变量 $A^{H}_{\varphi,\,\zeta_v}(q)$。BLWY 交织算子 $A^{\mathrm{CF}}_{\varphi\,r,,\zeta_v}(q)$ 与此类似。

对于 BB 交织算子 $A^{\mathrm{K}}_{\varphi,\,r}(q)$，我们使用 Ishibashi 在 [Ish25] 中给出的显式公式，因为这些公式只使用剪切-弯曲坐标。另一种方法是将剪切-弯曲坐标提升为 Kashaev 坐标，并采用与另外两个不变量相同的算法。

在本节余下部分，我们讨论具有 1 个和 2 个穿孔的亏格 1 曲面的例子。

5.5. 关于 $\Sigma_{1,\,1}$ 的例子。 亏格 1 且有 1 个穿孔时，标准且最简单的例子是 4_1 结的补空间，其纤维为 $\Sigma_{1,\,1}$，单值化为 $T_aT_b^{-1}$，其中 a，b 是标准曲线，而 T 表示德恩扭转。BLWY 不变量在 [BWY、GY] 中给出了显式表达式，但所采用的约定略有不同。在 $q = \exp(\frac{16}{15}\pi\mathrm{i})$ 处对这些公式求值，所得结果与 [BB15 的表 3] 中 BB 不变量的数值相符。这与（4）一致。

5.6. 关于 $\Sigma_{1,\,2}$ 的例。 如需了解更有趣的例子，可以考虑曲面 $\Sigma_{1,\,2}$。设 a、b、c 是一条曲线链，并设 x 是与 c 相交于一点且与其他曲线不相交的理想弧。参见图 8，其中还给出了三角剖分图。如通常一样，正方形的对边视为相同。设 T_a、T_b、T_c 表示德恩扭转，并设 X 表示沿 x 的半扭转。

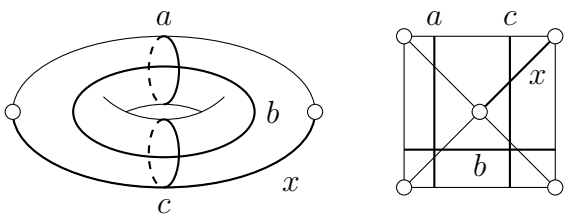


FIGURE 8. 曲线于 $\Sigma_{1,\,2}$

以下示例的计算精度为 256 位，即约 77 位十进制数字。下面的所有数值等式至少精确到小数点后 75 位。

- $\varphi = T_b^5 T_a T_c^{-1}$。其映射环面属于 `t09265` 中的 `SnapPy` 清单。 φ 可通过 11 次翻转实现，其中一部分如图 9所示。按照 `flipper`的约定，翻转后的新边沿用翻转前的标签。每条边还可选择一个正方向， `flipper` 在许多场合都会用到这一点。在此例中，它有助于打破曲面的对称性，因此通过重新标记，可以唯一地将最终三角剖分与初始三角剖分对应起来。在这个例子中，最终的边 0 与反向的初始边 0 对应。

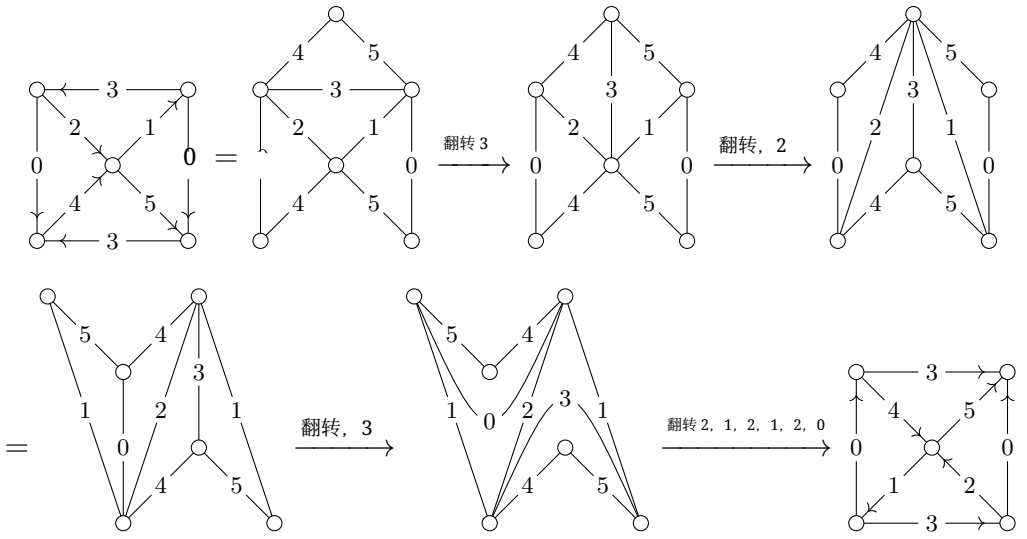


FIGURE 9. $T_b^5 T_a T_c^{-1}$的翻转序列的一部分

通过手术图可以轻松计算得出

$$\left|T^H_{\varphi,\zeta_v}(q)\right| = \begin{cases} d\sqrt{n/d}, & \zeta_v = (1,1), \\ 0, & \text{otherwise}, \end{cases} \tag{87}$$

其中 $d = \gcd(n, 5)$。那么定理 1.1 表明

$$\left|T^{\mathrm{K}}_{\varphi,r}(q)\right| = d\sqrt{n/d}\left|T^{\mathrm{CF}}_{\varphi,r,1}(q)\right|. \tag{88}$$

数值计算证实了这一点。对于 $q = \exp(2\pi\mathrm{i}/3)$，我们得到

$$\left|T^{\mathrm{K}}_{\varphi,r}(q)\right| = \sqrt{3}\left|T^{\mathrm{CF}}_{\varphi,r,1}(q)\right| = 13.444319. \tag{89}$$

另一方面，对于 $q = \exp(2\pi\mathrm{i}/5)$，我们得到

$$\left|T^{\mathrm{K}}_{\varphi,r}(q)\right| = 5\left|T^{\mathrm{CF}}_{\varphi,r,1}(q)\right| = 31.451090. \tag{90}$$

- $\varphi = T_b^{-1} T_a T_c X$。其映射环面是 `s254` 位于 `SnapPy` 名录中。若将穿孔填补， X 便是平凡的，而 $a = c$，因此映射类变为 $\widehat{\varphi} = T_b^{-1} T_a^2$，其映射环面的同调为 $\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}$。根据推论3.18，所有 $\mathfrak{gl}_1$不变量的绝对值均为 1。由于 X 会置换穿孔，唯一不变的穿孔权重是 $\zeta_v = (1,1)$。根据

定理1.1, $\left|T^{\mathrm{K}}_{\varphi,\ r}(q)\right| = \left|T^{\mathrm{CF}}_{\varphi\, r,\ ,\ 1}(q)\right|$。我们在 $q = \exp(2\pi\mathrm{i}/3)$ 处对其进行了数值验证，得到

$$\left|T^{\mathrm{K}}_{\varphi,r}(q)\right| = \left|T^{\mathrm{CF}}_{\varphi,r,1}(q)\right| = 4.19825. \tag{91}$$

- $\varphi = T_a^2 T_b T_c^{-1}$。其映射环面是 9_{250} 链环补空间。同样，我们发现所有 $\mathfrak{gl}_1$-不变量的绝对值均为 1。由于穿孔不会被 φ 置换，现在所有穿孔权重都会产生贡献。在 $q =\exp(2\pi\mathrm{i}/3)$ 处，我们数值上得到

$$T^{\mathrm{K}}_{\varphi,r}(q) = -T^{\mathrm{CF}}_{\varphi,r,(1,1)}(q) - 2T^{\mathrm{CF}}_{\varphi,r,(q,q^{-1})}(q). \tag{92}$$

这里的因子 2 源于曲面和映射类的对称性。注意，负号来自 $\mathfrak{gl}_1$<style id='4'>-不变量，而非定理 1.1 中的符号。

致谢。作者谨向 St´ephane Baseilhac、Francis Bonahon、Thang Lˆe、Helen Wong、Tian Yang 和 Campbell Wheeler 致谢，感谢他们带来的许多启发性讨论。

References

[Ago11] Ian Agol，《伪阿诺索夫映射环面的理想三角剖分》，载于《三维拓扑与几何》，Contemp. Math.，第 560 卷，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2011 年，第 1–17 页。[BB05] St´ephane Baseilhac 和 Riccardo Benedetti，《三维流形上平坦 PSL(2,C) 丛的经典与量子对数二重函数不变量》，Geom. Topol. 9 (2005)，493–569。[BB15] , 量子双曲不变量的解析族，Algebr. Geom. Topol. 15 (2015)，第 4 期，1983–2063。[BB17] St´ephane Baseilhac 和 Riccardo Benedetti，《三维流形上的无歧义结构与量子对称缺陷》，Quantum Topol. 8 (2017)，第 4 期，749–846。[BB18] , 纤维化带尖点三维流形的量子 Teichm ¨uller 不变量，Geom. Dedicata 197 (2018)，1–32。[BBL] Hua Bai、Francis Bonahon 和 Xiaobo Liu，《量子 Teichmuller 空间的局部表示》，预印本，2007，arXiv:0707.2151。[Bel18] Mark Bell，flipper（计算机软件），pypi.python.org/pypi/flipper，2013–2018，版本 0.15.6。[BL07] Francis Bonahon 和 Xiaobo Liu，《量子 Teichm ¨uller 空间的表示与曲面微分同胚的不变量》，Geom. Topol. 11 (2007)，889–937。[BWY] Francis Bonahon、Helen Wong 和 Tian Yang，《曲面微分同胚量子不变量的渐近行为 I：猜想与代数计算》，预印本，2021，arXiv:2112.12852。[CDGW] Marc Culler、Nathan Dunfield、Matthias Goerner 和 Jeffrey Weeks，SnapPy：用于研究三维流形几何与拓扑的计算机程序，网址：http://snappy.computop.org（版本 3.1.1）。[DG18] Tudor Dimofte 和 Stavros Garoufalidis，《量子模性与复 Chern-Simons 理论》，Commun. Number Theory Phys. 12 (2018)，第 1 期，1–52。[DGY] Nathan Dunfield、Stavros Garoufalidis 和 Seokbeom Yoon，《纤维化三维流形中 1-环等于挠率》，预印本，2023，arXiv:2304.00469。[FG06] Vladimir Fock 和 Alexander Goncharov，《局部系统模空间与高阶 Teichm ¨uller 理论》，Publ. Math. Inst. Hautes ´Etudes Sci. (2006)，第 103 期，1–211。[FG09] ，《簇系综、量子化与二重对数》，Ann. Sci. ´Ec. Norm. Sup´er. (4) 42 (2009)，第 6 期，865–930。[FM12] Benson Farb 和 Dan Margalit，《映射类群入门》，普林斯顿数学丛书，第 49 卷，普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿，2012。[Goc90] Toru Gocho，《基于 U(1) 规范理论的三维流形拓扑不变量》，Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 66 (1990)，第 8 期，237–239。

[GSWZ] Stavros Garoufalidis、Peter Scholze、Campbell Wheeler 和 Don Zagier，《数域的 Habiro 环》，预印本，2024年，arXiv:2412.04241。[GY] Stavros Garoufalidis 和 TAO YU，《关于伪阿诺索夫映射的 Bonahon–Wong–Yang 不变量》，预印本，2025年，arXiv:2501.00250。[GZ23] Stavros Garoufalidis 和 Don Zagier，《双曲三维流形、Bloch 群与 Walter Neumann 的工作》，Celebratio Math. (2023)，文章 1106。[Ish25] Tsukasa Ishibashi，《循环量子 Teichm ¨uller 理论》，2025，2501.02316。[Kas95] Rinat Kashaev，《由量子二重对数得到的纽结不变量》，Modern Phys. Lett.A 10(1995)，第 19 期，1409–1418。[Kas98] ，《Teichm ¨uller 空间的量子化与量子二重对数》，Lett. Math. Phys. 43 (1998)，第 2 期，105–115。[KMS93] Rinat Kashaev、Vladimir Mangazeev 和 Yuri Stroganov，《Baxter-Bazhanov 模型中的星-方程与四面体方程》，Internat. J. Modern Phys. A 8 (1993)，第 8 期，1399–1409。[Maz16] Filippo Mazzoli，《量子 Teichm ¨uller 空间的交织算子》，2016，1610.06056。[MOO92] Hitoshi Murakami、Tomotada Ohtsuki 和 Masae Okada，《由带框架链环的链接矩阵导出的三维流形不变量》，Osaka J. Math. 29 (1992)，第 3 期，545–572。[Pen87] Robert Penner，《带穿孔曲面的装饰 Teichm ¨uller 空间》，Comm. Math. Phys. 113 (1987)，第 2 期，299–339。[RT91] Nicolai Reshetikhin 和 Vladimir Turaev，《通过链环多项式与量子群构造三维流形不变量》，Invent. Math. 103 (1991)，第 3 期，547–597。[Tes07] J¨org Teschner，《量子化 Teichm ¨uller 理论中的一种模函子类比》，载于《Teichm ¨uller 理论手册》第 I 卷，IRMA Lect. Math. Theor. Phys.，第 11 卷，Eur. Math. Soc.，苏黎世，2007 年，第 685–760 页。¨The[Sage 开发团队，SageMath，Sage 数学软件系统（版本 10.2），2023，https://www.sagemath.org。23]Thu[William Thurston，《三维几何与拓扑》第 1 卷，普林斯顿数学丛书，第 35 卷，普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿，1997，由 Silvio Levy 编，http: //msri.org/publications/books/gt3m。97]Tou[J18] er´emy Toulisse，《量子 Teichm´uller 空间局部表示的不可约分解》，Pacific J. Math. 294 (2018)，第 1 期，233–256。

¨,Shenzhen International Center for Mathematics, Department of Mathematics
Southern,University of Science and Technology, 1088 Xueyuan Avenue, Shenzhen,
Guangdonghttp://people.mpim-bonn.mpg.de/stavros 电子邮箱：stavros@mpim-bonn.mpg.de
China,Shenzhen International Center for Mathematics
Southern University of Science and,Technology, 1088 Xueyuan Avenue, Shenzhen,
Guangdong电子邮箱：yut6@sustech.edu.cn