arXiv:2601.03557v1 [math.DS] 7 Jan 2026

周期系数随机 Lotka-Volterra 竞争模型的最优捕捞 *

邓文敏，张福*

上海理工大学理学院，中国上海 *200093*

摘要

本文系统研究了具有周期系数的随机 Lotka-Volterra 竞争模型的最优捕捞。建立了各物种灭绝以及时间平均持久性的充分条件。利用 Khasminskii 稳定性理论和适当的 Lyapunov 函数，建立了保证该模型存在正周期解的充分条件。在一定假设下，证明了该模型的分布稳定性。随后，获得了最优收获策略的存在性，并给出了最优捕捞努力和最大可持续产量的显式表达式。最后，利用 Python 中实现的 Euler-Maruyama 方法，通过数值计算展示了主要研究结果。

关键词： 最优捕捞；Lotka-Volterra竞争模型；正周期解；分布稳定性

1. 引言

随着社会经济的快速发展，人类对生物资源的过度开发（如过度捕捞和森林砍伐）引发了一系列严重的生态问题，包括生态系统功能退化、生物多样性显著下降，甚至物种灭绝。

*本研究得到国家自然科学基金委员会（项目批准号：12071292、42450269）的资助。

*通讯作者。电子邮箱：fuzhang82@gmail.com（张福）

在此背景下，实现可再生生物资源的可持续利用已成为种群动力学研究的核心议题之一。

然而，现实生态系统不可避免地会受到各种随机因素的影响。气候变化、极端自然灾害以及人类活动的不可预测性，都可能导致基于确定性模型得出的最优捕获策略失效。因此，采用随机模型研究种群动力学和捕捞策略，具有极其重要的理论和实践意义。

在自治随机生态系统（即参数不随时间变化的系统）最优捕获策略的研究过程中，学者们取得了一系列重要突破。Bedding- ton 和 May [1] 率先研究了单种群随机模型的最优捕捞问题，为该领域奠定了坚实的理论基础。Alvarez 和 Shepp [2] 通过分析 Hamilton-Jacobi-Bellman方程，建立了随机生态系统中最优捕获策略存在的充分条件，为理论证明提供了关键工具。此外，Liu 和 Bai [3] 通过求解随机捕食者-猎物模型对应的 Fokker-Planck方程，得出了最优捕获策略存在的充要条件。但需要指出的是，求解相应 Fokker-Planck方程的方法往往难以应用于更复杂系统中种群模型的最优捕捞问题。随后，Liu[4] 基于稳态分布的遍历性，进一步优化了随机种群模型最优捕获策略的分析方法，有效推动了更复杂种群模型研究的拓展。例如，Qiu 和 Deng [5] 利用遍历方法，研究了具有离散时滞和 Lévy 跳跃的随机竞争种群的最优捕捞问题。随后，Qiu 等人 [6] 将这一方法扩展至具有 S型分布时滞和 Lévy 跳跃的系统，从而完善了相关理论框架。这些研究共同构建了随机生态系统最优捕获策略研究的理论框架，为后续研究奠定了坚实基础。

然而，自然界中的种群动力学往往呈现出更为复杂的时空特征。由于季节等环境因素的周期性变化，种群的增长率和随机扰动的强度通常具有显著的时变特征。

具体而言，在资源丰富的春夏季，种群通常表现出较高的增长潜力；而在资源匮乏的秋冬季，种群则面临更大的生存压力。这种周期性主要体现在以下三个方面：食物资源的季节性波动；栖息地和庇护所的时空异质性；以及环境温度的周期性变化。这些因素的相互作用，使传统的自治模型难以准确描述真实的种群动力学。

在现有研究中，Liu [7] 利用模型的随机周期解作为桥梁，首次探索了具有周期系数的随机Gompertz模型（单种群情形）的最优捕捞问题。然而，自然生态系统中的物种往往通过竞争、共生等机制形成复杂的相互作用网络，因此多种群模型更能反映真实的生态关系。其中，竞争模型作为描述物种间资源竞争的基础模型，在种群动力学研究中占有重要地位。然而，由于非自治随机系统在理论上较为复杂，关于具有周期系数的竞争系统最优捕捞问题的研究仍存在明显空白。

本文旨在建立具有周期参数的随机竞争系统最优捕捞的理论框架，主要从以下两个方面推进现有研究：首先，基于Khasminskii渐近稳定性理论，通过构造新的Lyapunov函数，严格证明系统正周期解的存在性；其次，结合遍历理论，建立最优捕获策略的数学刻画。研究成果不仅填补了周期随机竞争系统最优捕捞理论的研究空白，也为实际生态系统管理提供了更准确的决策依据。

总之，具有周期系数的随机竞争模型可表示如下：

$$\begin{cases} \mathrm{d}x_1(t) &= x_1(t)\Big[r_1(t) - h_1 - c_{11}x_1(t) - c_{12}x_2(t)\Big]\mathrm{d}t \\ &\quad +\alpha_1(t)x_1(t)\mathrm{d}B_1(t), \\ \mathrm{d}x_2(t) &= x_2(t)\Big[r_2(t) - h_2 - c_{21}x_1(t) - c_{22}x_2(t)\Big]\mathrm{d}t \\ &\quad +\alpha_2(t)x_2(t)\mathrm{d}B_2(t), \end{cases} \tag{1}$$

w这里， $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 分别表示两个物种的种群规模，

分别为。 $r_i(t) > 0$ 是 $x_i(t)$ 的增长率， $i = 1, 2$。 $h_i > 0$ 表示 $x_i(t)$ 的捕捞努力， $i = 1, 2$。 $c_{ii} > 0$ 是 $x_i(t)$ 的种内竞争系数， i=1, 2； c_{ij} ($i \neq j$； i, j=1, 2) 分别表示种间竞争率。 $\alpha_i^2(t)$， $i = 1, 2$ 表示白噪声强度。 $B_i(t)$ $i = 1, 2$ 是定义在完备概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathscr{P})$ 上的标准独立布朗运动。系数 $r_i(t)$， $\alpha_i(t)$， i， $j = 1, 2$ 是连续的 T-周期函数。

为简化记号，本文始终假设 $T = 1$ 。遵循 Fan 和 Wang [8], ，我们将管理目标定义为年度收益，即最大化预期年度可持续产量：

$$Y(H) \triangleq \liminf_{t\to+\infty} \int_t^{t+1} \sum_{i=1}^{2} \mathbb{E}(h_i x_i(s))ds$$

其中 $H = (h_1, h_2)^T$ 表示捕捞努力。我们的目标是在物种持续生存的约束下，找到使 $Y(H)$ 达到最大值的最优捕捞努力（OHE） H^* 。

2. 灭绝与持续生存

为便于后续分析，我们引入以下记号：

$$x(t) \triangleq (x_1(t), x_2(t))^T \in R_+^2;$$

$$b_i(t) \triangleq r_i(t) - h_i - \frac{\alpha_i^2(t)}{2}, \quad i = 1, 2;$$

$$\Delta_1 \triangleq c_{22} \int_0^1 b_1(t)\mathrm{d}t - c_{12} \int_0^1 b_2(t)\mathrm{d}t, \quad \Delta_2 \triangleq c_{11} \int_0^1 b_2(t)\mathrm{d}t - c_{21} \int_0^1 b_1(t)\mathrm{d}t;$$

$$\langle f \rangle^* \triangleq \limsup_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(s)\mathrm{d}s, \quad \langle f \rangle_* \triangleq \liminf_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(s)\mathrm{d}s;$$

$$f^u \triangleq \sup_{t\in[0,+\infty)} f(t).$$

引理 2.1. 模型 *(1)* 几乎必然（*a.s.*）存在唯一的全局正解 $x(t)$ 。特别地，

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{\ln x_i(t)}{\ln t} \leqslant 1, \quad a.s., \quad i = 1, 2. \tag{2}$$

引理 2的证明。 该证明是 Li 和 Mao [9] 中定理 2.1 和引理 3.4 的一个特例, 因此省略。 □

引理 2.2. ***(Liu* 等人*[10]*和 *Xia* 等人*[11])***。令 $z(t) \in C[\Omega\times[0,+\infty)\ R_+]$，且 $\lim_{t\to+\infty} F(t)/t = 0\ a.s.$

($\mathfrak{A}$) 若存在一些常数 $T > 0$、 $\lambda_0 > 0$ 和 λ ，使得对所有$t \geqslant T$,

$$\ln z(t) \leqslant \lambda t - \lambda_0 \int_0^t z(s)\mathrm{d}s + F(t),\ a.s.,$$

then

$$\begin{cases} \langle z\rangle^* = \limsup\limits_{t\to+\infty} \dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t z(s)\mathrm{d}s \leqslant \lambda/\lambda_0, \quad a.s., \quad if\ \lambda \geqslant 0, \\ \lim\limits_{t\to+\infty} z(t) = 0, \quad a.s., \quad if\ \lambda < 0. \end{cases}$$

($\mathfrak{B}$) 若存在一些常数 $T > 0$、 $\lambda_0 > 0$ 和 $\lambda > 0$ ，使得对所有$t \geqslant T$,

$$\ln z(t) \geqslant \lambda t - \lambda_0 \int_0^t z(s)\mathrm{d}s + F(t),\ a.s.,$$

then

$$\langle z\rangle_* = \liminf_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\int_0^t z(s)\mathrm{d}s \geqslant \lambda/\lambda_0, \quad a.s.$$

在陈述我们的结果之前，我们作如下假设:

假设 1. 定义 $\Delta \triangleq c_{11}c_{22} - c_{21}c_{12}$ ，并假设 $\Delta > 0$。

引理 2.3. 假设假设 *1* 成立，对于模型 *(1)*,

(I) 若 $\int_0^1 b_1(t)\mathrm{d}t < 0$ 且 $\int_0^1 b_2(t)\mathrm{d}t < 0$，则 x_1 和 x_2 均几乎必然趋于灭绝, 即 $\lim_{t\to+\infty} x_i(t) = 0$，几乎必然，$i$=*1,2*；(II) 若 $\int_0^1 b_1(t)\mathrm{d}t > 0$ 且 $\int_0^1 b_2(t)\mathrm{d}t < 0$，则 x_2 几乎必然趋于灭绝，并且

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\int_0^t x_1(s)\mathrm{d}s = \frac{\int_0^1 b_1(t)\mathrm{d}t}{c_{11}}, \quad a.s.$$

(III) 若 $\int_0^1 b_1(t)\mathrm{d}t < 0$ 且 $\int_0^1 b_2(t)\mathrm{d}t > 0$，则 x_1 几乎必然趋于灭绝，并且

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\int_0^t x_2(s)\mathrm{d}s = \frac{\int_0^1 b_2(t)\mathrm{d}t}{c_{22}}, \quad a.s.$$

(IV) 若 $\int_0^1 b_1(t)\mathrm{d}t > 0$ 且 $\int_0^1 b_2(t)\mathrm{d}t > 0$。

(i) 如果 $\Delta_1 > 0$ 且 $\Delta_2 < 0$，那么 x_2 几乎必然趋于灭绝，并且

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\int_0^t x_1(s)\mathrm{d}s = \frac{\int_0^1 b_1(t)\mathrm{d}t}{c_{11}}, \quad a.s.$$

(ii) 如果 $\Delta_1 < 0$ 且 $\Delta_2 > 0$，那么 x_1 几乎必然趋于灭绝，并且

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\int_0^t x_2(s)\mathrm{d}s = \frac{\int_0^1 b_2(t)\mathrm{d}t}{c_{22}}, \quad a.s.$$

(iii) 如果 $\Delta_1 > 0$ 且 $\Delta_2 > 0$，那么 x_1 和 x_2 都几乎必然时间平均稳定：

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\int_0^t x_1(s)\mathrm{d}s = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\int_0^t x_2(s)\mathrm{d}s = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad a.s. \tag{3}$$

注记2.1。 在条件 $\int_0^1 b_1(t)\mathrm{d}t > 0$、$\int_0^1 b_2(t)\mathrm{d}t > 0$ 和 $\Delta > 0$下，不等式 $\Delta_1 < 0$ 和 $\Delta_2 < 0$ 不可能同时成立。

注记2的证明。1。 由于 $\Delta_1 < 0$ 和 $\Delta_2 < 0$，我们可以看出

$$c_{22}\int_0^1 b_1(t)\mathrm{d}t < c_{12}\int_0^1 b_2(t)\mathrm{d}t, \quad c_{11}\int_0^1 b_2(t)\mathrm{d}t < c_{21}\int_0^1 b_1(t)\mathrm{d}t.$$

注意到 c_{11}，c_{12}，c_{21}，$c_{22} > 0$、$\int_0^1 b_1(t)\mathrm{d}t > 0$和 $\int_0^1 b_2(t)\mathrm{d}t > 0$，将上述两个不等式两边相乘，可得

$$c_{11}c_{22}\int_0^1 b_1(t)\mathrm{d}t\int_0^1 b_2(t)\mathrm{d}t < c_{12}c_{21}\int_0^1 b_1(t)\mathrm{d}t\int_0^1 b_2(t)\mathrm{d}t,$$

由此可得

$$c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} = \Delta < 0.$$

矛盾由此产生。 □

引理 2 的证明。3. 对模型 (1) 应用伊藤公式可得

$$\begin{aligned}
&\ln x_1(t) - \ln x_1(0)\\
= &\int_0^t (r_1(s) - h_1 - \frac{\alpha_1^2(s)}{2})\mathrm{d}s - c_{11}\int_0^t x_1(s)ds - c_{12}\int_0^t x_2(s)\mathrm{d}s\\
&+\int_0^t \alpha_1(s)\mathrm{d}B_1(t)\\
= &\int_0^t b_1(s)\mathrm{d}s - c_{11}\int_0^t x_1(s)\mathrm{d}s - c_{12}\int_0^t x_2(s)\mathrm{d}s + \int_0^t \alpha_1(s)\mathrm{d}B_1(s).
\end{aligned}$$

也就是说

$$\begin{aligned}
\frac{\ln x_1(t)}{t} = &\frac{\ln x_1(0)}{t} + \frac{1}{t}\int_0^t b_1(s)\mathrm{d}s - \frac{c_{11}}{t}\int_0^t x_1(s)\mathrm{d}s\\
&-\frac{c_{12}}{t}\int_0^t x_2(s)\mathrm{d}s + \frac{1}{t}\int_0^t \alpha_1(s)\mathrm{d}B_1(s).
\end{aligned} \tag{4}$$

同理，我们可以推导出

$$\begin{aligned}
\frac{\ln x_2(t)}{t} = &\frac{\ln x_2(0)}{t} + \frac{1}{t}\int_0^t b_2(s)\mathrm{d}s - \frac{c_{21}}{t}\int_0^t x_1(s)\mathrm{d}s\\
&-\frac{c_{22}}{t}\int_0^t x_2(s)\mathrm{d}s + \frac{1}{t}\int_0^t \alpha_2(s)\mathrm{d}B_2(s).
\end{aligned} \tag{5}$$

考虑积分 $\int_0^t b_i(s)\,ds$, $i = 1,\ 2$。我们可以将区间$[0,t]$ 分解为若干个完整周期和一个余项。令 n 为小于或等于 t的最大整数，则 $t = n + r$，其中 $0 \le r < 1$。因此，

$$\int_0^t b_i(s)\,ds = \int_0^n b_i(t)\,dt + \int_n^{n+r} b_i(t)\,dt, \quad i = 1, 2.$$

由于 $b_i(t)$, $i = 1,\ 2$ 是一个连续的 1-周期函数，因此我们有：

$$\int_0^n b_i(t)\,dt = n\int_0^1 b_i(t)\,dt, \quad i = 1, 2.$$

综合以上结果，我们得到：

$$\int_0^t b_i(s)\,ds = n\int_0^1 b_i(t)\,dt + \int_n^{n+r} b_i(t)\,dt, \quad i = 1, 2.$$

两边除以 t 并取极限:

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\int_0^t b_i(s)\,ds=\lim_{t\to+\infty}\frac{n}{t}\int_0^1 b_i(t)\,dt+\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\int_n^{n+r} b_i(t)\,dt,\quad i=1,2.$$

对于剩余部分 $\int_n^{n+r} b_i(t)\,dt$，由于 $r<1$，我们有:

$$\left|\int_n^{n+r} b_i(t)\,ds\right|\le\max_{t\in[0,1]}|b_i(t)|\cdot r,\quad i=1,2,$$

so

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\int_n^{n+r} b_i(t)\,dt=0,\quad i=1,2.$$

由于 $n=t-r$，其中 $0\le r<1$，因此 $n/t\to1$ 由于 $t\to+\infty$。所以:

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\int_0^t b_i(s)\,ds=\int_0^1 b_i(t)\,dt,\quad i=1,2.$$

T因此，对于任意 $\varepsilon>0$，存在一个随机时间 $T_0>0$，使得当 $t\geqslant T_0$ 时，

$$\int_0^1 b_i(t)\mathrm{d}t-\varepsilon\leqslant\frac{1}{t}\int_0^t b_i(s)\mathrm{d}s\leqslant\int_0^1 b_i(t)\mathrm{d}t+\varepsilon,\quad i=1,2.\tag{6}$$

注意到

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln x_i(0)}{t}=0,\quad i=1,2.$$

因此，对于任意 $\varepsilon>0$，存在一个随机时间 $T_1>0$，使得当 $t\geqslant T_1$ 时，

$$-\varepsilon\leqslant\frac{\ln x_i(0)}{t}\leqslant\varepsilon.\tag{7}$$

此外，根据强大数定律（例如，参见 [13] 的第 1 章中的定理 3.4），我们得到

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\int_0^t\alpha_i(s)\mathrm{d}B_i(t)=0,\quad a.s.,\quad i=1,2.\tag{8}$$

公式（8）的推导使得我们能够在下面的证明中应用引理 2.2。

首先，我们证明 (I)。根据 (4)、(6) 和 (7)，可得

$$\frac{\ln x_1(t)}{t}\leqslant\int_0^1 b_1(t)\mathrm{d}t+2\varepsilon-\frac{c_{11}}{t}\int_0^t x_1(s)\mathrm{d}s+\frac{1}{t}\int_0^t\alpha_1(s)\mathrm{d}B_1(s).$$

由于 $\int_0^1 b_1(t)\mathrm{d}t < 0$，并令 ε 足够小，使得 $\int_0^1 b_1(t)\mathrm{d}t + 2\varepsilon < 0$，将引理 2.2 的 (𝔄) 代入，得到

$$\lim_{t\to+\infty} x_1(t) = 0, \quad a.s.$$

同理，由 (5) 可证明，若 $\int_0^1 b_2(t)\mathrm{d}t < 0$，则 $\lim_{t\to+\infty} x_2(t) = 0, a.s.$

其次，我们证明 (II)。由于 $\int_0^1 b_2(t)\mathrm{d}t < 0$，由 (I) 可得 $\lim_{t\to+\infty} x_2(t) = 0$, $a.s.$ 因此，对每个 $\varepsilon > 0$，存在一个随机时间 $T_2 > 0$，使得当 $t \geqslant T_2$ 时，

$$-\varepsilon \leqslant \frac{c_{12}}{t}\int_0^t x_2(s)\mathrm{d}s \leqslant \varepsilon.$$

将上述不等式以及方程 (6)、(7) 代入方程 (4)，令 $T = \max(T_0,\ T_1,\ T_2)$。那么对于 $t \geqslant T$，可得

$$\frac{\ln x_1(t)}{t} \leqslant \int_0^1 b_1(t)\mathrm{d}t + 3\varepsilon - \frac{c_{11}}{t}\int_0^t x_1(s)\mathrm{d}s + \frac{1}{t}\int_0^t \alpha_1(s)\mathrm{d}B_1(s), \quad (9)$$

$$\frac{\ln x_1(t)}{t} \geqslant \int_0^1 b_1(t)\mathrm{d}t - 3\varepsilon - \frac{c_{11}}{t}\int_0^t x_1(s)\mathrm{d}s + \frac{1}{t}\int_0^t \alpha_1(s)\mathrm{d}B_1(s). \quad (10)$$

由于 $\int_0^1 b_1(t)\mathrm{d}t > 0$，且 ε 是任意的，我们可以选取充分小的 ε，使得 $\int_0^1 b_1(t)\mathrm{d}t - 3\varepsilon > 0$。分别将引理 2.2 中的 (𝔄) 和 (𝔅) 应用于 (9) 和 (10)，得到

$$\frac{\int_0^1 b_1(t)\mathrm{d}t - 3\varepsilon}{c_{11}} \leqslant \langle x_1\rangle_* \leqslant \langle x_1\rangle^* \leqslant \frac{\int_0^1 b_1(t)\mathrm{d}t + 3\varepsilon}{c_{11}}.$$

令 $\varepsilon \to 0$，我们得到 $\lim_{t\to+\infty} t^{-1}\int_0^t x_1(s)\mathrm{d}s = \int_0^1 b_1(t)\mathrm{d}t/c_{11}, \quad a.s.$。

第三，我们证明（III）。由对称性，（III）的证明方式与（II）类似，因而省略。

第四，我们证明 (IV)。考虑以下方程：

$$\begin{cases} \mathrm{d}y_1(t) &= y_1(t)\Big[r_1(t) - h_1 - c_{11}y_1(t)\Big]\mathrm{d}t + \alpha_1(t)y_1(t)\mathrm{d}B_1(t), \\ \mathrm{d}y_2(t) &= y_2(t)\Big[r_2(t) - h_2 - c_{22}y_2(t)\Big]\mathrm{d}t + \alpha_2(t)y_2(t)\mathrm{d}B_2(t), \end{cases}$$

其中 $y_i(0) = x_i(0),\ \ i = 1,\ 2$。根据 Huang [12], 中的随机比较定理，我们得到

$$x_1(t) \leqslant y_1(t), \quad x_2(t) \leqslant y_2(t).$$

由于 $\int_0^1 b_1(t)\mathrm{d}t > 0$ 和 $\int_0^1 b_2(t)\mathrm{d}t > 0$，类似于 (II) 的论证可得

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\int_0^t y_i(s)\mathrm{d}s = \frac{\int_0^1 b_i(t)\mathrm{d}t}{c_{ii}}, \quad a.s., \quad i = 1, 2.$$

另一方面，通过计算 (5)$\times c_{11}$-(4)$\times c_{21}$，我们得到

$$\begin{aligned}\frac{c_{11}}{t}\ln\frac{x_2(t)}{x_2(0)} &= \frac{c_{21}}{t}\ln\frac{x_1(t)}{x_1(0)} + \frac{c_{11}}{t}\int_0^t b_2(s)\mathrm{d}s - \frac{c_{21}}{t}\int_0^t b_1(s)\mathrm{d}s - \frac{\Delta}{t}\int_0^t x_2(s)\mathrm{d}s \\ &\quad + \frac{c_{11}}{t}\int_0^t \alpha_2(s)\mathrm{d}B_2(s) - \frac{c_{21}}{t}\int_0^t \alpha_1(s)\mathrm{d}B_1(s).\end{aligned} \tag{11}$$

由 (2) 可知，对于任意 $\varepsilon > 0$，存在一个随机时间 $T_3 > 0$，使得对所有 $t \geqslant T_3$,

$$\frac{c_{ji}}{t}\ln\frac{x_i(t)}{x_i(0)} < \varepsilon, \quad \text{for} \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j. \tag{12}$$

将 (6)、(7) 和 (12) 代入 (11)，可得

$$\begin{aligned}\frac{c_{11}}{t}\ln x_2(t) &\leqslant \Delta_2 + 4\varepsilon - \frac{\Delta}{t}\int_0^t x_2(s)\mathrm{d}s \\ &\quad + \frac{c_{11}}{t}\int_0^t \alpha_2(s)\mathrm{d}B_2(s) - \frac{c_{21}}{t}\int_0^t \alpha_1(s)\mathrm{d}B_1(s).\end{aligned} \tag{13}$$

类似地，通过计算 (4)$\times c_{22}$-(5)$\times c_{12}$ 并应用 (6)、(7) 和 (12)，我们得到

$$\begin{aligned}\frac{c_{22}}{t}\ln x_1(t) &\leqslant \Delta_1 + 4\varepsilon - \frac{\Delta}{t}\int_0^t x_1(s)\mathrm{d}s \\ &\quad + \frac{c_{22}}{t}\int_0^t \alpha_1(s)\mathrm{d}B_1(s) - \frac{c_{12}}{t}\int_0^t \alpha_2(s)\mathrm{d}B_2(s).\end{aligned} \tag{14}$$

对于 $t > T'(T' = \max(T_0, T_1, T_3))$ 以及任意 $\varepsilon > 0$。

(i)：由于 $\Delta_2 < 0$，我们可以选择足够小的 ε，使得 $\Delta_2 + 4\varepsilon < 0$。将引理 2.2 中的 (2) 应用于 (13)，可得

$$\lim_{t\to+\infty} x_2(t) = 0, \quad a.s.$$

.....的证明

$$\lim_{t\to+\infty} t^{-1}\int_0^t x_1(s)\mathrm{d}s = \frac{\int_0^1 b_1(t)\mathrm{d}t}{c_{11}}, \quad a.s.$$

可类似于 (II) 推得，故略去。

(ii)：**(ii)** 的论证与 **(i)** 对称，为简洁起见略去。

(iii)：给定 $\Delta_2 > 0$，引理 2.2 中的 **(13)** 和 **(𝔏)** 推出

$$\langle x_2\rangle^* \leqslant \frac{\Delta_2 + 4\varepsilon}{\Delta}, \quad a.s.$$

由 ε 的任意性，令 $\varepsilon \to 0$ ，可得

$$\langle x_2\rangle^* \leqslant \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad a.s. \tag{15}$$

类似地，由引理 2.2 中的 **(14)** 和 **(𝔏)**，可得

$$\langle x_1\rangle^* \leqslant \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad a.s. \tag{16}$$

令 ε 足够小，使得 $c_{11}\frac{\Delta_1}{\Delta} - 2\varepsilon > 0$。将 **(6)**、**(7)** 和 **(15)** 代入 **(4)**，当 t 充分大时，得到：

$$\begin{aligned}
\frac{\ln x_1(t)}{t} &\geqslant \int_0^1 b_1(t)\mathrm{d}t - 2\varepsilon - \frac{c_{11}}{t}\int_0^t x_1(s)\mathrm{d}s - c_{12}\langle x_2(t)\rangle^* + \frac{1}{t}\int_0^t \alpha_1(s)\mathrm{d}B_1(s) \\
&\geqslant \int_0^1 b_1(t)\mathrm{d}t - 2\varepsilon - \frac{c_{11}}{t}\int_0^t x_1(s)\mathrm{d}s - c_{12}\frac{\Delta_2}{\Delta} + \frac{1}{t}\int_0^t \alpha_1(s)\mathrm{d}B_1(s) \\
&= c_{11}\frac{\Delta_1}{\Delta} - 2\varepsilon - \frac{c_{11}}{t}\int_0^t x_1(s)\mathrm{d}s + \frac{1}{t}\int_0^t \alpha_1(s)\mathrm{d}B_1(s).
\end{aligned}$$

由引理 2.2 中的（𝔅）以及 ε 的任意性，我们得出：

$$\langle x_1\rangle_* \geqslant \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad a.s. \tag{17}$$

类似地，将（6）、（7）和（16）应用于（5），可得：

$$\langle x_2\rangle_* \geqslant \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad a.s.$$

结合这一结果与（15）—（17），我们得出几乎必然收敛

$$\lim_{t\to+\infty} t^{-1}\int_0^t x_1(s)\mathrm{d}s = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad \text{and} \quad \lim_{t\to+\infty} t^{-1}\int_0^t x_2(s)\mathrm{d}s = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad a.s.$$

□

3. 正周期解的存在性

本节将给出模型（1）存在非平凡正周期解的充分条件。

考虑一个 d 维随机微分方程

$$dx(t) = f(x(t),t)dt + g(x(t),t)dB(t) \quad \text{on } t \geq t_0 \tag{18}$$

其初值为 $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^d$。定义与（18）相关的微分算子 $\mathcal{L}$，如下:

$$\mathcal{L} \triangleq \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^{d} f_k(x,t)\frac{\partial}{\partial x_k} + \frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{d}[g^T(x,t)g(x,t)]_{|kj}\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j}.$$

在陈述结果之前，我们先作如下假设:

假设2。
$(H1)$ $\int_0^1 b_i(t)\mathrm{d}t > 0, \quad i = 1, \ 2。(H2)$ $\Phi_m \triangleq \sum_{i=1}^{2}\int_0^1 b_i(t)\mathrm{d}t - ($
$r_m^u - h_m + c_{mm} + c_{nm})_{4c_{mm}}$ $^2 > 2, \quad m, \ n = 1, \ 2, \quad m \neq n。$

引理3.1。 若假设*2*成立，则模型*(1)*有一个 $1-$周期解 .

引理 3 的证明。1。 我们将利用[14]中的定理 3.8证明这一结论。定义

$$V(t,x_1,x_2) \triangleq \sum_{i=1}^{2}(x_i(t) - \ln x_i(t) + \omega_i(t)),$$

其中 $\omega_i'(t) = b_i(t) - \int_0^1 b_i(t)dt$, $i = 1, 2$。那么 $\omega_i(t)$ 是一个 1–周期函数。事实上，由于 $b_i(t)$ 是一个 1–周期函数，

$$\begin{aligned}\omega_i(t+1) - \omega_i(t) &= \int_t^{t+1} \omega_i'(s)\mathrm{d}s \\ &= \int_t^{t+1} b_i(s)\mathrm{d}s - \int_t^{t+1}\int_0^1 b_i(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}s \\ &= \int_0^1 b_i(t)\mathrm{d}t - \int_0^1 b_i(t)\mathrm{d}t \\ &= 0\end{aligned}$$

显然，

$$\liminf_{k\to\infty,(x_1,x_2)\in R_+^2\setminus U_k} V(t, x_1, x_2) = \infty, \quad i = 1, 2. \tag{19}$$

其中 $U_k = \{(x_1, x_2) : (x_1, x_2) \in (\frac{1}{k}, k) \times (\frac{1}{k}, k)\}$。

应用 Itˆo 公式，可得

$$\begin{aligned}\mathcal{L}V &= \sum_{i=1}^2 \big[x_i(t)\big(r_i(t) - h_i - c_{ii}x_i(t) - \sum_{j=1,j\neq i}^2 c_{ij}x_j(t)\big) - \big(b_i(t) - c_{ii}x_i(t) \\ &\quad - \sum_{j=1,j\neq i}^2 c_{ij}x_j(t)\big) + \omega_i'(t)\big] \\ &\leqslant \sum_{i=1}^2 \big[x_i(t)\big(r_i(t) - h_i - c_{ii}x_i(t)\big) - \big(b_i(t) - c_{ii}x_i(t) - \sum_{j=1,j\neq i}^2 c_{ij}x_j(t)\big) \\ &\quad + b_i(t) - \int_0^1 b_i(t)\mathrm{d}t\big] \\ &= -\sum_{i=1}^2 c_{ii}x_i^2(t) + \sum_{i=1}^2 (r_i(t) - h_i + c_{ii})x_i(t) + \sum_{i,j=1,j\neq i}^2 c_{ij}x_j(t) \\ &\quad - \sum_{i=1}^2 \int_0^1 b_i(t)\mathrm{d}t \\ &\leqslant -\sum_{i=1}^2 c_{ii}x_i^2(t) + \sum_{i=1}^2 (r_i^u - h_i + c_{ii})x_i(t) + \sum_{i,j=1,j\neq i}^2 c_{ij}x_j(t) \\ &\quad - \sum_{i=1}^2 \int_0^1 b_i(t)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

设 $U_\varepsilon = \{(x_1,\ x_2) : (x_1,\ x_2) \in [\varepsilon, \frac{1}{\varepsilon}] \times [\varepsilon, \frac{1}{\varepsilon}]\}$ 是一个紧集，其中选择ε足够小，使其满足以下条件:

$$(1)\quad (r_n^u - h_n + c_{nn})\varepsilon \leqslant \frac{1}{2}\Big\{\sum_{i=1}^{2}\int_0^1 b_i(t)\mathrm{d}t - \frac{(r_m^u - h_m + c_{mm} + c_{nm})^2}{4c_{mm}}\Big\},$$

$$(2)\quad -\frac{c_{nn}}{2\varepsilon} + K \leqslant -1,$$

其中 $m, n = 1,2,\ m \neq n$ 以及 K 在证明的其余部分中定义。

情形 1：对于任意固定的 $n(n = 1,2)$，若 $0 < x_n < \varepsilon$，则有

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}V &\leqslant -\sum_{i=1}^{2} c_{ii}x_i^2(t) + \sum_{i=1}^{2}(r_i^u - h_i + c_{ii})x_i(t) + \sum_{i,j=1,j\neq i}^{2} c_{ij}x_j(t) \\
&\quad -\sum_{i=1}^{2}\int_0^1 b_i(t)\mathrm{d}t \\
&\leqslant -c_{mm}x_m^2(t) + (r_m^u - h_m + c_{mm} + c_{nm})x_m(t) + (r_n^u - h_n + c_{nn})\varepsilon \\
&\quad -\sum_{i=1}^{2}\int_0^1 b_i(t)\mathrm{d}t \\
&= -c_{mm}\big(x_m(t) + \frac{r_m^u - h_m + c_{mm} + c_{nm}}{2c_{mm}}\big)^2 + \frac{(r_m^u - h_m + c_{mm} + c_{nm})^2}{4c_{mm}} \\
&\quad +(r_n^u - h_n + c_{nn})\varepsilon - \sum_{i=1}^{2}\int_0^1 b_i(t)\mathrm{d}t \\
&\leqslant (r_n^u - h_n + c_{nn})\varepsilon + \frac{(r_m^u - h_m + c_{mm} + c_{nm})^2}{4c_{mm}} - \sum_{i=1}^{2}\int_0^1 b_i(t)\mathrm{d}t \\
&\leqslant \frac{1}{2}\Big\{\frac{(r_m^u - h_m + c_{mm} + c_{nm})^2}{4c_{mm}} - \sum_{i=1}^{2}\int_0^1 b_i(t)\mathrm{d}t\Big\} \\
&= -\frac{1}{2}\Phi_m \\
&\leqslant -1,
\end{aligned}$$

其中 $m = 1,\ 2,\quad m \neq n$。

情形 2：对于任意固定的 $n(n=1,\ 2)$，若 $\frac{1}{\varepsilon}<x_n$，则有

$$\begin{aligned}\mathcal{L}V &\leqslant -\frac{c_{nn}}{2}x_n^2(t)-\frac{c_{nn}}{2}x_n^2(t)-c_{mm}x_m^2(t)+\sum_{i=1}^{2}(r_i^u-h_i+c_{ii})x_i(t)\\ &\quad+\sum_{i,j=1,j\neq i}^{2}c_{ij}x_j(t)-\sum_{i=1}^{2}\int_0^1 b_i(t)\mathrm{d}t\\ &\leqslant -\frac{c_{nn}}{2\varepsilon^2}+K\\ &\leqslant -1,\end{aligned}$$

其中 $m=1,\ 2,\ \ m\neq n$ 且 $K=\sup_{(x_1,x_2)\in R_+^2}\{-\frac{c_{nn}}{2}x_n^2(t)-c_{mm}x_m^2(t)+\sum_{i=1}^{2}(r_i^u-h_i+c_{ii})x_i(t)+\sum_{i,\ j=1,\ j\neq i}^{2}c_{ij}x_j(t)-\sum_{i=1}^{2}\int_0^1 b_i(t)\mathrm{d}t\}$ 是一个常数。综上，我们得到

$$\mathcal{L}V\leqslant -1,\quad (x_1,x_2)\in R_+^2\setminus U_\varepsilon. \tag{20}$$

由 (19) 和 (20) 可知，[14]中的定理 3.8 的条件均已满足。因此，模型 (1) 存在一个 1-周期解，记作 $x^*(t)=(x_1^*(t)\ x_2^*(t))\in R_+^2$。

□

4. 分布稳定性

本节研究模型 (1) 的分布稳定性。在证明我们的结果之前，我们先给出一个假设和一个引理。

假设 3. $c_{11}>c_{21}$ 且 $c_{22}>c_{12}$。

引理 4.1。若 $p\geqslant 1$，则存在一个正的 K_2，使得

$$\limsup_{t\to+\infty}\mathbb{E}(x_i(t))^p\leqslant K_2,\quad i=1,2.$$

引理 4.1. 该引理的证明是 [9], 中引理3.1 的一个特例，因此省略证明过程。

□

引理 4.2. 若假设 *3* 成立，则对于任意初始数据 $(x_1(0)\ x_2(0))^T$ 和$(\widetilde{x}_1(0)\ \widetilde{x}_2(0))^T$, 解 $(x_1(t)\ x_2(t))^T$和 $(\widetilde{x}_1(t)\ \widetilde{x}_2(t))^T$满足

$$\lim_{t\to+\infty}\mathbb{E}\big|x_i(t)-\widetilde{x}_i(t)\big|=0,\quad i=1,2.$$

引理 4.2. 的证明

$$\widetilde{V}(t)\triangleq\big|\ln x_1(t)-\ln\widetilde{x}_1(t))\big|+\big|\ln x_2(t))-\ln\widetilde{x}_2(t))\big|.$$

~ ~对 $V(t)$ 应用 Itˆo 公式，计算其右微分 $\mathrm{d}^+V(t)$，可得

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}^+\widetilde{V}(t)\\
=\ &\mathrm{sgn}\big(x_1(t)-\widetilde{x}_1(t)\big)\big[-c_{11}\big(x_1(t)-\widetilde{x}_1(t)\big)\big)-c_{12}\big(x_2(t)-\widetilde{x}_2(t)\big)\big)\big]\mathrm{d}t\\
&+\mathrm{sgn}\big(x_2(t)-\widetilde{x}_2(t)\big)\big[-c_{21}\big(x_1(t)-\widetilde{x}_1(t)\big)\big)-c_{22}\big(x_2(t)-\widetilde{x}_2(t)\big)\big)\big]\mathrm{d}t\\
\leqslant\ &-\sum_{i=1}^{2}c_{ii}\big|x_i(t)-\widetilde{x}_i(t)\big)\big|\mathrm{d}t\\
&+c_{12}\big|x_2(t)-\widetilde{x}_2(t)\big)\big|\mathrm{d}t+c_{21}\big|x_1(t)-\widetilde{x}_1(t)\big)\big|\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}
0\leqslant\mathbb{E}(\widetilde{V}(t))\leqslant\ &\widetilde{V}(0)-(c_{11}-c_{21})\int_0^t\mathbb{E}\big|x_1(t)-\widetilde{x}_1(t)\big)\big|\mathrm{d}s\\
&-(c_{22}-c_{12})\int_0^t\mathbb{E}\big|x_2(t)-\widetilde{x}_2(t)\big)\big|\mathrm{d}s,
\end{aligned}$$

这意味着

$$(c_{11}-c_{21})\int_0^t\mathbb{E}\big|x_1(t)-\widetilde{x}_1(t)\big)\big|\mathrm{d}s\leqslant\widetilde{V}(0)<+\infty,$$

$$(c_{22}-c_{12})\int_0^t\mathbb{E}\big|x_2(t)-\widetilde{x}_2(t)\big)\big|\mathrm{d}s\leqslant\widetilde{V}(0)<+\infty.$$

根据假设 3，对于每个 $t\in(0,\infty)$，我们得到:

$$\int_0^t\mathbb{E}\big|x_1(t)-\widetilde{x}_1(t)\big)\big|\mathrm{d}s\leqslant\frac{\widetilde{V}(0)}{(c_{11}-c_{21})}<+\infty,$$

$$\int_0^t\mathbb{E}\big|x_2(t)-\widetilde{x}_2(t)\big)\big|\mathrm{d}s\leqslant\frac{\widetilde{V}(0)}{(c_{22}-c_{12})}<+\infty.$$

因此,

$$\mathbb{E}\big|x_i(t)-\widetilde{x}_i(t))\big| \in L^1[0,+\infty), \quad i=1,2. \tag{21}$$

由模型 (1)，我们注意到

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(x_1(t)) &= x_1(0)+\int_0^t \Big[\mathbb{E}((r_1(t)-h_1)x_1(s))-c_{11}\mathbb{E}(x_1(s))^2 \\ &\quad -c_{12}\mathbb{E}(x_1(s)x_2(s))\Big]\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

这意味着 $\mathbb{E}(x_1(t))$ 的可微性。根据引理 4.1,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\mathbb{E}(x_1(t))}{\mathrm{d}t} &\leqslant (r_1^u-h_1)\mathbb{E}(x_1(t))-c_{11}\mathbb{E}(x_1(t))^2-c_{12}\mathbb{E}(x_1(t)x_2(t)) \\ &\leqslant r_1^u\mathbb{E}(x_1(t)) \\ &\leqslant r_1^u D_1,\end{aligned}$$

其中 $D_1>0$ 是一个常数。因此， $\mathbb{E}(x_1(t))$ 一致连续。同理， $\mathbb{E}(x_2(t))$ 也一致连续。由 Barbalat引理（Barbalat[15]）和 (21)，我们得出:

$$\lim_{t\to+\infty}\mathbb{E}\big|x_i(t)-\widetilde{x}_i(t)\big|=0, \quad i=1,2. \tag{22}$$

□

引理 4.3. 若假设 *3* 成立，则存在唯一的 1-周期概率测度 $\varphi(t,\cdot)$，使得对于任意初始数据 $x(0)\in R_+^2$， $x(t)$ 的转移概率 $p(t,0,x(0)\ \cdot)$ 当 $t\to+\infty$ 时弱收敛到 $\varphi(t,\cdot)$。此外,

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\int_0^t x(s)\mathrm{d}s=\int_0^1\int_0^{+\infty}x\varphi(t,\mathrm{d}x)\mathrm{d}t, \quad a.s.$$

引理 4.3 的证明。 根据引理 4.1， $x_i(t)$ 的 p 阶矩一致有界:

$$\sup_{t\geq 0}\mathbb{E}[x_i(t)^p]\leq K \quad (i=1,2),$$

其中 $K>0$ 为常数。结合不等式 (23) 和定理2.8，在[16], 中，该系统存在唯一的 1-周期概率测度 $\varphi(t,\ \cdot)$，使得对所有 $x(0)\in\mathbb{R}_+^2$， $p(t,\ 0,\ x(0)\ \cdot)$ 弱收敛于 $\varphi(t,\ \cdot)$。

定义 $\mathbb{R}_+$ 上的平均测度 φ：

$$\overline{\varphi}(\cdot) \triangleq \int_0^1 \varphi(t,\cdot)\,\mathrm{d}t.$$

根据 Feng 和 Zhao 的定理 3.2, [17], $\overline{\varphi}(\cdot)$ 是一个不变测度。

对于 $t \geq 0$，令 n_t 为小于或等于 t 的最大非负整数，并作如下分解：

$$\frac{1}{t}\int_0^t x(s)\,\mathrm{d}s = \underbrace{\frac{n_t}{t}\cdot\frac{1}{n_t}\sum_{k=0}^{n_t-1}\int_k^{k+1} x(s)\,\mathrm{d}s}_{(I)} + \underbrace{\frac{1}{t}\int_{n_t}^t x(s)\,\mathrm{d}s}_{(II)}.$$

项 (I)： 根据马尔可夫性质和周期性，$\int_k^{k+1} x(s)\,\mathrm{d}s \triangleq H(\theta_k\omega)$，其中 θ_k 是移位算子，且 $H(\omega) \triangleq \int_0^1 x(s,\ \omega)\,\mathrm{d}s$。由于 $\varphi(t,\ \cdot)$ 的唯一性、φ 的定义以及不变测度的性质，可以得出 $\bar{\varphi}$ 是离散系统 $\{H(\theta_k\omega)\}$ 的唯一不变测度。因此，$\bar{\varphi}$ 是遍历的。伯克霍夫遍历定理给出：

$$\lim_{n_t\to\infty}\frac{1}{n_t}\sum_{k=0}^{n_t-1} H(\theta_k\omega) = \mathbb{E}_{\overline{\varphi}}[H] \quad \text{a.s.}$$

项 (II)： 根据引理 4.1 的矩界：

$$\left|\frac{1}{t}\int_{n_t}^t x(s)\,\mathrm{d}s\right| \leq \frac{t-n_t}{t}\cdot\sup_{s\geq 0}\mathbb{E}[x(s)] \to 0 \quad \text{as} \quad t\to\infty.$$

根据富比尼定理和 φ的定义：

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\overline{\varphi}}[H] &= \int_\Omega H(\omega)\,\overline{\varphi}(\mathrm{d}\omega) \\
&= \int_\Omega \left(\int_0^1 x(s,\omega)\,\mathrm{d}s\right)\overline{\varphi}(\mathrm{d}\omega) \\
&= \int_0^1 \left(\int_\Omega x(s,\omega)\,\overline{\varphi}(\mathrm{d}\omega)\right)\mathrm{d}s \\
&= \int_0^1\int_0^{+\infty} x\,\varphi(s,\mathrm{d}x)\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

根据 n_t 的定义， $n_t/t \to 1$ 为 $t \to +\infty$。因此，

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\int_0^t x(s)\mathrm{d}s = \int_0^1 \int_0^{+\infty} x\varphi(t,\mathrm{d}x)\mathrm{d}t, \quad a.s.$$

□

5. 最优捕捞

本节将给出模型(1)的最优捕捞努力（OHE）和最大可持续产量（MESY）。

注释5.1。定义

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}.$$

需要指出的是， $C^{-1} + (C^{-1})^T$ 是一个正定矩阵，这是因为 $c_{22} > 0$ 和 $\Delta > 0$。

定理5.1。 对于模型*(1)*，假设假设*1-3*成立。定义 e

$$L \triangleq \Big(\int_0^1 (r_1(t) - \frac{\alpha_1^2(t)}{2})\mathrm{d}t, \int_0^1 (r_2(t) - \frac{\alpha_2^2(t)}{2})\mathrm{d}t \Big)^T,$$

$$A \triangleq (\lambda_1, \lambda_2)^T \triangleq [C(C^{-1})^T + I]^{-1} L, \tag{23}$$

其中 I 是一个 2×2 单位矩阵。

若 $\int_0^1 b_1(t)\mathrm{d}t|_{H=A} > 0$, $\int_0^1 b_2(t)\mathrm{d}t|_{H=A} > 0$, $\Delta_1|_{H=A} > 0$, $\Delta_2|_{H=A} > 0$, $\Phi_1|_{H=A} > 2$, $\Phi_2|_{H=A} > 2$, $\lambda_1 \geqslant 0$且 $\lambda_2 \geqslant 0$。因此，*OHE* 为$H^* = A$ ，*MESY* 为

$$Y^* = A^T C^{-1}(L - A). \tag{24}$$

定理 5 的证明。1。 根据引理 3.1、4.2 和 4.3，我们有

$$\begin{aligned} Y(H) = & \liminf_{t\to+\infty} \int_t^{t+1} \sum_{i=1}^{2} \mathbb{E}(h_i x_i(s))\mathrm{d}s \\ = & \liminf_{t\to+\infty} \int_t^{t+1} \mathbb{E}(H^T x(s))\mathrm{d}s \\ = & \liminf_{t\to+\infty} \int_t^{t+1} H^T \mathbb{E}(x(s))\mathrm{d}s \\ = & \liminf_{t\to+\infty} \int_t^{t+1} H^T \mathbb{E}(x^*(s))\mathrm{d}s \\ = & \int_0^1 H^T \mathbb{E}(x^*(s))\mathrm{d}s \\ = & \int_0^1 H^T \int_0^{+\infty} x\varphi(t,dx)\mathrm{d}t \\ = & \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \int_0^t H^T x(s)\mathrm{d}s \\ = & \sum_{i=1}^{2} h_i \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \int_0^t x_i(s)\mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{25}$$

结合（3）和（25），我们得到

$$Y(H) = \sum_{i=1}^{2} \frac{h_i \Delta_i}{\Delta} = H^T C^{-1}(L-H). \tag{26}$$

设 $A = (\lambda_1, \lambda_2)^T$ 为下列方程的唯一解:

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\mathrm{d}Y(H)}{\mathrm{d}H} &= \frac{\mathrm{d}(H^T C^{-1}(L-H))}{\mathrm{d}H} = \frac{\mathrm{d}(H^T C^{-1} L - H^T C^{-1} H)}{\mathrm{d}H} \\ &= \frac{\mathrm{d}(H^T C^{-1} L)}{\mathrm{d}H} - \frac{\mathrm{d}(H^T C^{-1} H)}{\mathrm{d}H} \\ &= C^{-1}L - [C^{-1} + (C^{-1})^T]H. \end{aligned}$$

因此， $A = [C(C^{-1})^T + I]^{-1} L$。显然,

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}H^T}\Big[\frac{\mathrm{d}Y(H)}{\mathrm{d}H}\Big] &= \Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}H}\Big[(\frac{\mathrm{d}Y(H)}{\mathrm{d}H})^T\Big]\Big)^T \\ &= \Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}H}\Big[L^T(C^{-1})^T - H^T[C^{-1} + (C^{-1})^T]\Big]\Big)^T \\ &= -(C^{-1} + (C^{-1})^T). \end{aligned}$$

是负定的（见注释5.1）。因此， $A = [C(C^{-1})^T + I]^{-1}L$是 $Y(H)$的唯一极值点。由此，OHE $H^* = A$ ，而最大可持续产量为$A^TC^{-1}(L - A)$，根据式（26）可得。□

6. 数值模拟

本节将利用欧拉–丸山方法（见 [18]），并借助 Python 进行实现，以说明我们的主要结果。本节中，我们始终选择 $r_1(t) = 6.5 + 0.1\sin(2\pi t)$、$r_2(t) = 6.6 + 0.1\sin(2\pi t)$、 $c_{11} = 4.3$、$c_{12} = 0.4$、 $c_{21} = 0.5$、 $c_{22} = 3.5$。于是， $\Delta = 14.85 > 0$成立，且假设1、3成立。

首先，我们说明白噪声对最优收获策略的影响。在初始条件为 $x_1(0) = 0.01$ 和 $x_2(0) = 0.01$ 下，通过改变参数 α_1 和 α_2，我们在图1中绘制了 $Y(H)$ 的曲线:

（i）蓝色曲线对应于 $\alpha_1 = 0.1+0.01\cos(2\pi t)$、 $\alpha_2 = 0.1+0.01\cos(2\pi t)$，此时 $\int_0^1 b_1(t)dt = 3.20 > 0$、 $\int_0^1 b_2(t)dt = 3.33 > 0$、 $\Delta_1 = 9.88 > 0$、 $\Delta_2 = 12.72 > 0$ $\Phi_1 = 2.71 > 2$、 $\Phi_2 = 2.69 > 2$，这意味着 x_1和 x_2 都具有持久性，且假设2成立。因此，由定理5.1，$H^* = (3.29,\ 3.26)^T$、 $Y^* = 4.99$。

(ii) 橙色曲线对应 $\alpha_1 = 0.7+0.01\cos(2\pi t)$、 $\alpha_2 = 0.1+0.01\cos(2\pi t)$，因此 $\int_0^1 b_1(t)dt = 3.08 > 0$, $\int_0^1 b_2(t)dt = 3.33 > 0$, $\Delta_1 = 9.46 > 0$, $\Delta_2 = 12.77 > 0$ $\Phi_1 = 2.48 > 2$, $\Phi_2 = 2.57 > 2$，这意味着 x_1和 x_2都具有持久性，且假设2成立。因此， $H^* = (3.17, 3.27)^T$,$Y^* = 4.83$。

(iii) 绿色曲线对应 $\alpha_1 = 0.1+0.01\cos(2\pi t)$、 $\alpha_2 = 1.1+0.01\cos(2\pi t)$，因此 $\int_0^1 b_1(t)dt = 3.21 > 0$, $\int_0^1 b_2(t)dt = 3.03 > 0$, $\Delta_1 = 10.02 > 0$, $\Delta_2 = 11.43 > 0$ $\Phi_1 = 2.41 > 2$, $\Phi_2 = 2.08 > 2$，这意味着 x_1和 x_2都具有持久性，且假设2成立。因此， $H^* = (3.29, 2.96)^T$,$Y^* = 4.50$。

最后，我们在图2中说明， $H^* = [C(C^{-1})^T + I]^{-1}L$ 和 $Y^* = A^TC^{-1}(L - A)$是最优收获策略。取 $\alpha_1 = 0.1 + 0.01\cos(2\pi t)$、 $\alpha_2 = 0.1 + 0.01\cos(2\pi t)$，则 $H^* = (3.29,\ 3.26)^T$, $Y^* = 4.99$。

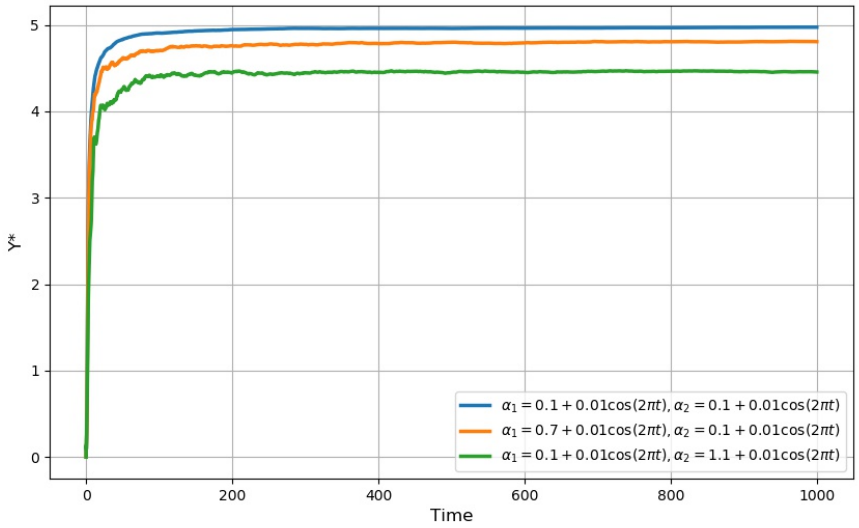

图. 1. 白噪声对 Y^* 的影响。

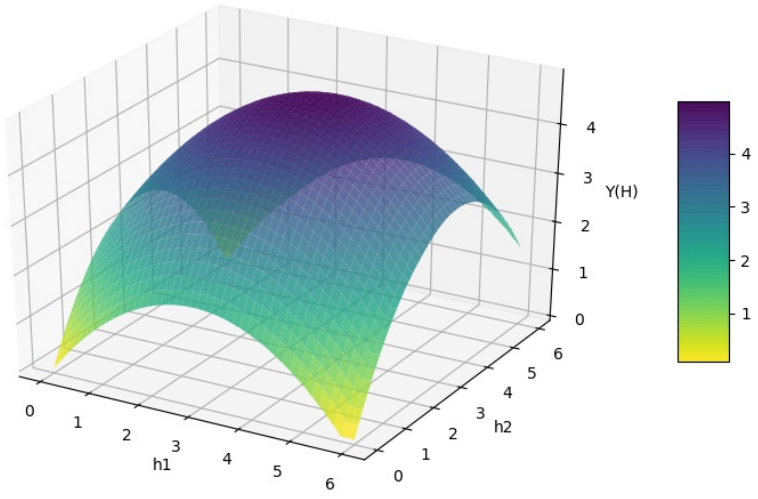

图. 2. $Y(H)$ 的最优捕捞策略随 h_1 和 h_2 的变化。

7. 结论

本文研究了具有周期系数的随机竞争Lotka-Volterra模型的最优捕捞问题。在严谨的数学框架下，我们建立了最优收获策略存在的充要条件（定理5.1），并推导出OHE和最大可持续产量的精确解析表达式。结果表明，白噪声强度与最优捕捞量之间存在明确的负相关关系（（23）—（24））。

$$\frac{d\lambda_i}{d(\alpha_j^2(t))} \leqslant 0, \quad \frac{dY^*}{d(\alpha_j^2(t))} \leqslant 0, \quad i,j=1,2.$$

这一发现具有重要的生态学意义：环境随机扰动会显著增加物种灭绝风险，导致种群数量下降，进而降低OHE和最大可持续产量。这些结果为随机环境下的生物资源管理提供了理论基础。

基于本研究，未来研究应关注种间相互作用和种内相互作用均具有周期变化系数的随机种群模型的最优捕获策略。需要指出的是，由于无法为此类模型建立时间平均持久性条件的显式表达式，本研究提出的方法可能无法直接适用，因此需要改进方法或采用其他途径。

参考文献

[1] J.R. Beddington, R.M.May, 在随机波动环境中捕捞自然种群，《科学》197 (1977) 463–465。[2] L.H.R.Alvarez, L.A.Shepp, 随机波动种群的最优捕捞，《数学生物学杂志》37 (1998) 155–177。[3] M.Liu, C. Bai, 随机捕食者-猎物模型的最优收获策略，《应用数学快报》34 (2014) 22–26。[4] M.Liu, 具有时滞的随机捕食者-猎物模型的最优收获策略，《应用数学快报》48 (2015) 102–108。

[5] H.Qiu, W.Deng, 具有*Lévy*跳跃的随机时滞竞争*Lotka-Volterra*模型的最优捕捞，《应用数学快报》317 (2018) 210–222。[6] H.Qiu, W. Deng, M.Xiang, 具有*S*型分布时滞和*Lévy*跳跃的随机竞争模型的最优捕获策略，Bound. Value Probl. 31 (2021) 1–17。[7] M.Liu, 周期系数随机种群模型的最优捕捞，J. Nonlinear Sci. 32 (2022) 1–14。[8] M. Fan, K.Wang, 周期系数单一种群的最优收获策略，Math. Biosci. 152 (1998) 165–177。[9] X.Li, X.Mao, 随机扰动下非自治*Lotka-Volterra*竞争系统的种群动力学行为，Discrete Contin. Dyn. Syst. 24 (2009) 523–545。[10] M.Liu, K. Wang, Q. Wu, 污染环境中随机竞争模型的生存分析与随机竞争排斥原理，Bull. Math. Biol. 73 (2011) 1969–2012。[11] P.Xia, X. Zheng, D. Jiang, 非自治随机互利共生系统的持久性与非持久性，Abstr. Appl. Anal. 2013 (2013) 233–242。[12] Z.Huang, 随机微分方程解的比较定理及其应用，Proc. Amer. Math. Soc. 91 (1984) 611–617。[13] X.Mao, 随机微分方程及其应用，Elsevier，Horwood，奇切斯特，2007。[14] R.Khasminskii, 微分方程的随机稳定性，Springer，柏林，2012。[15]I. Barbălat, 非线性振荡微分方程组，罗马尼亚人民共和国科学院通报 9 (1959) 779–782。[16] G.Hu, Y. Li, 马尔可夫切换随机周期微分方程的渐近行为，《应用数学与计算》264 (2015) 403–416。

[17] C. Feng，H. Zhao，随机周期过程、周期测度与遍历性，《微分方程杂志》269（2020）7382–7428。[18] G. Maruyama，连续马尔可夫过程与随机方程，《Rend. Circ. Mat. Palermo》4（1955）48–90。